

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

КОРЗИНИН

Евгений Юрьевич

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ СТАРШИХ ПОРЯДКОВ В  
МЮОННОМ ВОДОРОДЕ И ЛЕГКИХ МЮОННЫХ АТОМАХ

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Дубна 2008

Работа выполнена во ФГУП “Всероссийском научном исследовательском институте метрологии имени Д. И. Менделеева”

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ: доктор физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
С. Г. Каршенбойм (ВНИИМ  
им. Д. И. Менделеева)

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ: доктор физико-математических наук,  
профессор Р. Н. Фаустов (ВЦ имени  
А. А. Дородницына РАН),  
доктор физико-математических наук,  
Э. А. Кураев (ЛТФ ОИЯИ)

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ: Санкт-Петербургский государственный  
университет

Защита диссертации состоится "\_\_\_\_"мая 2009 г. в \_\_\_\_ на заседа-  
нии Диссертационного совета Д720.001.01 при Объединенном институте  
ядерных исследований, 141980, г. Дубна, Московской области, ЛТФ  
ОИЯИ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного  
института ядерных исследований.

Автореферат разослан "\_\_\_\_"апреля 2009 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
кандидат физико–математических наук

А. Б. Арбузов

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы

В диссертации рассматриваются некоторые экзотические двухчастичные атомы. Подобные атомы являются объектами активных теоретических и экспериментальных исследований. Разнообразные прецизионные данные можно получить из спектроскопических измерений, тогда как простота атомов позволяет проводить высокоточные вычисления. В результате появляется возможность проверить фундаментальные теории, ядерные модели, а также измерить различные фундаментальные параметры. В частности, мюонные, пионные, и антипротонные атомы представляют существенный физический интерес в связи с экспериментальным определением различных физических параметров мюонов, (анти)протонов, пионов и атомных ядер. К таким параметрам относятся массы (анти)протона, мюона, пиона, магнитный момент мюона, зарядовые радиусы ядер и параметры сильных взаимодействий (пион-пионных и пион-нуклонных).

Мюонные атомы представляют собой атомные системы, содержащие мюон, масса которого приблизительно в 207 раз больше массы электрона. Это приводит к тому, что мюон находится гораздо ближе к ядру, чем электроны. В результате, даже при наличии в атоме электронов, в ведущих порядках их можно не учитывать и связанный мюон описывается в водородоподобном приближении. Исследования мюонных атомов представляет интерес для целого ряда дисциплин – от физической химии, атомной физики и физики твердого тела до физики ядра и элементарных частиц. Экзотические атомы во многом подобны мюонным атомам, но взаимодействие атомной частицы с ядром в этом случае имеет более сложный характер.

Имеется целый ряд экспериментальных результатов по мюонным и экзотическим атомам. Ведутся и планируются новые эксперименты в этой области (в частности, исследования мюонного водорода). В настоящее время проводятся измерения лэмбовского сдвига, в которых также планируется измерить сверхтонкое расщепление (СТР)  $2s$  уровня мюонного водорода. На стадии разработки находится эксперимент по измерению

СТР основного состояния.

Для того чтобы найти упомянутые выше параметры из эксперимента, необходимо уметь с высокой точностью вычислять квантовоэлектродинамические (КЭД) поправки, теории которых и посвящена представленная диссертация.

В диссертации на примере однопетлевой поляризации вакуума развиты эффективные методы вычисления поляризационных эффектов, основанные на аналитических вычислениях в терминах обобщенных гипергеометрических функций, асимптотических разложениях и приближенных вычислениях. С их использованием найдена поправка к СТР на поляризацию вакуума второго порядка и рассмотрены применения развитых методов к другим задачам, например, к вычислению значения волновой функции в нуле.

### Цель работы

- Развитие эффективных аналитических методов расчета поляризационных поправок на примере однопетлевой поляризации вакуума в нерелятивистском и релятивистском приближениях, в частности, основанных на анализе асимптотического поведения поправок, а также приближенных вычислениях. Эти методы применимы к различным задачам теории экзотических атомов. В связи с этим, в диссертации решаются следующие задачи. Выводятся новые точные представления для поляризационных поправок в терминах стандартных интегралов. Находятся асимптотические выражения для поправок и простые аналитические приближенные формулы.
- Вычисление неизвестной поправки к СТР низших уровней мюонного водорода, обусловленной эффектами электронной поляризацией вакуума второго порядка, что позволяет уточнить значение специальной разности СТР  $1s$  и  $2s$  уровней в мюонном водороде, для которого обсуждаемая поправка дает наибольшую погрешность теоретического значения.

## Научная новизна работы

В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Развита эффективные методы аналитического вычисления поляризационных поправок к уровням энергии водородоподобных атомов для нерелятивистских и релятивистских задач. Получен ряд полезных представлений для нерелятивистских поправок на поляризацию вакуума первого порядка. Получены выражения для релятивистских атомных частиц со спином ноль и  $1/2$ . Результаты применимы, в частности, для учета электронной поляризации вакуума в мюонных, пионных, антипротонных и других экзотических атомах.
2. Получены различные асимптотические разложения для нерелятивистской поправки Юлинга. Результаты применимы для любых состояний экзотических атомов, допускающих использование нерелятивистского приближения. Также получена ведущая поправка к тонкой структуре. Также получены приближенные формулы в терминах хорошо известных гипергеометрических функций  ${}_2F_1$  для произвольного состояния атома. Приближенные результаты одинаково применимы в нерелятивистском и релятивистском случае.
3. Найдена поправка на электронную поляризацию вакуума второго порядка для СТР состояний  $1s$  и  $2s$  в мюонном водороде.

## Научная и практическая ценность работы

Развита эффективные методы вычисления поляризационных поправок, которые могут применяться к ряду задач в мюонных и экзотических атомах. В частности, для вычисления вкладов первого и высших порядков поляризации вакуума в лэмбовский сдвиг и СТР, в величину волновой функции в нуле, в магнитный момент связанного мюона и т.д.

Наиболее полезными могут оказаться результаты, полученные для мюонного водорода, в связи с проводимыми экспериментом по измерению лэмбовского сдвига, в котором предполагается измерить и СТР уровня  $2s$ , а также планирующимся экспериментом по измерению СТР

основного состояния.

### Апробация работы

Работа докладывалась на семинарах Лаборатории 2023 прецизионной физики простых атомов ВНИИМ им. Д. И. Менделеева, Лаборатории теоретической физики ОИЯИ и Кафедры квантовой механики физического факультета СПбГУ. Основные результаты были представлены на международных и всероссийских конференциях, таких как PSAS'2006, PSAS'2008: The international conference on precision physics of simple atomic systems; ICAP'2006: 20th international conference on atomic physics; EXA'2008 & LEAP'2008: International conference on exotic atoms and related topics & International conference on low energy antiproton physics; Всероссийское совещание по квантовой метрологии и фундаментальным физическим константам.

### Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в соавторстве в пяти статьях, приведенных в конце автореферата.

### Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и трех приложений и содержит XXX страниц, XX рисунков и XX таблиц. Список литературы включает XX наименований.

### Содержание работы

**Во введении** обосновывается актуальность исследуемой проблемы, сформулированы основные задачи диссертации, дается краткое содержание отдельных глав.

Большая масса мюона или экзотической частицы приводит к нерелятивистскому характеру некоторых поляризационных поправок. Применимость нерелятивистского приближения соответствует значениям параметра  $\kappa_n$  порядка или много больше единицы, где

$$\kappa_n = \frac{Z\alpha m}{nm_e} \quad (1)$$

– отношение характерного импульса атомной частицы  $Z\alpha m/n$  к массе частицы в поляризационной петле  $m_e$ . Здесь  $m$  – масса атомной частицы,  $n$  – главное квантовое число рассматриваемого уровня энергии.

Значительная часть диссертации посвящена простейшей поляризационной поправке, вкладу потенциала Юлинга. В принципе, подобная поправка может быть вычислена различными способами, например, численно, и сам по себе не представляет реальной проблемы. Основной целью диссертации является разработка методов (при рассмотрении поправки Юлинга), которые могут быть применимы к более сложным поляризационным эффектам, учитывающих отдачу, поляризацию вакуума старших порядков и др.

В основной вычислительной части диссертации рассматривается поправка на двухпетлевую поляризацию вакуума в мюонном водороде, к которой применяются развитые методы.

**В первой главе** исследуются поправки к кулоновскому взаимодействию на эффекты однопетлевой поляризации вакуума в водородоподобном атоме, так называемый потенциал Юлинга.

Однопетлевая поляризационная поправка к кулоновским уровням энергии в этой главе рассматриваются как в нерелятивистском, так и релятивистском приближениях (без разложения  $Z\alpha$ ). Релятивистские результаты получены для частиц со спином  $1/2$ , описываемых уравнением Дирака, и частиц с нулевым спином, описываемых уравнением Клейна-Гордона-Фока. Для дираковских частиц также получено представление для ведущей релятивистской поправки к разности уровней энергии с одинаковыми главными квантовыми числами  $n$  и орбитальным квантовым числом  $l$ , но разными полными моментами частицы  $j$ , то есть поправка к тонкой структуре атомных уровней.

Поправка к энергии атомных уровней на однопетлевую поляризацию вакуума в мюонных атомах была вычислена в нерелятивистском приближении для некоторых низших уровней достаточно давно. Однако, полученные аналитические результаты имели целый ряд недостатков. Их было невозможно обобщить на релятивистский случай, а обобщение вы-

ражений для высоковозбужденных состояний приводило к исключительно громоздким выражениям, возможность аналитической работы с которыми была крайне ограничена. Так, даже простейшие асимптотики для возбужденных уровней не были известны.

В диссертации обсуждаются несколько различных представлений нерелятивистской поправки для произвольных уровней энергии. Ранее было получено лишь представление нерелятивистской поправки Юлинга в терминах частных производных, что удобно не для всех приложений. В первой главе диссертации получены новые представления для этой поправки в терминах конечной суммы стандартных интегралов

$$K_{bc}(\kappa) = \int_0^1 dv \frac{v^2(1-v^2/3)}{(1-v^2)^{b/2}} \left( \frac{\kappa\sqrt{1-v^2}}{1+\kappa\sqrt{1-v^2}} \right)^c. \quad (2)$$

В частности, одно из полученных представлений содержит сумму слагаемых одного знака. Хотя сумма конечная, но для высоковозбужденных состояний она содержит большое число слагаемых и знакоопределенность ряда упрощает контроль за точностью приближенных вычислений.

Отметим, что для  $K_{bc}(\kappa_n)$  известно точное аналитическое выражение, которое содержит обобщенные гипергеометрические функции

$$\begin{aligned} K_{bc}(\kappa) &= K_{1bc}(\kappa) - \frac{1}{3}K_{2bc}(\kappa), \\ K_{abc}(\kappa) &= \frac{1}{2}\kappa^c B\left(a + \frac{1}{2}, 1 - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) \\ &\quad \times {}_3F_2\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2} + \frac{1}{2}, 1 - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}; \frac{1}{2}, a + \frac{3}{2} - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}; \kappa^2\right) \\ &\quad - \frac{c}{2}\kappa^{c+1} B\left(a + \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) \\ &\quad \times {}_3F_2\left(\frac{c}{2} + 1, \frac{c}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}; \frac{3}{2}, a + 2 - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}; \kappa^2\right). \end{aligned}$$

Использование такого представления делает крайне затруднительной дальнейшую аналитическую работу с выражениями для однопетлевых поправок из-за их громоздкости. Далее в диссертации будут обсуждаться различные методы получения асимптотик и простых приближенных выражений для поправки Юлинга.



Точное релятивистское выражение для поправки Юлинга в случае дираковской частицы для произвольного атомного состояния получено в диссертации впервые. Полученный точный релятивистский результат используется для вычисления поправки к тонкой структуре атомных уровней.

Также в первой главе исследуется релятивистская поправка Юлинга для водородоподобного атома, в котором атомная частица обладает нулевым спином, например пион. Такая частица во внешнем поле релятивистски описывается уравнением Клейна-Гордона-Фока, теория возмущений для которого была развита лишь недавно. В диссертации впервые была вычислена релятивистская поправка Юлинга для атома с нулевым спином атомной частицы, находящейся в циркулярном состоянии. Полученное представление во многом аналогично дираковскому случаю. Проведено сравнение поведения вычисленных поправок для частиц с нулевым и полуцелым спинами.

В первой главе были получены точные выражения для нерелятивистской и релятивистской поправок Юлинга, в терминах  $K_{bc}(\kappa_n)$ . Причем нерелятивистскому случаю отвечают целочисленные значения  $b$  и  $c$ , а в релятивистском случае целым является только  $b$ . В случае произвольного состояния полученные представления содержат сумму обобщенных гипергеометрических функций  ${}_3F_2$  с различными аргументами. Такой способ представления поправок затрудняет дальнейшую аналитическую работу, и в частности не позволяет просто оценить изменение величины вклада однопетлевой поляризации вакуума при изменении состояния атома или характерных атомных параметров, например,  $\kappa_n$ .

**Во второй главе** получен ряд простых асимптотик для стандартных интегралов  $K_{bc}(\kappa_n)$ , через которые выражается нерелятивистская поправка Юлинга. Обсуждается асимптотическое поведение нерелятивистской поправки при различных соотношениях параметров задачи. Для высоковозбужденных состояний также используется квазиклассическое приближение, что позволяет провести расчеты, эффективно учитывающие поправки старших порядков по потенциалу Юлинга

Для сходимости гипергеометрического ряда для обобщенной гипергеометрической функции  ${}_3F_2$  достаточно, чтобы ее аргумент был меньше единицы. Однако, для высоковозбужденных состояний ряд быстро сходится только начиная с некоторого большого номера слагаемого, а первые члены ряда одного порядка. Одна из задач этой главы – получение новых выражений для стандартных интегралов, таких чтобы была возможность аппроксимации поправок на поляризацию вакуума несколькими членами асимптотического ряда.

Вторая часть второй главы посвящена методу перестройки общих выражений для поправок Юлинга, позволяющему вместо представления поправок в виде конечной суммы гипергеометрических функций  ${}_3F_2$  записать их в виде бесконечной суммы более простых функций  ${}_2F_1$ . Что более важно, этот метод позволяет аппроксимировать исходные выражения для поправок Юлинга конечной суммой небольшого числа слагаемых с  ${}_2F_1$ . Развитый метод эффективен как для нерелятивистских, так и для релятивистских задач.

Гипергеометрическая функция  ${}_2F_1$  хорошо изучена и для нее известны ряд удобных аналитических представлений и преобразований. Новое представление для однопетлевых поляризационных поправок имеет ряд преимуществ. Оно позволяет проще отслеживать изменения величины поправки при изменении состояния атома или характерных атомных параметров. А также позволяет контролировать сходимость бесконечного ряда и контролировать погрешность упомянутых приближений.

В конце главы обсуждается применение развитого метода приближенных вычислений к различным задачам в мюонных и экзотических атомах. В частности, к вычислению поправки к значению волновой функции атомной частицы в нуле, которое играет важную роль при вычислениях поправок на структуру ядра, а также аннигиляционных эффектов в пионии. Обсуждаются приложения метода к вычислению магнитного момента связанного мюона.

В первой и второй главе диссертации на примере однопетлевых поправок были развиты эффективные методы вычисления вкладов поляриза-

ционных эффектов. В третьей главе они применяются при вычислении поправки на поляризацию вакуума второго порядка для СТР в мюонном водороде.

**В третьей главе** рассматривается СТР  $1s$  и  $2s$  уровней энергии в мюонном водороде. Теоретические вычисления этих величин представляют интерес в связи с тем, что сейчас предпринимаются усилия по их экспериментальному измерению. Сверхтонкое расщепление состояния  $2s$  будет исследовано в рамках идущего эксперимента по измерению лэмбовского сдвига. Также планируется эксперимент по измерению СТР основного состояния мюонного водорода.

Особенностью мюонного водорода является более высокая чувствительность СТР к структуре ядра, что ограничивает возможность его вычисления из первых принципов. Возможный подход к решению проблемы поправок на структуру ядра был предложен в случае обычных легких водородоподобных атомов. Он заключается в рассмотрении специальной разности

$$\Delta E_{21} = 8 \times E_{\text{hfs}}(2s) - E_{\text{hfs}}(1s) . \quad (3)$$

Ее особенностью является то, что ‘жесткие’ вклады в энергию  $ns$  состояний, обычно пропорциональные значению квадрата волновой функции в нуле

$$|\Psi_{nl}(\mathbf{r} = 0)|^2 = \frac{(Z\alpha)^3 m_r^3}{\pi n^3} \delta_{0l} , \quad (4)$$

сокращаются. В результате специальная разность менее чувствительна к эффектам структуры ядра.

Другой особенностью мюонных атомов является доминирование эффектов электронной поляризации вакуума по сравнению с другими КЭД эффектами. Поправка к СТР на однопетлевую электронную поляризацию вакуума для  $1s$  и  $2s$  состояний известна. В третьей главе диссертации вычисляется поправка на двухпетлевую поляризацию вакуума. Это единственная ранее неизвестная величина, которая вносит в СТР  $1s$  уровня поправку порядка  $67$  ppm. Остальные КЭД поправки или меньше, или могут быть получены обобщением результатов для обычного атома водо-

рода.

Вклады различных характерных диаграмм электронной поляризации вакуума второго порядка приведены в следующей таблице.








Вклад	$c_2(1s)$	$c_2(2s)$	$c_2(2p)$
1a 	1.28028	1.30453	0.02425
1b 	1.68287	1.73944	0.05657
2a 	1.85512	1.73785	-0.11727
2b 	3.79665	2.83394	-0.96271
2c 	2.32694	2.05872	-0.26822
3a 	0.92294	0.56352	-0.35942
3b 	0.68104	0.41990	-0.26114
Всего	12.54584	10.65790	-1.88794

Таблица 1: Вклады электронной поляризации вакуума второго порядка в СТР в мюонном водороде. Вклады *1b* и *2b* отвечают полной неприводимой части двухпетлевого поляризованного оператора. Последний столбец отвечает вкладам в специальную разность СТР *1s* и *2s* уровней. На диаграммах зигзагообразной линией обозначено сверхтонкое взаимодействие, а пунктирной – кулоновский обмен. Двойная сплошная линия отвечает редуцированной кулоновской функции Грина атомной частицы.

В результате получено выражение для специальной разности

$$\begin{aligned} \Delta E_{21} = & \left( 127.06(49) + 1.03(1) \frac{\Delta E_{\text{hfs}}^{e\text{Nucl}}(1s)}{\Delta E_{\text{hfs}}^{e\text{Nucl},0}(1s)} \right. \\ & \left. + 1.96(2) \left( \frac{R_E}{R_0} \right)^2 - 0.46(1) \left( \frac{R_M}{R_0} \right)^2 \right) \times 10^{-6} \text{эВ} . \end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое отвечает КЭД эффектам, в том числе оно содержит и найденный в диссертации вклад, равный  $-1.8606 \times 10^{-6}$  эВ. Остальные слагаемые учитывают структуру ядра. Обсуждение точности этого выражения и обсуждение различных возможностей работы с ожидаемыми экспериментальными данными составляют заключительную часть третьей главы.

**В заключении** суммируются результаты, выдвигаемые на защиту.

### На защиту выносятся следующие положения:

- Найдены замкнутые аналитические выражения для поправки Юлинга для различных состояний водородоподобного атома, описываемого как релятивистским уравнением Шредингера, так и релятивистскими уравнениями Дирака или Клейна–Гордона–Фока. Результат получен в виде конечной суммы слагаемых, включающих обобщенные гипергеометрические функции  ${}_3F_2$ . Результат применим для любого отношения массы атомной частицы к массе частицы в поляризационной петле и для любых зарядов ядра  $Z$ . Результат для фермионов получен для произвольного состояния, а для бозонов – для состояний с произвольными главным квантовым числом  $n$  и орбитальным квантовым числом  $l = n - 1$ .
- Получены различные асимптотические и приближенные формулы для поправки Юлинга. В частности, найдены асимптотические формулы при различных значениях  $n$  и отношения характерного атомного импульса к массе частицы в поляризационной петле для нерелятивистского случая. Получена ведущая поправка к тонкой структуре, то есть разница лэмбовских сдвигов для произвольных состояний

с  $j = l + 1/2$  и  $j = l - 1/2$ . Получены общие формулы в терминах хорошо известных гипергеометрических функций  ${}_2F_1$ , которые применимы в нерелятивистском и релятивистском случаях.

- Вычислена поляризационная поправка порядка  $\alpha^2$  для сверхтонкого расщепления состояний  $1s$  и  $2s$  в мюонном водороде, равную для  $1s$  состояния 67 ppm. Уточнено выражение для специальной нормированной разности сверхтонкого расщепления  $1s$  и  $2s$  уровней: найденная поправка составила 1.3% ( $-1.73 \times 10^{-6}$  эВ) и теперь относительная погрешность равна примерно  $4 \times 10^{-3}$ .

### Основные результаты диссертации опубликованы

#### в следующих работах:

- [1] С. Г. Каршенбойм, Е. Ю. Корзинин, В. Г. Иванов, *Сверхтонкое расщепление в мюонном водороде: КЭД поправки порядка  $\alpha^2$* , Письма в ЖЭТФ **88**, 737–742 (2008); Поправка с татъе: там же **89** 240 (2009)
- [2] E. Yu. Korzinin, V. G. Ivanov and S. G. Karshenboim, *Vacuum polarization in muonic and antiprotonic atoms: the fine structure at medium  $Z$* , Eur. Phys. J. D**41**, 1–7 (2007)
- [3] E. Yu. Korzinin, V. G. Ivanov, and S. G. Karshenboim, *Vacuum polarization in muonic and exotic atoms: the Lamb shift at medium  $Z$  and high  $n$* , Can. J. Phys. **85**, 551–561 (2007)
- [4] S. G. Karshenboim, V. G. Ivanov and E. Yu. Korzinin, *Vacuum polarization in muonic atoms: the Lamb shift at low and medium  $Z$* , Eur. Phys. J. D**39**, 351–358 (2006)
- [5] S. G. Karshenboim, E. Yu. Korzinin and V. G. Ivanov, *The Uehling correction to the energy levels in a pionic atom*, Can. J. Phys. **84**, 107–113 (2006)