

Объединенный институт ядерных исследований  
Лаборатория теоретической физики имени Н.Н.Боголюбова

На правах рукописи  
УДК 524.882

АЛЕКСЕЕВ Станислав Олегович

**Следствия теорий гравитации с  
поправками второго порядка по  
кривизне и возможности их  
экспериментальной проверки**

Специальность: *01.04.02 — теоретическая физика*

Автореферат диссертации  
на соискание ученой степени  
*доктор физико-математических наук*

Дубна 2009

Работа выполнена в отделе релятивистской астрофизики Государственного астрономического института имени П.К.Штернберга Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова

### **Научный консультант**

доктор физико-математических наук, Сажин М.В.  
профессор (ГАИШ МГУ)

### **Официальные оппоненты**

доктор физико-математических наук, Кузьмин В.А.  
член-корреспондент РАН (ИЯИ РАН)  
доктор физико-математических наук Фурсаев Д.В.  
(Университет “Дубна”)  
доктор физико-математических наук Волобуев И.П.  
(НИИЯФ МГУ)

### **Ведущая организация**

Московский инженерно-физический  
институт (Государственный университет)

Защита состоится 3 июня 2009 года в 15<sup>00</sup> часов на заседании диссертационного совета Д720.001.01 Объединенного института ядерных исследований (141980, Московская область, г. Дубна, ул. Жолио Кюри, д.6, ЛТФ ОИЯИ)

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Объединенного института ядерных исследований (141980, Московская область, г. Дубна, ул. Жолио Кюри, д.6, ОИЯИ)

Автореферат разослан “ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2009 года

Ученый секретарь диссертационного совета  
кандидат физ.-мат. наук

А.Б.Арбузов

# 1 Актуальность темы

За последние десятилетия был достигнут значительный прогресс в построении единой теории всех физических взаимодействий. Так как При помощи методов квантовой теории поля построить квантовую теорию гравитации пока не удается, рассматриваются новые концепции связи гравитации и физики высоких энергий, среди которых наиболее перспективной представляется теория струн. Развитие этой теории принято делить на этапы, разделенные первой и второй “суперструнными революциями” [1]. “Первая суперструнная революция” относится к 1984 году: был предложен механизм сокращения аномалий, позволивший установить, что суперсимметричные калибровочные теории с супергравитацией могут существовать в десятимерном пространстве-времени с калибровочными группами  $SO(32)$  или  $E_8 \times E_8$ , описывающими гетеротические струны. После компактификации в четыре измерения теория описывается низкоэнергетическим эффективным действием, обобщающим классическое действие Эйнштейна-Гильберта [2]. В дополнение к эйнштейновскому члену действие обычно включает в себя безмассовый дилатонный член, поля Янга-Милса и поправки высших порядков по кривизне. Следствием такой модификации эффективного действия для моделей гравитации является появление новых типов решений, отсутствующих в теории относительности. Эти решения могут соответствовать физическим объектам макромира, которые имеет смысл искать в наблюдениях или экспериментах.

В пертурбативном подходе, развитом на этом этапе, струнная теория предсказывает, что уравнения Эйнштейна модифицируются с помощью поправок высших порядков по кривизне в областях, где кривизна приближается к планковским значениям. В настоящее время общая форма этих поправок еще не изучена полностью, поэтому прямое суммирование ряда невозможно. При этом наиболее значимой является поправка второго порядка, являющаяся произведением члена Гаусса-Боннэ на дилатонный фактор. Такие поправки (без дилатонного члена) были вве-

дены в рассмотрение Д.Лавлоком [3] и получили название “гравитации Лавлока”

Исследованию влияния поправок на вид решений в космологии и физике черных дыр было посвящено множество исследований. Среди прочих было получено решение “черная дыра Гаусса-Боннэ”, содержащее новые типы сингулярностей и дающее ограничение снизу на минимально возможное значение массы черной дыры, отсутствующее в теории относительности (Mignemi и Stewart, 1993 [4]; Kanti и др., 1996 [5]; Алексеев и Помазанов, 1997 [6]; Maeda и др., 1997 [7]; Алексеев и Сажин, 1998 [8]). В эти же годы был получен новый класс космологических решений (Kanti и др., 1996 [9]; Easter и Maeda, 1997 [10]). Их важнейшая особенность — возможность избежать начальной космологической сингулярности для широкого спектра начальных данных. Далее, была показана устойчивость этих решений, то есть, возможно, сделан первый шаг к решению проблемы космологической сингулярности в струнной гравитации. В дальнейшем эти результаты были обобщены и уточнены (Алексеев и др., 2000 [11]).

“Вторая суперструнная революция” произошла в 1994 году. Было доказано, что все пять независимых струнных теорий связаны преобразованиями дуальности и являются частными случаями одной общей теории (М-теории), которая в низкоэнергетическом пределе дает одиннадцатимерную супергравитацию.

Одной из самых загадочных проблем современной теоретической физики является вопрос о конечной стадии хокинговского испарения черных дыр. Так как законченного описания квантовых микросостояний черной дыры пока не создано, эта проблема широко обсуждается, потому что полное испарение черной дыры может нарушать квантовую когерентность теории, что нежелательно. С другой стороны, не исключена возможность, что черная дыра испаряется не полностью, а лишь до некоторого реликтового остатка [12]. Если эти мини черные дыры существуют, они могут составить часть тёмной материи во Вселенной.

## **2 Цель исследования и постановка задачи**

Целью данной диссертации является поиск следствий моделей гравитации с поправками второго порядка по кривизне, которые существуют в обозримых пространственно-временных масштабах, изучение этих следствий на предмет возможности или невозможности их поиска в экспериментах либо наблюдениях.

Для реализации предложенной цели необходимо в квазиклассическом приближении исследовать как четырехмерные модели с поправками по кривизне, так и модели многомерной гравитации, в том числе с учетом возможной некомпактности дополнительных измерений. Полученные решения необходимо сравнить с существующими (и реализующимися в астрономии) решениями типа “чёрная дыра”, уточнив разницу их топологических и термодинамических характеристик для ответа на вопрос о возможной реализуемости объекта в природе и поиска в экспериментах и наблюдениях.

## **3 Научная новизна и практическая значимость**

Все полученные в рамках данной работы результаты являются новыми, оригинальными и достоверными, что подтверждается корректностью используемых аналитических и численных методов. На момент опубликования результаты были получены впервые в мире.

В диссертации впервые удалось получить полную версию решения “четырёхмерная черная дыра Шварцшильда-Гаусса-Боннэ”, подробно исследовать его топологическую структуру и лежащий в её основе математический базис, обнаружить даваемое данной моделью ограничение на возможную минимальную массу черной дыры (Alexeyev & Romazanov, 1997 [6], Alexeyev & Sazhin и др., 1997-2002 [11, 12]). В рамках предложенного в диссертации нового подхода (совмещение современных физических и математических методов, таких как изучение сингулярных возмущений, более точные методы интегрирования, широкое использо-

вание аппроксимаций, ... ) выявлены поляризационные свойства черной дыры Гаусса-Боннэ, показана общность типов сингулярности в космологических и чернотырных решениях. В ходе исследований было предложено отождествить полученное решение с последней стадией хокинговского испарения черных дыр с небольшим (до  $10^{15}$  г) исходным размером (время жизни которых сравнимо со временем жизни нашей Вселенной). Были выявлены отличия в картинах испарения: уточненное описание дает большие значения излучаемой энергии на последних стадиях испарения, показана невозможность экспериментального поиска первичных черных дыр по продуктам их испарения на последних стадиях.

В диссертации также исследованы сценарии испарения черных дыр в многомерных моделях гравитации с некомпактными дополнительными измерениями (Alexeuev & Barrau и др., 2000-2001, [13, 14, 15]). Показано, что в эксперименте на строящихся ускорителях, в случае обнаружения черных дыр как объекта, возможно различить типы появившихся черных дыр, измерив значение струнной константы связи.

В диссертации впервые, с помощью численных методов, получено решение для вращающейся черной дыры в многомерной гравитации с поправками второго порядка по кривизне при наличии некомпактных дополнительных измерений (Alexeuev & Barrau и др., 2006-2008 [16, 17]). Для пятимерного случая найдено аналитическое приближение и исследованы термодинамические свойства решения. Показано, что термодинамические свойства мало отличаются от стандартного вращающегося решения, то есть, различие черных дыр в эксперименте сразу после рождения не представляется возможным.

#### **4 Положения, выносимые на защиту**

1. На основе ограничения на минимальную массу черной дыры, полученного в моделях гравитации с поправкой в виде члена Гаусса-Боннэ, предложена модель реликтовых остатков (с массой  $10^{-5}$  г) первичных черных дыр. На основе анализа допустимых функций

связи предложены ограничения на размер полей-модулей (не более размера самой черной дыры).

2. Предложен новый метод изучения типов пространственно-временных сингулярностей на основе анализа нулей главного детерминанта  $D_{main} = 0$  системы неявных дифференциальных уравнений Гильберта-Эйнштейна. Структура особенностей определяется поведением уравнений вблизи сингулярной поверхности  $D_{main} = 0$  в фазовом пространстве. На основе предложенного метода в модели четырехмерной гравитации с поправками второго порядка по кривизне в виде члена Гаусса-Боннэ найден новый тип сингулярности, присутствующий как в космологических решениях, так и в решениях типа “чёрная дыра”. Будучи следствием топологической инвариантности члена Гаусса-Боннэ, при которой порядок уравнений Эйнштейна не увеличивается, данный тип сингулярности определяется новым типом нуля (“точка поворота”) главного детерминанта усложненной системы неявных дифференциальных уравнений, отсутствующим в уравнениях теории относительности.
3. На основе ограничения на минимальную массу черной дыры, полученного в моделях гравитации с поправкой в виде члена Гаусса-Боннэ, предложена оригинальная модель испарения черных дыр с модификацией закона испарения на последних стадиях. На основе закона сохранения энергии предложен механизм остановки испарения на массах  $10 - 10^3$  масс Планка, вычислены (с апробацией на простейшей модели) характерные величины энергий излучаемых частиц в точке максимума спектра испарения ( $\simeq 10^{20}$  эВ) и на стадии остановки процесса ( $\simeq 10^{-6}$  эВ). Дана теоретическая оценка (1 событие на  $10^5$  лет) частоты событий в экспериментальном поиске первичных черных дыр по продуктам их распада при условии отсутствии противоречий с моделями инфляции.
4. В модели многомерной гравитации с поправками второго порядка

по кривизне в виде члена Гаусса-Боннэ установлен закон испарения черной дыры, которая может родиться в экспериментах на ускорителях. С учетом характеристик ускорителя ЛНС показано, что, благодаря 5% различию температуры, в случае обнаружения черных дыр как объекта, возможно различить типы черных дыр по продуктам их испарения и измерить значение фундаментальной константы теории струн: струнной константы связи.

5. В модели многомерной гравитации с поправками второго порядка по кривизне в виде члена Гаусса-Боннэ получено решение типа “вращающаяся черная дыра”. Решение с одним моментом вращения получено численно для всех значений размерности пространства-времени. Для более точной оценки верхнего предела отношений температур черных дыр Керра и Керра-Гаусса-Боннэ в пятимерной модели найдено приближенное аналитическое решение. Показано, что максимальная разница в оценке температур обсуждаемых решений составляет менее 5%, то есть, различить типы черных дыр по продуктам распада сразу после рождения в эксперименте, когда необходимо учитывать вращение, не представляется возможным.

## 5 Публикации по теме диссертации

В работах с соавторами Алексееву С.О. принадлежит лидирующий вклад в постановке задач, обсуждении и интерпретации результатов. Все результаты были получены либо непосредственно Алексеевым С.О., либо под его руководством.

Диссертация основана на следующих публикациях:

1. Алексеев С.О., Сажин М.В., Хованская О.С., *Первичные черные дыры и параметры ранней Вселенной // Письма в Астрономический Журнал*, (2002), том 28, стр 163-167.
2. Алексеев С.О., Сажин М.В., Хованская О.С., *Простейшая модель*



- испарения черных дыр на последних стадиях // **Письма в Астрономический Журнал**, (2002), том 28, стр 489-494.
3. С.Алексеев, А.Попов, М.Старцева, А.Баррау, Дж.Грайн *Черные дыры Керра-Гаусса-Боннэ: точное аналитическое решение* // **Журнал экспериментальной и теоретической физики** (2008), том 133, стр 710-714.
  4. S.O. Alexeyev, M.V. Pomazanov *Black Hole Solutions with Dilatonic Hair in Higher Curvature Gravity* // **Phys. Rev. D** (1997), том 55, стр 2110-2118.
  5. S.Alexeyev, A.Barrau, G.Boudoul, O.Khovanskaya, M.Sazhin, *Black hole Relics in String Gravity: Last Stages of Hawking Evaporation* // **Class.Quant.Grav.** (2002), том 19, стр. 4431-4443.
  6. S. Alexeyev, S. Mignemi, *New Types of Naked Singularities in Gauss-Bonnet Extended String Gravity with Moduli Field* // **Class. Quant. Grav.** (2001), том 18, стр. 4165-4177.
  7. S.O. Alexeyev, A.V. Toporensky, V.O. Ustiansky, *Non-Singular Cosmological Models in String Gravity with Second Order Curvature Corrections* // **Class. Quant. Grav.** (2000), том 17, стр. 2243.
  8. A. Barrau, J. Grain, S. Alexeyev *Gauss-Bonnet black holes at the LHC: beyond the dimensionality of space* // **Phys. Lett. B**, (2004), том 584, стр.114.
  9. S. Alexeyev, A. Toporensky, V. Ustiansky, *The Nature of Singularity in Bianchi I Cosmological String Gravity Model with Second Order Curvature Corrections* // **Phys. Lett. B**, (2001), том 509, стр. 151.
  10. S.O. Alexeyev, M.V. Sazhin, M.V. Pomazanov, *Black Holes of a Minimal Size in String Gravity* // **Int. J. Mod. Phys. D** (2001), том 10, стр. 225.

11. S.O. Alexeyev, M.V. Sazhin, *Four-dimensional Black Holes in a Gauss-Bonnet Extended String Gravity* // **Gen. Relativ. Grav.** (1998), том 30, стр.1187.
12. S.Alexeyev, A.Barrau, K.Rannu, *Internal structure of a Maxwell-Gauss-Bonnet black hole* // принята к печати в **Phys. Rev. D**, препринт 0902.4810 [gr-qc].
13. S. Alexeyev, N. Popov, A. Barrau and J. Grain, *Black hole solutions in the  $N > 4$  gravity models with higher order curvature corrections and possibilities for experimental search of such objects* **Journal of Phys.: Conf. Series** (2006), том 33, стр.343
14. S.O. Alexeyev, *Black Holes in Higher Order Curvature Gravity* // глава в книге **Black Holes: Properties, Formation and Features**, (2009), NovaPublishers, NewYork.
15. S.O. Alexeyev, *Internal Structure of a Gauss-Bonnet Black Hole* // **Grav. Cosmol.** (1997), том 3, стр. 61.
16. S.O. Alexeyev, M.V. Pomazanov, *Gauss-Bonnet Black Holes in Low Energy String Theory* // **Grav. Cosmol.** (1997), том 3, стр. 191.
17. S.O. Alexeyev, O.S. Khovanskaya, *Additional Study of the Restriction to the Minimal Black Hole Mass in String Gravity* // **Grav. Cosmol.** (2000), том 6, стр. 121.
18. S.O. Alexeyev, M.V.Pomazanov, *Typical Types of Singularities in String Gravity* // **Grav. Cosmol.** (2001), том 7, стр. 130.
19. S.Alexeyev, A.Barrau, J.Grain, *Gauss-Bonnet black holes at new colliders: Beyond the dimensionality of space* // **Grav. Cosmol.** (2005), том 11, стр. 34.
20. S.O. Alexeyev and M.V. Sazhin, *Some Aspects of Four-dimensional Black Hole Solutions in Gauss-Bonnet Extended String Gravity* // **J. Astrophys. Astr.** (1999), том 20, стр. 1.

21. S.O. Alexeyev, M.V. Sazhin and M.V. Pomazanov, **Труды “19th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics”**, Paris (Франция), декабрь 1998, 10 страниц, на CD-ROM.
22. S.Alexeyev, A.Barrau, *Life after death of Black holes: evaporation near Planck Mass* // **труды конференции: <Фундаментальная физика во Франции>**, Лион, 31 мая-2 июня 2001 года.
23. S.Alexeyev, N.Попов, A.Barrau, J.Grain *New black hole solutions in the string gravity with noncompact extra dimensions and their experimental search I* // **Труды 22-го Техасского симпозиума по релятивистской астрофизике (на CD-ROM)**, Станфорд, США, 13-17 декабря 2004 года
24. S. Alexeyev, A. Barrau, J. Grain *Gauss-Bonnet black holes at the LHC: beyond the dimensionality of space* // **Труды международной конференции “Кварки-2004”** под редакцией Д. Г. Левкова, В. А. Матвеева, В. А. Рубакова, <http://quarks.inr.ac.ru/>
25. S.O.Alexeyev, N.N.Попов, T.S.Strunina, A.Barrau, J.Grain, *Black hole solutions in  $N > 4$  Gauss-Bonnet Gravity* // **Труды международной конференции “Кварки-2006”** под редакцией В.А. Матвеева, В.А.Рубакова, <http://quarks.inr.ac.ru/>
26. S.O.Alexeyev, N.N.Попов, *Black hole solutions in  $N > 4$  Gauss-Bonnet Gravity* // **Труды международной конференции “11th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity”** под редакцией H.Kleinert, R.T.Jantzen, R.Ruffini, Part A, стр. 1251, World Scientific (2008)

## 6 Апробация результатов

Результаты данной работы неоднократно докладывались на семинарах по гравитации и космологии имени А.Л.Зельманова в ГАИШ МГУ, на

семинаре теоретического отдела ФИАН, на семинаре Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ (Дубна), на семинарах Института субатомной физики и космологии Университета имени Дж.Фурье (Гренобль, Франция), Университета Кальяри (Кальяри, Италия), Университета имени Фредерика II (Неаполь, Италия), а также на международных конференциях:

1. "Dark Matter in the Universe", Roma (Italy), ноябрь 1995;
2. Ульяновская международная школа-семинар <Проблемы теоретической космологии — I>, Ульяновск, 1-10 сентября 1997 года;
3. "Discussion Meeting on Physics of Black Holes", Bangalore (India), декабрь 1997;
4. "Spinoza Meeting on Quantum Black Hole" Utrecht (Holland), июнь 1998;
5. "19th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics", Paris (France), декабрь 1998;
6. Коллоквиум по черным дырам в рамках общемосковского астрофизического семинара, март 1999 года (ГАИШ МГУ);
7. 9th European and 5th Euro-Asian Astronomical Society Conference (JENAM-2000) May 29 - June 3, 2000, Moscow, Russia;
8. MG IX MM — STUDIUM URBIS, The Ninth Marcel Grossmann Meeting on recent developments in theoretical and experimental general relativity, gravitation and relativistic field theories Рим, 2-8 июля 2000, Римский Университет "La Sapienza";
9. Ульяновская международная школа-семинар <Проблемы теоретической космологии — II>, Ульяновск, 10-21 сентября 2000 года;
10. Конференция ЦЕРН: "2nd Alpes Meeting on Fundamental Astrophysics", май 2001 года;

11. “Фундаментальная физика во Франции”, Лион, май-июнь 2001 года.
12. Международная конференция: “M-theory Cosmology”, Кембридж (Англия), август 2001 года.
13. Международная Конференция: “5th Conference of Asia and Pacific Region”, Москва, август 2001 года.
14. Международная школа-семинар “Темная материя, темная энергия и гравитационное линзирование”, Москва, 19-21 июня 2002 года.
15. Международная Конференция: “20th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics”, Florence (Italy), декабрь 2002.
16. Международная Конференция: “21th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics”, Stanford (USA), декабрь 2004.
17. Международная Конференция: “Fourth Meeting on Constrained Dynamics and Quantum Gravity”, Cala Gonone (Sardinia, Italy) September 12-16, 2005
18. Международная Конференция: “Eleventh Marcel Grossmann Meeting on General Relativity”, Berlin (Germany), July 23-29, 2006
19. Всероссийская астрономическая конференция “Космические рубежи XXI века” (ВАК-2007), 17-22 сентября 2007 года, Казань
20. Международные конференции “Кварки-2004” (Пушкинские горы), “Кварки-2006” (Репино, Санкт-Петербург), “Кварки-2008” (Сергиев Посад).

Материалы данной диссертации уже используются при чтении лекционных курсов по общей теории относительности как для студентов астрономического отделения физического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова, так и для студентов физиков и астрономов со всей России на школах “Физика космоса”, проводимых в Коуровской астрономической обсерватории Уральского государственного университета, в частности:

- С.О.Алексеев *Современные расширения общей теории относительности* // Труды 35-й международной студенческой конференции “Физика космоса”, стр. 19-30, Екатеринбург, издательство Уральского государственного университета, (2006).
- С.О.Алексеев *Общая теория относительности и ее современное развитие* // Труды 38-й международной студенческой конференции “Физика космоса”, стр. 19-34, Екатеринбург, издательство Уральского государственного университета, (2009).

## 7 Структура и объем диссертации

Диссертация подразделяется на Введение, пять Глав, Заключение, Благодарности, Приложения и Библиографию. Общий объем диссертации — 252 страницы, включая 49 рисунков и 296 ссылок.

## 8 Содержание работы

В **Главе 1** дается анализ целей и задач диссертации, приводится список опубликованных работ и апробации результатов.

В **Главе 2** дается общий обзор моделей гравитации с поправками второго порядка по кривизне как в четырехмерном, так и в многомерном виде, приведены основные (“базовые”) решения, дан краткий анализ основных моделей гравитации с некомпактными дополнительными измерениями и базовых идей по поиску черных дыр в космических и физических экспериментах.

**Глава 3** посвящена исследованию четырехмерного низкоэнергетического эффективного действия с поправками второго порядка по кривизне в форме комбинации члена Гаусса-Боннэ и вклада от скалярного поля — дилатона, поиску решений типа “чёрная дыра” и космологических метрик. Рассмотрено действие вида

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -R + 2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \lambda e^{-2\phi} S_{GB} \right],$$

где  $R$  — скалярная кривизна,  $\phi$  — дилатон,  $\lambda$  — струнная константа связи, описывающая вклад члена Гаусса-Боннэ

$$S_{GB} = R_{ijkl}R^{ijkl} - 4R_{ij}R^{ij} + R^2$$

в действие.

В координатах кривизны вида:

$$ds^2 = \Delta dt^2 - \frac{\sigma^2}{\Delta} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1)$$

где метрические функции  $\Delta$  и  $\sigma$  зависят только от радиальной координаты  $r$ , получено решение типа “невращающаяся черная дыра Гаусса-Боннэ” (см Рис. 1). Решение было получено при помощи предложенного и адаптированного нами для задач теории гравитации численного метода интегрирования по независимому параметру (описание метода приведено в Приложении к диссертации). Решение характеризуется набором независимых параметров: масса, дилатонный заряд, асимптотическое значение дилатонной функции на бесконечности. В данном решении появляется новая топологическая структура черной дыры под горизонтом событий: в случае больших (по сравнению с планковскими) значений размера горизонта решение имеет внутреннюю сингулярность на конечном радиусе  $r_s$ , присутствующую в любых параметризациях метрики. При уменьшении размера горизонта условное “расстояние” до этой сингулярности также уменьшается. В граничном случае все особые точки сливаются и внутренняя структура черной дыры перестает существовать. При дальнейшем уменьшении размера горизонта решения типа “черная дыра” нет вообще, как это показано на Рис. 3. Найденная сингулярность  $r_s$  имеет топологию  $S^2 \times R^1$ , то есть это бесконечная “труба” радиусом  $r_s$ . Похожего типа “труба” в метрике Шварцшильда при учете дополнительного условия

$$R^{abcd}R_{abcd} < \infty$$

обсуждалось ранее в работах [18]. Из этой “трубы” исходят два решения. Асимптотически плоское решение, являющееся главным, начинается в  $r_s$

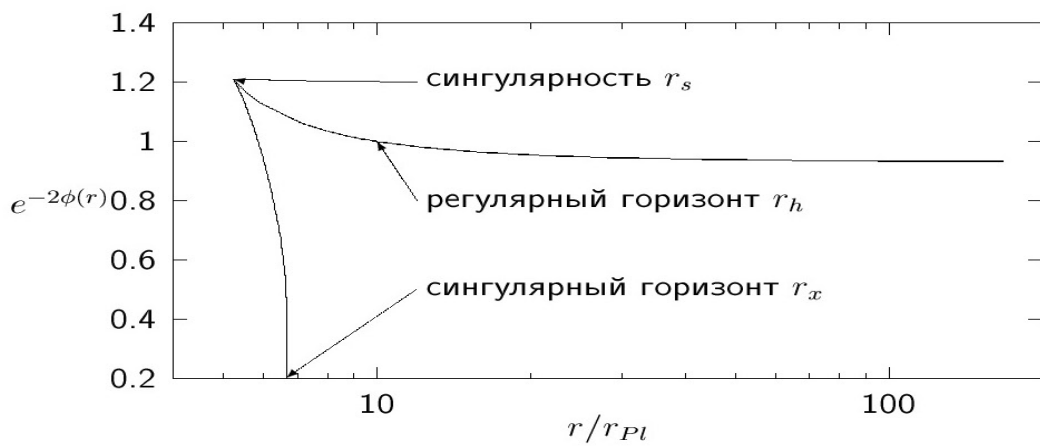
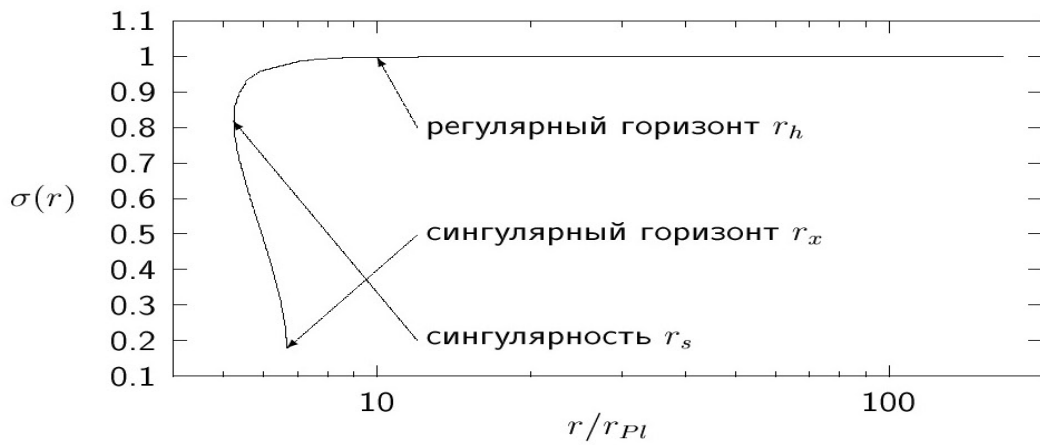
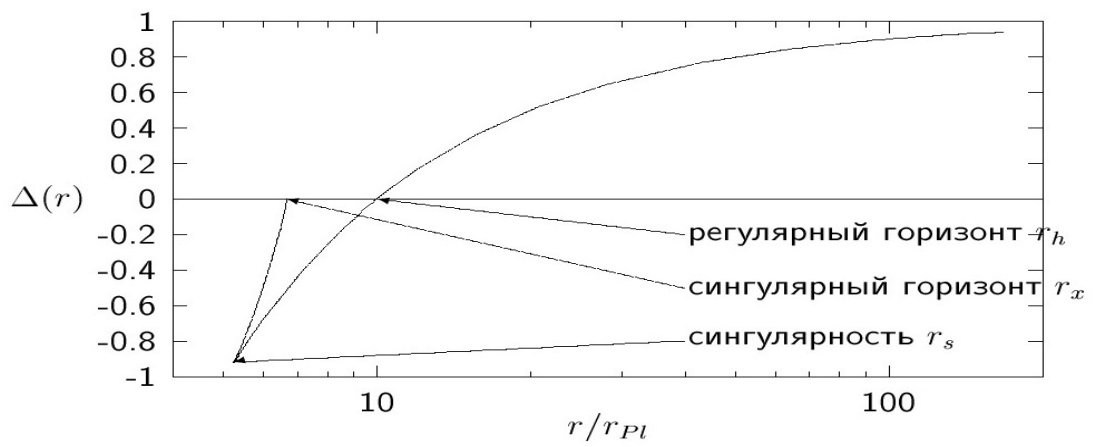


Рис. 1: Зависимость метрических функций  $\Delta$  (а),  $\sigma$  (б) и дилатонной экспоненты  $\exp(-2\phi)$  (в) от радиальной координаты  $r$  при  $r_h$  равном 10.0 единиц.



и продолжается до бесконечности без каких-либо ограничений. В случае очень больших (по сравнению с планковскими) значений  $r_h$  справедливо соотношение  $r_h \gg r_s$ , то есть значением  $r_s$  можно пренебречь вообще, и основное решение превращается в метрику Шварцшильда, что согласуется с результатами других авторов. Дополнительная ветвь решения обеспечивает существование внутреннего сингулярного горизонта  $r_x$ , на котором

$$\lim_{r \rightarrow r_x} R_{ijkl} R^{ijkl} = \frac{1}{(r - r_x)^5}.$$

Какие-либо решения могут существовать и внутри “трубы”  $r_s$ , но они неустойчивы относительно флуктуаций начальных данных, и невозможно определить, какой ветви решения — физической или нефизической — они соответствуют.

Глобальная структура решения отражена на Рис. 2.

Данный тип сингулярности был найден также в космологических решениях, причем, при полной аналогии между асимптотическими рядами метрических функций, имеющих одинаковый порядок старшей производной в окрестности этой особенности. Сами метрические функции в этой области конечны, расходятся только их старшие производные как  $1/\sqrt{t - t_s}$  при  $(t \rightarrow t_s)$ , геодезические линии и инвариант кривизны ведут себя также:

$$\lim_{t \rightarrow t_s} R_{ijkl} R^{ijkl} = \frac{1}{t - t_s}.$$

Также необходимо отметить, что данный тип сингулярности отсутствует в решениях типа Фридмана и начинает проявляться только при рассмотрении анизотропных метрик, начиная с метрик типа Бьянки I.

Здесь необходимо отметить, что упомянутые выше особенности проявляются, когда главный детерминант  $D_{main}$  системы дифференциальных уравнений Гильберта-Эйнштейна становится равным нулю. Структура особенностей определяется поведением уравнений вблизи сингулярной поверхности  $D_{main} = 0$  в фазовом пространстве. Структура  $D_{main}$  мо-

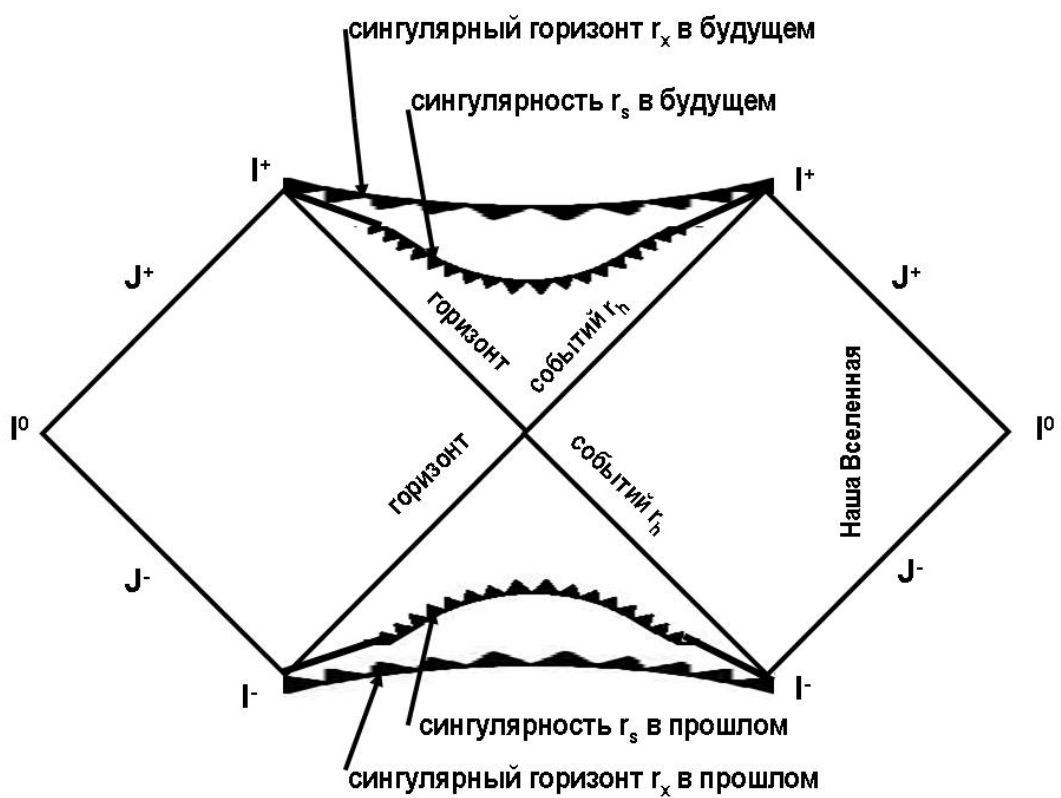


Рис. 2: Глобальная структура пространства-времени черной дыры Гаусса-Бонне

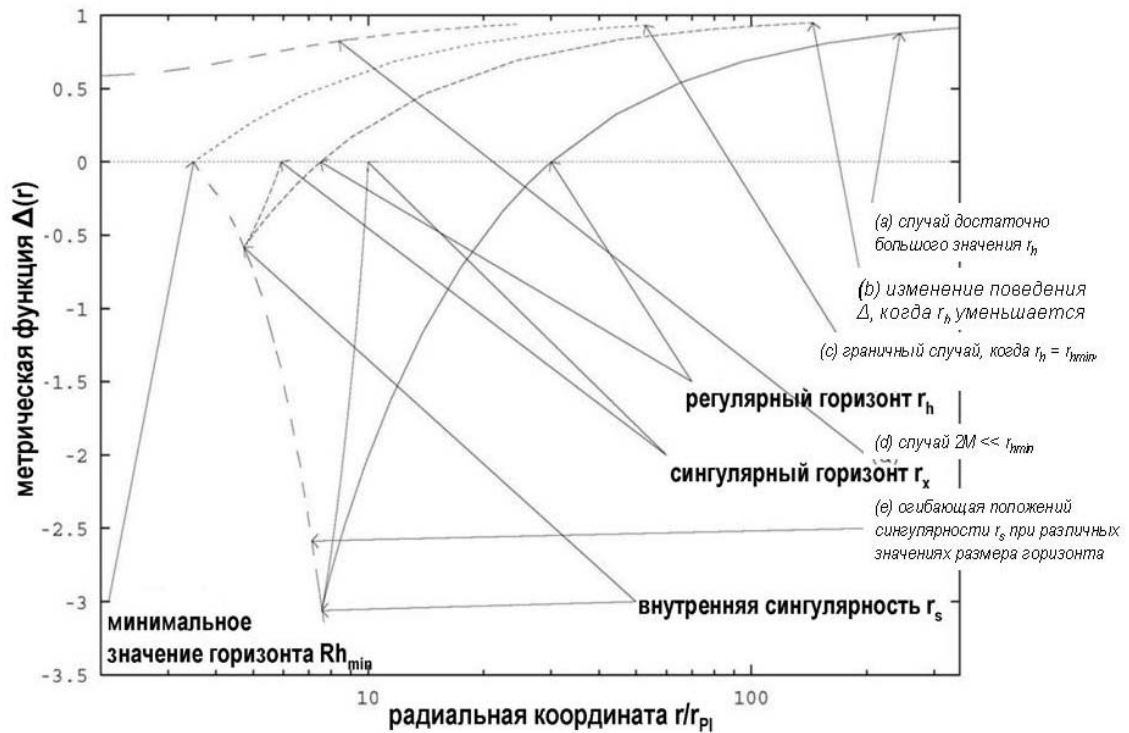


Рис. 3: Зависимость метрической функции  $\Delta$  от радиальной координаты  $r$  при различных значениях величины горизонта  $r_h$ . Вычисления велись в координатах кривизны. Кривая (a) — случай достаточно большого  $r_h$ , равного 30.0. Кривая (b) показывает изменение характера  $\Delta$  когда  $r_h$  уменьшается, становясь равным 7.5. Кривая (c) — это граничный случай, когда  $r_h = r_{hmin}$  и все особые точки, а именно  $r_h$  (регулярной горизонт),  $r_s$  (сингулярность) and  $r_x$  (внутренний сингулярной горизонт) сливаются и внутренняя структура черной дыры перестает существовать. Кривая (d) — случай  $2M \ll r_{hmin}$  ( $2M=1.5$  планковских единиц) и горизонт отсутствует вовсе. Огибающая (e) показывает положение  $r_s$  при значениях  $r_h$  начиная с  $r_{hmin}$ .

жет быть выражена как

$$D_{main} = \Delta \left( A\Delta^2 + B\delta + C \right),$$

где  $\Delta(r)$  — метрическая функция, равная компоненте  $g_{00}$  метрики, а  $A, B, C$  — коэффициенты, зависящие от радиальной координаты  $r$  и других метрических функций. В моделях с асимптотически плоскими решениями представлены три типа нулей главного детерминанта:

- (a):  $\Delta = 0, \quad C \neq 0$  (“пересечение”),
- (b):  $A\Delta^2 + B\Delta + C = 0,$   
 $\Delta \neq 0, \quad C \neq 0$  (“точка поворота”),
- (c):  $\Delta = 0, \quad C = 0$  (“полная сингулярность”),

При этом горизонту событий отвечает “пересечение”, внутренней сингулярности  $r_s$  — “точка поворота”, а сингулярному горизонту  $r_x$  — “полная сингулярность”. Данный метод оказался весьма эффективным и успешно применялся, в частности, в задачах космологии, позволив и там выявить структуру сингулярностей.

Важным результатом является найденная в диссертации аналитическая формула для минимального размера черной дыры

$$r_h^{inf} = \sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{4\sqrt{6}}{m_{Pl}^2}} \phi_h(\phi_\infty), \quad (2)$$

где дополнительный параметр модели — значение дилатона на горизонте  $\phi_h$  (зависящее от его значения на бесконечности  $\phi_\infty$ ), причем это значение всегда больше единицы, что “отодвигает” обсуждаемые значения от планковского предела и, таким образом, делает оправданным применение квазиклассического приближения. Это означает, что пертурбативный подход теории струн сам по себе обеспечивает существование нижнего ограничения на массу черной дыры, который можно интерпретировать как последнюю стадию хокинговского испарения первичных черных дыр (то есть черных дыр, которые появились во время инфляции с начальной массой не более  $10^{15}$  грамм, чтобы не испариться полностью к

настоящему моменту времени). Анализ возможных сценариев и ограничений на них приведен в последующих главах, здесь нужно отметить, что предельные (или, точнее, около предельные) черные дыры могут составлять часть темной материи во Вселенной. Поиск их по поляризации вакуума неэффективен, так как, как показано в диссертации, вакуум вблизи, действительно, сильно поляризован, но интенсивность быстро спадает, не отличаясь от Шварцшильдовских значений.

При рассмотрении дополнительных скалярных полей (модулей), которые, несомненно, присутствуют в реальности, может появляться “голая сингулярность”, если размер дополнительных измерений (при компактификации в соответствии с моделью Калуцы-Кляйна) больше размера горизонта черной дыры. Поэтому, значение минимальной массы можно увеличить как минимум на два-три порядка (чтобы избежать наличия голой сингулярности и противоречий с “гипотезой космической цензуры”). Это позволяет “отодвинуть” оценки от планковского масштаба, то есть, использование квазиклассического приближения становится оправданным.

**Глава 4** посвящена моделированию хокинговского испарения черных дыр Гаусса-Боннэ на последних стадиях. Нами был использован метод, предложенный в работах Париха и Вильчека [19], где процесс испарения представлен как туннелирование через потенциальный барьер горизонта. С учетом недостижимости последней стадии испарения (вакуумного состояния), скорость испарения достигает максимума на массах, в несколько раз больших минимальной, а потом уменьшается асимптотически до нуля, как это отражено на Рис. 4.

При этом на последних стадиях испарения достигаются температуры и количество излучаемых частиц, значительно превышающих соответствующие значения в стандартном сценарии испарения, как видно из Рис. 5. На основании этих данных и подсчета числа возможных событий в диссертации сделан вывод о бесперспективности поиска первичных черных дыр по продуктам их испарения на последних стадиях. Данная работа активно цитируется, а предложенные нами методы вошли в дру-



Рис. 4: Скорость испарения в различных моделях: черная дыра Шварцшильда без модификации (прерывистая линия), черная дыра Шварцшильда с модификацией закона испарения (“простейшая модель”), черная дыра Гаусса-Боннэ с модификацией закона испарения.

гие диссертации, учебные пособия и статьи.

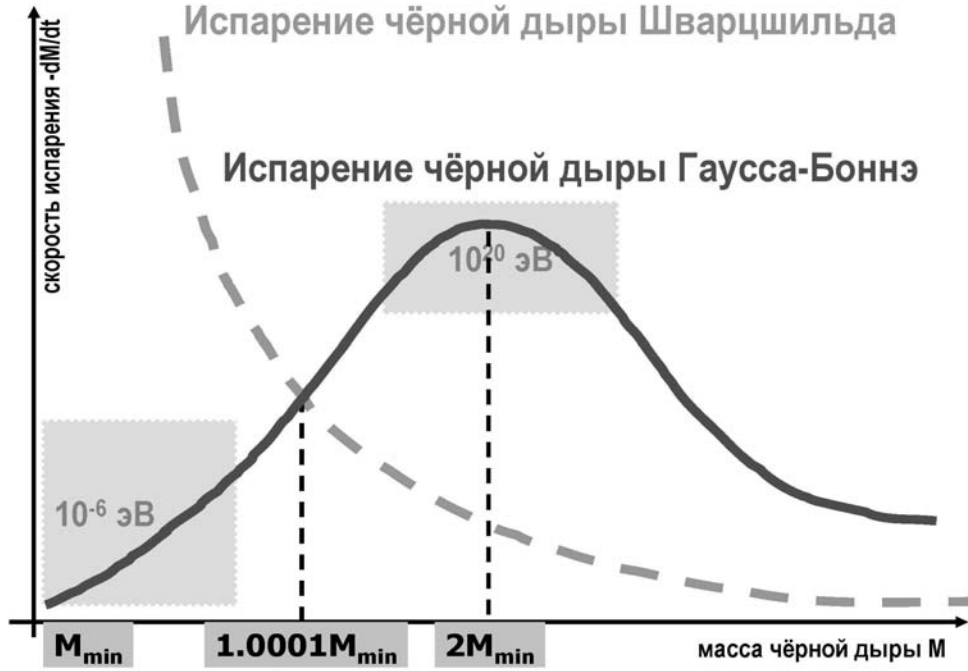


Рис. 5: Скорость испарения и характерные величины излучаемой энергии для черных дыр Шварцшильда и Гаусса-Боннэ на последних стадиях.

Из дополнительного анализа, приведенного в обсуждаемой Главе, также следует, что, если температура разогрева превосходит  $\approx 10^9$  ГэВ, то в настоящее время могут существовать реликтовые остатки первичных черных дыр. Эти объекты, о моделировании которых шла речь ранее, являются одними из кандидатов на роль темной материи во Вселенной.

**Глава 5** посвящена проблеме поиска черных дыр в экспериментах на ускорителях. Рассмотрено многомерное решение Шварцшильда-Гаусса-Боннэ, имеющее вид:

$$e^{2\nu} = e^{-2\alpha} = 1 + \frac{r^2}{2\lambda(D-3)(D-4)} \times \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{32\pi^{\frac{3-D}{2}} G\lambda(D-3)(D-4)M\Gamma(\frac{D-1}{2})}{(D-2)r^{D-1}}} \right),$$

а также процесс испарения черной дыры в данной модели. На основании детального анализа форм-факторов показано, что различие температур черных дыр Шварцшильда и Шварцшильда-Гаусса-Боннэ составля-

ет  $\simeq 5\%$ . То есть, если значение фундаментальной Планковской энергии, действительно, лежит в диапазоне 1 ТэВ благодаря наличию некомпактных дополнительных измерений, из наших результатов следует, что при анализе экспериментальных данных следующих поколений ускорителей можно будет не только распознать тип и число дополнительных измерений (в случае их наличия), но и получить значение константы связи поправок высших порядков по кривизне, как показано на Рис. 6. Это будет ответом на вопрос, реализуется ли в природе ряд по кривизне с членом Гаусса-Боннэ в гравитационном действии, что даст возможность сделать следующий шаг к пониманию природы квантовой гравитации. Интересно заметить, что это было бы очень красивым примером взаимодействия (и взаимопроникновения) астрофизики и физики высоких энергий в понимании физических процессов, протекающих на планковских масштабах.

Фундаментальная космологическая постоянная также может быть добавлена в действие. С теоретической точки зрения, это оправдано огромным интересом к пространству анти-де-Ситтера (и, с недавних пор, де-Ситтера) из-за соответствия  $AdS/CFT$  (или  $dS/CFT$ ). С экспериментальной точки зрения это является соотношением между многомерной и четырехмерной константами, которое было бы интересно измерить независимо в космологии и в физике высоких энергий.

**Глава 6** посвящена решению Керра-Гаусса-Боннэ (то есть решению типа черная дыра в многомерной гравитации с поправками второго порядка по кривизне, имеющему момент вращения). В “вырожденной” модели (то есть модели с одним моментом вращения) решение найдено для всех значений размерности пространства-времени (случай  $D = 6$  как для модели с поправками по кривизне, так и без поправок приведен на Рис. 7).

Для пятимерного случая в параметризации Керра-Шильда найдено аналитическое приближение (точное решение было найдено только спу-



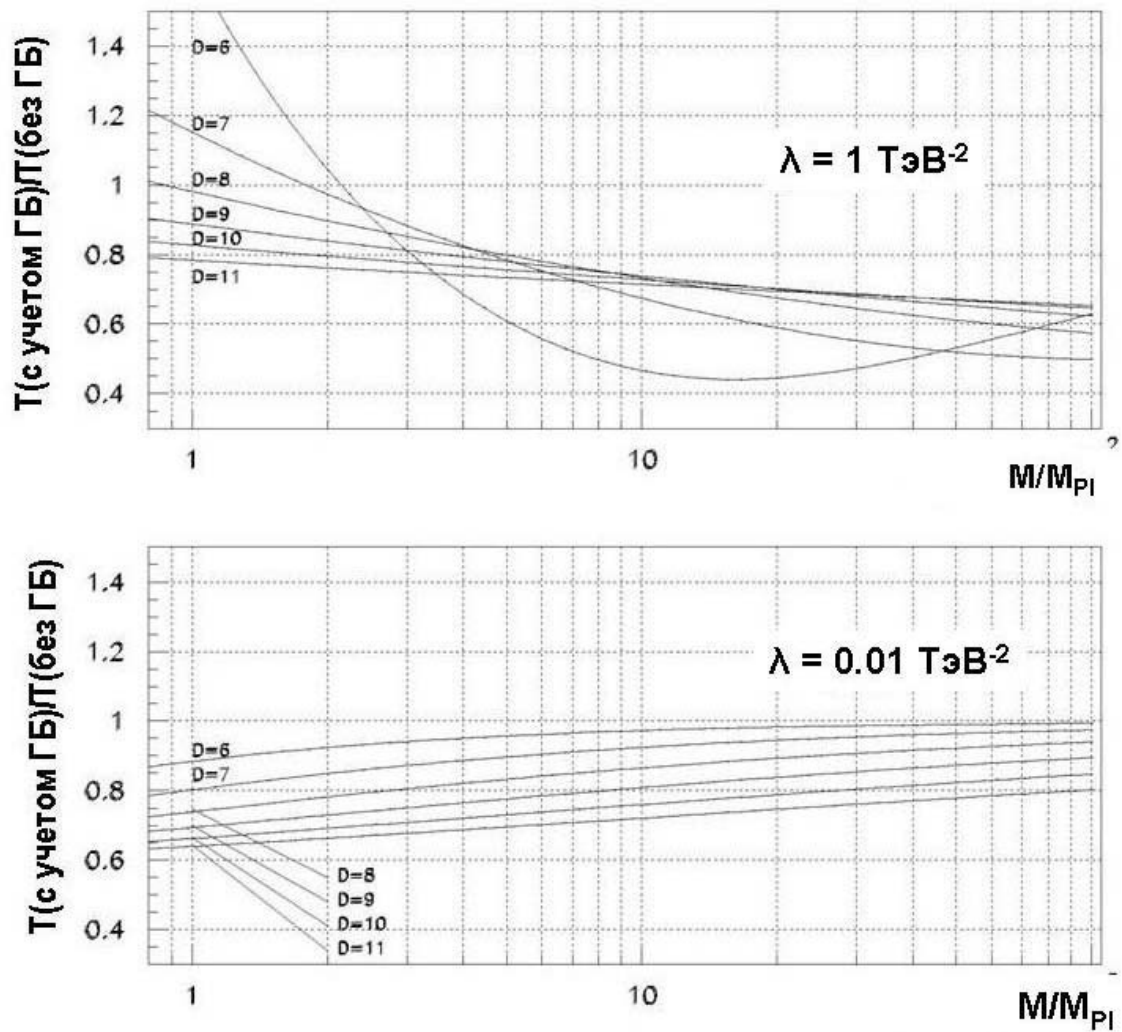


Рис. 6: Отношение температур черных дыр Гаусса-Боннэ и Шварцшильда для  $D = 6, 7, 8, 9, 10, 11$  (снизу — район меньших масс) как функция массы при  $\lambda = 1 \text{ T}_{\text{Pl}}^{-2}$  (сверху) и  $\lambda = 0.01 \text{ T}_{\text{Pl}}^{-2}$  (снизу).

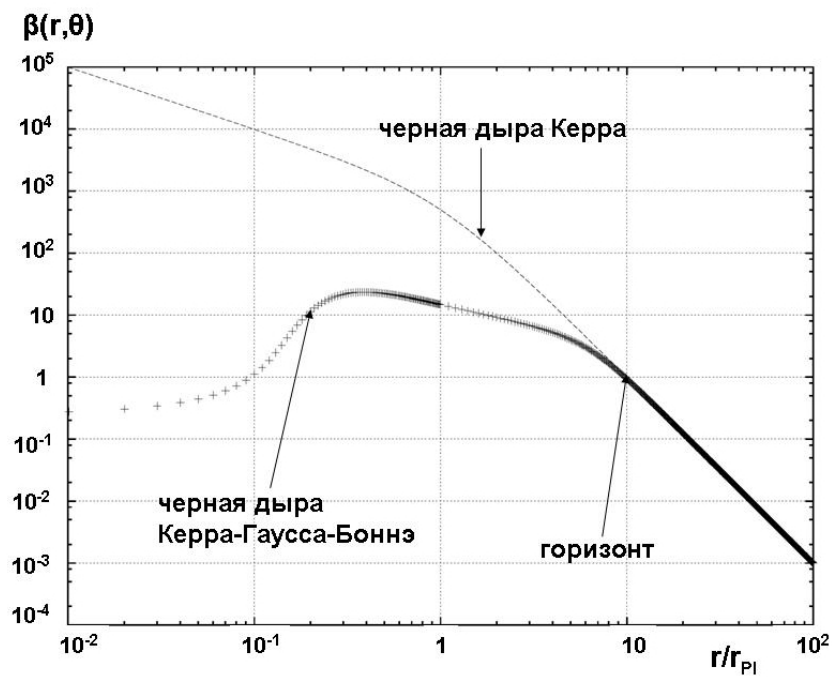


Рис. 7: Зависимость функции  $\beta(r, \theta)$  от радиальной координаты  $r$  для черных дыр Керра (струнная константа связи  $\alpha = 0$ ) и Керра-Гаусса-Боннэ (струнная константа связи  $\alpha = 1$ ), в случае шести пространственно-временных измерений и при нулевом значении космологической постоянной.

стя год [20]), имеющее вид:

$$\beta = \frac{\rho^2 - \sqrt{\rho^4 - 4\alpha M - \frac{2}{3}\alpha\Lambda r^2(\rho^2 - r^2)}}{2\alpha},$$

где

$$\rho = r^2 + a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta,$$

$a$  и  $b$  — моменты вращения черной дыры,  $M$  — ее масса,  $\Lambda$  — космологическая постоянная,  $\alpha$  — струнная константа связи, а  $\beta = \beta(r, \theta)$  — метрическая функция в координатах:

$$\begin{aligned} ds^2 = & dt^2 - dr^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi_1^2 \\ & - (r^2 + b^2) \cos^2 \theta d\phi_2^2 - \rho^2 d\theta^2 \\ & - 2dr \left( a \sin^2 \theta d\phi_1 + b \cos^2 \theta d\phi_2 \right) \\ & - \beta \left( dt - dr - a \sin^2 \theta d\phi_1 - b \cos^2 \theta d\phi_2 \right)^2. \end{aligned}$$

В данной Главе показано, что полученное решение “вращающаяся черная дыра Керра-Гаусса-Боннэ” мало отличается от соответствующего решения Керра. Нами численно получено “вырожденное” решение (содержащее только один момент вращения) для всех значений пространственно-временных измерений. Так как при увеличении числа пространственно-временных измерений отличие обсуждаемых типов черных дыр уменьшается (как и в невращающемся случае, обсуждаемом в предыдущей Главе), нами, для оценки разницы температур, было найдено аналитическое приближение для пятимерного случая, когда отличие обсуждаемых решений максимально. Оказалось, что для больших масс отличия в температуре у этих метрик почти незаметны (что и следовало ожидать), а при уменьшении размеров черной дыры различие, конечно, увеличивается, в максимуме не превышая примерно 5% (сравнительные графики поведения температуры для обоих типов решений приведены на Рис. 8). Так как пятимерный случай дает максимальную разницу между черными дырами Керра и Керра-Гаусса-Боннэ, реальное отношение температур будет еще меньше, то есть, на стадии, когда еще черная дыра опи-

саваается метрикой типа Керровской, различить черные дыры в эксперименте не представляется возможным. Однако, так как черная дыра при испарении очень быстро теряет момент и вскоре может рассматриваться как невращающаяся, результаты предыдущей Главы относительно возможности различия этих типов черных дыр становятся актуальными.

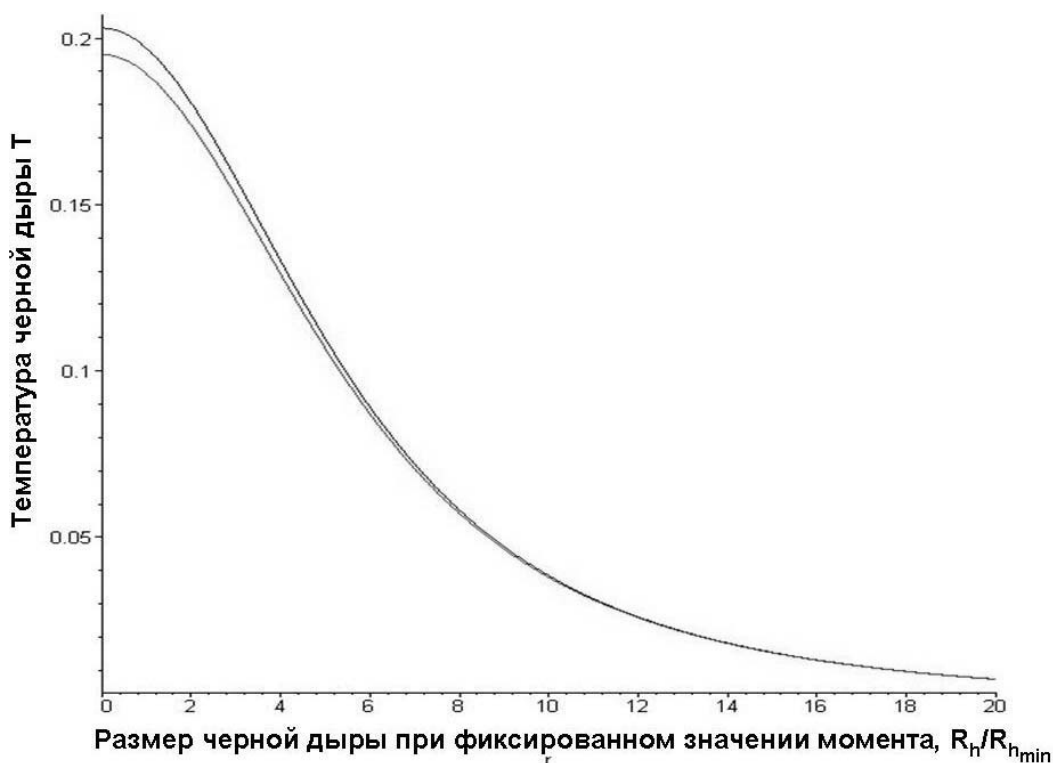


Рис. 8: Зависимость температуры  $T$  черной дыры (ось ординат, относительные величины) от размера горизонта черной дыры  $r = r_+$  (ось абсцисс, относительные величины) для чисто Керровского случая (нижний график,  $\lambda = 0$ ) и случая Керра-Гаусса-Боннэ (верхняя кривая,  $\lambda = 1$ ).

В **Заключении** сформулированы основные выводы диссертации (Положения, выносимые на защиту), а также Благодарности.

В **Приложениях** приведено подробное описание использованного нами метода численного интегрирования по независимому параметру, приведен вид мнимой части эффективного действия из Главы 4, представлены значения коэффициентов в метрике и ее асимптотических разложениях вблизи горизонта из Главы 6.

## Список литературы

- [1] Schwarz J.H., Seiberg N. *String Theory, Supersymmetry, Unification, and All That* // **Rev.Mod.Phys.** том 71, стр. S112-S120, 1999.
- [2] Callan C.G., Friedan D., Martinec E.J., Perry M.J. *Strings in background field* // **Nucl.Phys. B** (1985), том 262, стр. 593-609.
- [3] Lovelock D. *The Einstein Tensor and its Generalizations* // **J. of Math. Phys.**, (1971) том 12, стр.498.
- [4] S.Mignemi, N.R.Stewart, *Charged black holes in effective string theory* // **Phys.Rev. D** (1993), том 47, стр. 5259;
- [5] P.Kanti, N.E.Mavromatos, J.Rizos, K.Tamvakis and E.Winstanley *Dilatonic Black Holes in Higher Curvature Gravity*, // **Phys.Rev.D** (1996), том 54, стр 5049-5058;
- [6] S.O. Alexeyev and M.V. Pomazanov, **Phys. Rev. D** (1997), том 55, стр. 2110.
- [7] T. Torii, H. Yajima and K. Maeda, *Dilatonic black holes with Gauss-Bonnet term* // **Phys. Rev. D** (1997), том 55, стр. 739.
- [8] S.O. Alexeyev and M.V. Sazhin, **Gen. Relativ. Grav.** (1998), том 8, стр. 1187.
- [9] P.Kanti, J.Rizos and K.Tamvakis, *Singularity-free cosmological solutions in quadratic gravity* // **Phys. Rev. D** (1999), том 59, стр 083512.
- [10] R. Easter and K. Maeda, *One-loop superstring cosmology and the non-singular universe* // **Phys. Rev. D** (1996), том 54, стр 7252.
- [11] S.O. Alexeyev, O.S.Khovanskaya, **Grav.Cosmol.** (2000), том 6, стр 14-18.
- [12] S.O. Alexeyev, M.V. Sazhin and M.V.Pomazanov, **Int. J. Mod. Phys. D** (2001), том 10, стр. 225.

- [13] Алексеев С.О., Сажин М.В., Хованская О.С., **Письма в Астрономический Журнал**, (2002), том 28, стр 489-494.
- [14] S.Alexeyev, A.Barrau, G.Boudoul, O.Khovanskaya, M.Sazhin, **Class.Quant.Grav.** (2002), том 19, стр. 4431-4443.
- [15] A. Barrau, J. Grain, S. Alexeyev **Phys. Lett. B**, том 584, стр.114 (2004).
- [16] S. Alexeyev, N. Popov, A. Barrau and J. Grain, **Journal of Phys.: Conf. Series** (2006), том 33, стр.343
- [17] С.Алексеев, А.Попов, М.Старцева, А.Баррау, Дж.Грайн **ЖЭТФ** (2008), том 133, стр 710-714.
- [18] V.P.Frolov, M.A.Markov and V.F.Mukhanov, *Through a Black Hole Into a New Universe?* // **Phys.Lett. B**, (1989), том 216, стр. 272.
- [19] M.K.Parikh, F.Wilczek, *Hawking Radiation As Tunneling* // **Phys. Rev. Lett.** (2000), том 85, стр 5042.
- [20] A.Anabalón, N.Deruella, Y.Morisawa, J.Oliva, M.Sasaki, D.Tempo, R.Trancoso, *Kerr-Schild ansatz in Einstein-Gauss-Bonnet gravity: An exact vacuum solution in five dimensions* // AEI-2008-091, YITP-08-94, Препринт: arXiv:0812.3194 [hep-th]