

На правах рукописи

Бакулев Александр Петрович

АДРОННЫЕ НАБЛЮДАЕМЫЕ В КХД:  
ДРОБНО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ  
И НЕЛОКАЛЬНЫЕ КОНДЕНСАТЫ

01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Дубна — 2009

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ .

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
Катаев А. Л.

доктор физико-математических наук,  
профессор  
Симонов Ю. А.

доктор физико-математических наук,  
профессор  
Фаустов Р. Н.

Ведущая организация: Научно-исследовательский институт ядерной  
физики МГУ, Москва

Защита состоится “ \_\_\_\_ ” декабря 2009 в \_\_\_\_ ч. \_\_\_\_ мин. на заседании  
Диссертационного совета Д 720.001.01 при ОБЪЕДИНЕННОМ ИНСТИТУ-  
ТЕ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ по адресу: 141980, г. Дубна, Лаборатория  
теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, ОИЯИ, ул. Жолио Кюри, 6.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЛТФ ОИЯИ.

Отзывы на автореферат, заверенные гербовой печатью организации, прось-  
ба направлять по указанному адресу в двух экземплярах не позднее, чем за  
две недели до защиты.

Автореферат разослан “ \_\_\_\_ ” ноября 2009 г.

Учёный секретарь Диссертационного совета  
кандидат физико-математических наук

Арбузов А. Б.

# 1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

## 1.1. Актуальность темы

Квантовая хромодинамика (КХД) описывает сильные взаимодействия элементарных частиц. С помощью методов теории возмущений получены многочисленные подтверждения того, что КХД правильно описывает сильные взаимодействия в области больших передач импульса  $Q^2 \gg 1 \text{ ГэВ}^2$  [1, 2]. Однако при малых  $Q^2 \lesssim 1 \text{ ГэВ}^2$  бегущая константа связи  $\alpha_s(Q^2)$  растет, что делает теорию возмущений неприменимой. В такой ситуации используется два подхода: в первом строятся различные ИК устойчивые (т. е. несингулярные) модели поведения  $\alpha_s(Q^2)$  при малых  $Q^2$ , учитывающие тем не менее ренормгрупповую асимптотику при больших  $Q^2$  (или малых  $\alpha_s$ ). Во втором подходе на основе дисперсионного представления для корреляторов  $\Pi(Q^2)$ , связанных с интересующими нас амплитудами или формфакторами, и их операторного разложения по обратным степеням  $Q^2$  строятся правила сумм (ПС) КХД [3], позволяющие получить информацию о поведении интересующих нас амплитуд или формфакторов в области достаточно низких значений  $Q^2 \simeq 1 \text{ ГэВ}^2$ .

Среди используемых ИК устойчивых моделей для эффективного заряда КХД особое положение занимает аналитическая модель Ширкова–Соловцова [4], восходящая своими корнями к работе [5], где была построена аналитическая модель эффективного заряда в КЭД, и к работам [6, 7], в которых были построены несингулярные эффективные заряды КХД в временноподобной области. Этот подход, называемый Аналитической Теорией Возмущений (АТВ), основан на совместном использовании ренормгруппы (РГ) и дисперсионного представления типа Челлена–Лемана [8]. Это дает возможность определить эффективный заряд также и в временноподобной области ( $s > 0$ ). При этом степенные ряды  $\sum_n d_n \alpha_s^n$  стандартной теории

возмущений переходят в нестепенные ряды:

$$\{\mathfrak{A}_n\} \xleftarrow{\text{TL}} \{\alpha_s^n\} \xrightarrow{\text{SL}} \{\mathcal{A}_n\}.$$

В подходе отсутствуют подгоночные параметры и он хорошо согласуется с низкоэнергетическими моделями [9] адронного спектра.

Однако применение АТВ сопряжено с проблемами:

1. Метод улучшения пертурбативного описания по РГ не может быть полностью включен в АТВ, поскольку РГ-улучшение приводит к дробным степеням константы связи,  $\alpha_s^\nu[L]^1$ , где  $L = \ln(Q^2/\Lambda^2)$ , а  $\Lambda$  есть масштабный параметр КХД. То есть требуется обобщение АТВ на случай произвольных степеней  $\alpha_s^\nu[L]$  и, вообще говоря, на случай любых аналитических функций  $f(\alpha_s[L])$ , возникающих при суммировании рядов теории возмущений.
2. Для вычисления жестких процессов с адронами в КХД обычно применяется схема факторизации вкладов больших и малых расстояний. При этом в жесткой амплитуде в высших порядках по эффективно-му заряду появляются дополнительные вклады в виде произведения степеней логарифмов  $\ln(Q^2/\mu_F^2)$  на степень константы связи, т. е. возникают комбинации типа  $\alpha_s^\nu[L] \cdot L^m$ .

Таким образом, для применения АТВ в подобных задачах необходимо построить ее обобщение, которое определит правила работы с указанными объектами.

В факторизационном подходе наблюдаемые сечения или формфакторы представляются в виде свертки жестких КХД-амплитуд (с характерными импульсами  $p^2 \geq \mu_F^2$ ) с универсальными партонными функциями (или амплитудами) распределения, отвечающими характерным импульсам  $p^2 \leq \mu_F^2$  и параметризующими всю информацию о матричных элементах кварковых

---

<sup>1</sup>Когда мы говорим об эффективных зарядах как функциях не  $Q^2$  или  $s$ , а логарифмов  $L = \ln(Q^2/\Lambda^2)$  или  $L_s = \ln(s/\Lambda^2)$ , мы используем те же обозначения зарядов, но аргумент ставим не в круглых скобках, а в квадратных, т. е. пишем вместо  $\alpha_s^\nu(Q^2)$ ,  $\mathcal{A}_\nu(Q^2)$  и  $\mathfrak{A}_\nu(Q^2)$  следующие выражения:  $\alpha_s^\nu[L]$ ,  $\mathcal{A}_\nu[L]$  и  $\mathfrak{A}_\nu[L_s]$ .

токов по адронным состояниям. Применимость факторизационного подхода в эксклюзивных процессах обычно ограничена областью достаточно больших значений  $Q^2$ . Так в задаче о формфакторе (ФФ) пиона имеющиеся оценки [10, 11, 12, 13] показывают, что факторизованный вклад в ФФ пиона доминирует при  $Q^2 \gtrsim 30 \text{ ГэВ}^2$ . Поэтому для описания ФФ пиона в области умеренных значений передач импульса  $Q^2 = 1 - 10 \text{ ГэВ}^2$  необходимо применять непertурбативные методы, а также научиться согласовывать непertурбативные результаты с результатами, получаемыми в факторизационном подходе. Одним из мощных непertурбативных методов расчета ФФ пиона оказался метод правил сумм КХД [10, 14]: с его помощью было получено успешное описание экспериментальных данных в области  $Q^2 \leq 3 \text{ ГэВ}^2$ , но при этом была выявлена неприменимость метода для области промежуточных  $Q^2 = 3 - 10 \text{ ГэВ}^2$ , связанная с появлением растущих с  $Q^2$  вкладов в операторном разложении трехточечного  $AAV$ -коррелятора. Аналогичная проблема встречается при анализе амплитуды распределения (АР) пиона методом ПС КХД [15], ее удалось преодолеть с помощью введения в формализм ПС КХД концепции нелокальных вакуумных конденсатов (НВК) [16, 17].

Диссертация посвящена развитию обоих направлений в квантовой хромодинамике с помощью построения обобщения АТВ на дробные степени константы связи — Дробно-Аналитической Теории Возмущений (ДАТВ) — и расширения подхода нелокальных вакуумных конденсатов на правила сумм для формфакторов.

## 1.2. Основные цели (и задачи) исследования

Цель работы состояла в том, чтобы в рамках аналитического подхода к теории возмущений КХД [4] построить формализм ДАТВ, позволяющий применять ренормгрупповое улучшение обычных пертурбативных рядов с учетом порогов тяжелых кварков (глобальная ДАТВ), а также использовать его в подходе КХД-факторизации [18]. Кроме того, была поставлена

задача обобщить на случай (простой и глобальной) ДАТВ и глобальной АТВ имеющиеся однопетлевые формулы суммирования нестепенных рядов АТВ. Для улучшения описания ФФ пиона необходимо построить вариант правил сумм КХД, учитывающий нелокальность вакуумных конденсатов. Это, в свою очередь, позволит оценить второй нелидирующий вклад в ФФ пиона с помощью ДАТВ.

Построенный формализм затем применяется в актуальных для современной физики адронов задачах, а именно:

- определяется важность учета порогов тяжелых кварков ДАТВ в задаче об оценке значения ширины распада хиггсовского бозона в кварк-антикварковую пару  $\bar{b}b$ ;
- определяется важность учета высших пертурбативных поправок в той же задаче о ширине распада  $H^0 \rightarrow \bar{b}b$ ;
- исследуется зависимость результатов расчета факторизованной части пионного ФФ от выбора схемы и масштаба перенормировки ( $\mu_R^2$ ), а также масштаба факторизации ( $\mu_F^2$ );
- строятся правила сумм КХД с нелокальными конденсатами для ФФ пиона, на их основе для двух моделей нелокальности вакуума КХД накладываются ограничения на поведение ФФ пиона в области передач импульса  $Q^2 = 1 - 10 \text{ ГэВ}^2$ ;
- с использованием ДАТВ оценивается  $O(\alpha_s^2)$ -вклад в ФФ пиона.

### 1.3. Научная новизна и практическая ценность диссертации

Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. В частности, построен новый аппарат ДАТВ, позволяющий применять в рамках АТВ ренормгрупповые факторы улучшения, а также учитывать факторизационные и ренормгрупповые логарифмы в КХД-амплитудах. Получена новая формула суммирования нестепенных рядов в глобальной АТВ и в обеих версиях ДАТВ, простой и глобальной. В задаче о распаде хиггсовского бозона в кварк-антикварковую пару  $\bar{b}b$  построена модель производящей функции для коэффициентов стандартной теории возмущений. Получен новый результат о практической независимости результатов расчета факторизован-

ной части пионного формфактора от выбора схемы и масштаба перенормировки и от выбора масштаба факторизации в глобальной ДАТВ. Построены новые правила сумм КХД для ФФ пиона. Они позволили получить новое выражение для эффективного порога приближения локальной дуальности как функции  $Q^2$ . С помощью этого выражения впервые произведена оценка полного формфактора с учетом трехпетлевых вкладов порядка  $O(\alpha_s^2)$  или  $O(\mathcal{A}_2)$  в ДАТВ.

Практическая ценность диссертации состоит в том, что представлены улучшения как пертурбативной части операторного разложения, так и его непертурбативной части, что важно для расчетов адронных КХД-амплитуд. Дальнейшие применения развитого подхода для совместного анализа данных глубоко неупругого рассеяния (в евклидовой области импульсов) и данных по  $e^+e^-$ -аннигиляции и распадам  $\tau$ -лептонов и бозонов Хиггса (в минковской области импульсов) представляет практический интерес для специалистов, работающих в Объединенном институте ядерных исследований (ОИЯИ, г. Дубна), Институте ядерных исследований РАН (ИЯИ РАН, г. Москва), Институте теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова (ИТЭФ, г. Москва), Физическом институте Российской академии наук им. П. Н. Лебедева (ФИАН, г. Москва), Петербургском институте ядерной физики им. Б. П. Константинова (ПИЯФ, г. С.-Петербург), Институте физики высоких энергий (ИФВЭ, г. Протвино), Институте ядерной физики им. Г. И. Будкера (ИЯФ СОРАН, г. Новосибирск) и других институтах и лабораториях.

#### **1.4. Апробация диссертации и публикации**

Результаты работы опубликованы в двенадцати статьях [11, 12, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28] в журналах, входящих в список ВАК, а также в одиннадцати публикациях [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39] в других журналах и трудах конференций. Они доложены на следующих симпозиумах и конференциях в России:

1. 13-й Международный Семинар “Кварки’2004”, г. Пушкиногорье, Россия, 24–30 мая, 2004 г.
2. Международная Боголюбовская конференция, г. Дубна, Россия, 2–6 сент., 2004 г.
3. Международная Гельмгольцевская Школа “Расчеты для современных и будущих коллайдеров“, г. Дубна, Россия, 22–30 июля 2007 г.
4. Международный Семинар по Современным проблемам физики элементарных частиц, посвященный памяти И. Л. Соловцова, г. Дубна, Россия, 17–18 янв. 2008 г.
5. 15-й Международный Семинар по Физике высоких энергий “Кварки’2008”, г. Сергиев Посад, Россия, 23–29 мая 2008 г.
6. Международное Рабочее совещание “Структура адронов и КХД” (HSQCD’2008), г. Гатчина, Россия, 30 июня–4 июля 2008 г.
7. Международная конференция “Ренормгруппа и связанные с ней проблемы”, г. Дубна, Россия, 1–6 сент. 2008 г.
8. Международное совместное Рабочее совещание Тайвань–Дубна “Передовые рубежи ядерной физики”, г. Дубна, Россия, 28–30 мая 2009 г.
9. Международная Гельмгольцевская Школа “Расчеты для современных и будущих коллайдеров“, г. Дубна, Россия, 10–20 июля 2009 г.
10. 14-я Международная Ломоносовская конференция, г. Москва, Россия, 19–25 авг. 2009 г.
11. Международная Боголюбовская конференция, г. Дубна, Россия, 21–27 авг. 2009 г.

и за рубежом:

1. The XXXVIth Rencontres de Moriond “QCD and High Energy Hadronic Interactions”, Les Arcs, Savoie, France, March 17–24, 2001.
2. The 6th International Conference on Quark Confinement and the Hadron Spectrum, Villasimius, Sardinia, Italy, Sept. 21–25, 2004.
3. The 46th Cracow School of Theoretical Physics: Zakopane, Poland, May 27–June 6, 2006.



4. The International Conference on New Trends in High-Energy Physics, Yalta (Crimea), Sept. 16–23, 2006.
5. The 9th International Workshop on Meson Production, Properties and Interaction, Krakow, Poland, June 9–13, 2006.
6. The International Workshop “Nonlinear Phenomena in Complex Systems”, Minsk, Belarus, May 22–25, 2007.
7. The International Conference “Hadron Structure’07”, Modra-Harmónia, Slovakia, Sept. 2–7, 2007.
8. The International Conference on New Trends in High-Energy Physics, Yalta (Crimea), Sept. 15–22, 2007.
9. The International Meeting “Excited QCD”, Zakopane (Poland), Feb. 8–14, 2009.
10. The International Conference “Recent Advances in Perturbative QCD and Hadronic Physics”, Trento, Italy, July 20–25, 2009.
11. The International Conference “Hadron Structure’09”, Tatranská Štrba, Slovakia, Aug. 29–Sept. 3, 2009.

### **1.5. Личный вклад автора**

Основные положения и выводы диссертации являются результатом самостоятельных исследований автора. В работах, выполненных в соавторстве, автору принадлежат постановка и формализация задачи, выполненные аналитические расчеты и их численная реализация на компьютере с помощью пакета символьных расчетов Mathematica.

### **1.6. Объем и структура диссертации**

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и девяти приложений, включает 40 рисунков и 5 таблиц, содержит список цитированной литературы из 202 наименований.

### 1.7. На защиту выдвигаются следующие результаты:

- ① Построена глобальная ДАТВ, позволяющая применять ренормгрупповые методы и факторизационные формулы КХД ТВ в аналитическом КХД-подходе с учетом порогов тяжелых кварков.
- ② Построена формула суммирования нестепенных рядов глобальной ДАТВ.
- ③ Произведен расчет ширины распада бозона Хиггса  $H^0 \rightarrow \bar{b}b$  в глобальной ДАТВ. С помощью формулы суммирования ДАТВ произведена оценка ошибок предсказаний на уровне 3% в случае учета  $O(\alpha_s^3)$ -вклада (что в АТВ отвечает вкладу порядка  $O(\mathcal{A}_3)$ ). Учет старших вкладов при этом представляется преждевременным, поскольку основной вклад в неопределенность дается ошибкой определения полюсной массы.
- ④ Для факторизованной части ФФ пиона показано, что в глобальной ДАТВ происходит резкое уменьшение зависимости результатов от выбора схемы и масштаба перенормировки  $\mu_R^2$  и от выбора масштаба факторизации  $\mu_F^2$ , так что проблема выбора масштаба и схемы перенормировки практически исчезает. При этом автоматически решается проблема учета порогов тяжелых кварков.
- ⑤ Построено правило сумм КХД для электромагнитного формфактора пиона, учитывающее нелокальную структуру вакуумных конденсатов, и на его основе получены предсказания для ФФ пиона  $F_\pi(Q^2)$  в евклидовой области передач импульсов  $1 - 10 \text{ ГэВ}^2$  в  $O(\alpha_s)$ -приближении. Произведена оценка эффективного порога  $s_0^{\text{LD}}(Q^2)$  приближения локальной дуальности и с его помощью получена оценка электромагнитного формфактора пиона  $F_\pi(Q^2)$  в той же области передач импульсов с учетом  $O(\mathcal{A}_2)$ -вклада в глобальной ДАТВ (что в обычной ТВ отвечает учету вкладов порядка  $O(\alpha_s^2)$ ).

## 2. ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность исследуемой проблемы, сформулирована цель и задачи диссертационной работы, перечислены полученные в диссертации новые результаты, их практическая ценность, представлены положения, выносимые на защиту и описана структура диссертации.

В первой главе “Дробно-аналитическая теория возмущений” дано историческое введение в подход аналитической теории возмущений (АТВ) в КХД. Главными объектами в этом подходе являются спектральные плотности, с помощью которых аналитический эффективный заряд и его целые степени определяются в евклидовой области в виде дисперсионных интегралов:

$$\mathcal{A}_n^{(l)}(Q^2) = \int_0^\infty \frac{\rho_n^{(l)}(\sigma)}{\sigma + Q^2} d\sigma; \quad (1a)$$

$$\mathfrak{A}_n^{(l)}(s) = \int_s^\infty \frac{\rho_n^{(l)}(\sigma)}{\sigma} d\sigma. \quad (1b)$$

Те же спектральные плотности используются для построения эффективного заряда и его степеней в области Минковского с помощью дисперсионного соотношения, связывающего  $D$ -функцию Адлера и  $R$ -отношение. Эти интегральные преобразования, дают возможность определить одновременно аналитический эффективный заряд как в евклидовой области значений квадратов передач импульса, так и в области Минковского.

Отмечено, что применение концепции аналитизации в задачах с несколькими масштабами или для улучшенных по ренормгруппе пертурбативных КХД-амплитуд требует обобщения исходной АТВ на дробные степени эффективного заряда, а также на их произведения со степенями логарифмов. Действительно, в стандартной теории возмущений мы также име-

ем:

- факторизационную КХД-процедуру, которая дает возможность разделить вклады больших и малых расстояний и фактически применять теорию возмущений КХД для описания вклада малых расстояний (область больших евклидовых  $Q^2$ ). При этом естественным образом в жестких КХД-амплитудах возникают логарифмические факторы типа  $a^\nu[L] L$ ;
- ренормгрупповую эволюцию, генерирующую в партонных амплитудах факторы  $B(Q^2) = [Z(Q^2)/Z(\mu^2)] B(\mu^2)$ , которые в однопетлевом приближении сводятся к  $Z[L] \sim a^\nu[L]$ , где  $\nu = \gamma_0/(2b_0)$  — дробное число;
- ренормгрупповое уравнение для эффективного заряда, которое в двухпетлевом приближении приводит к появлению вкладов в эффективный заряд типа  $\rightarrow a^\nu[L] \ln(a[L])$ .

Такое обобщение на дробные степени эффективного заряда, названное Дробно-Аналитической Теорией Возмущений (ДАТВ), было проведено в наших работах [23, 25]. Излагается построение ДАТВ в однопетлевом приближении с фиксированным  $N_f$ : получены явные выражения для аналитических образов искомых дробных степеней зарядов,  $\mathcal{A}_\nu[L]$  и  $\mathfrak{A}_\nu[L]$ , при этом  $\mathcal{A}_\nu[L]$  выражается через редуцированную трансцендентную функцию Лерха,  $F(z, \nu)$ , и оказывается целой функцией аргумента  $\nu$ , а  $\mathfrak{A}_\nu[L]$  выражается полностью через тригонометрические функции. Обсуждены свойства этих функций. Отмечено, что евклидовы “обратные степени”  $\mathcal{A}_{-m}[L] = L^m$  совпадают с обратными степенями исходного эффективного заряда  $a^{-m}[L] = L^m$ , в то время как для минковских “обратных степеней” возникают добавки в виде низших степеней  $L$  с  $\pi^2$ -коэффициентами. Значения обоих зарядов в точке  $L = 0$  позволяют нам определить количественную меру искажения при переходе от области Минковского к области Евклида,

$$\frac{\mathcal{A}_\nu(0)}{\mathfrak{A}_\nu(0)} = \frac{(\nu - 1) \zeta(\nu)}{2^{\nu-1}}.$$

Обсуждается вопрос, насколько сильно отличаются аналитические образы дробных степеней эффективных зарядов от дробных степеней аналитических зарядов  $\mathcal{A}_1[L]$  и  $\mathfrak{A}_1[L]$ . Для этого мы введены относительные отклонения в минковской ( $\Delta_M(L, \nu)$ ) и евклидовой ( $\Delta_E(L, \nu)$ ) областях:

$$\Delta_M(L, \nu) = \frac{\mathfrak{A}_\nu[L] - (\mathfrak{A}_1[L])^\nu}{\mathfrak{A}_\nu[L]}; \quad \Delta_E(L, \nu) = \frac{\mathcal{A}_\nu[L] - (\mathcal{A}_1[L])^\nu}{\mathcal{A}_\nu[L]}. \quad (2)$$

На рис. 1 показано поведение  $\Delta_M(L, \nu)$  (слева) и  $\Delta_E(L, \nu)$  (справа). Видно, что как  $\Delta_M(L, 0.62)$ , так и  $\Delta_E(L, 0.62)$  меньше 5% при  $Q^2, s \gtrsim 1$  ГэВ<sup>2</sup> (что отвечает  $L \gtrsim 2.4$  при  $\Lambda = 300$  МэВ). С другой стороны, и  $|\Delta_M(L, 1.62)|$ , и  $|\Delta_E(L, 1.62)|$  становятся меньше или порядка 5% только при  $L \gtrsim 5.1$ , т. е., при  $Q^2, s \gtrsim 15.2$  ГэВ<sup>2</sup>. В то же время,  $|\Delta_M(L, 2.62)| > 0.23$  и  $|\Delta_E(L, 2.62)| > 0.31$  при  $L \lesssim 5.1$ , т. е., при  $Q^2, s \lesssim 15.2$  ГэВ<sup>2</sup>. Отсюда мы можем сделать вывод, что анализация дробных степеней эффективных зарядов особенно важна при  $\nu > 1$ .

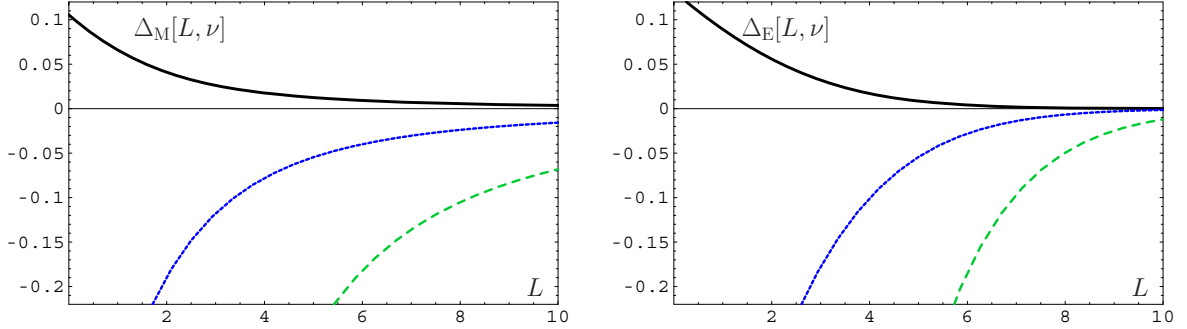


Рис. 1. Слева: Сравнение различных кривых для  $\Delta_M(L, \nu)$  как функций  $L = \ln(s/\Lambda^2)$ , отвечающих различным значениям  $\nu$ . Справа: То же сравнение для  $\Delta_E(L, \nu)$  как функций  $L = \ln(Q^2/\Lambda^2)$ . На обеих панелях сплошные (черные) линии отвечают значению  $\nu = 0.62$ , синие пунктирные —  $\nu = 1.62$  и зеленые штрихованные —  $\nu = 2.62$ .

Обобщение на случай высших петель можно проводить двумя путями. В первом подходе используют разложения ДАТВ для многопетлевых величин по однопетлевым зарядам. Во втором, более мощном подходе используют точные выражения для многопетлевых спектральных плотностей,

с помощью которых, пользуясь интегральными представлениями, численно восстанавливают сами аналитические заряды и связанные с ними функции. Вторым методом, как более точный, использован для оценки точности первого: оказалось, что точность разложения ДАТВ для  $\mathcal{A}_1^{(2)}$  и  $\mathfrak{A}_1^{(2)}$  даже в  $O(c_1^2)$ -порядке достаточно хороша. Наибольшие ошибки отвечают области вблизи  $L = 0$ , но уже для  $|L| > 2$  они становятся меньше десятых долей процента, что говорит об очень высокой скорости сходимости разложения ДАТВ.

Обсуждена также “анализация” более сложных выражений, содержащих кроме степеней заряда  $(a_{(2)})^\nu$  еще и степени логарифмов заряда или логарифмы передачи импульса, т. е.,  $(a_{(2)})^\nu L$ . Численные расчеты опять же выявляют высокую точность ДАТВ-разложения: оно имеет точность порядка 1–4% во всей области  $L \in [-10, +10]$  для  $\nu \in [1, 2]$  при учете  $O(c_1^4)$ -вкладов.

В следующем разделе главы рассмотрено построение глобальной версии ДАТВ, в которой учитываются пороги образования тяжелых кварков. Отмечается, что из-за наличия ступенчатой спектральной плотности даже в однопетлевом случае основное рекуррентное соотношение нарушается и заменяется на более сложное. Поэтому изящные формулы приближения фиксированного  $N_f$  здесь неприменимы и приходится пользоваться интегральными представлениями. Благодаря тому, что спектральные плотности с фиксированным числом флейворов просто связаны с анализированными зарядами в минковской области, удается получить явные формулы для  $\mathfrak{A}_\nu^{\text{glob};(l)}[L_s]$ . Для евклидовой области таких простых формул нет, но мы также можем все свести к эффективному заряду при  $N_f = 6$  с конечными поправками.

**Во второй главе “Суммирование рядов теории возмущений в АТВ и ДАТВ”** рассматривается суммирование рядов теории возмущений в АТВ и ДАТВ. Интересной особенностью как АТВ, так и ДАТВ оказалась возможность выполнения полного суммирования получаемого нестепенного ряда, отвечающего степенному ряду обычной теории возму-

щений. Построены все необходимые формулы для суммирования нестепенных рядов, получаемых в аналитическом подходе в качестве аналитических образов степенных рядов теории возмущений для версии ДАТВ с фиксированным  $N_f$ . При этом получаются результаты, определяемые в однопетлевом приближении интегралом нижайшего нетривиального аналитического заряда  $\mathcal{A}_{1+\nu}[L-t]$  с весом  $P_\nu(t)$

$$P_\nu(t) \equiv \int_0^1 P\left(\frac{t}{1-u^{1/\nu}}\right) \frac{du}{1-u^{1/\nu}} \quad (3)$$

определяемым по исходной производящей функции  $P(t)$  для стандартных пертурбативных коэффициентов разложения

$$d_n = d_1 \int_0^\infty P(t) t^{n-1} dt.$$

Такое суммирование оказалось возможным провести и в глобальной (Д)АТВ, правда формулы при этом серьезно усложняются. Построенный формализм позволяет по-новому оценить неопределенности, связанные с обрывом ряда теории возмущений.

Оценена важность пороговых эффектов в пересуммировании глобальной АТВ на примере двух простых моделей производящей функции  $P_{\text{toy-1}}(t) = \delta(t-2)$  (для коэффициентов  $d_n^{\text{toy-1}} = 2^{n-1}$ ) и  $P_{\text{toy-2}}(t) = t e^{-t}$  (для коэффициентов  $d_n^{\text{toy-2}} = n!$ ). Именно, проведено сравнение точной формулы пересуммирования (с полным учетом пороговых эффектов) с наивной формулой, где пороговые эффекты учтены минимальным образом. Разность между точной и наивной формулами определяется зависящим от  $L$  числом постоянных вкладов вида  $\langle\langle \Delta_k \bar{\mathcal{A}}_1[t] \rangle\rangle_{P_{\text{toy}}(t)}$  с  $k = 4, 5, 6$  — они просто делают наивное пересуммированное выражение непрерывным на порогах тяжелых кварков. Их абсолютная величина имеет порядок 3% для  $f = 4$ -порога, 0.5% — для  $f = 5$ -порога и 0.1% — для  $f = 6$ -порога. Проведена также оценка пороговых эффектов в евклидовой области. Здесь относительная разница между точной и наивной формулами имеет порядок 2.5% при  $L \sim 5$  и 0.5% при  $L \gtrsim 12$ .

### В третьей главе “Расчет ширины распада $H^0 \rightarrow b\bar{b}$ в ДАТВ”

рассматривается приложение ДАТВ в задаче расчета ширины распада бозона Хиггса  $H^0$  на кварк-антикварковую пару  $b\bar{b}$ . Сначала обсуждается стандартный подход к расчету  $\Gamma(H \rightarrow b\bar{b})$  via  $R_S$  в  $\overline{\text{MS}}$ -схеме с учетом эволюции как эффективного заряда и его степеней, так и массы  $b$ -кварка:

$$\Gamma(H \rightarrow b\bar{b}) = \Gamma_0^b(m_b^2) \frac{\tilde{R}_S(M_H^2)}{3 m_b^2},$$

где  $\Gamma_0^b(m_b^2) = 3 G_F M_H m_b^2 / 4\sqrt{2}\pi$ ,  $m_b$  и  $M_H$  — полюсная масса  $b$ -кварка и масса хиггсовского бозона,  $\bar{m}_b(Q^2)$  — эволюционирующая масса  $b$ -кварка и  $\tilde{R}_S(M_H^2) = \bar{m}_b^2(M_H^2) R_S(M_H^2)$ . Явные многопетлевые расчеты обычно проводятся в евклидовой области для соответствующей скалярному коррелятору функции Адлера  $D_S$ , что сразу дает для  $\tilde{R}_S$  соответствующее разложение:

$$\tilde{R}_S(s) = 3\bar{m}_b^2(s) \left[ 1 + \sum_{n \geq 1} r_n a_s^n(s) \right].$$

Коэффициенты  $r_n$  здесь содержат характерные ‘ $\pi^2$ -вклады’, связанные с аналитическим продолжением степеней логарифмов, появляющихся в  $\tilde{D}_S$ .

После этого проводится анализ  $\tilde{R}_S$  в ДАТВ. Сначала строится аналитизация выражения для  $\tilde{R}_S$  с коэффициентами  $d_n$ , зафиксированными на значениях, отвечающих  $N_f = 5$ . При этом учет эффектов, связанных с перенормировкой массы  $b$ -кварка, приводит к необходимости анализировать выражения типа  $(\alpha_s[L])^{n+\nu_0} (1 + \delta\alpha_s)^{\nu_1}$ , что говорит о необходимости использовать ДАТВ. С помощью ДАТВ построены глобальные аналитические образы  $\mathfrak{B}_{n+\nu_0}^{(2);\text{glob}}[L]$  выражений

$$B_\nu^{(2)}[L; \{\delta, \mu\}] \equiv \left( \alpha_s^{(2)}[L] \right)^\nu \left[ 1 + \delta \alpha_s^{(2)}[L] \right]^\mu.$$

в двухпетлевом приближении и аналитические образы  $\mathfrak{B}_{n+\nu_0}^{(3);\text{glob}}[L]$  более сложных выражений в трехпетлевом Паде-приближении. После этого применение операции аналитизации  $\mathbf{A}_M$  дает:

$$\tilde{R}_S^{(l)\text{ДАТВ};5}(s) = 3 \hat{m}_{(l)}^2 \left[ \mathfrak{B}_{\nu_0}^{(l);\text{glob}}(s) + \sum_{n \geq 1} d_n(5) \frac{\mathfrak{B}_{n+\nu_0}^{(l);\text{glob}}(s)}{\pi^n} \right],$$



где верхний индекс  $(l)$  обозначает петлевой порядок эволюции и в то же самое время порядок пертурбативного разложения  $D_S$ -функции. Это выражение строится из тех же самых коэффициентов  $d_n$ , что и евклидова  $\tilde{D}_S^{(l);5}$ -функция, и что глобальные аналитические заряды  $\mathfrak{B}_{n+\nu_0}^{(l);\text{glob}}$  вобрали в себя все эффекты эволюции массы, а также все  $\pi^2$ -вклады.

Построена также полная анализация  $\tilde{R}_S^{\text{ДАТВ}}$ , явно учитывающая зависимость коэффициентов разложения от  $N_f$ : кроме спектральных плотностей  $\rho_{B_{n+\nu_0}\{\dots\}}^{(l);\text{glob}}$ , отвечающих глобальным аналитическим зарядам  $\mathfrak{B}_{n+\nu_0}^{(l);\text{glob}}$ , появятся также дополнительные глобальные спектральные плотности, построенные на основе выражений типа  $d_n(N_f) \bar{\rho}_{B_{n+\nu_0}\{\dots\}}^{(l)}$ , которые дадут нам новые аналитические заряды  $\mathfrak{B}_{n+\nu_0;d_n}^{(l);\text{glob}}$ . Соответствующая полная ДАТВ формула такова:

$$\tilde{R}_S^{(l)\text{ДАТВ}}(s) = 3 \hat{m}_{(l)}^2 \left[ \mathfrak{B}_{\nu_0}^{(l);\text{glob}}(s) + \sum_{n \geq 1} \frac{\mathfrak{B}_{n+\nu_0;d_n}^{(l);\text{glob}}(s)}{\pi^n} \right].$$

С точки зрения принципа анализации всего выражения “как целого” такой подход представляется нам наиболее последовательным. В минковской области он приводит к результатам, отличным от частичной анализации, когда коэффициенты разложения “замораживаются” на каком-либо значении  $N_f$  (в этой задаче естественной представляется обычно заморозка на значении  $N_f = 5$ ).

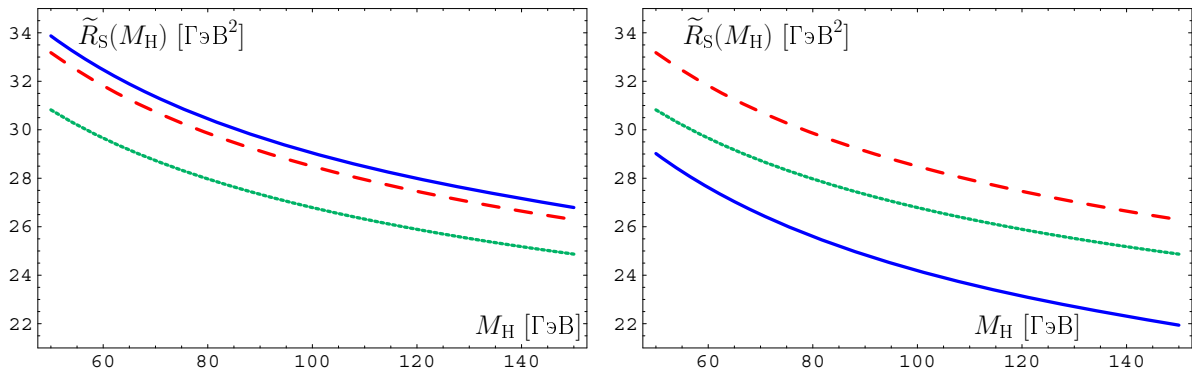


Рис. 2. Результаты расчета величины  $\tilde{R}_S(M_H^2)$  в различных подходах (пояснения см. в тексте).

На рисунке 2 проведено сравнение различных подходов к расчету  $\tilde{R}_S$ .

Пунктирная кривая отвечает однопетлевому подходу ДАТВ (с  $\Lambda_{N_f=5}^{(1);Z} = 111$  МэВ, получаемое из требования  $\mathfrak{A}_1^{(1);glob}(m_Z^2) = 0.120$ ), который имитирует подход “наивной неабелинизации” Броджерста, Катаева и Максвелла [40] и оказывается ниже чисто пертурбативного результата Байкова, Четыркина и Кюна (БЧК) [41] (штрихованная кривая,  $\Lambda_{N_f=5}^{(4)} = 231$  МэВ) на 8%. Трехпетлевой подход ДАТВ с “заморозкой” коэффициентов  $d_n(N_f)$  на значении  $d_n(5)$  (также как и в предыдущих двух подходах) с  $\Lambda_{N_f=5}^{(4)} = 261$  МэВ (нормировка на  $\mathfrak{A}_1^{(3);glob}(m_Z^2) = 0.120$ ) представлен на левой части рисунке 2 сплошной линией. Видно, что он очень близок к результату БЧК (отличие имеет порядок 2%, а если сравнивать с трехпетлевым результатом БЧК — 1.5%). Подход же ДАТВ с полной аналитизацией  $N_f$ -зависимостей дает результат, показанный сплошной кривой на правой части рисунке 2 и, как мы и ожидали, оказался меньше “замороженного” результата. Это отличие меняется от 12.5% (при  $M_H = 50$  ГэВ) до 16.5% (при  $M_H = 150$  ГэВ).

Таким образом, ряд стандартной теории возмущений КХД и нестепенное разложение ДАТВ в области больших логарифмов  $L$  оказываются близки в сценарии с заморозкой коэффициентов  $d_n(N_f) := d_n(5)$  на значениях, отвечающих  $N_f = 5$ . Полная ДАТВ с аналитизацией всей зависимости пертурбативных результатов от  $N_f$  естественно дает другой, в нашем случае меньший, результат, поскольку такая аналитизация эффективно усредняет коэффициенты  $d_n(N_f)$ , что приводит к их уменьшению и, как результат, к уменьшению всей суммы нестепенного ряда.

В заключительном разделе главы обсуждается применение метода суммирования нестепенных рядов ДАТВ для анализа неопределенностей предсказаний ширины распада  $\Gamma_{H^0 \rightarrow \bar{b}b}(M_H)$ . Для этого по известным пертурбативным коэффициентам  $d_n(5)$  с  $n = 1, 2, 3, 4$  мы построили для них достаточно факториально растущую (по Липатову [42]) модель

$$\tilde{d}_n^H = c^{n-1} \frac{\Gamma(n+1) + \beta \Gamma(n)}{1 + \beta},$$

с параметрами  $c = 2.4$  и  $\beta = -0.52$ , основанную на производящей функции

$$P_H(t) = \frac{\beta + t/c}{c(\beta + 1)} e^{-t/c}. \quad (4)$$

Оказалось, что эта модель достаточно близка к предсказаниям, основанным на принципе минимальной чувствительности [43], как для известных коэффициентов  $d_n(5)$  с  $n = 1, 2, 3, 4$ , так и для неизвестного коэффициента  $d_5(5)$ . С помощью модели производящей функции  $P_H(t)$  и формулы пересуммирования нестепенных рядов ДАТВ, полученной в Главе 2, проведен анализ ошибок обрыва разложения ДАТВ для  $\tilde{R}_S^{\text{FAPT}}[L]$  в области  $L \in [11.7, 13.6]$ , отвечающей области масс бозона Хиггса  $80 - 180$  ГэВ при  $\Lambda_{\text{QCD}}^{N_f=3} = 201$  МэВ, которая соответствует  $\mathfrak{A}_1^{\text{glob}}(m_Z^2) = 0.122$ . В этой

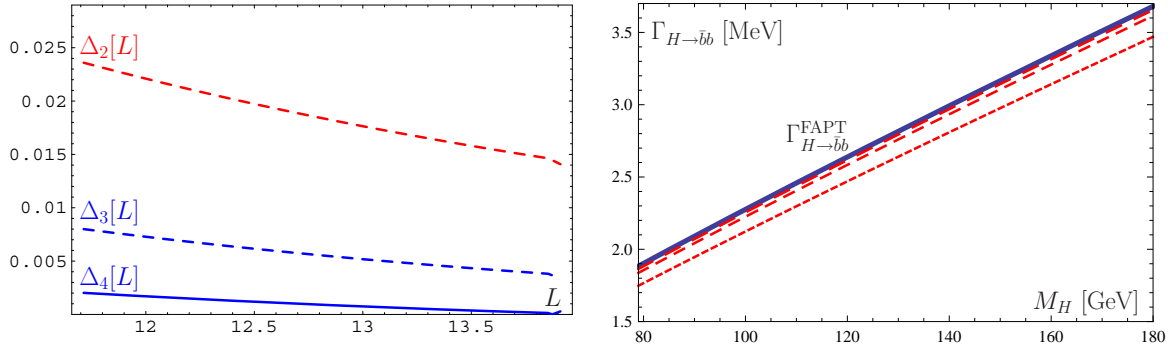


Рис. 3. Слева показаны относительные ошибки  $\Delta_N[L]$  с  $N = 2, 3$  и  $4$  обрыва нестепенного ряда для ширины распада  $\Gamma_{H^0 \rightarrow b\bar{b}}[L]$  по отношению к результату полного суммирования как функции логарифма  $L = \ln(M_H^2/\Lambda^2)$ . Справа построены сами ширины  $\Gamma_{H \rightarrow b\bar{b}}$  уже как функции массы бозона Хиггса  $M_H$  в пересуммированной ДАТВ (сплошная кривая) и в оборванных (на порядке  $N$ ) ДАТВ. Здесь линия с короткой штриховкой отвечает  $N = 1$ , с нормальной штриховкой —  $N = 2$ , а с длинной —  $N = 3$ .

области  $L_5 < L < L_6$ , так что общая формула суммирования упрощается к

$$\Gamma_{H \rightarrow b\bar{b}}^{\text{FAPT}}[L] = \Gamma_0^b(\hat{m}_{(1)}^2) \left\{ \mathfrak{A}_{\nu_0}^{\text{glob}}[L] + \frac{d_1}{\pi} \left\langle \left\langle \Delta_6 \bar{\mathfrak{A}}_{1+\nu_0} \left[ \frac{t}{\pi} \right] \right\rangle \right\rangle_{P_\nu} + \frac{d_1}{\pi} \left\langle \left\langle \bar{\mathfrak{A}}_{1+\nu_0} \left[ L + \lambda_5 - \frac{t}{\pi\beta_5} \right] \right\rangle \right\rangle_{P_\nu} \right\} \quad (5)$$

с  $P_{\nu_0}(t)$ , определяемой по (3) и (4) с параметрами  $c = 2.4$ ,  $\beta = -0.52$  и  $\nu_0 = 1.04$ . Рассчитывались относительные ошибки

$$\Delta_N[L] = 1 - \frac{\Gamma_{H \rightarrow b\bar{b}}^{\text{FAPT}}[L; N]}{\Gamma_{H \rightarrow b\bar{b}}^{\text{FAPT}}[L]} \quad (6)$$

обрыва ряда ДАТВ

$$\Gamma_{H \rightarrow b\bar{b}}^{\text{FAPT}}[L; N] = \Gamma_0^b(\hat{m}_{(1)}^2) \left\{ \mathfrak{A}_{\nu_0}^{\text{glob}}[L] + d_1 \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{d}_n}{\pi^n} \mathfrak{A}_{n+\nu_0}^{\text{glob}}[L] \right\}, \quad (7)$$

на порядке  $N$ . Результаты этих расчетов показаны на рисунке 3, в виде зависимостей  $\Delta_N[L]$  от  $L$  для  $N = 2$ ,  $N = 3$  и  $N = 4$ . Хорошо видно, что уже  $\Gamma_{H \rightarrow b\bar{b}}^{\text{FAPT}}[L; 2]$  дает точность лучше чем 2.5%, в то время как  $\Gamma_{H \rightarrow b\bar{b}}^{\text{FAPT}}[L; 3]$  достигает точности порядка 1%.

Таким образом, для расчета ширины распада бозона Хиггса с точностью 1% в области значений его массы  $m_H = 60 - 180$  ГэВ вполне достаточно учета вкладов с коэффициентами  $d_0$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  и  $d_3$ , а учет вклада с  $d_4$  приводит к улучшению точности до 0.5%, что не столь важно, поскольку ошибка определения полюсной массы имеет порядок 2%.

Таблица 2.1. Пертурбативные коэффициенты  $\tilde{d}_n$  степенного разложения  $D_S$  в деформированных моделях в сравнении с исходными.

Коэффициенты	$\tilde{d}_1$	$\tilde{d}_2$	$\tilde{d}_3$	$\tilde{d}_4$	$\tilde{d}_5$
Пертурбативные результаты ( $N_f = 5$ ) [41]	1	7.42	62.3	620	—
Модель $P_+(t)$ (4): $c = 2.62, \beta = -0.50$	1	7.85	68.5	752	10120
Модель $P_-(t)$ (4): $c = 2.25, \beta = -0.51$	1	6.89	52.0	492	5707

После этого проведен анализ чувствительности результата пересуммирования в ДАТВ от деталей моделирования производящей функции  $P(t)$ . Для этого мы использовали две деформированные модели  $P_{\pm}(t)$ , в которых пертурбативные коэффициенты  $\tilde{d}_n$  усилены ( $P_+(t)$ ) или ослаблены ( $P_-(t)$ ) от 5 до 15%, детали см. в таблице 2.1. Результаты показаны на левой панели рисунка 4 в виде полосы, верхняя граница которой определяется усиленной моделью  $P_+(t)$ , а нижняя — ослабленной моделью  $P_-(t)$ .

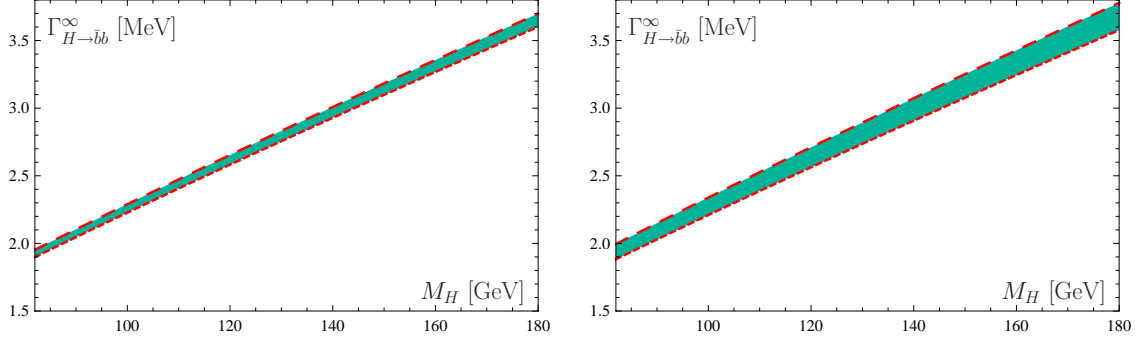


Рис. 4. **Слева:** Ширина распада  $\Gamma_{H \rightarrow b\bar{b}}^\infty$  как функция массы хиггсовского бозона  $M_H$  в пересуммированной ДАТВ с различными моделями производящей функции  $P(t)$ . Ширина полосы определяется двумя экстремальными моделями  $P_\pm(t)$ . **Справа:** Ширина распада  $\Gamma_{H \rightarrow b\bar{b}}^\infty$  как функция массы хиггсовского бозона  $M_H$  в пересуммированной ДАТВ при вариации  $\hat{m}_b = 9.051 \pm 0.097$  ГэВ в соответствии с оценками Кюна–Штайнхаузера для  $\bar{m}_b(m_b) = 4.189 \pm 0.045$  ГэВ [44].

Видно, что неопределенности, индуцируемые такими искажениями производящей функции  $P(t)$ , оказываются порядка 0.6%. В то же время, ошибка определения полюсной массы оказывается больше (см. на правой части рисунке 4),  $\simeq 2\%$ , так что суммарная полуширина полосы неопределенностей наших предсказаний имеет порядок 3% и определяется в основном неопределенностями знания полюсной массы.

Таким образом, ДАТВ позволяет не только оценить эффект анализа  $N_f$ -зависимостей пертурбативных коэффициентов, который приводит 15%-ному понижению ширины распада как в 2-, так и в 3-петлевом приближениях, но и оценить важность учета следующих пертурбативных поправок: при точности определения квадрата полюсной массы порядка 1% пока преждевременно учитывать 4-петлевую поправку, поскольку это дает уточнение порядка 0.5%.

**В четвертой главе “Расчет факторизуемой части формфактора пиона в АТВ и ДАТВ”** проведено обсуждение расчета факторизуемой части электромагнитного формфактора (ФФ) пиона в стан-

дартном подходе КХД-факторизации. В первом разделе рассматриваются основные моменты факторизационного расчета ФФ пиона, определяется амплитуда жесткого КХД-подпроцесса и вводится амплитуда распределения (АР) кварков в пионе.

Затем описывается эволюция Ефремова–Радюшкина–Бродского–Лепаж (ЕРБЛ) [18] для пионной АР как в одно-, так и двухпетлевом приближениях: важным отличием двухпетлевой эволюции от однопетлевой является расплывание АР в высшие гармоники, что приводит к затруднению численных расчетов. Отмечается, что учет РГ характера двухпетлевой эволюции, проведенный в работе [21], приводит к замедлению эволюции. Для феноменологически интересных непертурбативных моделей АР пиона, а именно, двугегенбауэровских моделей, в число которых входят и три популярные модели, асимптотическая, Черняка–Житницкого (ЧЖ) и Бакулева–Михайлова–Стефаниса (БМС), уравнения двухпетлевой эволюции упрощаются. На примере модели БМС проанализирована важность использования двухпетлевой эволюции в расчетах ФФ пиона в  $O(\alpha_s^2)$ -приближении. Показано, что в этих расчетах двухпетлевую эволюцию можно заменить на однопетлевую — генерируемая при этом ошибка меньше 1%.

В пятом разделе исследуется применение АТВ в задаче расчета факторизуемой части пионного ФФ с выбором масштаба факторизации  $\mu_F^2 = Q^2$ . Такой выбор приводит к исчезновению эволюционного логарифма  $\ln[Q^2/\mu_F^2]$  в жесткой КХД-амплитуде подпроцесса. Основной целью здесь является анализ зависимости результатов от выбора схемы и масштаба перенормировки. Однако при этом возникают эволюционные факторы  $E_n^{LO}(Q^2, \mu_0^2) \sim \alpha_s^{\nu_n}(Q^2)$ , где  $\nu_n = \gamma_n^{(0)}/(2b_0)$  — дробные числа, проводить анализацию которых в АТВ нет возможности. Поэтому в [22] мы проводили численное решение уравнений эволюции ЕРБЛ с аналитической константой связи. Таким способом были исследованы стандартная схема перенормировки  $\overline{MS}$  с несколькими способами выбора масштаба перенормировки (стандартный  $\mu_F^2 = Q^2$ , по принципу минимальной чувствительности, по методу быстрой сходимости, простое и модифицированное

BLM-предписания), а также  $\alpha_V$ -схема.

Процедура аналитизации пионного формфактора в  $O(\alpha_s^2)$ -порядке ведет к неоднозначности: если мы заменяем  $\alpha_s(\mu^2) \rightarrow \mathcal{A}_1(\mu^2)$ , то как поступить с квадратом эффективного заряда,  $\alpha_s^2(\mu^2)$ ? Исторически было предложено два рецепта действий:

(i) Так называемая схема “наивной аналитизации”, в которой  $\alpha_s^2(\mu^2) \rightarrow [\mathcal{A}_1(\mu^2)]^2$ . Заметим, что в этом подходе квадрат аналитической константы связи не имеет дисперсионного представления, а значит и пионный формфактор тоже.

(ii) И схема “максимальной аналитизации”, когда  $\alpha_s^2(\mu^2) \rightarrow \mathcal{A}_2(\mu^2)$ .

В обоих случаях в качестве аналитических зарядов  $\mathcal{A}_1(\mu_R^2)$  и  $\mathcal{A}_2(\mu_R^2)$  использовались двухпетлевые глобальные заряды  $\mathcal{A}_1^{(2);glob}(\mu_R^2)$  и  $\mathcal{A}_2^{(2);glob}(\mu_R^2)$ .

На рис. 5 показаны полученные результаты для факторизуемой части пионного формфактора в различных подходах: в стандартной теории возмущений КХД (слева), в схемах АТВ с “наивной аналитизацией” (в центре) и с “максимальной аналитизацией” (справа). В случае стандартной теории возмущений мы видим большое расхождение предсказаний в области  $Q^2 = 1 - 50 \text{ ГэВ}^2$ . На левом рисунке показаны предсказания, отвечающие следующим масштабам перенормировки: стандартному  $\mu_R^2 = Q^2$  (штрихованная линия), BLM с  $\mu_{\min}^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$  (сплошная линия), FAC (штрихпунктирная линия) и PMS (пунктирная линия). Простой BLM-выбор приводит к результатам, просто не помещающимся в видимой части рисунка. В случае АТВ с “наивной аналитизацией” (на рисунке в центре) мы видим не столь большое расхождение предсказаний в области  $Q^2 = 1 - 50 \text{ ГэВ}^2$  по сравнению со стандартной теорией возмущений КХД, особенно если учесть, что теперь показаны предсказания, полученные с BLM-предписанием (пунктирная линия) и в  $\alpha_V$ -схеме (штрихпунктирная линия). Но все же это расхождение заметно и оставляет вопрос о выборе масштаба открытым. А вот для АТВ с “максимальной аналитизацией” (на рисунке справа) вопрос о выборе масштаба практически не встает вообще: все схемы (обозначения кривых те же, что и на центральном рисунке) дают практически одни и те

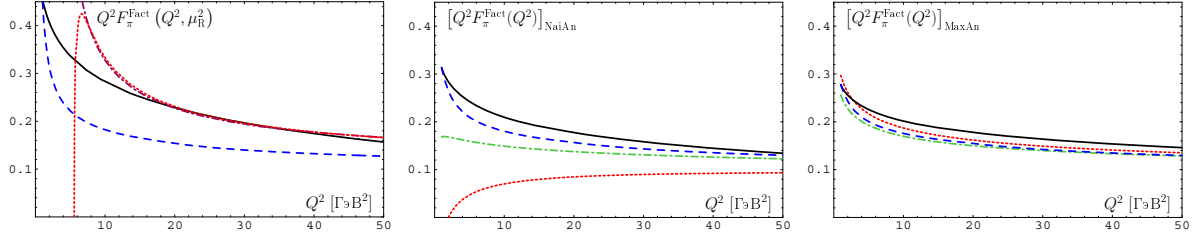


Рис. 5. Результаты для  $Q^2 F_\pi^{\text{Fact}}$ , полученные в стандартной ТВ (слева), АТВ с “наивной анализацией” (в центре) и с “максимальной анализацией” (справа). Обозначения кривых см. в тексте. Все расчеты проведены для реалистической амплитуды распределения БМС.

же результаты! Этот нетривиальный результат применения АТВ, с нашей точки зрения, свидетельствует о мощи принципа аналитичности в квантовой теории поля.

В следующем разделе мы фиксируем масштаб факторизации  $\mu_F^2 = \text{const}$ , так что гегенбауэровские коэффициенты  $a_2(\mu_F^2)$  и  $a_4(\mu_F^2)$  также становятся константами, а масштаб перенормировки выбираем пропорциональным  $Q^2$ :  $\mu_R^2 = \lambda_R Q^2$ . Взамен у нас возникает добавок  $(\alpha_s^2(\lambda_R Q^2)/\pi) \ln(Q^2/\mu_F^2)$ , который в ДАТВ преобразуется к виду

$$\left[ \alpha_s^2(\lambda_R Q^2) \ln \left( \frac{Q^2}{\mu_F^2} \right) \right] \xrightarrow{\text{ДАТВ}} \mathcal{L}_{2;1}^{(2);\text{glob}}(\lambda_R Q^2) - \mathcal{A}_2^{(2);\text{glob}}(\lambda_R Q^2) L(\lambda_R Q^2) + \mathcal{A}_2^{(2);\text{glob}}(\lambda_R Q^2) \ln \left( \frac{Q^2}{\mu_F^2} \right).$$

Получаемые при учете этого вклада ФФ мы будем обозначать  $[F_\pi^{\text{Fact}}(Q^2)]_{\text{ДАТВ}}$ . На рисунке 6 мы показываем результаты расчетов таких ФФ при различных значениях масштаба факторизации (см. подпись под рисунком). Различные кривые на рисунке отвечают различным схемам и выборам масштаба перенормировки (обозначения согласованы с обозначениями рис. 5): сплошная линия соответствует ВLM-предписанию с  $\mu_{\text{min}}^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$ , штрихованная линия — стандартному выбору  $\lambda_R = 1$ , штрихпунктирная (почти сливается со штрихованной) —  $\alpha_V$ -схеме, пунктирная — ВLM-предписанию.



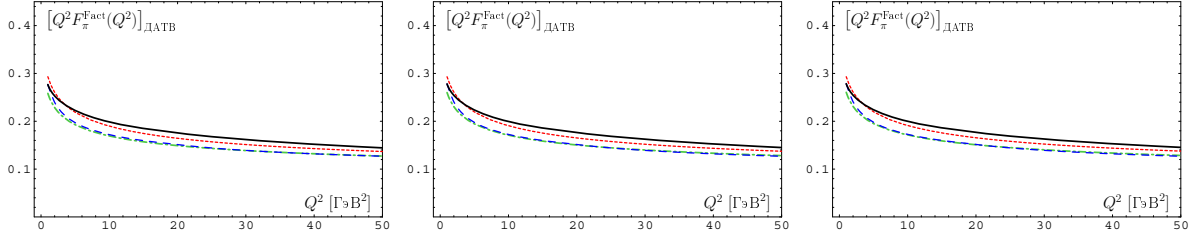


Рис. 6. Результаты для  $Q^2 F_\pi^{\text{Fact}}$ , полученные в подходе ДАТВ с различными масштабами факторизации:  $\mu_F^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$  (слева),  $\mu_F^2 = 5.76 \text{ ГэВ}^2$  (в центре) и  $\mu_F^2 = 10 \text{ ГэВ}^2$  (справа). Обозначения кривых см. в тексте. Все расчеты проведены для реалистической амплитуды распределения ВМС.

Мы видим опять, что все кривые очень близки друг к другу: ширина полосы относительно центральной линии имеет порядок 7.5%, а если не учитывать достаточно экзотическое ВЛМ-предписание — то и вовсе 5%. Зависимость самих результатов от выбора масштаба факторизации также оказывается очень малой: относительная разность между результатами, отвечающими  $\mu_F^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$  и  $\mu_F^2 = 10 \text{ ГэВ}^2$ , составляет 1% для случая  $\alpha_V$ -схемы (для других выборов масштаба перенормировки — еще меньше), а если сравнивать случай  $\mu_F^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$  со случаем  $\mu_F^2 = 50 \text{ ГэВ}^2$ , тогда относительная разница результатов доходит до 2%. Таким образом, использование принципа аналитичности также снижает зависимость от выбора масштаба факторизации.

Следующий раздел посвящен решению проблемы порогов тяжелых кварков для ФФ пиона в подходах АТВ и ДАТВ. Суть самой проблемы такова: неведущая поправка к ФФ пропорциональна коэффициенту  $b_0$  и, таким образом, зависит явно от  $N_f$ . Поэтому при выборе  $N_f$  в формулах для ФФ по стандартному рецепту  $\mu_R^2 = Q^2$  и сдвигах  $\mu_R^2$  на порогах тяжелых кварков так, чтобы обеспечить непрерывность самого ФФ, мы получим ФФ пиона как непрерывную функцию, но уж никак не аналитическую.

Решение этой проблемы в АТВ полностью аналогично рецепту глобализации эффективного заряда в АТВ: зависящие от  $N_f$  пертурбативные

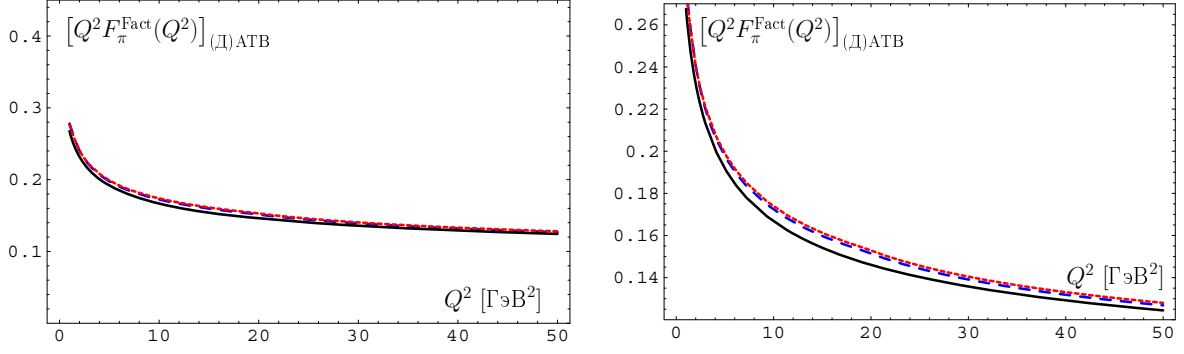


Рис. 7. Результаты для  $Q^2 F_\pi^{\text{Fact}}$ , полученные в подходах  $\text{ATB}_{\text{MaxAn}}$ , ДАТВ с фиксированным масштабом факторизации и ДАТВ с  $\mu_F^2 = Q^2$ . Обозначения кривых см. в тексте. На правом рисунке просто увеличен масштаб оси ординат, чтобы лучше можно было увидеть все три кривые.

результаты дают нам зависящие от  $N_f$  спектральные плотности, разрывные на порогах, однако генерируемые ими через дисперсионные интегральные представления эффективные заряды в евклидовой области являются аналитическими функциями в евклидовой области. В минковской области сечения оказываются просто непрерывными функциями.

Результаты расчетов пионного ФФ в разных подходах показаны на рисунке 7: пунктирная линия отвечает подходу АТВ с “максимальной аналитизацией”, штрихованная линия — ДАТВ с  $\mu_F^2 = 5.76 \text{ ГэВ}^2$ , в то время как сплошная линия показывает результат ДАТВ с  $\mu_F^2 = Q^2$  (везде выбран масштаб перенормировки  $\mu_R^2 = Q^2$ ). Полученное согласие (на уровне 1.5%, что можно увидеть на правой части рисунка 7) сильно впечатляет.

В заключительном разделе этой главы мы обсуждаем переход в область Минковского для пионного ФФ и роль дисперсионного представления в таком переходе. Показано, что для описания ФФ пиона в области Минковского аналитические заряды  $\mathcal{A}_\nu(s)$  не пригодны: у них отсутствуют мнимые части, которые с необходимостью должны быть у пионного ФФ. Таким образом, заряды  $\mathcal{A}_\nu(s)$  пригодны только для описания величин типа сечений  $R(s) = \sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}}(s) / \sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}(s)$ . А для описания ФФ в этой области необходимо использовать заряды  $\mathcal{A}_\nu^{\text{glob}}(-s)$ .

**В последней главе “Расчет полного формфактора пиона в КХД правилах сумм с нелокальными конденсатами”** мы построили и проанализировали для двух гауссовых моделей нелокального КХД-вакуума трехточечное правило сумм КХД для электромагнитного ФФ пиона. К достоинствам такого анализа следует отнести независимость результатов от профиля пионной АР — это приводит к уменьшению теоретической неопределенности, связанной с параметризацией пионной АР в низкой точке нормировки (порядка 1 ГэВ). Кроме того, мы попытались уменьшить влияние нарушения калибровочной инвариантности, индуцируемой грубым моделированием нелокальности вакуумных конденсатов: в наших расчетах мы учли не только минимальную гауссову модель НВК, но также и улучшенную модель, разработанную нами в [26].

Основные предсказания для ФФ пиона  $F_\pi(Q^2)$  показаны на рисунке 8 в сравнении с существующими экспериментальными данными (старыми) Корнелла [45] и (более новыми) группы JLab [46]. Оказалось, что учет  $O(\alpha_s)$ -вклада в спектральную плотность повысил предсказание для ФФ в среднем на 20%, что несколько меньше предыдущих оценок относительной важности таких поправок [47, 13].

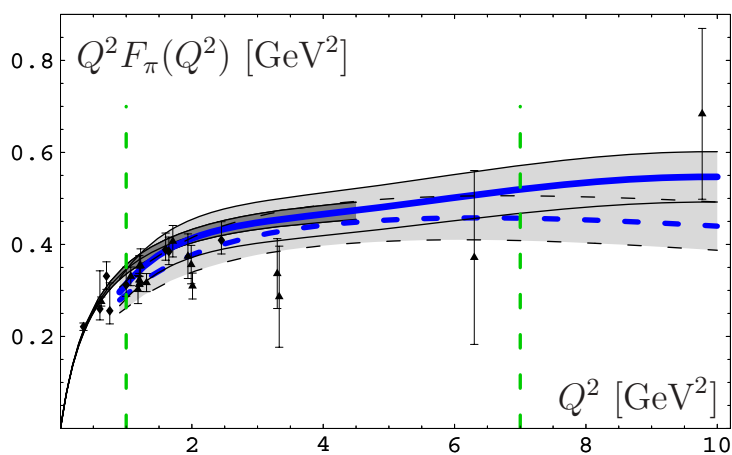


Рис. 8. Нормированный пионный формфактор  $Q^2 F_\pi(Q^2)$  для минимальной (штрихованная линия) и для улучшенной (сплошная линия) моделей НВК для  $\lambda_q^2 = 0.4^2$  в сравнении с экспериментальными данными Корнелла [45] (треугольники) и лаб. им.Джефферсона[46] (ромбы).

Как хорошо видно из рисунка 8 центральная линия предсказаний для  $\Phi\Phi$  пиона, полученных в улучшенной модели, лежит внутри полосы ошибок минимальной модели вплоть до значения  $Q^2 \approx 7 \text{ ГэВ}^2$ , что говорит о сравнимом качестве предсказаний обеих гауссовых моделей НВК в этой области. Основное отличие между этими двумя моделями связано с различными вкладами кварк-глюон-антикваркового конденсата  $\Phi_{\bar{q}Aq}(Q^2, M^2)$ .

Полученные предсказания хорошо согласуются с результатами недавних решеточных расчетов [48] пионного  $\Phi\Phi$  при  $Q^2 \leq 4 \text{ ГэВ}^2$ .

Мы построили также эффективные пороги континуума для подхода локальной дуальности, которые позволяют в этом подходе имитировать результаты, полученные нами в подходе борелевских ПС КХД. Сравнение наших предсказаний с полученными ранее в подходе локальной дуальности [13] выявляет систематическое превышение наших результатов. Причиной такой разницы является тот факт, что эффективный порог континуума  $s_0^{\text{LD}}(Q^2)$  хорошо определен только в области малых  $Q^2$ . Для бóльших  $Q^2$  авторы [13] предложили пользоваться логарифмически растущим порогом

$$s_0^{\text{LD}}(Q^2) = \frac{4\pi^2 f_\pi^2}{1 + \alpha_s(Q^2)/\pi},$$

равным  $0.67 \text{ ГэВ}^2$  при  $Q^2 \approx 10 \text{ ГэВ}^2$ . Построенный нами эффективный порог континуума, имитирующий результат ПС КХД, оказывается выше:  $s_0^{\text{LD}}(Q^2 = 10^2) = 0.87^2$ . Это означает, что ошибка стандартного предписания для порога  $s_0^{\text{LD}}$  в области  $Q^2 = 10 \text{ ГэВ}^2$  оказывается порядка 20%.

На основе тождества Уорда мы построили [22, 27] процедуру согласования факторизуемой части  $\Phi\Phi$  пиона, рассчитываемой в коллинеарной КХД, с моделью нефакторизуемого вклада, получаемой в подходе локальной дуальности с использованием построенных эффективных порогов континуума. С ее помощью мы построили выражение для  $\Phi\Phi$  пиона в  $O(\alpha_s^2)$ -приближении в развитом нами подходе ДАТВ. Оказалось, что этот вклад составляет от 3% (в области  $Q^2 \lesssim 2 \text{ ГэВ}^2$ ) до 10% (в области  $Q^2 \gtrsim 7 \text{ ГэВ}^2$ ).

**В заключении** суммированы основные выводы диссертации, а важные технические детали собраны в девяти приложениях:

1. Двухпетлевые РГ решения для эффективного заряда в КХД;
2. Трехпетлевые РГ решения для эффективного заряда в КХД;
3. Спектральные плотности в  $l$ -петлевых приближениях;
4. Аналитические свойства  $\Phi(z, -\nu, 1)$  и  $F(z, \nu)$ ;
5. Аномальные размерности эволюции пионной AP;
6. Пертурбативное разложение  $D_S$ -функции;
7. Аномальные размерности эволюции кварковых масс;
8. Параметризация нелокальных вакуумных конденсатов;
9. Численные параметры для правил сумм КХД.

### Список литературы

- [1] Б. Л. Иоффе, Л. Н. Липатов, and В. А. Хозе, *Глубокоinelастические процессы* (Энергоатомиздат, Москва, 1983), 264 с.
- [2] Ф. Индурайн, *Квантовая хромодинамика* (Мир, Москва, 1986), 288 с.
- [3] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. **B147**, 385, 448, 519 (1979).
- [4] D. V. Shirkov and I. L. Solovtsov, JINR Rapid Commun. **2[76]**, 5 (1996); Phys. Rev. Lett. **79**, 1209 (1997).
- [5] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, and Д. В. Ширков, ЖЭТФ **37**, 805 (1959).
- [6] A. V. Radyushkin, JINR Rapid Commun. **78**, 96 (1996) [JINR Preprint, E2-82-159, 26 Febr. 1982].
- [7] N. V. Krasnikov and A. A. Pivovarov, Phys. Lett. **B116**, 168 (1982).

- [8] Н. Н. Боголюбов and Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей* (Наука, Москва, 1957, 1973, 1976, 1984), 597 с.
- [9] M. Baldicchi *et al.*, Phys. Rev. Lett. **99**, 242001 (2007).
- [10] V. A. Nesterenko and A. V. Radyushkin, Phys. Lett. **B128**, 439 (1983).
- [11] A. P. Bakulev and A. V. Radyushkin, “Nonlocal condensates and QCD sum rules for the pion form-factor”, Phys. Lett. **B271**, 223 (1991).
- [12] A. P. Bakulev, A. V. Radyushkin, and N. G. Stefanis, “Form factors and QCD in spacelike and timelike regions”, Phys. Rev. **D62**, 113001 (2000).
- [13] V. Braguta, W. Lucha, and D. Melikhov, Phys. Lett. **B661**, 354 (2008).
- [14] B. L. Ioffe and A. V. Smilga, Phys. Lett. **B114**, 353 (1982).
- [15] V. L. Chernyak and A. R. Zhitnitsky, Phys. Rept. **112**, 173 (1984).
- [16] С. В. Михайлов и А. В. Радюшкин, Письма в ЖЭТФ **43**, 551 (1986); Яд. физ. **49**, 794 (1989).
- [17] С. В. Михайлов, Яд. физ. **56**, 143 (1993).
- [18] A. V. Efremov and A. V. Radyushkin, Phys. Lett. **B94**, 245 (1980); G. P. Lepage and S. J. Brodsky, Phys. Rev. **D22**, 2157 (1980).
- [19] A. P. Bakulev, R. Ruskov, K. Goeke, and N. G. Stefanis, “Parton skewed distributions in the pion and quark-hadron duality”, Phys. Rev. **D62**, 054018 (2000).
- [20] A. P. Bakulev, S. V. Mikhailov, and N. G. Stefanis, “Deep inside the pion: Reconciling QCD theory with data”, Annalen Phys. **13**, 629 (2004).
- [21] A. P. Bakulev and N. G. Stefanis, “Renormalization-group improved evolution of the meson distribution amplitude at the two-loop level”, Nucl. Phys. **B721**, 50 (2005).

- [22] A. P. Bakulev, K. Passek-Kumerički, W. Schroers, and N. G. Stefanis, “Pion form factor in QCD: From nonlocal condensates to NLO analytic perturbation theory”, *Phys. Rev.* **D70**, 033014, 079906(E) (2004)
- [23] A. P. Bakulev, S. V. Mikhailov, and N. G. Stefanis, “QCD analytic perturbation theory: From integer powers to any power of the running coupling”, *Phys. Rev.* **D72**, 074014, 119908(E) (2005).
- [24] A. P. Bakulev, A. I. Karanikas, and N. G. Stefanis, “Analyticity properties of three-point functions in QCD beyond leading order”, *Phys. Rev.* **D72**, 074015 (2005).
- [25] A. P. Bakulev, S. V. Mikhailov, and N. G. Stefanis, “Fractional analytic perturbation theory in Minkowski space and application to Higgs boson decay into a  $b\bar{b}$  pair”, *Phys. Rev.* **D75**, 056005 (2007); *ibid.* **D77**, 079901(E) (2008).
- [26] А. П. Бакулев, А. В. Пимиков, “Самосогласованная гауссова модель непертурбативного КХД-вакуума”, *Письма в ЭЧАЯ*, **4**, 637 (2007).
- [27] A. P. Bakulev, A. V. Pimikov, and N. G. Stefanis, “QCD sum rules with nonlocal condensates and the spacelike pion form factor”, *Phys. Rev.* **D79**, 093010 (2009).
- [28] А. П. Бакулев, “Глобальная дробно-аналитическая теория возмущений в КХД и ее некоторые приложения”, *Физ. элем. част. атом. ядра* **40**, 715 (2009).
- [29] A. P. Bakulev, “Pion distribution amplitude: From theory to data (CELLO, CLEO, E-791, JLab F(pi))”, in *Proceedings of the 13th International Seminar Quarks'2004, Vol. 2, Pushkinogorie, Russia, May 24–30, 2004*, edited by D. G. Levkov, V. A. Matveev, and V. A. Rubakov (INR RAS, Moscow, 2005), pp. 536–550.
- [30] A. P. Bakulev, “The Pion Form Factor in QCD in NLO Analytic Perturbation Theory”, *Phys. Part. Nucl.* **36**, S164 (2005).

- [31] A. P. Bakulev, “Pion distribution amplitude: From theory to data”, AIP Conf. Proc. **756**, 342 (2005).
- [32] A. P. Bakulev, “QCD sum rules: From quantum-mechanical oscillator to pion structure in QCD”, Acta Phys. Polon. **B37**, 3603 (2006).
- [33] A. P. Bakulev, “Pion distribution amplitude and form-factors: Improved Gaussian model of QCD vacuum”, in *New Trends in High-Energy Physics, Proceedings of the Conference, Yalta (Crimea), 16–23 Sept., 2006*, edited by P. N. Bogolyubov, L. L. Jenkovszky, V. V. Magas, and Z. I. Vakhnenko (BITP NASU (Kiev), JINR (Dubna), Kiev, 2006), pp. 203–212.
- [34] A. P. Bakulev and A. V. Pimikov, “Self-consistent Gaussian model of nonperturbative QCD vacuum”, Acta Phys. Polon. **B37**, 3627 (2006).
- [35] A. P. Bakulev and A. V. Pimikov, “Pion quark structure in QCD”, Int. J. Mod. Phys. **A22**, 654 (2007).
- [36] A. P. Bakulev, “Fractional APT in QCD in the Euclidean and Minkowski regions”, in *New Trends in High-Energy Physics, Proceedings of the Conference, Yalta (Crimea), 15–22 Sept., 2007*, edited by P. N. Bogolyubov, L. L. Jenkovszky, and V. V. Magas (BITP NASU (Kiev), JINR (Dubna), Kiev, 2007), pp. 238–245.
- [37] A. P. Bakulev and S. V. Mikhailov, “Resummation in (F)APT”, in *Proceedings of International Seminar on Contemporary Problems of Elementary Particle Physics, Dedicated to the Memory of I. L. Solovtsov, Dubna, January 17–18, 2008.*, edited by A. P. Bakulev *et al.* (JINR, Dubna, 2008), pp. 119–133.
- [38] A. P. Bakulev, “Fractional APT in QCD”, Nonlin. Phenom. Compl. Syst. **11**, 440 (2008).
- [39] A. P. Bakulev, S. V. Mikhailov, A. V. Pimikov, and N. G. Stefanis, “Pion



- structure in QCD: From theory to lattice to experimental data”, *Fizika* **B17**, 217 (2008).
- [40] D. J. Broadhurst, A. L. Kataev, and C. J. Maxwell, *Nucl. Phys.* **B592**, 247 (2001).
- [41] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, and J. H. Kühn, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 012003 (2006).
- [42] Л. Н. Липатов, *ЖЭТФ* **72**, 411 (1977).
- [43] A. L. Kataev and V. V. Starshenko, *Mod. Phys. Lett.* **A10**, 235 (1995).
- [44] A. I. Karanikas and N. G. Stefanis, *Phys. Lett.* **B504**, 225 (2001); *ibid.* **B636**, 330(E) (2006).
- [45] C. J. Bebek *et al.*, *Phys. Rev.* **D9**, 1229 (1974); *Phys. Rev.* **D13**, 25 (1976); *Phys. Rev.* **D17**, 1693 (1978).
- [46] G. M. Huber *et al.*, *Phys. Rev.* **C78**, 045203 (2008).
- [47] V. V. Braguta and A. I. Onishchenko, *Phys. Lett.* **B591**, 267 (2004).
- [48] D. Brommel *et al.*, *Eur. Phys. J.* **C51**, 335 (2007).