

БОГДАНОВ Михаил Рифкатович

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АДИАБАТИЧЕСКИХ  
ИНВАРИАНТОВ В СЛАБО-ДИССИПАТИВНОЙ ТЕОРИИ  
КОЛМОГорова-АРНОЛЬДА-МОЗЕРА.**

Специальность - 05.13.18 Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ.

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук



Москва – 2010.

Работа выполнена в Московском государственном университете инженерной экологии.

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор  
Гданский Николай Иванович.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор Борисов Анатолий Михайлович,  
доктор физико-математических наук,  
профессор Приезжев Вячеслав Борисович.

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ: Институт автоматизации проектирования  
РАН

Защита состоится «28» мая 2010г. в 14<sup>00</sup> часов на  
заседании диссертационного совета Д 720.001.04 при Объединенном  
институте ядерных исследований (Лаборатория информационных  
технологий) по адресу: 141980, г. Дубна, Московской области, ул.  
Жолио-Кюри, д. 6.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке  
Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан « 26 » апреля 2010г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук,  
профессор

*Иванченко*

Иванченко Иосиф Моисеевич

## Актуальность темы.

Нелинейные модели математической физики привлекают внимание в последние десятилетия в связи с развитием наукоёмких приложений. В частности, все промышленно развитые страны объявили о развитии национальных программ в области нанотехнологий вплоть до 2018-2020 гг. с впечатляющими объёмами финансирования. В основе такого современного состояния научных исследований, несомненно, находится широкое распространение компьютерных средств, позволяющих развивать изучение задач, трудных для аналитического исследования.

Уместно подчеркнуть, что в области нанотехнологий исследования сосредотачиваются на малых линейных размерах порядка 100-1000 атомов. Физические явления на этом уровне занимают промежуточное положение между подходами классической физики и квантовой или ядерной физики. Особую роль при этом играют коллективные эффекты, возникающие при движении в сплошной среде ансамблей частиц, значительно меньших по отношению к числу Авогадро. При исследовании такого рода ансамблей частиц в сплошной среде наряду с регулярными эффектами наблюдаются и стохастические свойства динамики.

Построение достаточно простых и универсальных моделей регулярной и стохастической динамики на сегодня апеллирует с одной стороны к нелинейным уравнениям в частных или обыкновенных производных и к методам статистической механики, физики с другой. Наряду с этим выбор моделей широко использует понятие «общности положения», возникшее в теории бифуркаций или катастроф.

Исследование получающихся моделей сочетает в себе использование динамики как в непрерывном, так и в дискретном времени, что вызвано как использованием численных методов, так и возможностью понимания свойств динамики с использованием результатов экспериментальной физики.

Уместно отметить монографию<sup>1</sup>, где описаны качественные результаты по анализу развитой турбулентности с привлечением широкого перечня численных экспериментальных данных, выполненному А.Н. Колмогоровым и повлекшему развитие исследований, впоследствии оформившихся в теорию Колмогорова-Арнольда-Мозера. Для анализа и формулировки выводов работы понадобилось развитие классических методов теории вероятностей и статистики.

Турбулентный режим, возникающий в транспортных процессах газофазных смесей, жидких сред, а так же мелкодисперсных сыпучих

---

<sup>1</sup> Фриш У. Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова. Перевод с англ. А.Н. Соболевского под редакцией М.Л. Бланка. – М.: ФАЗИС, 1998, XIV – 346 с.

веществ представляет большой интерес в связи с разработкой современных новых приборов и наукоёмких производственных технологий. Совершенствование измерительных методов и приборов требует рассмотрения процессов транспорта электронов, фононов, экситонов и дислокаций дефектов в твёрдых телах. Для этого необходимо соответствующие теоретические модели, допускающие цифровую обработку на современных ЭВМ с целью оценки физических и геометрических параметров исследуемых процессов, т.е. необходимы новые подходы и развитие статистических и вероятностных моделей в сочетании с современными представлениями теории динамических систем.

В диссертационной работе представлены результаты исследования в вышеназванных подходах динамики частиц в модели «Bogdanov-map», восходящей к бифуркации Богданова-Такенса на основе систематического численного анализа адиабатических инвариантов динамики, допускающих физическую интерпретацию. В заключение отметим большое количество информации, привлекаемой к анализу динамики: порядка 1000 квазиравновесных состояний транспортируемых частиц ансамблей и порядка 20 физических характеристик, относящихся к квазиравновесному состоянию при фиксированных значениях входных данных модели. Это обуславливает необходимость создания и реализации соответствующих программных комплексов для использования современных мощностей ЭВМ с целью, в частности, исследования изменений свойств модели при различных входных данных.

### Цель работы.

Создать аналитическую модель и реализовать программные средства для оценки механических, физических, геометрических и термодинамических параметров вихревых движений разреженных потоков частиц с целью их использования для разработки средств и систем неразрушающего контроля веществ и материалов с улучшенными характеристиками.

Определить физические свойства квазиравновесных состояний в модели «Bogdanov-map», состояний рассеяния в том числе на основе получения численных значений адиабатических инвариантов динамики, имеющих физическую интерпретацию с использованием методов статистической механики и физики.

### **1. Постановка задачи** математического моделирования.

Разработка новых фундаментальных основ исследования динамики пробных частиц в окрестности странного аттрактора на примере ото-

бражения фазовой плоскости на себя, называемого в литературе “Bogdanov-тар”, с учётом новых результатов теории динамических систем:

а) развитие методов визуализации стохастических и регулярных структур в фазовом пространстве с целью вычисления периодических орбит основного отображения, а также их геометрических характеристик, и их программная реализация на ЭВМ;

б) разработка фундаментальных основ отбора и методов оценки временных средних динамической системы на плоскости в дискретном времени, допускающих интерпретации в рамках понятий математической физики, статистической в том числе;

в) разработка и обоснование алгоритмов расчёта временных средних с помощью адиабатических инвариантов динамики с целью перехода от микромодели динамики к макропараметрам классической термодинамики;

г) программная реализация на ЭВМ разработанных алгоритмов с целью получения численных оценок параметров динамики;

д) связь результатов расчётов с подходящими литературными данными;

## **2. Физическая постановка задачи - моделирование движения пробной частицы в окружающей сплошной среде.**

Предполагается, что частица движется свободно (прямолинейно с постоянной скоростью) в течение постоянного пролётного времени  $\Delta t$ , по истечении которого она перерассеивается с учетом поля внешних сил. Внешние силы представляют собой потенциальную составляющую, отвечающую ангармоническому потенциалу на прямой и слабо-диссипативное аддитивное возмущение, представляющее собой силу трения с коэффициентом трения, являющимся аффинной функцией на прямой. Свободный член аффинной функции отвечает кинематической вязкости, а линейный член может в подходящих случаях интерпретироваться в качестве результата процесса теплообмена частицы с окружающей средой по закону Фурье.

Задача – исследовать физические свойства квазиравновесных состояний динамики пробной частицы (или их ансамблей).

## **3. Математическая постановка задачи – изучение отображения фазовой плоскости на себя, имеющее вид:**

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \\ y_{n+1} = y_n + k \cdot x_n (1 - x_n) + (\varepsilon + \mu x_n) y_n \end{cases}$$

где  $k \in (0.4; 4.2)$ ,  $\varepsilon, \mu \sim 10^{-5}$  - параметры отображения,  $(x_n, y_n)$  отвечают точке перерасеяния пробной частицы.

Задачей является изучение временных средних величин на фазовом пространстве, имеющих физический смысл, при итерациях отображения.

Результаты эргодической теории динамических систем сводят изучение временных средних к рассмотрению средних вдоль периодических орбит динамической системы в дискретном времени.

Таким образом, мы приходим к необходимости нахождения периодических орбит рассматриваемого отображения, определения их топологического типа и вычисления средних величин вдоль этих периодических орбит.

#### **4. Прикладная постановка задачи.**

При анализе движения в сплошной среде волн возбуждения (экситонных, фононных, дислокаций дефектов), ударных волн в газовых средах важной задачей является описание механизмов захвата частиц окружающей среды и расчёт физических параметров соответствующих кинетик в транспортных процессах. В частности, можно рассматривать вихревые движения вдоль прямолинейной оси (труба Ранка), вихревые движения вокруг циклически замкнутой оси или движения частиц вдоль плоскости дислокаций в твёрдом теле, струйные течения в жидкости или газе и т.п.

Получить следствия для прикладных задач механики разрушений, развитой турбулентности в вихревых движениях газовых, жидких и мелкодисперсных порошковых сред.

#### Методы исследования.

Для исследования свойств вихревых движений и самоорганизующихся квазиравновесных структур в турбулентных потоках используется модель движения частиц и их ансамблей с перерасеянием в поле сил ангармонического осциллятора с малыми силами вязкости.

В работе используются методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений для обоснования модели, классификации типов квазиравновесных состояний. Численная реализация метода Ньютона решения нелинейных функциональных уравнений для вычисления статистически значимого набора квазиравновесных состояний динамики в изучаемой модели. Вычисление адиабатических инвариантов квазиравновесных состояний, позволяющих оценивать температуру, давление, число Рейнольдса, коэффициенты теплоёмкости и теплопроводности. Интерпретация численных результатов с помощью методов математической физики.

### Научная новизна.

Получены новые важные результаты о физических параметрах квазиравновесных состояний динамики ансамблей частиц при транспорте в окружающей сплошной среде: распределение чисел Рейнольдса, квазистационарные уровни энергии, распределение давлений, теплопроводности и теплоёмкости. Полученные результаты показывают уточнённые новые сценарии перехода к развитой турбулентности, механике микро-разрушений на атомном уровне и т.п. и позволяют прогнозировать свойства материалов для создания новых приборов и методов неразрушающего контроля объектов исследования, а так же улучшать их характеристики.

### Практическая и теоретическая ценность.

В диссертационной работе предложены новые методы оценки физических параметров потоков частиц на основе адиабатических инвариантов динамики в рамках слабо-диссипативной версии теории Колмогорова-Арнольда-Мозера. Впервые исследовано возмущение сил ангармонического потенциала на прямой силами малой вязкости переменного знака. Результаты доведены до конкретных числовых величин таких физических параметров квазиравновесных состояний динамики как потенциальная энергия, кинетическая энергия, длина свободного пробега, статистики периодов движения, распределение чисел Рейнольдса в зависимости от периода, коэффициентов теплоёмкости и теплопроводности, а также давления. Получены изохоры, изобары, изотермы соответствующих состояний.

По сравнению с предыдущими исследованиями, например эргодической теорией, предложены и реализованы на компьютерной базе методы анализа модели, сочетающей как стохастические, так и регулярные составляющие динамики, что определяет направления дальнейшего развития традиционных подходов теории динамических систем, вероятностей, стационарных случайных процессов как в теоретических, так и в компьютерных разработках.

На основе полученных численных данных получены новые механизмы возникновения микро-разрушений в твёрдом теле, новые механизмы возникновения и релаксации развитой турбулентности струйных течений в гидро(газо)динамике.

Перечисленные результаты в приложениях позволяют оценивать эффекты нелинейной динамики в самоорганизующихся структурах с оценкой числа частиц в ансамбле. В частности, результаты работы позволяют повышать эффективность дожигания отходов как бытовых, так и

в двигателях внутреннего сгорания; каскадов ожигения газа на основе эффекта Ранка; препятствовать возникновению микроразрушений и микродефектов в используемых материалах.

Положения, выносимые на защиту:

1. Основной результат 1-й главы. Вихревые движения ансамблей частиц в сплошной среде описываются одномерным движением вблизи оси вихря. Движение частицы можно предполагать свободным в течение пролётного времени. Моделирование динамики частицы в окружающей сплошной среде требует рассматривать аддитивные слабо-диссипативные возмущения гамильтоновых систем, причём возмущающие добавки могут являться силами возбуждения. В одномерном случае общего положения простейший пример, проявляющий как стохастические, так и регулярные свойства самоорганизующихся структур, даётся отображением Богданова. Отображение Богданова отвечает динамике уравнения Ньютона с подходящей дискретизацией для учета молекулярно-кинетической теории, лежащей в основе представлений о строении вещества.

С этой целью:

А) выполнен анализ изученных ранее низкоразмерных моделей динамики, проявляющих стохастические свойства движений в детерминированных динамических системах, которые либо имеют малое число стационарных точек, либо постоянные коэффициенты трения, в результате обоснована необходимость рассмотрения сил диссипаций с переменным знаком для рассмотрения как регулярных, так и стохастических режимов динамики;

Б) сформулирована связь рассматриваемых в работе динамических систем в непрерывном и дискретном подходе, локальном и глобальном варианте динамики, что позволяет формулировать результаты расчётов адиабатических инвариантов в терминах математической физики;

В) сформулирована задача нахождения периодических решений в дискретной модели и исследования дискретных инвариантов динамики, сочетающей как источники частиц так и стоки, наряду с рассеивающими квазистационарными режимами динамики.

2. Основным результатом второй главы является описание зависимости от периода периодического движения пробной частицы в окружающей среде таких адиабатических инвариантов динамики, как полная, кинетическая и потенциальная составляющие энергии частицы, средняя длина пробега, статистический вес квазиравновесных со-



стояний и т.д. В соответствии с топологией периодической орбиты в фазовом пространстве интенсивные адиабатические инварианты показывают «насыщение», т.е. выход на постоянные асимптотические значения; экстенсивные (кумулятивные) показывают линейный рост в зависимости от периода. В результате впервые получено и проанализировано большое количество квазиравновесных состояний ( $\sim 10^3$ ) и их физико-механических характеристик ( $\sim 10^4$ ) с учётом их взаимных зависимостей.

Для получения указанных результатов развиты, обоснованы и программно реализованы:

А) методы расчёта по Ньютону периодических орбит на основе визуализации стохастических и регулярных структур в фазовом пространстве с привлечением новых результатов теории динамических систем;

Б) фундаментальные методы оценки механических, гидродинамических, термодинамических и геометрических характеристик динамики для регулярных и стохастических компонент динамики в дискретном времени: полная энергия, кинетическая составляющая энергии, длина свободного пробега, средний модуль скорости, числа Рейнольдса, давление, температура, объём, коэффициенты теплопроводности и теплоёмкости, центр тяжести, геометрический центр, амплитуда вихревых движений.

В) алгоритмы расчёта временных средних с помощью адиабатических инвариантов динамики с целью перехода микромодели динамики к макропараметрам классической термодинамики.

«Хаотическое» поведение решений в области стохастической диффузии Арнольда по прошествии конечного времени может сопровождаться «фокусировкой» в соответствии со статистическим весом состояний «out», что и приводит к самоорганизации устойчивых структур в транспортных процессах. В области периодов порядка  $10^3 \div 10^4$  наблюдается фазовый переход I-го рода: точка перегиба абсолютной температуры и скачок производной давления. Заселение высоко периодичных состояний обязано падению давления в соответствующих энергетических уровнях состояний «out».

Подробно излагается научная основа разработки алгоритмического и программно-технического обеспечения процессов обработки информации и представления результатов исследований.

3. Основным результатом третьей главы является предложение новых механизмов возникновения микрозон в окружающей среде с физическими параметрами на 2 или 3 порядка выше нормальных парамет-

ров. В качестве параметров здесь фигурируют температура, давление, коэффициенты теплопроводности, теплоёмкости и т.п. Одним из наиболее известных практических примеров указанных явлений является движение газа в трубе Ранка, использованное П.А. Капицей в нижних каскадах установок для ожижения гелия. Для современных технологий полученные оценки параметров позволяют прогнозировать динамические эффекты, позволяющие повышать информационную и метрологическую надёжность приборов и средств контроля в процессе эксплуатации и диагностики приборов контроля. На примере возникновения и развития дефектов при циклическом нагружении металлических стержней получено качественное согласие с возникновением каверн, обязанных повышению температуры, а также микросколов, обязанных понижению температуры, в образце.

В результате предложены новые механизмы возникновения микроразрушений в твёрдом теле.

Апробация результатов работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

Международный научный симпозиум по проблемам механики деформируемых тел, посвященный 95-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. - М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006г.

IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Нижний Новгород, Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского, 2006г.

XXXVI Международная конференция по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами. - М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 30 мая-1 июня 2006г.

Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная памяти И.Г. Петровского. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 21-26 мая 2007г.

XXXVII Международная конференция по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами. - М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 29-31 мая 2007г.

IV Международная научно-практическая конференция «Энергетические проблемы индустриальных мегаполисов». - М.: МГУ ИЭ, 5-7 июня 2007г.

Международная конференция «Анализ и особенности», посвященная семидесятилетию Владимира Игоревича Арнольда. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 20-24 августа 2007г.

IX Международный симпозиум «Инженерные и технологические исследования для устойчивого развития». – М.: МГУ ИЭ, 21-24 ноября 2007г.

Научная конференция студентов, магистрантов и аспирантов МГУ ИЭ – М.: МГУ ИЭ, 15-18 апреля 2008г.

Международная научно-техническая конференция «Экологические проблемы индустриальных мегаполисов» Донецк-Авдеевка. – Донецк: ДонНТУ, 21-23 мая 2008г.

XXXVIII Международная конференция по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами. - М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2008г.

Международная конференция «Дифференциальные уравнения и топология», посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 17-22 июня 2008г.

Международная конференция «DIFF2008». Суздаль – Владимир, Владимирский государственный университет, 27 июня – 1 июля 2008г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 17 работах, список которых приведён в конце автореферата.

Личный вклад автора в проведении исследований и получении результатов заключается в предложениях по вычислению адиабатических инвариантов в рамках слабо-диссипативной версии теории КАМ, а так же их физико-механических или термодинамических интерпретациях. Наряду с этим также автором предложены подходы сравнения расчётных данных с экспериментальными. С этой целью автором выполнена большая работа по разработке алгоритмов выполняемых расчётов и их программной реализации, а также выполнены необходимые практические вычисления с последующей подготовкой иллюстраций в виде графиков взаимозависимостей адиабатических инвариантов.

Объём и структура диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, приложения, списка литературы. Полный объём диссертации составляет 169 страниц, библиография 140 наименований. Формулы, таблицы, рисунки нумеруются с помощью трёхзначных индексов, где первый индекс – номер главы, второй индекс – номер параграфа в главе, третий индекс - порядковый номер внутри параграфа. Во введении нумерация однозначная сквозная.

## Основное содержание работы.

Во **введении** обоснована актуальность проблемы, определены цель и задачи исследования. Транспортные процессы широко распространены в технических приложениях ввиду изучения кинематики движения в рабочих средах как газовых, жидких, так и порошковых смесей. Классические методы механики сплошной среды испытывают традиционные трудности при описании струйных течений и сильно развитой турбулентности. Учёт молекулярно-кинетической теории строения вещества в подходах механики сплошных сред сталкивается с трудностями детального описания процессов перераспределения частиц в потоках, что вызывает проблемы в численных реализациях даже на современных ЭВМ. С принципиальной точки зрения речь идёт об исследовании так называемой хаотической динамики потоков, описываемых как уравнениями в частных, так и в обыкновенных производных. Хаотическая динамика зачастую обязана диффузионным процессам в транспортируемых потоках частиц. В диссертационной работе решается задача исследования как диффузионных и регулярных компонент транспортируемого потока частиц, так и их взаимодействия. Эта задача существенно отличается от предыдущих рассмотрений ввиду необходимости механизмов подкачки энергии для образования регулярных структур, то есть речь идёт об изучении незамкнутых систем в классическом смысле. Выявление и оценка механических, физических и геометрических параметров регулярных и связанных с ними стохастических структур является основной задачей диссертационной работы. Знание указанных параметров позволяет разрабатывать новые приборы, методики экспериментальных работ, а также определять оптимальный режим их эксплуатации.

Сформулированы основные положения, выносимые на защиту, охарактеризованы научная новизна и прикладная ценность полученных результатов. Кратко изложено содержание диссертации.

**Первая глава** содержит обзор результатов предыдущих исследований по тематике диссертации и состоит из трёх параграфов, наряду с постановкой основных задач исследования.

В *параграфе 1* излагаются наиболее важные примеры динамических систем как в непрерывном, так и в дискретном времени, которые появились во второй половине XX-го столетия. Эти примеры продемонстрировали стохастические свойства решений динамических систем, обязанные их сложной топологии в фазовом пространстве, апеллирующей к фрактальным множествам.

Система Лоренца появилась в 1963г. и представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений или векторное поле в <sup>3</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy \end{aligned} \right\}.$$

Система Хенона-Хейлеса. В 1964г. появился пример нетривиальной динамики в гамильтоновой системе следующего вида:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (p_j^2 + q_j^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3; \quad \begin{cases} \dot{p}_j = -\partial H / \partial q_j \\ \dot{q}_j = \partial H / \partial p_j \end{cases}.$$

В 1976г. появился пример Хенона двумерной динамической системы в дискретном времени.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y + 1 - ax^2 \\ bx \end{pmatrix}.$$

В 1978г. Фейгенбаум обнаруживает проявление стохастических свойств динамики в одномерной дискретной динамической системе, известной давно и называемой логистическим отображением:

$$x \rightarrow rx(1-x).$$

В параграфе 2 излагаются мотивировки появления слабо-диссипативной версии теории КАМ, а так же основной пример, наиболее изученный на сегодня.

В 70-е годы появилась бифуркация Богданова-Тakensа, решающая проблему построения наиболее простого модельного локального примера семейства векторных полей, в котором снимается двукратное вырождение стационара:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \varepsilon + x^2 + \mu y \pm xy \end{aligned} \right\}, \text{ где } \varepsilon, \mu - \text{ вещественные малые параметры.}$$

метры.

Разностная схема Эйлера первого порядка для численного исследования решений динамических систем семейства выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h * y_n \\ y_{n+1} &= y_n + h * \dot{y} \Big|_{x=x_n, y=y_n}, \end{aligned}$$

где  $h$  - шаг дискретизации,  $(x_n, y_n)$  -  $n$ -й узел дискретизации, а  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  - следующий узел.

Наряду с явными схемами Эйлера рассматриваются полуявные:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h * y_{n+1} \\ y_{n+1} &= y_n + h * \dot{y} \Big|_{x=x_n, y=y_n} . \end{aligned}$$

Полуявная схема Эйлера обладает рядом достоинств, выгодно отличающих её от явной схемы Эйлера: она учитывает поток тепла в форме закона Фурье на свободном пробеге на шаге дискретизации. Таким образом, мы рассматриваем движение частицы, которая через шаг дискретизации (постоянный в собственном времени) меняет направление движения, а на пути свободного пробега взаимодействует с окружающей средой по закону Фурье.

Нормализация полуявной схемы Эйлера с помощью подходящего параметра ренормализации  $\lambda$  даёт трёхпараметрическое семейство отображений плоскости на себя

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_{n+1} \\ y_{n+1} &= y_n + kx_n(x_n - 1) + (\varepsilon + \mu x_n)y_n \end{aligned} \right\} . \quad (1)$$

Последнее семейство в литературе имеет название «Отображение Богданова»<sup>2</sup>.

*Третий параграф* посвящён изложению основ вычислительных методов анализа адиабатических инвариантов в слабо-диссипативной версии теории КАМ.

Существуют следующая общеизвестная классификация периодических орбит по топологическим типам в зависимости от собственных чисел, обозначаемых через  $\lambda$ , матрицы Якоби, обозначаемой через  $A$ , отображения (1) или его подходящих итераций:

1.  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{R} (Tr^2 A > 4DetA)$ :

Седловой тип:  $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| > 1$

$(TrA - DetA > 1, TrA + DetA > -1, TrA > 0$  и

$TrA - DetA < 1, TrA + DetA < -1, TrA < 0)$ ;

Узловой тип (устойчивый):  $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1 (-1 < DetA < 1)$ ;

---

<sup>2</sup> Arrowsmith D.K., Cartwright J.H.E., Lansbury A.N., Place C.M. The Bogdanov Map: bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1993, v.3, N.4, 803–842c.

Узловой тип (неустойчивый):  $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| > 1$  ( $DetA > 1, DetA < -1$ );

2.  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, Im\lambda \neq 0$  ( $Tr^2 A < 4DetA$ ):

Фокус (устойчивый):  $Re < 1$  ( $TrA < 2$ );

Фокус (неустойчивый):  $Re > 1$  ( $TrA > 2$ );

Удобно анализировать условия (1.) и (2.) с помощью диаграммы на плоскости ( $DetA, TrA$ ). Бифуркационными границами будут линии:

$$DetA = \frac{1}{4}Tr^2 A, DetA = TrA - 1, DetA = -TrA - 1, TrA = 2 \text{ при } DetA > 1.$$

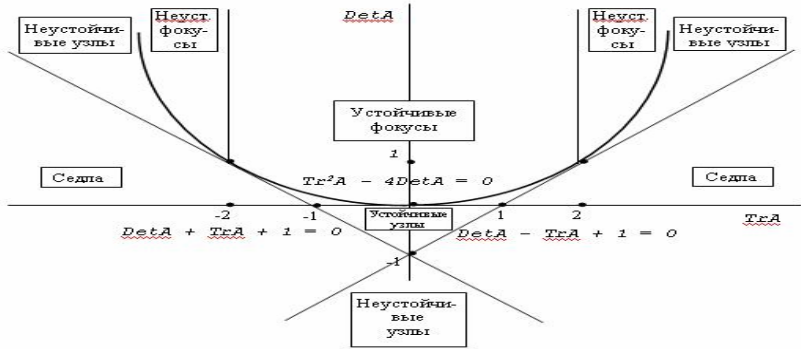


Рис. 1. Диаграмма топологического типа неподвижных точек диффеоморфизма плоскости на себя. Парабола и три прямых разбивают плоскость ( $DetA, TrA$ ) на 9 областей: в каждой области топологический тип либо седло, либо устойчивый или неустойчивый узел или фокус.

Численные расчёты показывают, что при  $\varepsilon, \mu \cdot 10^{-5}$  отображение (1) может иметь до  $10^3$  периодических орбит, причём период меняется в пределах  $1-10^8$ . В частности, приведены результаты расчетов для значений параметров, указанных в таблице 1. Здесь  $h$  - безразмерный шаг дискретизации:  $h^2 = k$ .

Табл. 1.

№	$\varepsilon$	$k$	$h = \sqrt{k}$	$\mu$	$x_0 = -\varepsilon/\mu$	Макросимметрия
1	-1.0E-5	1.26150	1.123	5.80E-5	0.17000	6
2	-1.0E-5	1.53000	1.237	9.80E-5	0.10204	5
3	-1.0E-5	2.02955	1.425	2.85E-4	0.03500	4
4	-7.0E-6	2.83910	1.685	2.53E-4	0.02767	3

В столбце  $X_0 = -\varepsilon/\mu$  приведено значение абсциссы нуля «коэффициента трения»  $f(x)$ . При  $f(x) < 0$  мы имеем диссипацию энергии пробной частицы, а  $f(x) > 0$  отвечает возбуждению динамики.

Параметры  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $k$  выбирались из соображений охватить все случаи маленьких значений макросимметрии динамики (1). Здесь слово макросимметрия означает наличие периодической орбиты с соответствующим периодом и максимальной площадью бассейна притяжения орбиты, т.е. статистическим весом. На рис. 2 представлена иллюстрация макросимметрии порядка 4. По горизонтальной оси меняется координата  $x$ :  $-0.5 \leq x \leq 1$ ; по вертикальной оси координата  $y$ :  $-0.5 \leq y \leq 0.5$ . На рис. 3 показана в увеличенном масштабе окрестность одной точки из двух периодических орбит порядка  $n = 462$ . Видно, что окрестность одной периодической орбиты «одета» 4 «лепестками», а другой 5 «лепестками».

Несложно оценить размер этой окрестности. Площадь области захвата всей периодической орбиты складывается из приблизительно равных по площади (так как  $\varepsilon, \mu \ll 1$ ) 462 частей. Площадь одной части оценивается как  $\pi r^2$ . Поэтому

$$462 \cdot \pi r^2 < 1.5 \cdot 1, \quad r < \sqrt{\frac{1.5}{\pi \cdot 462}} \approx \frac{1}{30}.$$

Другими словами размеры «лепестка» в нормировке (1) порядка  $10^{-2}$ . Таким образом, для периодических орбит с порядком  $10^8$  мы имеем размеры структур (асимптотически (не)устойчивых) порядка  $10^{-8} \div 10^{-9}$ .

Анализ адиабатических инвариантов вдоль периодических орбит таких как: средняя энергия, средняя длина пробега и т.д. разбивает периодические орбиты на группы (кортежи), в которых адиабатические инварианты ведут себя систематическим образом (например, «насыщаются» к постоянной величине с ростом периода). Систематическое поведение адиабатических инвариантов обязано топологии расположения в фазовом пространстве периодических орбит кортежа (см. иллюстрации).

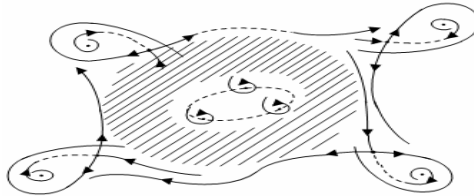


Рис. 2. Схематическое расположение орбит типа “in” в фазовом пространстве и разделяющей их области стохастической диффузии Арнольда.



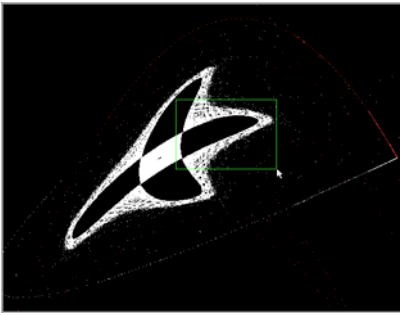


Рис. 3. Иллюстрация случая макросимметрии 4-го порядка.

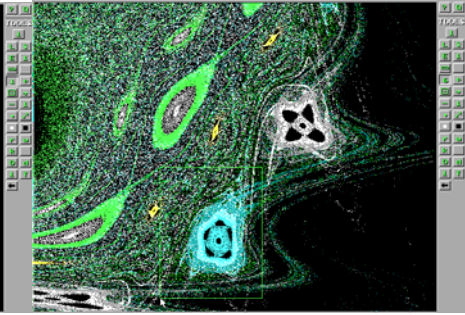


Рис. 4. Увеличенное изображение двух седловых орбит одинакового порядка 462, но с разными структурами.

**Вторая глава** содержит необходимые математические определения и результаты, лежащие в основе реализации излагаемых компьютерных исследований. Наряду с изложением программных особенностей приводятся основные результаты, полученные в работе.

В *параграфе 1* определяются адиабатические инварианты в дискретном времени, апеллирующие к временным средним вдоль периодических орбит.

**Определение.** Периодическая орбита динамической системы в дискретном времени является решением функционального уравнения следующего вида:

$$g^N(x_0) = x_0, \quad (2)$$

где неизвестными, подлежащими определению, являются дискретная натуральная величина  $N$  и точка  $x_0$  в фазовом пространстве.

Классификация линейных динамических систем, приведённая в главе 1, недостаточна для исследования нелинейных динамических систем. Поэтому в параграфе 1 главы 2 излагаются последние результаты об исследовании нелинейных динамических систем, лежащие в основе разработанных и реализованных численных алгоритмов исследований адиабатических инвариантов в слабо-диссипативной версии теории Колмогорова-Арнольда-Мозера.

Суть излагаемых результатов заключается в построении специальных моделей динамических систем, так называемых нормальных форм динамических систем как в непрерывном, так и в дискретном времени.

В работе используются нормальные формы динамических систем в дискретном времени (см. табл. 3.) и виды фазовых портретов векторных полей. Однако, эти нормальные формы в свою очередь строятся на базе результатов исследования динамических систем с непрерывным временем. Поэтому для полноты охвата и изложения материала, лежащего в основе работы, излагаются нормальные формы динамических систем с непрерывным временем.

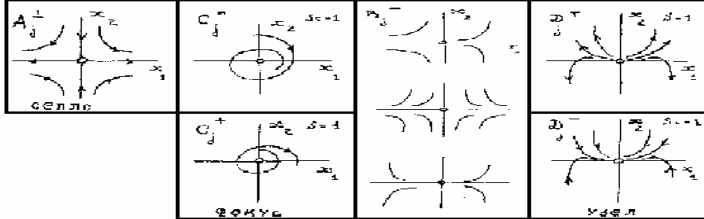


Табл. 2. Фазовые портреты элементарных особых точек векторных полей на плоскости.

Табл. 3. Нормальные формы диффеоморфизмов плоскости в окрестности конечномодалных особых точек.

Имя	$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	$\xi$	$\eta$	$\hat{E}$	Комментарии
	$\begin{pmatrix} e^{\lambda \Delta t} & x_1 \\ e^{\lambda \Delta t} & x_2 \end{pmatrix}$	$x_1 \partial_1$	$x_2 \partial_2$	$s\xi + \lambda \eta$	$\begin{pmatrix} s \\ \lambda \end{pmatrix}$ - нерезонансный
	$e^{s \Delta t} \begin{pmatrix} x_1 + \Delta t x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\ominus$	$x_2 \partial_1$	$s\xi + \eta$	Жорданова клетка, $\Delta t \neq 0$
	$e^{c \Delta t} \cdot e^{-i \Delta t} \cdot j$	$\ominus$	$Id H / 2$	$s\xi + \eta$	$H = \frac{1}{2} \Gamma = x_1^2 + x_2^2, c \neq 0$
$A_j^\pm$	$\ominus^{-1} \begin{pmatrix} e^{\Delta t \ominus - cs} x_1 \\ e^{\Delta t \ominus - cs} x_2 \end{pmatrix}$	$\Lambda \cdot \mathbb{R}$	$-cH^j \xi + sH^j \ominus$	$\xi + \eta$	$\Lambda \cdot \mathbb{R} = m x_1 \partial_1 - n x_2 \partial_2$ , $H = x_1^m x_2^n$
$C_j^\pm$	$e^{-i \Delta t} \cdot \ominus \frac{cs}{2} \cdot j$	$Id H / 2$	$-cH^j \xi + sH^j \ominus$	$\xi + \eta$	$H = \frac{1}{2} \Gamma$ , $\Delta t$ - нерезонансный
$B_j^\pm$	$\begin{pmatrix} Q^{-1} x_1 \\ e^{ps \Delta t} Q^{-cs} x_2 \end{pmatrix}$	$x_2 \partial_2$	$-c x_1^j H + s x_1^{j+1} \partial_1$	$p \xi + \eta$	$H = x_1$ , $p = \pm 1$
$D_j^\pm$	$\begin{pmatrix} e^{-s \Delta t} x_1 \\ e^{s \Delta t} (x_2 + p \Delta t x_1^{j+1}) \end{pmatrix}$	$\hat{E}$	$x_1^j \partial_2$	$s \hat{E} + p \eta$	$\hat{E} = x_1 \partial_1 + j x_2 \partial_2$ $p = 0, \pm 1$

$g$  является фазовым потоком векторного поля  $g_{\Delta t}(x)$ ,  $V \in (\xi, \eta)$ ,  $\Delta t \neq 0$ ,  $\Delta t \in \mathbb{R}$ ,  $[\xi, \eta] = 0$ ,  $s = \pm 1$ ,  $j \in \mathbb{Z}^+$ ,  $c, \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $x = x_1 + i x_2 \in \mathbb{C}$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $(m, n) = 1$ .  $Q = (1 - jsH^j \cdot \Delta t)^{1/j}$ ,  $e = x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2$ .  
 $IdH = \frac{\partial H}{\partial x_2} \partial_1 - \frac{\partial H}{\partial x_1} \partial_2$ .

Параграф 2 посвящён изложению теоретических и практических методов и приёмов исследований, используемых в диссертации.

**Определение** адиабатических инвариантов - величины, медленно меняющиеся с течением времени:

Пусть  $F(x), x \in \mathbb{R}^2$  - функция на фазовом пространстве. Тогда определено временное среднее указанной функции вдоль орбиты динамической системы в дискретном времени:

$$F_n(x_0) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n F(g^j(x_0)).$$

Пусть  $x_0$  - точка периодической орбиты с периодом  $N$ , тогда:

$$\text{если } n = kN, \text{ то } F_n(x_0) = \frac{1}{kN} \sum_{j=1}^n F(g^j(x_0)) * k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F(g^j(x_0));$$

если  $n \neq kN$ , то  $n = kN + q$ , где  $0 < q < N$ , тогда

$$F_n(x_0) = \frac{1}{kN} \sum_{j=1}^n kF(g^j(x_0)) + \frac{1}{kN + q} \sum_{j=1}^q F(g^j(x_0)) \xrightarrow{kN+q \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F(g^j(x_0))$$

Анализ адиабатических инвариантов позволяет получить численные оценки макрохарактеристик динамики ансамблей частиц.

Абсолютную температуру ансамбля можно ввести с помощью распределения Больцмана-Гиббса, вычисляя площадь области отталкивания (притяжения) асимптотически (не) устойчивых орбит

$$S(n) \approx \text{Const} \cdot e^{-n\bar{E}/kT},$$

где  $S(n)$  - площадь одной из примерно равных  $n$  областей ( $\varepsilon, \mu \ll 1$ ),  $\bar{E}$  - средняя энергия,  $T$  - абсолютная температура,  $k$  - подгоночный параметр.

Давление в адиабатическом приближении можно оценивать с помощью соотношения

$$\delta A - p \delta V = 0,$$

где  $\delta A$  - работа сил диссипации вдоль периодической орбиты, а  $\delta V$  - пропорционально среднему якобиану вдоль периодической орбиты (хорошо определено и для гиперболических орбит).

Для состояний типа «out» температура возрастает на  $2 \div 3$  порядка, давление падает на  $2 \div 3$  порядка.

Для анализируемой динамики ансамбля частиц мы в состоянии вычислить аналог числа Рейнольдса, как отношение средних сил давления к средним сил вязкости вдоль периодической орбиты. Для состояний

типа «out» число Рейнольдса падает на  $3 \div 5$  порядков с ростом периода. Соответствующие иллюстрации приведены на рис. 5.

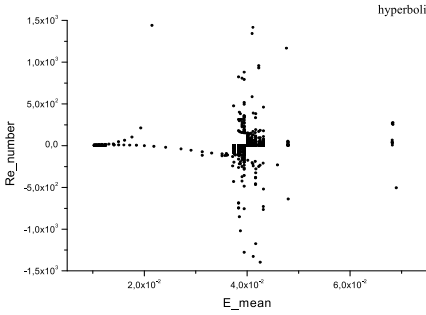


Рис.5. Зависимость числа Рейнольдса от средней энергии отдельного состояния “in”, “out”, hyperbolic.

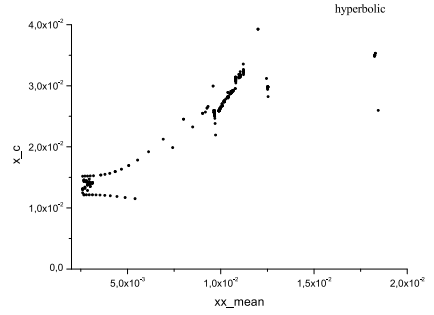


Рис.6. Зависимость геометрического центра от «центра тяжести» состояний “in”, “out”, hyperbolic

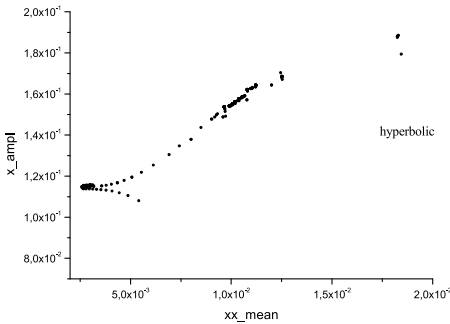


Рис.7. Зависимость амплитуды от «центра тяжести» состояний “in”, “out”, hyperbolic.

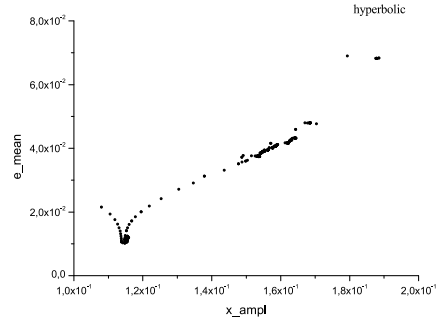


Рис.8. Зависимость средней энергии от амплитуды состояний “in”, “out”, hyperbolic

В параграфе 3 приводятся основные результаты исследования адиабатических инвариантов на основе вышеизложенных приёмов и методов реализации численных исследований в слабо-диссипативной КАМ. На рис. 9, 10, 11 приведены зависимости средней энергии от периода орбиты, температуры от периода, коэффициента теплоёмкости от коэффициента теплопроводности.

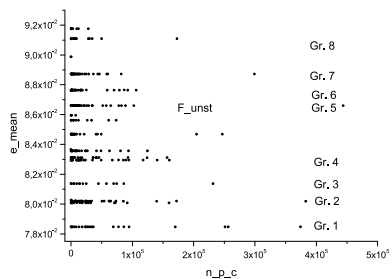
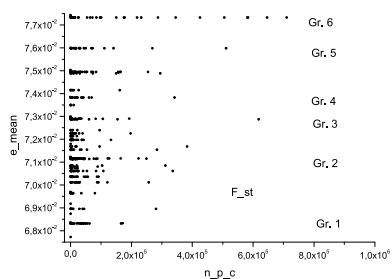


Рис. 9. Средние значения энергии  $\bar{E}$  по вертикальной оси в зависимости от периода орбиты.

На рис. 10 указана зависимость температуры от периода. На рис. 11. указана зависимость коэффициента теплоемкости от коэффициента теплопроводности.

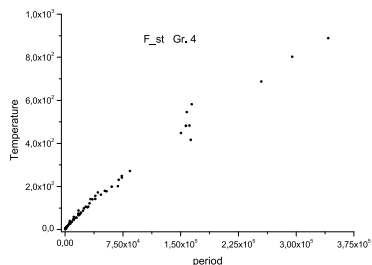


Рис. 10.

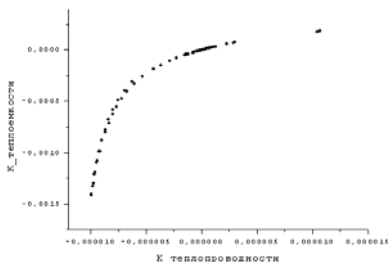


Рис. 11.

На рис. 12, 13 и 14 приведены изотермы, изохоры и изобары вышеуказанных состояний.

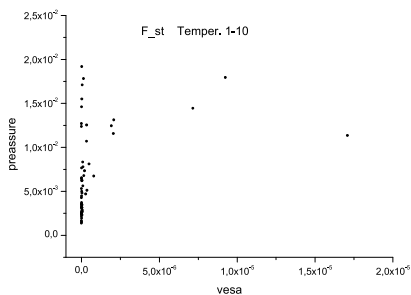


Рис. 12. P-V-диаграмма.

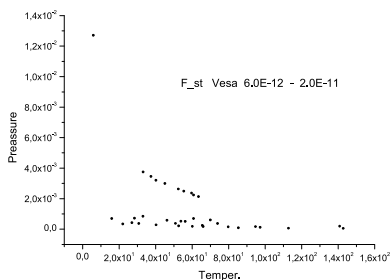


Рис. 13. P-T-диаграмма.

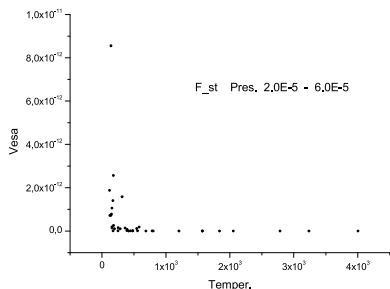


Рис. 14. V-T-диаграмма.

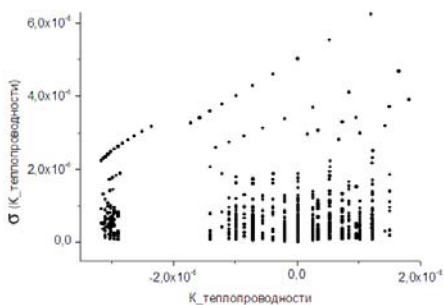


Рис. 15.

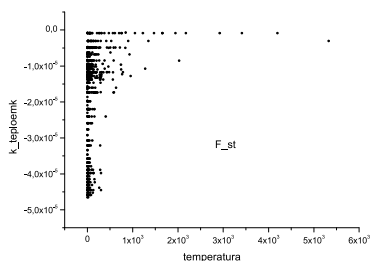


Рис. 16.

На рис. 15, показана зависимость среднеквадратичного отклонения коэффициента теплопроводности от теплопроводности. В тексте диссертации приведены зависимости от амплитуды и центра тяжести. Рис. 16 иллюстрирует зависимость коэффициентов теплоёмкости от температуры.

**Глава третья** посвящена рассмотрению примеров прикладных задач, в которых результаты выполненных исследований предоставляют новые возможности интерпретации и изучения экспериментальных данных с целью прогнозирования свойств материалов в инновационных разработках. В отобранных примерах реализуются вихревые движения частиц или их ансамблей, рассмотренных во второй главе диссертации.

*Параграф 1* главы третьей посвящён изложению связи исследований с классической установкой, называемой «трубой Ранка».

Изложенный выше одномерный пример динамики пробной частицы в подходе слабо-диссипативной версии теории Колмогорова-Арнольда-Мозера показывает, по крайней мере, несколько особенностей выхода на странный аттрактор, которые ускользали от внимания в предшествующие годы:

А) Странный аттрактор (конечномерный) в нелинейном случае может «одеваться» мелкомасштабными асимптотическими устойчивыми вихрями, что препятствует получению традиционных академических асимптотических оценок сходимости, но взамен даёт более реалистичную картину развитых течений жидкости (или газа).

Б) Динамика на асимптотически устойчивом конечномерном аттракторе помимо гиперболических компонент аттрактора может иметь макро (микро) устойчивые структуры в достаточном количестве для создания условий диссипации энергии в процессе транспорта жидкости (или газа).

В) Появление асимптотически устойчивых мелкомасштабных структур показывает трудности восстановления динамики в численных расчётах (шаг решётки как минимум должен быть меньше масштаб такой структуры, что ведёт к необходимости динамической адаптации сетки в расчётах).

Г) Мелкомасштабные асимптотически устойчивые структуры с учётом их статистического веса (экспоненциально затухающего) могут правильно оцениваться при моделировании шума измеряемого сигнала.

Д) Наконец отметим, что изменение знаков параметров и фазовых координат обращают динамику. Поэтому, вышеизложенное можно применить к сценарию возникновения турбулентности.

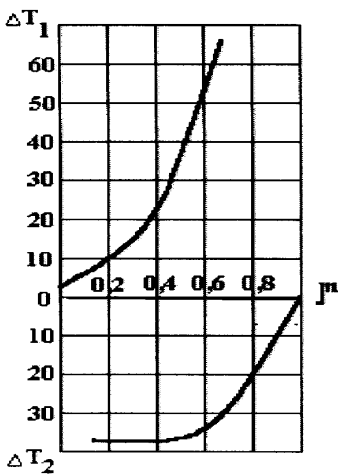


Рис. 17. Температура газа на выходе из ВТ

В частности, мы представляем возможность сравнить экспериментальные и расчётные данные для зависимости температуры от расхода газа. Расчётные данные на рисунке 18 и 20 охватывают большой диа-

Интерпретация основного отображения (1) в качестве отображения последования Пуанкаре вдоль инвариантной кривой динамической системы в непрерывном времени позволяет распространять результаты исследования на нестационарные потоки жидкости или газа вдоль оси движения. Именно такая ситуация возникает в трубе Ранка. В результате расчётные величины адиабатических инвариантов в слабодиссипативной модели Колмогорова-Арнольда-Мозера, изложенные во второй главе, позволяют оценивать физические параметры эффектов прохождения газа в трубе Ранка.

пазон рабочих давлений. На расшифровке рисунков 18 и 20 – рисунках 19 и 21 выделены более узкие «коридоры» рабочих давлений. Часть таких данных качественно совпадает с указанными экспериментальными.

На рис. 18 показана рассчитанная зависимость температуры от расхода, на рис. 19 – в выбранном диапазоне давлений (состояния «out»).

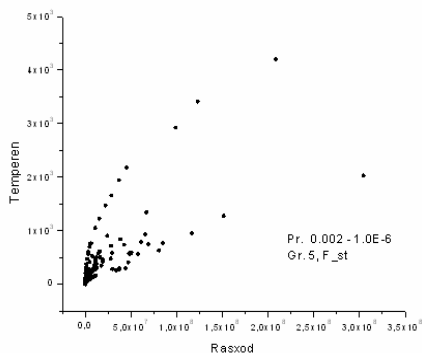


Рис. 18.

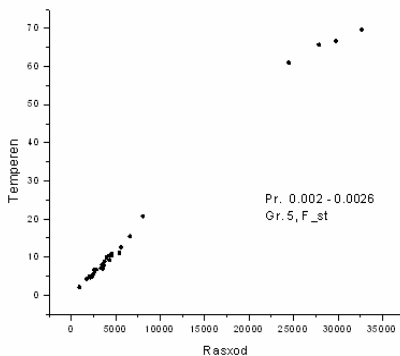


Рис. 19.

На рис. 20 показана рассчитанная зависимость температуры от расхода, на рис. 21 – в выбранном диапазоне давлений (состояния “in”).

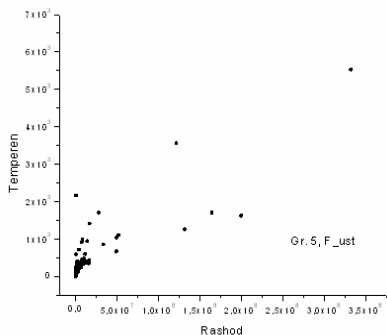


Рис. 20.

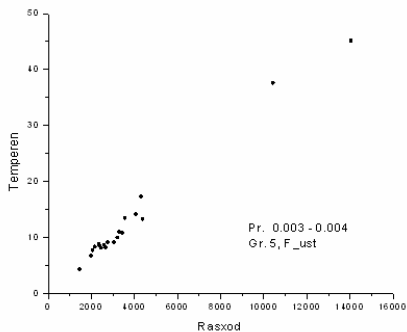


Рис. 21.

В параграфе 2 рассматривается задача возникновения микроразрушений металлического стержня при циклическом нагружении.

Описывается экспериментальная установка по исследованию микроразрушений металлического стержня при циклическом нагружении. Для интерпретации экспериментальных данных в рамках слабо-диссипативной теории КАМ предлагается учесть кооперативные процессы при транспорте, в частности, электронного газа. Особенностью рас-



смотрения является учёт дефектов в твёрдом теле, которые могут быть дислокациями, дисклинациями или рёбрами плоскостных дефектов.

Анализ использует уравнения в частных производных для «быстрых» и «медленных» эффективных полей дислокаций, дополненных точечными источниками и стоками соответствующих полей.

Для указанных уравнений в частных производных стоятся авто-модельные решения, описывающие асимптотики дислокаций. Именно эти авто-модельные решения и показывают возможность использования результатов главы второй для оценки физических параметров материала в рамках слабо-диссипативной КАМ. В частности, приводимые микро-фотографии срезов образца обнаруживают как каверны, обязанные локальному разогреву образца, так и микросколы, обязанные охлаждению образца.



Рис. 22. Структура подповерхностного слоя образца отожженного сплава VT-6 после наработки 25% долговечности: а) X30; продольные макротрещины, б) X300; система продольных и поперечных микротрещин; в) X5000; распространение трещин по границе  $\alpha$ -фазы.

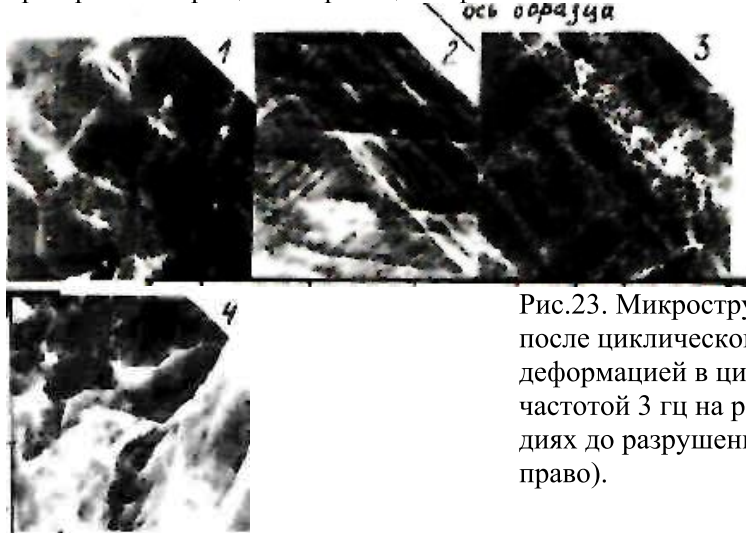


Рис.23. Микроструктуры магния после циклического кручения с деформацией в цикле 1,6% и частотой 3 гц на различных стадиях до разрушения (слева направо).

Результат второй главы объясняет возникновение таких аномалий температуры и давления в терминах состояний «in», «out» слабо-

диссипативной теории КАМ. Необходимые подробности излагаются в тексте параграфа 2 главы 3.

### **Основные результаты диссертационной работы.**

1. Обосновано моделирование динамики частицы в окружающей сплошной среде, которое требует рассматривать слабо-диссипативные возмущения гамильтоновых систем, причём добавки могут являться силами возбуждения. В одномерном случае простейший пример даётся отображением Богданова.

2. Получено описание зависимости от периода периодического движения таких адиабатических инвариантов динамики пробной частицы в окружающей среде, как полная и кинетические и потенциальные составляющие энергии частицы, средняя длина пробега, статистический вес квазиравновесных состояний и т.д. В соответствии с топологией периодической орбиты в фазовом пространстве такие инварианты показывают «насыщение», т.е. выход на постоянные асимптотические значения. «Хаотическое» поведение решений в области стохастической диффузии Арнольда по прошествии конечного времени может сопровождаться «фокусировкой» в соответствии со статистическим весом состояний «out». В области периодов порядка  $10^3 \div 10^4$  наблюдается фазовый переход I-го рода: точка перегиба абсолютной температуры и скачок производной давления. Заселение высоко периодичных состояний (в отличие от принципа Паули) обязано падению давления в соответствующих энергетических уровнях состояний «out».

3. Предложены новые механизмы возникновения микрозон в окружающей среде с физическими параметрами на 2 или 3 порядка выше нормальных параметров. В качестве параметров здесь фигурируют температура, давление, коэффициенты теплопроводности, теплоёмкости и т.п. Одним из наиболее известных практических примеров указанных явлений является движение газа в трубе Ранка, использованное П.А. Капицей в нижних каскадах установок для ожижения гелия.

Струйные течения в окружающей сплошной среде могут отвечать динамике уравнения Ньютона с подходящей дискретизацией для учета молекулярно-кинетической теории, лежащей в основе представлений о строении вещества.

Расчётные данные качественно совпадают с экспериментальными.

### **Список публикаций по теме диссертации:**

1. Богданов Р.И., Богданов М.Р. Новый механизм атомистического разрушения. Тезисы докладов Международного научного симпозиума по

- проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. М.: Изд-во МГУ, 2006г., с.53-54.
2. Богданов Р.И., Богданов М.Р., Нагорных С.Н. Механизм разрушения на локальных разогревах при циклическом кручении стержней. IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Т. III, Нижний Новгород. Изд-во Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2006, с.40.
  3. Богданов Р.И., Богданов М.Р., Нагорных С.Н. Новая природа шума термостимулированной электронной эмиссии со стержней при циклическом кручении. Тезисы докладов XXXVI Международной конференции по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами, М. 30 мая-1 июня 2006г. М.: Изд-во МГУ, 2006г., с.33.
  4. Богданов Р.И., Богданов М.Р. Спектральные данные в слабо-диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера. Тр.сем. «Время, хаос и математические проблемы». Вып.4 / Составители А.И. Козко, А.С. Печенцов. – М.: КДУ, 2009, с. 215-220.
  5. Богданов Р.И., Богданов М.Р. Переход от развитой турбулентности к квазиравновесному состоянию. Научный вестник МГТУ ГА, серия «Математика и физика», 2007, с. 50-55.
  6. Богданов Р.И., Богданов М.Р., Турбулентность в рамках слабо-диссипативной версии теории Колмогорова-Арнольда-Мозера. Сборник тезисов международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной памяти И. Г. Петровского, Москва, 21-26 мая 2007, с. 43-45.
  7. Богданов Р.И., Богданов М.Р. Статистики энергетических уровней при транспорте электронного газа. Тезисы докладов XXXVII международной конференции по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами, Москва, 29-31 мая 2007, с. 10
  8. Богданов Р.И. Богданов М.Р. Турбулентность в рамках слабо-диссипативной версии теории КАМ. Тезисы докладов международной конференции «Анализ и особенности», посвященная семидесятилетию Владимира Игоревича Арнольда 20-24 августа Москва 2007, с. 35-38.
  9. Богданов Р.И., Богданов М.Р. Термодинамика турбулентности в слабо-диссипативной версии теории КАМ. Сборник трудов IV международной научно-практической конференции Энергетические проблемы промышленных мегаполисов», Москва, 5-7 июня 2007, МГУ ИЭ 2007, с. 357-369.
  10. R.I. Bogdanov, S.N. Nagornykh and M.R. Bogdanov. New Nature of the Noise of Thermally Stimulated Electron Emission from Rods under Cyclic

Torsion.: Journal of Surface Investigation, X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques, 2007, с. 157-166.

11. Богданов Р.И., Богданов М.Р. Теплопроводность при транспорте электронного газа. // Тезисы докладов XXXVIII международной конференции по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами. Под редакцией проф. А.Ф. Тулинова. М: Университетская книга, 2008, с.36

12. Богданов Р.И., Богданов М.Р. Статистики в слабо-диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера. Тезисы докладов международной конференции «Дифференциальные уравнения и топология», посвященная 100-летию со дня рождения А.С. Понтрягина, Москва, 17-22 июня 2008. – М: Издательский отдел факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, МАКС Пресс, 2008, с. 100-101.

13. Богданов Р.И., Богданов М.Р. Свойства странного аттрактора в слабо-диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера. Труды международной конференции «DIFF2008», 27 июня – 1 июля 2008. Суздаль – Владимир, Владимирский государственный университет, с. 54-55.

14. Богданов Р.И., Богданов М.Р. Слабо-диссипативная версия теории Колмогорова-Арнольда-Мозера: теория и практика расчетов. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008, т. 48, №3, с.73-90.

15. Богданов Р.И., Богданов М.Р. Структурообразование в слабо-диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера. //ДАН. 2008, т.418, №6, с. 754-758.

16. Богданов Р.И., Богданов М.Р. Тепловые характеристики струйных течений в слабо-диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера. //ДАН. 2008, т.423, №5, с. 1-4.

17. Генералов М.Б., Нагорных М.Б., Богданов М.Р., Богданов Р.И., Митрофанов А.В. Механизм микроразрушения в слабодиссепативной КАМ-теории. Сб. научных трудов МГУ ИЭ «Механика. Теплофизика. Экология», вып. 3, 2006, М.: Издательский центр МГУ ИЭ, с. 3-38.