ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

Куликов Кирилл Вячеславович

Особенности динамики и вольт-амперных характеристик джозефсоновских наноструктур, обусловленные резонансными, топологическими и неравновесными явлениями

01.04.02 – теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Шукринов Юрий Маджнунович

Научный консультант

к. ф.-м. н.

Рахмонов Илхом Рауфович

Дубна – 2018

Оглавление

Введение . . . 4
1. Актуальность темы исследования . . . 4
2. Цели и задачи работы . . . 8
3. Результаты работы, выносимые на защиту . . . 9
4. Научная новизна и практическая значимость работы . . . 9
5. Апробация работы . . . 11
6. Личный вклад автора . . . 16
7. Структура и объем работы . . . 16

Глава 1. Резонансные явления в системе связанных джозефсоновских переходов, шунтированной резонансным контуром . 19
1.1. Модель связанных джозефсоновских переходов, шунтированных резонансным контуром . . . 20
1.2. Резонансная ветвь на вольт-амперной характеристике . . . 25
1.3. Свойства ступеньки Шапиро на резонансной ветви . . . 30
1.4. Дополнительный параметрический резонанс в системе связанных джозефсоновских переходов, шунтированных резонансным контуром . . . 36
1.5. Модуляция осцилляций напряжения и заряда, возникающая под воздействием внешнего периодического воздействия . . . 40

Глава 2. Джозефсоновский переход с нетривиальным барьером 45
2.1. Модель джозефсоновского перехода с нетривиальным барьером шунтированного сопротивлением и емкостью . . . 47
2.2. Пертурбативный анализ ступенек Шапиро . . . 49
2.3. Нечетные ступеньки Шапиро в джозефсоновском переходе с нетривиальным барьером . . . 54

2.4. Лестничная структура субгармоник на вольт-амперной характеристике . . . 56

2.5. Джозефсоновский переход с двумя компонентами сверхпроводящего тока . . . 59

Глава 3. Система связанных джозефсоновских переходов в неравновесных условиях . . . 64

3.1. Модель системы связанных джозефсоновских переходов с разбалансом ветвей спектра элементарных возбуждений квазичастиц . 65

3.2. Ступенька Шапиро в неравновесных условиях . . . 68

Заключение . . . 75

Список литературы . . . 77

Введение

1. Актуальность темы исследования

Одним из наиболее перспективных объектов джозефсоновских наносистем являются высокотемпературные сверхпроводники (ВТСП) [4, 1, 2, 3]. Популярность ВТСП систем связана не только с высокой критической температурой, дающей надежду получить сверхпроводимость при комнатной температуре, но и с обнаруженным интенсивным когерентным терагерцовым электромагнитным излучением из таких систем, что дает широкие возможности для различных применений [5]. ВТСП материалы, такие как $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$, являются слоистыми материалами, где сверхпроводящие (S-слои) и диэлектрические слои образуют систему связанных джозефсоновских переходов (СДП) [6]. Таким образом, наблюдаемый сигнал в терагерцовой области является излучением из системы СДП. Основными направлениями исследований в этой области служат определение механизма излучения и поиск новых возможностей для увеличения его мощности, которая, согласно последним данным, составляет от 150 до 600 мкВт при частоте $0,5$ ТГц с использованием нескольких последовательно соединенных систем СДП. Особый интерес представляет то, что пик интенсивности излучения связан с некоторой областью на вольт-амперной характеристике (ВАХ), где наблюдается параметрический резонанс [7, 8]. В работе [8] было показано, что при параметрическом резонансе на S-слое возникают колебания заряда, которые могут иметь сложный характер в зависимости от числа переходов в стеке, параметра связи, параметра диссипации и граничных условий. Фурье-анализ временной зависимости заряда на S-слое показывает наличие различных частот в спектре, в частности, частоту Джозефсона, частоту продольной плазменной волны (ППВ) и их комбинации. Наблюдаемая ППВ может быть получена в виде решения системы уравнений в рамках модели емкостно-связанных джозефсоновских переходов (CCJJ-модели). Эта модель была предложена

Кояма и Тачики [9] для описания ВТСП материалов. ППВ возбуждается в стеке джозефсоновскими колебаниями [10], частота которых ω_J определяется напряжением на переходе, и распространяется перпендикулярно плоскости слоев, а параметрический резонанс реализуется при $\omega_J = 2\omega_{LPW}$, где ω_{LPW} - частота ППВ [11, 7]. Это означает, что имеется резонансная точка, в которой в стеке переходов создается ППВ с определенным волновым числом.

Интересной особенностью эффекта Джозефсона является захват колебаний фазы каждого перехода частотой внешнего электромагнитного излучения, что приводит к появлению ступенек Шапиро на ВАХ при заданных значениях напряжения [12]. Приборы, основанные на этом эффекте, широко используются в качестве стандартов напряжения [13, 14]. Захват частоты приводит также к синхронизации колебаний фазы в системе СДП в области ступеньки. Детальное изучение ступенек Шапиро в системе СДП при разных резонансных условиях открывает интересную область исследований с потенциалом для различных применений. Еще одна особенность проявляется при рассмотрении системы СДП шунтированной резонансным контуром [15, 16, 17, 18, 19]. На ВАХ такой системы появляются новые резонансные ветви, которые могут приводить к появлению дополнительного параметрического резонанса, а ступенька Шапиро демонстрирует изменение свойств в области резонансной ветви [20, 21]. Таким образом, шунтирование позволяет эффективно контролировать и манипулировать резонансными особенностями, которые потенциально полезны в сверхпроводящей электронике.

Другим интенсивно развивающимся направлением применения джозефсоновских наносистем является индустрия квантовых компьютеров. Огромный интерес в этой области в последние годы привлекают майорановские фермионы (частицы, которые являются своей собственной античастицей и описываемые реальными волновыми функциями) в связи с тем, что такие фермионы могут быть использованы как кубиты в квантовом компьютере. Было выдвинуто несколько предложений по обнаружению таких фермионов в системах конденсированного состояния [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30]. В частности, майорановские фермионы могут быть реализованы как локализованные внутрищелевые состояния в сверхпроводнике с триплетным p-спариванием [26, 27, 28, 29]. Такие состояния также могут возникать на концах одномерной (1D) сверхпроводящей проволоки с сильной спин-орбитальной связью находящейся в магнитном поле [27, 28]. ДП в присутствии майорановских связанных состояний показывает 4π-периодичность колебаний сверхпроводящего тока [31], а ВАХ такого ДП, в отличие от его тривиальных аналогов, демонстрирует только четные ступени Шапиро. Эта особенность носит название дробного эффекта Джозефсона и в последние годы активно исследуется в различных системах, так как представляет собой экспериментальное свидетельство образования таких состояний [32].

Экспериментальное обнаружение майорановских связанных состояний основывается, в основном, либо на обнаружении дробного эффекта Джозефсона [33], либо на измерении пика туннельной проводимости внутри сверхпроводящей щели [34]. Однако, экспериментальные измерения пика проводимости [35] показали, что он не приводит к ожидаемому значению $2e^2/h$ туннельной проводимости и слабо защищен от помех [36, 37]. Вследствие чего, обнаружение четных ступеней Шапиро обеспечивает более надежный способ детектирования майорановских фермионов. Он представляет собой фазово-чувствительный метод, который свободен от влияния беспорядка [32]. Следовательно, дробный эффект Джозефсона в переходах с нетривиальными барьерами является одним из наиболее перспективных методов обнаружения майорановских фермионов в системах конденсированного состояния [38, 39].

Еще одной областью применения джозефсоновских наносистем является сверхпроводящая спинтроника. Основной задачей в этой области, является изучение спинового тока в твердотельных веществах. Бóльшая часть эффектов в ней основана на связи зарядовой и спиновой степеней свободы, что делает актуальным исследование неравновесных эффектов, связанных с зарядовым и спиновым разбалансом [40, 41, 42, 43, 44, 45, 46].

Неравновесные эффекты, возникающие при стационарной инжекции тока в слоистые сверхпроводящие материалы, изучались в работах [47, 48, 49, 50, 51, 52]. Фактически, из-за того, что заряд не экранирует в S-слоях, сформированная система СДП в высокотемпературных сверхпроводниках не может находиться в равновесном состоянии при любом значении электрического тока [9, 53]. Влияние зарядовой связи на колебания джозефсоновской плазмы было подчеркнуто в работах [51, 9]. Однако разбаланс заряда в систематической теории возмущений рассматривается лишь косвенно, поскольку он индуцируется флуктуациями скалярного потенциала [47, 50], и только в работе [54], он учитывается как независимая степень свободы, и, следовательно, ее результаты сильно отличаются от предыдущих.

Экспериментальные свидетельства существования неравновесных эффектов в системе СДП были получены в работе [55] и были объяснены разбалансом заряда в сверхпроводящих слоях, создаваемом инжекцией квазичастичного тока. В основе эксперимента лежала идея накопления заряда на S-слоях между резистивным и сверхпроводящим переходами под воздействием тока смещения. Ток через резистивный переход осуществляется в основном квазичастицами, а ток через барьер в сверхпроводящем состоянии переносится куперовскими парами. Это приводит к флуктуациям заряда сверхпроводящего конденсата в S-слоях, что может вызвать сдвиг химического потенциала конденсата и разбаланс ветвей спектра элементарных возбуждений квазичастиц. В работе [55] также экспериментально наблюдался сдвиг ступеньки Шапиро по напряжению от ее канонического значения.

Ответ на вопрос о том, насколько сильны неравновесные эффекты в реальной системе, важен для разных приложений. В настоящей диссертации предполагается ответить на этот вопрос. Изучение неравновесных эффектов, создаваемых инжекцией тока в связанной системе джозефсоновских переходов, было представлено в работе [56], в которой было показано как неравновесный параметр влияет на структуру ветвей ВАХ при разных значениях связи и параметра

Мак-Камбера. Однако влияние внешнего излучения на разбаланс заряда не было принято во внимание.

2. Цели и задачи работы

Основная цель работы состояла в исследовании фазовой динамики и вольт-амперных характеристик системы связанных джозефсоновских переходов в слоистых сверхпроводниках, их топологических, неравновесных и резонансных свойств.

Был поставлен ряд задач по исследованию резонансных свойств системы СДП, шунтированной резонансным контуром. В частности, изучить воздействие резонансов сформированного контура на возникающую в системе продольную плазменную волну и исследовать воздействие внешнего периодического воздействия на неравновесные свойства такой системы.

Одной из задач работы по исследованию системы СДП являлось изучение влияния неравновесных условий, в частности зарядового разбаланса, на ВАХ ВТСП, а также на отклик такой системы на внешнее периодическое воздействие.

Значительный интерес представляла разработка новых методов детектирования майорановских связанных состояний в джозефсоновском переходе с топологически нетривиальным барьером. Предполагалось, рассмотреть такой переход в рамках модели ДП шунтированного емкостью и сопротивлением (RCSJ-модели), которая является более реалистичной по сравнению с моделью ДП без емкости (RSJ-модели).

Представленные задачи до настоящего времени не были исследованы.

3. Результаты работы, выносимые на защиту

В работе показано сжатие амплитудной зависимости ширины ступеньки Шапиро на резонансной ветви, возникающей на ВАХ шутированного LC-контуром джозефсоновского перехода. На этой основе предложен новый метод создания стандарта напряжения, позволяющий существенно уменьшить используемую мощность внешнего электромагнитного излучения.

Показано, что в системе связанных ДП временная зависимость полного напряжения стека отражает возникновение электрического заряда на сверхпроводящих слоях, что может служить основой метода его регистрации.

Предложен фазочувствительный метод обнаружения 4π-периодичности сверхпроводящего тока в джозефсоновских наноструктурах, основанный на изменении свойств нечетных ступенек Шапиро и возникновении дополнительной последовательности субгармоник на ВАХ.

Показано, что зарядовый разбаланс ветвей спектра элементарных возбуждений квазичастиц приводит к наклону ступенек Шапиро на ВАХ, который возрастает с увеличением параметра неравновесности. Продемонстрировано распределение величины наклона ступеньки Шапиро вдоль стека, обусловленное наличием связи между джозефсоновскими переходами.

4. Научная новизна и практическая значимость работы

Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. В частности, впервые было показано изменение амплитудной зависимости ширины ступеньки Шапиро при ее расположении на резонансной ветви, на основе чего предложен новый метод создания стандарта напряжения, позволяющий существенно уменьшить мощность подаваемого внешнего сигнала. Проведено исследование возможности реализации дополнительного параметрического резонанса, возникающего в пределах интервала базового тока, соответствующего резонансной ветви образованного контура. Обнаружено, что амплитуды осцилляций напряжения стека и напряжения, измеренного через шунтирующий конденсатор, отражают заряд, возникающий на сверхпроводящих слоях, на основе чего был предложен экспериментальный метод определения величины заряда. Стоит отметить, что экспериментальное подтверждение наличия заряда на сверхпроводящих слоях ВТСП было получено только косвенно – по наблюдению продольной плазменной волны, и до настоящего времени нет экспериментальных результатов, демонстрирующих наличие заряда непосредственно.

Показано, что неравновесные эффекты, в частности зарядовый разбаланс ветвей спектра элементарных возбуждений, могут быть ответственны за наклон ступенек Шапиро на ВАХ. Было также показано, что непериодические граничные условия сдвигают ступеньку Шапиро в область меньших напряжений, что делает неоднозначной интерпретацию экспериментально найденного сдвига как результат разбаланса заряда.

Впервые был рассмотрен ДП с топологически нетривиальным барьером в рамках модели ДП шунтированного емкостью и сопротивлением (RCSJ-модель). Был предложен фазочувствительный метод обнаружения майорановских связанных состояний в джозефсоновских наноструктурах, основанный на субгармонической природе нечетных ступенек Шапиро и возникновении дополнительной последовательности сугармоник на ВАХ.

Практическая ценность диссертации состоит в том, что разработанные методы позволят проводить непосредственное сравнение полученных результатов с результатами экспериментальных исследований. В диссертации предсказывается ряд новых эффектов, которые могут представлять интерес для экспериментального исследования.

5. Апробация работы

Результаты диссертации опубликованы в следующих 5 статьях входящих в список ВАК,

1. Yu. M. Shukrinov, I. R. Rahmonov, K. V. Kulikov and P. Seidel / Effects of LC shunting on the Shapiro steps features of Josephson junction // EPL – 2015. – Vol. 110. – pp. 47001.

2. M. Maiti, K. M. Kulikov, K. Sengupta, and Y. M. Shukrinov / Josephson junction detectors for Majorana modes and Dirac fermions // Phys. Rev. B – 2015. – Vol. 92. – pp. 224501.

3. Yu. M. Shukrinov, M. Nashaat, K. V. Kulikov, R. Dawood, H. El Samman and Th. M. El Sherbini / Shapiro step at nonequilibrium conditions // EPL – 2016. – Vol. 115. – pp. 20003.

4. Yu. M. Shukrinov, I. R. Rahmonov, K. V. Kulikov, A. E. Botha, A. Plecenik, P. Seidel, W. Nawrocki / Modelling of LC-shunted intrinsic Josephson junctions in high-T_c superconductors // Supercond. Sci. Technol. – 2017. – Vol. 30. – pp. 024006.

5. K. V. Kulikov, R. Davud, E. P. Nakhmedov and Yu. M. Shukrinov / Josephson junction with two component of superconducting current // JETP – 2017. – Vol. 125. – No. 2. – pp. 334–340.

а также в следующих 12 статьях в других журналах и трудах конференций.

1. Yury Shukrinov, Ilhom Rahmonov, Kirill Kulikov, Paul Seidel, Evgeny Il'ichev / Effect of Radiation and Resonances in Coupled Linear Josephson Junctions Arrays with an LC-Shunt // Extended Abstracts of 14th Int. Supercond. Electronics Conf. ISEC-13 – published by IEEE. – 2013. – pp. 219-221.

2. Yu. M. Shukrinov, P. Seidel, E. Ilichev, W. Nawrocki, M. Grajcar, P. A. Plecenik, I. R. Rahmonov, K. Kulikov / Resonance features of coupled Josephson junctions: Radiation and shunting // Journal of Physics: CS – 2012. – Vol. 393. – pp. 012020.

3. К. В. Куликов, И. Р. Рахмонов, Ю. М. Шукринов / Резонансные Свойства Системы Джозефсоновских Переходов, Шунтированной LCR-контуром // Труды II-ой Национальной конференции по прикладной сверхпроводимости (НКПС-2013) – НИЦ «Курчатовский институт» Москва, Россия. – 2013.

4. Yury Shukrinov, Ilhom Rahmonov, Kirill Kulikov, André Botha, Mahmoud Gaafar, Radwa Dawood, Majed Nashaat, Tharwat El Sherbini and Hussein El Samman / Intrinsic Josephson Junctions for Superconducting Electronics and Quantum Computation // Extended Abstracts of The 15th International Superconductive Electronics Conference (ISEC- 2015). – 2015. – Nagoya, Japan, – pp. DP-P02.

5. Yury Shukrinov, Ilhom Rahmonov, Kirill Kulikov, Paul Seidel, Andrej Plecenik / Effect of LC-shunting on the IV-characteristics of a Josephson Junction under Microwave Radiation // Extended Abstracts of The 15th International Superconductive Electronics Conference (ISEC- 2015). – 2015. – Nagoya, Japan, – pp. HF-P04-INF.

6. Yu. M. Shukrinov, I. R. Rahmonov, K. V. Kulikov and P. Seidel. / Resonance properties of the Josephson junctions system shunted by LCR-circuit // Труды XIX Международного симпозиума "Нанофизика и наноэлектроника". – 2015. – Том 1. – с.123-124.

7. K. V. Kulikov, M. Maiti, Yu. M. Shukrinov / Influence of barrier on Shapiro Step Features in unconventional junctions // Proceedings of JINR SYMPO-

SIUM “Few to Many Body Systems: Models and Methods and Applications”. – 2016. – pp. 155.

8. Куликов К.В., Медведева С. Ю., Давуд Р. и Шукринов Ю.М. / P-P Джозефсоновский Переход в Присутствии Локализованных Майорановских Состояний // Труды XX Международного симпозиума “Нанофизика и наноэлектроника”. – 2016 – Том 1. – с. 71.

9. Brânzei F., Kulikov K., Shukrinov Y. / Frequency Locking in System of Coupled Josephson Junctions Shunted by LC-circuit // Труды XXI Международного симпозиума “Нанофизика и наноэлектроника”. – 2017. – Том 1. – с. 7.

10. Куликов К. В., Nashaat M., Sengupta K., Шукринов Ю. М. / Зарядовый разбаланс в высокотемпературных сверхпроводниках // Труды XXI Международного симпозиума “Нанофизика и наноэлектроника”. – 2017. – Том 1. – с. 76.

11. Шукринов Ю. М., Рахмонов И.Р., Куликов К.В., Botha A.E., Sengupta K., Seidel P. / Моделирование джозефсоновских наноструктур // Труды XXI Международного симпозиума “Нанофизика и наноэлектроника”. – 2017. – Том 1. – с. 122.

12. Kirill Kulikov, Yury Shukrinov, Majed Nashaat, and Akinobu Irie / Shift of Shapiro Step in High Critical Temperature Superconductors // EPJ Web of Conferences. – 2018. – Vol. 173. – pp. 03015.

В рамках диссертации было опубликовано учебное пособие для студентов старших курсов

Шукринов Ю.М., Рахмонов И.Р., Куликов К.В., Применение численных методов для исследования эффекта Джозефсона, Учебное пособие. – Дубна: ОИЯИ, 2016. – 94 с.

Результаты работы представлены на ряде международных и всероссийских конференций:

1. Dubna-NANO2012, International conference on Theoretical Physics, Лаборатория теоретической физики ОИЯИ, Дубна, Россия, 2012;

2. II-ая Национальная Конференция по Прикладной Сверхпроводимости НКПС-2013, НИЦ “Курчатовский Институт”, Москва, Россия, 2013;

3. XI Зимняя школа по теоретической физике, Лаборатория теоретической физики ОИЯИ, Дубна, Россия, 2013;

4. XVII конференция молодых ученых и специалистов ОМУС-2013, ОИЯИ, Дубна, Россия, 2013;

5. Сессия программно-консультативного комитета по физике конденсированных сред, ОИЯИ, Дубна, Россия, 2013;

6. Третья международная научная ежегодная школа-конференция молодых ученых и специалистов на базе пансионата “Дубна” в г. Алушта, Крым, 2014;

7. XVIII международная научная конференция Объединения молодых ученых и специалистов ОИЯИ ОМУС-2014, Дубна, Россия, 2014;

8. The 59th Annual Conference of the SA Institute of Physics, Йоханнесбург, Южно-Африканская Республика, 2014;

9. The 9th International Symposium on Intrinsic Josephson Effects and THz Plasma Oscillations in High-Tc Superconductors (THz-Plasma 2014), Kyoto, Japan, 2014;

10. 41st meeting of the PAC for Condensed Matter Physics, Joint Institute for Nuclear Research, Дубна, Россия, 2015;

11. 15th International Superconductive Electronics Conference (ISEC 2015), Нагоя, Япония, 2015;
12. 4th SOUTH AFRICA - JINR SYMPOSIUM “Few to Many Body Systems: Models and Methods and Applications”, BLTP JINR Dubna, Russia, 2015;
13. III-я Национальная Конференция по Прикладной Сверхпроводимости НКПС-2015, НИЦ “Курчатовский Институт”, Москва, Россия, 2015;
14. XXI симпозиум “Нанофизика и наноэлектроника”, Нижний Новгород, Россия, 2016;
15. Superconductors-based sensors and quantum technologies, Московский педагогический университет, Москва, Россия, 2016;
16. 5th International Workshop on Numerical Modelling of High Temperature Superconductors, Bologna, Italy, 2016;
17. International conference and School Superconducting hybrid nanostructures: physics and application, Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia, 2016;
18. XXI симпозиум “Нанофизика и наноэлектроника”, Нижний Новгород, Россия, 2017;
19. 16th International Superconductive Electronics Conference (ISEC 2017), Сорренто, Италия, 2017;
20. International Conference “Mathematical Modeling and Computational Physics, 2017”, Dubna, Russia, 2017;
21. IV Международная конференция “Мезоскопические структуры в фундаментальных и прикладных исследованиях (MSFA 2017)” и школа “Superconducting Hybrid Nanostructures: Physics and Applications”, Листвянка, Россия, 5-12 июля 2017.

22. International workshop on Frontiers of Science, Sweden, 15-22 April 2018;

23. 22-я Международная научная конференция молодых ученых и специалистов ОИЯИ (ОМУС-2018), Лаборатория физики высоких энергий им. В.И.Векслера и А.М. Балдина, ОИЯИ, 23-27 апреля 2018 г.

24. 48th meeting of the PAC for Condensed Matter Physics, Dubna, 15 June 2018

6. Личный вклад автора

Основные положения и выводы диссертации являются результатом самостоятельных исследований автора. В тех частях работ, выполненных в соавторстве, которые относятся к теме диссертации, автору принадлежат формализация задачи, проведенные численные расчеты и их интерпретация.

7. Структура и объем работы

В рамках данной кандидатской диссертации проводятся всесторонние исследования особенностей ВАХ, обусловленных топологическими, неравновесными и резонансными явлениями в джозефсоновских наноструктурах.

В первой главе диссертации рассматривается система связанных джозефсоновских переходов, шунтированная резонансным контуром. Дано описание модели для системы СДП, шунтированной LC-элементами, описание методов расчета ВАХ и фазовой динамики. В данной главе представлены результаты исследования резонансных свойств одного ДП и проведен анализ их влияния на отклик на внешнее периодическое воздействие. Определена также зависимость ширины ступеньки Шапиро от амплитуды внешнего излучения. Во второй части этой главы показано возникновение дополнительного параметрического резонанса в области резонансной ветви, возникающей в системе СДП с шунтированием. Обсуждается метод экспериментального обнаружения заряда на сверхпроводящих слоях, основанный на измерении амплитуды осцилляций напряжения в стеке или на шунтирующем конденсаторе. Проведен анализ модуляций на временной зависимости заряда и напряжения стека, возникающих под действием внешнего периодического воздействия.

Во второй главе приведены результаты исследования джозефсоновских переходов с топологически нетривиальными барьерами, демонстрирующие 4π периодический джозефсоновский ток. Дано описание RCSJ-модели для такого перехода, где джозефсоновский ток шунтируется сопротивлением и емкостью. Проведено сравнение результатов с полученными ранее в рамках более простой, но более распространенной модели RSJ, где отсутствует емкость. Показана возможность возникновения нечетных ступенек Шапиро, имеющих субгармоническую природу и свойства, качественно отличающиеся от ступенек в обычных переходах. Обнаружена также дополнительная последовательность субгармоник в лестничной структуре на ВАХ. В главе обсуждается возможности использования этих свойств для детектирования 4π-периодичности сверхпроводящего тока. В последней части второй главы рассмотрен ДП с двумя компонентами сверхпроводящего тока. Такой переход в области малых напряжений демонстрирует 4π-периодичность разности фаз даже при амплитуде 4π-периодической компоненты тока, много меньшей амплитуды джозефсоновской компоненты, что позволяет наблюдать осцилляции сверхпроводящего тока с дробным периодом при малой диссипации $\beta < 1$ в области гистерезиса. Определен интервал амплитуд внешнего электромагнитного излучения, в котором наиболее существенно проявление на вольт-амперной характеристике дробного эффекта Джозефсона.

Последняя глава диссертации посвящена исследованию неравновесных эффектов, создаваемых инжекцией тока в стек внутренних джозефсоновских переходов в высокотемпературных сверхпроводниках. В главе дано описание модели системы СДП с учетом зарядового разбаланса ветвей спектра элементарных возбуждений. В данной главе приведены результаты исследования влияния неравновесных условий на ступеньки Шапиро, возникающие под действием внешнего электромагнитного излучения. Показано, что зарядовый разбаланс может приводить к наклону ступенек Шапиро на ВАХ и обсуждается сдвиг ступеньки Шапиро на ВАХ от своего канонического значения под воздействием непериодических граничных условий.

Глава 1

Резонансные явления в системе связанных джозефсоновских переходов, шунтированной резонансным контуром

Важным моментом для различных применений джозефсоновских наноструктур является возможность манипулировать и контролировать их параметры и характеристики. Одним из эффективных способов воздействия на ДП является его шунтирование резонансным контуром [15, 16, 17, 18, 19]. В частности, шунтирование может приводить к синхронизации колебаний сверхпроводящего тока в стеке СДП. Шунтирование ДП индуктивностью и емкостью (LC-шунтирование) приводит к образованию единого резонансного контура, включающего емкость и индуктивность шунта, а также емкость ДП. Когда частота Джозефсона ω_J равна резонансной частоте контура ω_{rc}, колебания в системе СДП синхронизируются. Этот резонанс может проявляться на ВАХ в виде: ступенек [58, 57], горбов и провалов [59, 60]. О существовании таких резонансных особенностей на ВАХ в различных системах СДП с шунтированием сообщалось в ряде экспериментальных и теоретических работ (см. [61, 62] и ссылки в них). Отметим, что обнаруженный в работе [63] пик интенсивности когерентного электромагнитного излучения из двумерной системы СДП на основе $Nb/Al/AlOx/Nb$ был вызван резонансом джозефсоновских колебаний и колебаний в резонансном контуре, что привело к синхронизации колебаний в разных ДП. В работе [64] была продемонстрирована возможность появления в системе СДП с LC-шунтированием дополнительного параметрического резонанса. Как и ожидалось, в этом случае также возбуждается ППВ с частотой, равной половине частоты Джозефсона. Таким образом, шунтирование является удобным инструментом способным изменять свойства ППВ.

Рассматриваемая система также обладает большим потенциалом для приложений в квантовой метрологии [14]. В частности, наиболее точные стандарты вольта в настоящий момент получают облучая цепочки ДП электромагнитной волной. В свою очередь шунтирование ДП позволяет влиять на свойства ступенек Шапиро, когда они находятся на резонансной ветви ВАХ [20, 21].

В первой главе настоящей диссертации представлены результаты моделирования системы СДП и одиночного ДП шунтированных резонансным контуром. Будут описаны особенности, которые появляются в шунтированной системе СДП. В первой части будут приведены результаты исследования свойств одиночного ДП шунтированного LC-элементами, а также рассмотрена перспективность использования шунтирования ДП для оптимизации экспериментов по получению стандартов напряжения, посредством изменения свойств ступенек Шапиро. Вторая часть посвящена исследованию возможности воздействия и управления ППВ в системе СДП посредством шунтирования системы резонансным контуром.

1.1. Модель связанных джозефсоновских переходов, шунтированных резонансным контуром

В настоящей главе рассматривается система СДП в рамках модели с емкостной связью и диффузионным током (CCJJ+DC модель [7, 65]), шунтированная LC-элементами. Сопротивление R не включено в шунтирующую цепь с целью выделить основные эффекты влияния резонансного контура на свойства системы. Связь между переходами в системе возникает в следствии очень малой толщины сверхпроводящих и диэлектрических слоев. Толщина S-слоев в ВТСП (~ 3 Å) сравнима с дебаевской длиной экранирования электрического заряда r_D, поэтому в отдельном S-слое нет полной экранировки заряда и электрическое поле, наведенное в отдельном джозефсоновском переходе, проникает в соседние. Электрическая нейтральность S-слоев оказывается динамически нарушенной, и в случае переменного эффекта Джозефсона возникает емкостная связь между переходами [9]. Когда через слоистую систему связанных ДП проходит внешний электрический ток, сверхпроводящие слои оказываются в неравновесном состоянии из-за инжекции квазичастиц и куперовских пар [53]. Наличие в них нескомпенсированного электрического заряда приводит к необходимости учета дополнительного тока между сверхпроводящими слоями. Этот вклад в квазичастичный ток, обусловленный разностью обобщенных скалярных потенциалов, называют диффузионным током I^l_{dif} [54, 47, 66]. Можно записать следующие выражения для диффузионного тока

$$I^l_{dif} = \frac{\Phi_l - \Phi_{l-1}}{I_c R} = -\frac{(Q_l - Q_{l-1})}{4\pi r_D^2 I_c R} = -\frac{(Q_l - Q_{l-1})}{2e^2 N(0) I_c R} \tag{1.1}$$

В этих выражениях Φ_l есть обобщенный скалярный потенциал сверхпроводящего слоя, R - сопротивление перехода, Q_l - величина плотности заряда на сверхпроводящем слое. Диффузионный ток нормирован на величину критического тока I_c, а $N(0)$ обозначает плотность состояний на уровне Ферми.

В отсутствии полного экранирования заряда в S-слое, джозефсоновское соотношение для калибровочно-инвариантной разности фаз между S-слоями $\varphi_l(t)$ обобщается [67]:

$$\frac{\hbar}{2e}\frac{d\varphi_l}{dt} = V_l - \alpha(V_{l+1} + V_{l-1} - 2V_l). \tag{1.2}$$

Т.е., в отличии от равновесного случая, производная разности фаз φ_l в l-ом переходе зависит теперь не только от напряжения $V_l \equiv V_{l,l-1}$ в данном ДП, но и от напряжений в соседних $l-1$ и $l+1$ ДП. Параметр α характеризует величину связи между ДП.

Электрическая схема рассматриваемой системы ДП с LC-шунтом представлена на Рис.1.1.

Полный ток есть сумма токов через систему ДП I_j и шунтирующие элементы I_{sh}. В рамках используемой нами модели, ток I_j определяется выражением:

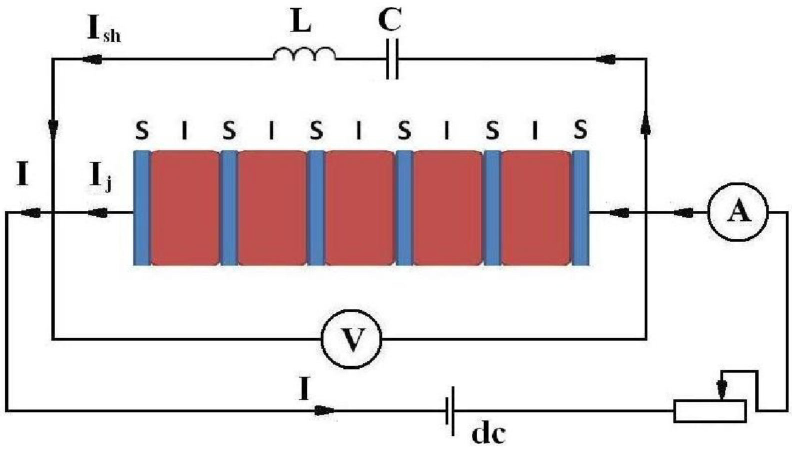

Рис. 1.1. Схема системы джозефсоновских переходов с LC-шунтированием

$$I_j = C_j \frac{dV_l}{dt} + I_c sin\varphi_l + \frac{\hbar}{2eR_j}\frac{\partial \varphi_l}{\partial t}, \tag{1.3}$$

где C_j, V_l, R_j, I_c и φ_l есть емкость, напряжение, сопротивление, критический ток и калибровочно-инвариантная разность фаз l-го ДП, соответственно. Ток через шунтирующие элементы I_{sh} определяется выражением:

$$I_{sh} = C\frac{\partial u_c}{\partial t}, \tag{1.4}$$

где C и u_c есть емкость и напряжение на шунтирующем конденсаторе, соответственно. При параллельном соединении, представленном на Рис.1.1, сумма напряжений на шунтирующих элементах равна сумме напряжений на всех ДП, т. е.:

$$LC\frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} + u_c = \sum_{i=1}^{N} V_l, \tag{1.5}$$

где L - шунтирующая индуктивность.

Таким образом, динамика калибровочно-инвариантной разности фаз φ_l в l-ом ДП определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_l}{\partial t} = V_l - \alpha(V_{l+1} + V_{l-1} - 2V_l) \\ \dfrac{\partial V_l}{\partial t} = I + A\sin(\omega_R t) - \sin\varphi_l - \beta\dfrac{\partial\varphi_l}{\partial t} - C\dfrac{\partial u_c}{\partial t} \\ \dfrac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} = \dfrac{1}{LC}\left(\sum\limits_{l=1}^{N} V_l - u_c\right), \end{cases} \tag{1.6}$$

где все величины обезразмерены, а именно: базовый ток I нормирован на критический ток I_c ДП; время t – на обратную плазменную частоту ω_p^{-1} (где плазменная частота $\omega_p = \sqrt{\dfrac{2eI_c}{C_j\hbar}}$, и в дальнейшем t используется для обозначения нормированного времени); напряжения V_l и u_c нормированы на $V_0 = \dfrac{\hbar\omega_p}{2e}$; шунтирующая емкость C – на емкость ДП C_j, а шунтирующая индуктивность L – на $(C_j\omega_p^2)^{-1}$. В системе уравнений (1.6) введен также параметр диссипации в джозефсоновском переходе: $\beta = \dfrac{1}{R_j}\sqrt{\dfrac{\hbar}{2eI_cC_j}} = \dfrac{1}{\sqrt{\beta_c}}$, где β_c - параметр МакКамбера. Стоит отметить, что в дальнейшем будут использованы те же буквенные обозначения для нормированных величин, что и для ненормированных.

Система уравнений (1.6) решается численно методом Рунге-Кутта четвертого порядка. Разность фаз $\varphi_l(t)$ и напряжение $V_l(t)$ рассчитываются как функции времени в определенном заданном интервале при фиксированном значении внешнего тока I. Методика расчета ВАХ и временной зависимости электрического заряда соответствует стандартной схеме и изложена в ряде работ [8, 11] и методическом пособии [68].

Для определения ВАХ системы ДП вычисляется среднее по времени напряжение $< V_l >$ при каждом значении внешнего тока I посредством $< V_l >= \frac{1}{T_{max}-T_{min}}\int\limits_{T_{min}}^{T_{max}} V_l dt$, где T_{min} и T_{max} определяют интервал времени для усреднения. Полное среднее напряжение системы ДП при данном фиксированном значении базового тока вычисляется посредством: $< V >= \sum\limits_{l=1}^{N} < V_l >$. Для вычисления заряда на сверхпроводящем слое используется уравнение Максвелла $div(\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}) = Q$. Плотность заряда Q_l на S-слое l (в дальнейшем изложении, заряд) определяется через значения напряжения в соседних диэлектрических слоях V_l и V_{l+1}:

$$Q_l = Q_0\alpha(V_{l+1} - V_l), \tag{1.7}$$

где $Q_0 = \varepsilon\varepsilon_0 V_0/r_D^2$.

Полная временная зависимость $V(t)$ и $Q(t)$ складывается из изменений во времени этих величин на каждом шаге по току. Интервал времени, в течение которого записывается временная зависимость, определяется как $\tau + T_{max}(I_0 - I)/\delta I$, где I_0 начальное значение тока, с которого регистрируется данная временная зависимость. В наших вычислениях, если не указано дополнительно, параметр диссипации полагается $\beta = 0.2$ и параметр связи $\alpha = 1$, и использованы периодические граничные условия [11]. Отметим, что величина параметра связи не оказывает существенного влияния на качественные результаты, представленные в настоящей диссертации. Значение $\alpha = 1$ выбрано для сравнения полученных результатов с опубликованными ранее данными. Итак, система динамических уравнений для разностей фаз и напряжений (1.6) решается при фиксированном значении тока I во временном интервале $(0, T_{max})$ с шагом δt. Часть этого интервала, начиная со значения T_{min}, используется для процедуры усреднения по времени. В расчетах, в основном, было использовано: $T_{min} = 50$, $T_{max} = 10000$, $\delta t = 0.05$, $\delta I = 0.0001$, хотя в ряде случаев, когда требовалась более высокая точность, эти параметры менялись. Устойчивость решений проверялась влиянием на ВАХ изменения параметров расчета, в частности, удвоения и уменьшения вдвое шага по времени δt. Во всех расчетах к базовому току добавлялся шум с амплитудой $I_{noise} = 10^{-8}$, генерируемый случайным образом. Для этого использовался генератор случайных чисел. Амплитуда шума нормировалась на величину критического тока I_c.

Как упоминалось выше, джозефсоновские переходы вместе с шунтирующими их емкостью C и индуктивностью L образуют колебательный контур. В таком контуре возможно возбуждение как последовательного резонанса, так и параллельного резонанса. Собственные частоты образованного контура определяются теперь не только величинами L и C, но и суммарной емкостью всех ДП. Следовательно, общая емкость системы определяется выражением: $\frac{C}{1+NC}$, а собственная частота параллельного резонансного контура, нормированная на плазменную частоту, вычисляется по формуле:

$$\omega_{rc}^{p} = \sqrt{\frac{1+NC}{LC}}. \tag{1.8}$$

Как видно из полученной формулы, собственная частота колебаний образованного резонансного контура зависит от числа ДП в системе. Собственная частота последовательного контура определяется выражением:

$$\omega_{rc}^{s} = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \tag{1.9}$$

Как уже было отмечено ранее [61], резонанс последовательного контура проявляется на ВАХ только при большой диссипации ($\beta > 1$).

1.2. Резонансная ветвь на вольт-амперной характеристике

Сначала кратко обсудим свойства одного шунтированного ДП в отсутствие внешнего излучения. Как было показано в работах [59, 69], LC-шунтирование приводит к ступенчатой структуре на ВАХ. Однако эти ступени на самом деле являются ветвями [64], которые могут быть полностью восстановлены посредством изменения направления базового тока. Соответствующая ВАХ представлена на рис. 1.2. Она получается при решении системы уравнений (1.6), базовый ток меняется следующим образом: $01OEBABCDEBF0$. ВАХ демонстрирует резонансную ветвь AC, возникающую в результате резонанса джозефсоновских колебаний и собственных колебаний сформированного резонансного контура.

Наблюдаемая резонансная ветвь является частью резонансного пика [61] с вершиной обозначенной точкой C, а другая сторона пика, отмеченная пунктир-

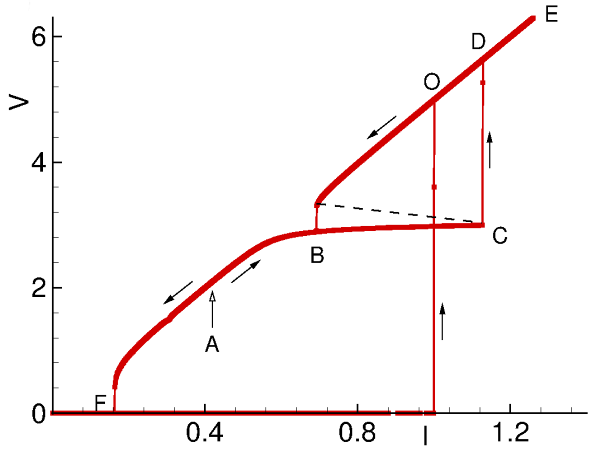

Рис. 1.2. ВАХ одного шунтированного ДП, рассчитанная при увеличении и уменьшении базового тока. Стрелки указывают направление изменения тока.

ной линией на рис. 1.6, имеет отрицательный наклон и, следовательно, неустойчива. Этот пик соответствует резонансу в параллельном контуре. В случае резонанса в последовательном контуре резонансный пик формируется в противоположном направлении.

Выбранные параметры шунта $L = 0.2$ и $C = 1.25$ приводят (согласно уравнению (1.8)) к собственной частоте резонансного контура $\omega_{rc}^{p} = 3$, поэтому точное равенство $\omega_J = \omega_{rc}^{p}$ выполняется в точке C, где $V = 3$. В этой точке наблюдается скачок напряжения на ВАХ. Наклон полученной резонансной ветви зависит от параметра добротности полученного контура. Изменение параметров ДП и резонансного контура изменяет величину наклона [64].

Временная зависимость напряжения вместе с соответствующей частью ВАХ, рассчитанная при увеличении базового тока, представлена на рис. 1.3. На рисунке видно, что максимум сверхпроводящего тока $I_s(I)$, отмеченный буквой C' (рис. 1.3(a)), а также максимум амплитуды колебаний напряжения (рис. 1.3(b)), вызванные резонансом в параллельном контуре, хорошо согласуются с особенностью на ВАХ, отмеченной точкой C, а именно выходом из резонансной ветви. Отметим особенность на временной зависимости напряжения в точке A (рис. 1.3(b)), где амплитуда джозефсоновских колебаний равна нулю. Эта точка отражает другой резонанс, возникающий в последовательном

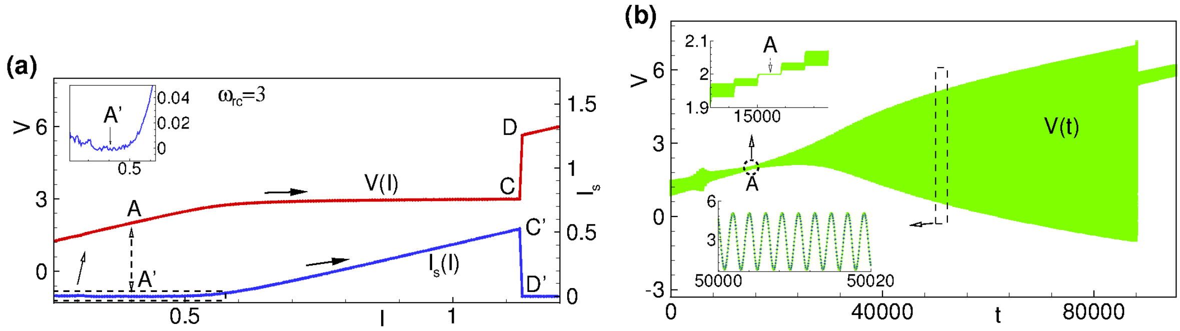

Рис. 1.3. (a) Часть ВАХ и соответствующая часть зависимости $I_s(I)$, рассчитанные при увеличении базового тока. Стрелки указывают направление изменения тока. Буквы относятся к точкам на ВАХ (рис. 1.6). Соответствующие точки на зависимости $I_s(I)$ отмечены буквами со штрихами. Вставка демонстрирует увеличенную часть зависимости $I_s(I)$ с отмеченным минимумом; (b) Соответствующая временная зависимость напряжения, рассчитанная в том же интервале тока. Верхняя вставка демонстрирует исчезновение джозефсоновских колебаний в точке A. Скачкообразное изменение напряжения представляет собой численный эффект, связанный с изменением базового тока. Нижняя вставка показывает увеличенную часть колебаний напряжения в отмеченной области.

контуре, имеющем частоту $\omega_{rc}^s = 1/\sqrt{LC} = 2$. Затухание колебаний при $V = 2$ вызвано нулевым импедансом $Z(j\omega_{rc}^s) = j\omega_{rc}^s L + 1/j\omega_{rc}^s C$ элементов LC, шунтирующих ДП. Верхняя вставка демонстрирует исчезновение осцилляций напряжения в точке A. Таким образом, в случае слабой диссипации ДП $\beta < 1$ резонанс в последовательном контуре проявляет себя на временной зависимости напряжения.

На рис. 1.3(b) также показана зависимость среднего сверхпроводящего тока $I_s = sin\varphi$ от базового тока, моделируемого при том же процессе. I_s имеет минимум в точке A' (см. вставку на рис. 1.3(a)), соответствующий точке A на ВАХ. Положение точки A' согласуется с особенностью на временной зависимости напряжения. Этот факт подчеркивается двойными стрелками на рис. 1.3(a). I_s растет практически линейно вдоль резонансной ветви. После прыжка с резонансной ветви в резистивное состояние (точки C и D) I_s уменьшается на два порядка, а затем медленно приближается к нулю.

1.2.1. Особенности rc-ветви одиночного ДП

Форма полученной резонансной ветви зависит от значений L и C. Обычно она имеет пологий наклон. Изменение значений параметров ДП и резонансного контура влияют на наклон резонансной ветви [64]. На рисунке 1.4 показана двух-петлевая ВАХ для одиночного ДП с LC-шунтированием при большой и малой шунтирующей емкости. В обоих случаях частота резонансного контура

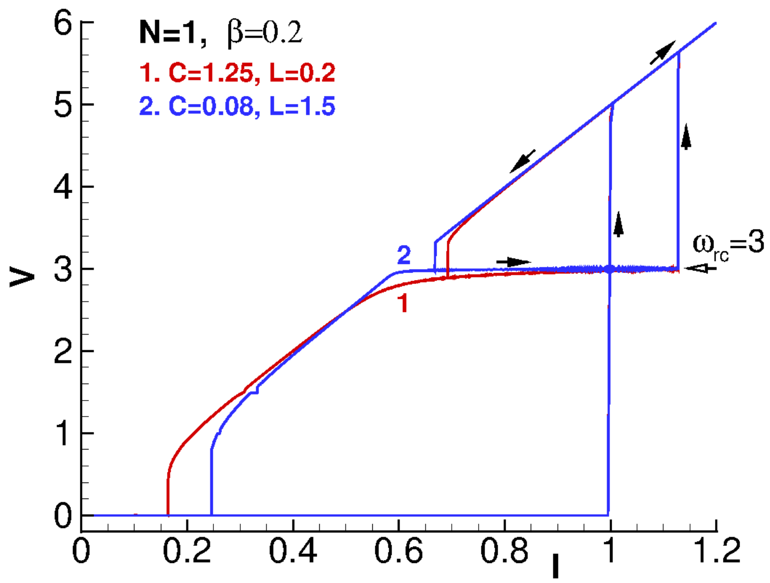

Рис. 1.4. Двух-петлевая ВАХ для одного ДП с LC-шунтированием. Кривая 1 демонстрирует большую емкость шунта ($C = 1.25$), а кривая 2 - маленькую емкость шунта ($C = 0.08$). Текущий цикл изменения тока, используемый для получения обеих ВАХ, состоял из $0 \longrightarrow 1.2 \longrightarrow 0.5 \longrightarrow 1.2 \longrightarrow 0$ и параметр индуктивности подбирался таким образом, чтобы сохранялось постоянное значение $\omega_{rc}^p = 3$ в уравнении (1.8).

была одинаковой, и соответствовала среднему суммарному напряжению $V = 3$. Отметим, что rc-ветвь при малых C практически не имеет наклона. Это связано с тем, что наклон характеризует ширину пика параллельного резонанса, а изменение коэффициента добротности $Q = R_j\sqrt{\frac{C}{L}}$ параллельного резонанса также изменяет ширину пика и, следовательно, наклон rc-ветви.

Проявление параллельных и последовательных резонансов в шунтированных джозефсоновских переходах можно четко увидеть на временной зависимости полного напряжения $V(t)$. На рис. 1.5 представлена временная зависимость напряжения вместе с соответствующей частью ВАХ, включающей rc-ветвь, рассчитанные при разных C и L при увеличении базового тока вдоль rc-ветви.

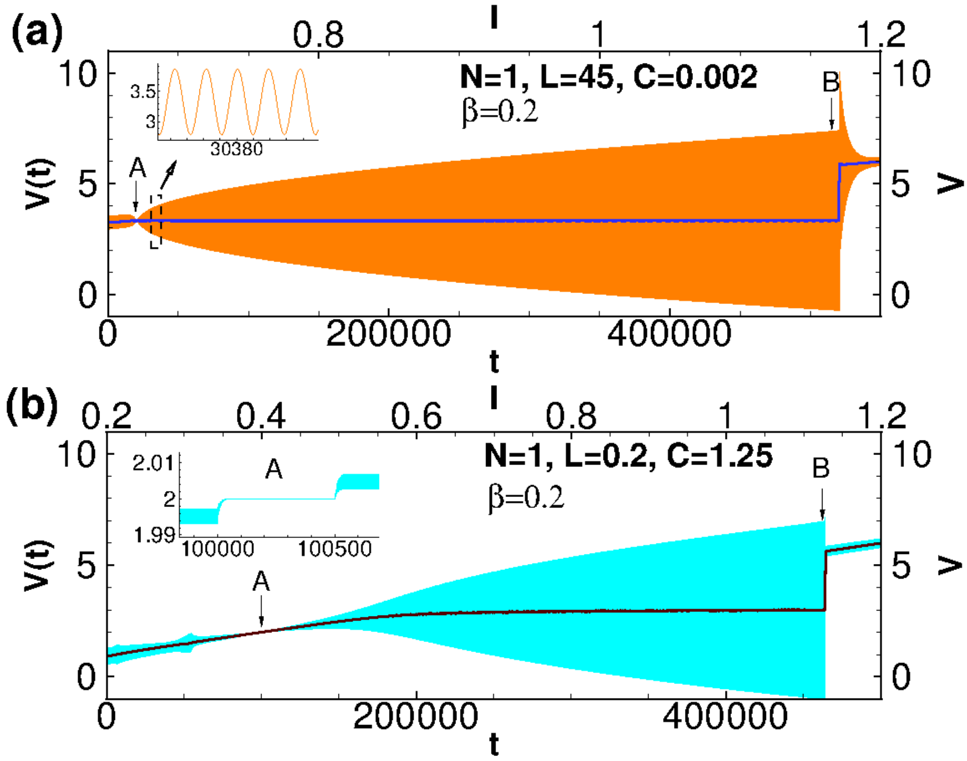

Рис. 1.5. Временная зависимость полного напряжения, показанная при увеличении базового тока для rc-ветви на ВАХ (усредненное по времени напряжение показано тёмной сплошной линией). Буквы A и B указывают положение последовательного и параллельного резонансов в системе, соответственно. (a) $L = 45$, $C = 0.002$; (b) $L = 0.2$, $C = 1,25$.

Рис. 1.5(a) показывает результат для $L = 45$, $C = 0.002$ (малая емкость), где видно исчезновение колебаний напряжения вблизи точки A, что соответствует последовательному резонансному контуру с частотой $\omega_{rc}^s = 1/\sqrt{LC}$. Максимальная амплитуда напряжения в точке B соответствует параллельному резонансному контуру. На рис. 1.5(b) показаны те же особенности для случая гораздо большей шунтирующей емкости $C = 1.25$ и меньшей индуктивности $L = 0.2$.

1.3. Свойства ступеньки Шапиро на резонансной ветви

Обсудим теперь влияние внешнего электромагнитного излучения. Этот эффект определяется членом $A\sin\omega_R t$ в системе уравнений (1.6) и зависит от значения частоты ω_R и амплитуды A. При облучении системы электромагнитной волной на ВАХ перехода появляются ступеньки Шапиро. Существенным изменениям подвергается амплитудная зависимость ширины ступеньки Шапиро, когда она находится на резонансной ветви системы. Ширина ступеньки при отсутствии шунтирования определяется уравнением [70, 71]:

$$W = 2|J_n(f)|, \quad f = \frac{A}{\omega_R}\frac{1}{\sqrt{\beta^2+\omega_R^2}}, \tag{1.10}$$

где J_n - функция Бесселя n-го порядка, аргумент которой зависит от частоты ω_R и амплитуды A внешнего излучения, а также от параметра диссипации β.

На рис. 1.6(a) представлена часть ВАХ при $A = 0.5$ и $\omega_R = 2.7$. Отметим, что по сравнению с рис. 1.4 ВАХ при облучении дополнительно демонстрирует ступеньку Шапиро при $V = \omega_R = 2.7$ и ее субгармонику при $V = \omega_R/2 = 1.35$. На рис. 1.6(b) показана зависимость ширины ступеньки от амплитуды при $\omega_R = 2.7$ в случае без шунтирования (SS) и с шунтированием (SS-rc). Отметим, что результаты моделирования в случае без шунтирования хорошо описываются уравнением (1.10). Амплитудная зависимость ширины ступеньки Шапиро на rc-ветви существенно изменяется: наблюдается сжатие бесселевской зависимости. В результате при малых A ширина ступеньки в случае шунтирования больше, чем ширина ступеньки без шунтирования.

Фитирование полученных численных результатов с помощью (1.10), используя частоту ω_R как подгоночный параметр, выявило, что кривая, полученная для частоты внешнего излучения $\omega_R = 2.7$, соответствует зависимости:

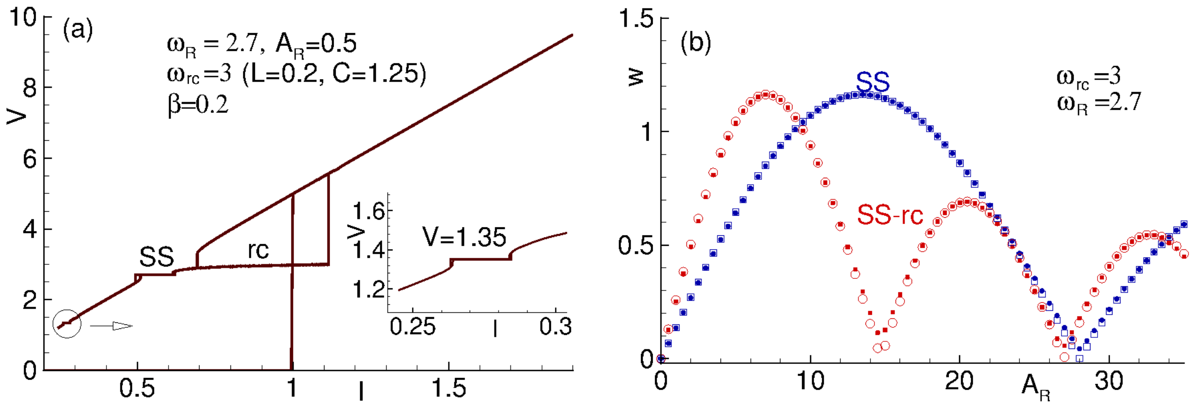

Рис. 1.6. (a) Влияние излучения с частотой $\omega_R = 2.7$ и амплитудой $A_R = 0.5$ на ВАХ шунтированного ДП. Вставка увеличивает часть, обозначенную кружком, демонстрирующую субгармонику ступеньки Шапиро. (b) Амплитудная зависимость ширины ступеньки W на резонансной ветви (SS-rc) при $\omega_R = 2.7$ по сравнению с зависимостью без шунтирования (SS). Точки показывают численно рассчитанную амплитудную зависимость ширины ступеньки Шапиро без шунтирования (SS, синие точки) и с шунтированием (SS-rc, красные точки). Квадраты показывают аналитические результаты для случая без шунтирования (SS, синие квадраты), полученные по формуле 1.10, и результаты подгонки для шунтированного ДП (SS-rc, красные квадраты) по формуле 1.11.

$$W = 2|J_n(f)|, \quad f = \frac{A}{\omega_{ef}} \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \omega_{ef}^2}}, \tag{1.11}$$

где в аргументе f используется эффективная частота $\omega_{ef} = 1.955$.

Интересной особенностью является тот факт, что первый максимум Бесселя появляется при гораздо меньшей амплитуде (мощности) внешнего электромагнитного излучения.

При приближении частоты внешнего излучения к частоте резонансного контура наблюдаемый эффект становится более ярким. На рис. 1.7(a) представлена ВАХ, полученная при амплитуде $A = 0.6$, и частоте $\omega_R = 3$, равной собственной частоте резонансного контура, т. е. при резонансном условии $\omega_R = \omega_J = \omega_{rc}^p$. Основная ступенька Шапиро в этом случае находится на вершине резонансной ветви. На вставке к рис. 1.7(a) увеличена часть ВАХ, демонстрирующая эту ступеньку при $V = 3$. Отметим, что на ВАХ появляются другие гармоники и субгармоники, которые не наблюдаются при отсутствии

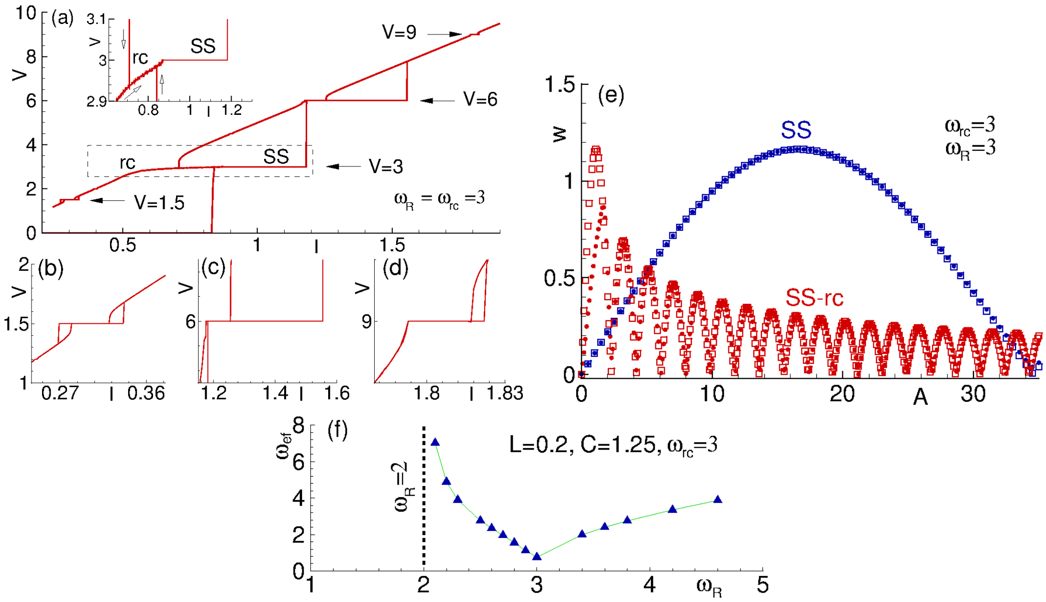

Рис. 1.7. (a) ВАХ шунтированного ДП под излучением с частотой $\omega_R = 3$ и амплитудой $A_R = 0.5$. Стрелки указывают резонансную ветвь при $\omega_R = \omega^p_{rc} = 3$, гармоники при $V = 6$, $V = 9$ и субгармонику при $V = 1.5$. На вставке представлена увеличенная часть ВАХ, отмеченная штриховым прямоугольником, демонстрирующая ступеньку Шапиро на резонансной ветви. Стрелки на вставке показывают направление изменения базового тока; панели (b), (c) и (d) показывают увеличенные гармоники и субгармонику, указанные в (a). (e) То же, что и на рис. 1.6(b) при $\omega_R = 3$. (f) Зависимость эффективной частоты от частоты излучения при $\omega^p_{rc} = 3$. Пунктирная линия указывает проявление последовательного резонанса.

шунтирования. Три из них, при $V = 1,5$, $V = 6$ и $V = 9$, обозначены стрелками и показаны в увеличенном масштабе на рис. 1.7(b) - (d), соответственно. Они являются областями, в которых происходит захват собственной частоты системы гармониками или субгармоникой частоты внешнего излучения. С другой стороны на этих ступеньках выполняется условие резонанса между джозефсоновской частотой и гармониками и субгармоникой частоты параллельного резонансного контура. Таким образом, эти ступеньки представляют собой композитное состояние, котором среднее напряжение остается постоянным, но амплитуда осцилляций напряжения увеличивается в условиях резонанса.

Зависимость ширины ступеньки Шапиро от амплитуды внешнего излучения при частоте $\omega_R = 3$ для шунтированного ДП представлена на рис. 1.7(e) (кривая отмеченная как $SS - rc$). Точки - результаты численного расчета, а квадраты - результаты, полученные по формуле (1.11). Здесь, как и на рис. 1.6(b), показаны результаты моделирования (точки) и рассчитанные (квадраты) по формуле (1.10) для случая без шунтирования (SS) при той же частоте $\omega_R = 3$. Можно отметить существенные изменения по сравнению с результатами, представленными на рис. 1.6(b).

Фитирование данных моделирования при помощи уравнения (1.11), как и в случае при $\omega_R = 2.7$, дает смещение эффективной частоты $\omega_{ef} = 0.76$. Основываясь на полученных результатах, можно сделать вывод, что шунтирование оказывает существенное влияние на отклик ДП на внешнее излучение, а вместо частоты ω_R очень хорошее соответствие амплитудной зависимости ширины ступеньки может быть получено с использованием эффективной частоты ω_{ef}.

Чтобы прояснить влияние LC-шунтирования на особенности ступенек Шапиро, было исследовано влияние внешнего излучения при разных частотах. Был проведен подробный анализ амплитудной зависимости ширины ступеньки Шапиро для четырнадцати значений частоты излучения в интервале $2.0 \leq \omega_R \leq 4.6$ для $\omega_{rc}^p = 3$ и найдена эффективная частота ω_{ef} в каждом случае. Результаты показаны на рис. 1.7(f), где представлена ω_{ef} как функция ω_R. Данные моделирования показаны треугольниками, кривая построена для удобства. На этой зависимости мы видим минимум эффективной частоты ω_{ef}, когда ω_R приближается к резонансному условию $\omega_R = \omega_{rc}^p = 3$. С другой стороны, приближение к началу резонансной ветви (точка А, см. Рис. 1.7(a)), где выполняются условия для последовательного резонанса $\omega_R = \omega_{rc}^s = 2$, приводит к увеличению эффективной частоты. Зависимость ω_{ef} как функция ω_R при другой частоте резонансного контура $\omega_{rc}^p = 4$ демонстрирует качественно такой же результат (здесь не приведен).

$Z(j\omega_{rc}^s) = j\omega_{rc}^s L + 1/j\omega_{rc}^s C$

Основываясь на анализе результатов, представленных на рис. 1.7(f), была установлена корреляции между амплитудой джозефсоновских колебаний и значением эффективной частоты. В конце резонансной ветви $\omega_R = \omega_{rc}^p$ среднее значение сверхпроводящего тока достигает максимума, так как импеданс $Z(\omega_{rc}^{p}) \longrightarrow \infty$, и это является причиной минимума эффективной частоты. Подчеркнем, что среднее значение сверхпроводящего тока в области резонансного пика намного больше его значения при том же токе в ДП без шунтирования. Напротив, в начале резонансной ветви, вблизи точки резонанса последовательного контура ($\omega_J = \omega_{rc}^{s} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$), среднее значение сверхпроводящего тока претерпевает минимум, как видно на верхней вставке рис. 1.3(a). Этот факт объясняет увеличение эффективной частоты при $\omega_R = 2$, наблюдаемое на рис. 1.7(f). Отметим также, что эффективная частота может быть намного больше частоты внешнего излучения.

Формула (1.11) также может быть представлена в виде

$$f = \frac{A_R q^2}{\omega_R} \frac{1}{\sqrt{\beta^2 q^2 + \omega_R^2}}, \tag{1.12}$$

где множитель q равен $\frac{\omega_R}{\omega_{ef}}$. Таким образом, результаты моделирования могут быть фитированы также путем введения эффективной амплитуды $A_{ef} = Aq^2$ и эффективного параметра диссипации $\beta_{ef} = \beta q$. При малых q, когда $\beta \ll \omega_{ef}$, мы можем пренебречь q в диссипативном члене в квадрате корня и использовать только эффективную амплитуду. Было показано [61], что эффективная амплитуда микроволнового излучения может быть умножена на Q-кратное за счет эффекта согласования импеданса резонатора, где Q - добротность. Поэтому введение эффективной амплитуды дает еще одну возможность описать полученные результаты (с указанными выше ограничениями).

В рамках настоящей работы были также проведены расчеты амплитудной зависимости ширины ступеньки Шапиро для системы СДП шунтированной LC-элементами, с целью показать, что полученные результаты по изменению бесселевской зависимости ширины ступеньки Шапиро от амплитуды излучения могут быть использованы в приложениях. Отметим, что результаты, полученные для системы, аналогичны результатам для одного перехода.

На рис. 1.8 показана зависимость ширины ступеньки Шапиро ΔI от ам-

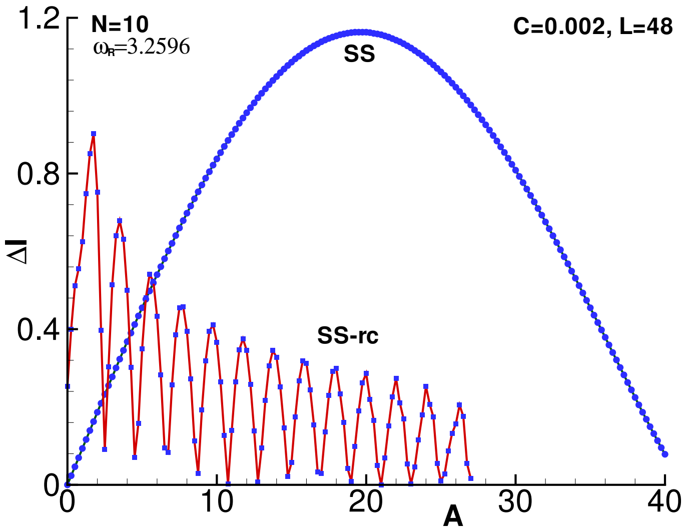

Рис. 1.8. Амплитудная зависимость первой ступеньки Шапиро ΔI на резонансной ветви (SS-rc) рассчитанная для системы $N = 10$ СДП при $\omega_R = 3.2596$ в сравнении с той же зависимостью без шунтирования (SS).

плитуды внешнего излучения для системы с десятью СДП при параметрах резонансного контура $L = 48$ и $C = 0.002$. Результаты, отмеченные SS, показывают A-зависимость ΔI_{SS} в случае без шунтирования. Результаты, отмеченные SS-rc, показывают ту же зависимость, когда ступенька находится на резонансной ветви ВАХ системы. Как и в случае одного перехода, амплитудная зависимость ширины ступеньки Шапиро существенно изменяется в случае шунтирования. Первый максимум функции Бесселя для системы СДП с шунтом находится в области гораздо меньших амплитуд по сравнению со случаем СДП без шунтирования.

Изменение амплитудной зависимости ступеньки Шапиро, возникающее в резонансном состоянии, когда частота излучения совпадает с джозефсоновской частотой и частотой резонансного контура, представляет интерес не только с точки зрения фундаментальных исследований, но и может быть использовано в различных приложениях. Оптимизированный LC-шунт приводит к увеличению ширины ступеньки Шапиро при малых амплитудах внешнего излучения. Во многих случаях новые типы джозефсоновских переходов характеризуются их откликом на микроволновое излучение, но часто доступная область частот для наблюдения того или иного явления мала и необходимая мощность источника микроволнового источника слишком велика. Таким образом, многие эффекты не могут наблюдаться в широком диапазоне [72], в частности, наличие напряжения на переходе в отсутствии приложенного к системе постоянного тока, вызванное переменным внешним электромагнитным полем (ступенька нулевого тока). В этом случае шунтирование перехода может увеличить диапазон мощности, в которой может наблюдаться ступенька нулевого тока, с использованием того же микроволнового источника, поскольку ступеньки Шапиро демонстрируют первый максимум амплитудной зависимости ширины при гораздо меньшей мощности излучения по сравнению с не шунтированным джозефсоновским переходом. Эта особенность ступеньки Шапиро на резонансной ветви может быть интересна для квантовой метрологии [73]. Кроме того, резонансный контур может быть адаптирован в схему таким образом, чтобы действовать как волновод, уменьшая потери мощности излучения. Другим примером может быть обнаружение излучения с помощью одного джозефсоновского перехода путем наблюдения ступеньки Шапиро, индуцированной входящим сигналом [70]. Если диапазон частоты сигнала известен, то можно подобрать параметры резонансного контура таким образом, чтобы генерируемая резонансная ветвь повышала чувствительность детектора. В качестве последнего примера можно привести оптимизацию программируемых стандартов напряжения, основанных на эффекте Джозефсона, где используется только первая ступенька Шапиро [13].

1.4. Дополнительный параметрический резонанс в системе связанных джозефсоновских переходов, шунтированных резонансным контуром

Прямое экспериментальное наблюдение электрического заряда в сверхпроводящих слоях является очень сложной задачей из-за его малой величины и малой толщине сверхпроводящих слоев [74, 8, 7]. Здесь мы показываем, что временная зависимость полного напряжения стека и, соответственно, временная зависимость напряжения на шунтирующем конденсаторе, отражают заряд, который возникает в сверхпроводящих слоях. Резонанс джозефсоновских осцилляций с колебаниями LC-контура действует как триггер для дополнительного параметрического резонанса в системе связанных джозефсоновских переходов с LC шунтированием. Это приводит к появлению заряда на S-слоях в стеке и возбуждению продольной плазменной волны с частотой, равной половине джозефсоновской частоты [64].

Рис. 1.9 представляет временную зависимость заряда на шунтирующем конденсаторе (светлый, голубой) и в S-слое (темный, оранжевый) вместе с соответствующей частью ВАХ, включающей rc-ветку. Расчеты выполнены для системы десяти ДП, шунтированных емкостью $C = 0.002$ при трех значениях индуктивности. Как показано на рис. 1.9(a), электрический заряд в S-слоях при $L = 42$ отсутствует. Заряд в шунтирующем конденсаторе рассчитан при увеличении базового тока. Отметим монотонное увеличение амплитуды колебаний заряда до резонансной точки $\omega_J = \omega_{rc}^p$.

С увеличением L в S-слоях появляется электрический заряд, амплитуда осцилляций которого с ростом L увеличивается. При $L = 45$ ($\omega_{rc}^p = 3.367$), как мы видим на рис. 1.9(b), заряд в S-слое существует одновременно с зарядом в конденсаторе. Пунктирными линиями отмечен диапазон, в котором уменьшается амплитуда осцилляций заряда конденсатора, нарушая таким образом монотонное увеличение амплитуды колебаний в условиях резонанса. Этот диапазон уменьшенной амплитуды ясно просматривается на рис.1.9(c) при $L = 48$. Анализ распределения заряда в стеке показывает, что реализуется ППВ с $\lambda = 2d$, где d-период стека. Пунктирные линии фактически указывают интервал базового тока, где существует ППВ. Уменьшение ω_{rc}^p приводит к росту этого интервала тока. Теперь, для $\omega_{rc}^p = 3.2596$, заряд в S-слоях может быть зарегистрирован вдоль одной петлевой ВАХ после прыжка на резонансную ветвь с резистивной

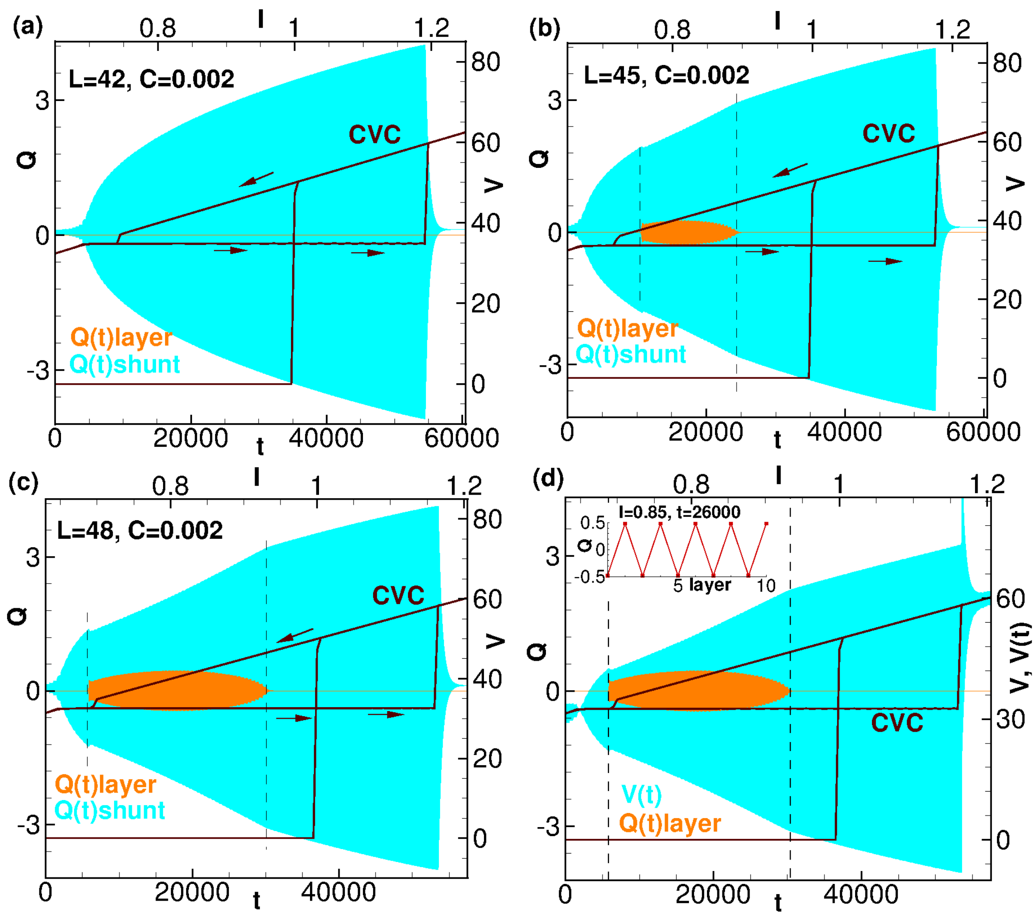

Рис. 1.9. Временная зависимость заряда на шунтирующем конденсаторе (светлый, голубой) и заряда в S-слоях (темный, оранжевый) вместе с соответствующей частью ВАХ, включающей rc-ветку, рассчитанную для системы десяти ДП, емкостью $C = 0.002$ и индуктивностью (a) $L = 42$, (b) $L = 45$, (c) $L = 48$. (d) временная зависимость напряжения и заряда с соответствующей частью ВАХ системы $N = 10$ ДП, шунтированной резонансным контуром с $\omega_{rc}^{p} = 3.2596$. Вставка показывает продольную плазменную волну с длиной волны $\lambda = 2$, которая появляется в стеке при $I = 0.85$.

ветви с уменьшением базового тока.

Когда резонансная частота системы ω_{rc}^{p} достаточно близка к фундаментальному параметрическому резонансу, поведение колебаний заряда существенно изменяется [64]. Возникновение электрического заряда на сверхпроводящих слоях очень четко продемонстрирована на рис. 1.10, где мы показываем временную зависимость заряда в первых сверхпроводящих слоях стека с десятью ДП при $C = 0,002$, $L = 55$. Увеличение L по сравнению с результатами, представленными на рис. 1.9, уменьшает ω_{rc}^{p} и приводит к сближению с частотой

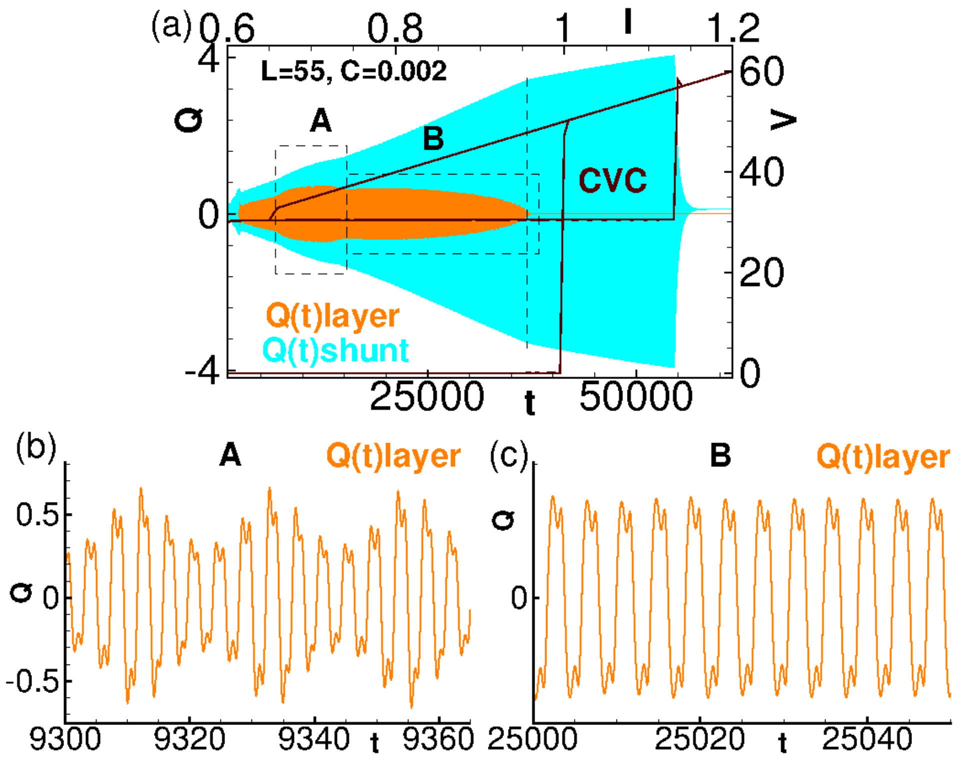

Рис. 1.10. (a) Временная зависимость заряда на шунтирующей емкости (светлый, голубой) и S-слоев (темный, оранжевый) вместе с соответствующей частью ВАХ, включая rc-ветку, рассчитанная для системы $N = 10$ ДП, шунтированных $C = 0.002$, $L = 55$. (b) Характер осцилляций заряда на S-слоях в области A. (c) Характер осцилляций заряда на S-слоях в области B.

фундаментального параметрического резонанса. Пунктирными прямоугольниками на рис. 1.10 (a) отмечены две области с различным характером колебаний заряда. Рис. 1.10 (b) и (c) демонстрируют характер колебаний в области A и B, соответственно. Наблюдаемые модуляции осцилляций заряда в области A представляют большой интерес с фундаментальной точки зрения, так как возникают в системе в отсутствии внешнего воздействия.

В этой области два состояния, когда система находится на резонансной ветви или на верхней ветви, где все переходы находятся в осциллирующем состоянии, при фиксированном значении базового тока четко характеризуются двумя разными частотами. Сосуществование двух состояний с двумя разными амплитудами и частотами приводит к тому, что в зависимости от начальных условий система может генерировать колебания с двумя разными частотами.

При наличии шума система может переключиться из одного состояния в другое под влиянием случайного члена [75]. Происхождение наблюдаемой модуляции, вероятно, связано с проявлением биритичности в системе. Область A соответствует интервалу, где верхняя резистивная ветвь и резонансная ветвь (rc-ветвь) очень близки друг к другу, поэтому эта область наиболее чувствительна к дополнительным возмущениям. Таким образом, существование двух частот может быть источником наблюдаемых модуляции. Кроме того, еще раз подчеркнем, что с увеличением L частота параллельного резонанса $\omega_{rc}^{p} = \sqrt{\frac{1+NC}{LC}}$ уменьшается, приближаясь к параметрическому резонансу в системе, реализуемому в стеке связанных джозефсоновских переходов [75, 11, 10]. Таким образом, возможны условия для более сложного резонанса. Особенности этого явления для совокупности связанных ДП требуют дальнейшего исследования.

1.5. Модуляция осцилляций напряжения и заряда, возникающая под воздействием внешнего периодического воздействия

В этом параграфе рассматривается шунтированная система СДП под действием внешнего электромагнитного излучения. На рис. 1.11 показана ВАХ и временная зависимость заряда для первого S-слоя десяти ДП при частоте излучения $\omega = 3.2596$, равной частоте резонансного контура, и амплитуде $A = 0.2$. ВАХ демонстрирует ступеньку Шапиро в конце rc-ветви (рис. 1.11 (a)) при $V = 32.596$ и ее гармонику при $V = 65.110$, поэтому интервал, в котором наблюдается заряд на сверхпроводящих слоях не затрагивает ступеньку. Заряд на сверхпроводящих слоях (рис. 1.11 (b)) возникает в интервале, соответствующем центральной части rc-ветви, который находится ниже ступеньки Шапиро по напряжению. Отметим расщепление временной зависимости заряда на сверхпроводящих слоях на отдельные области.

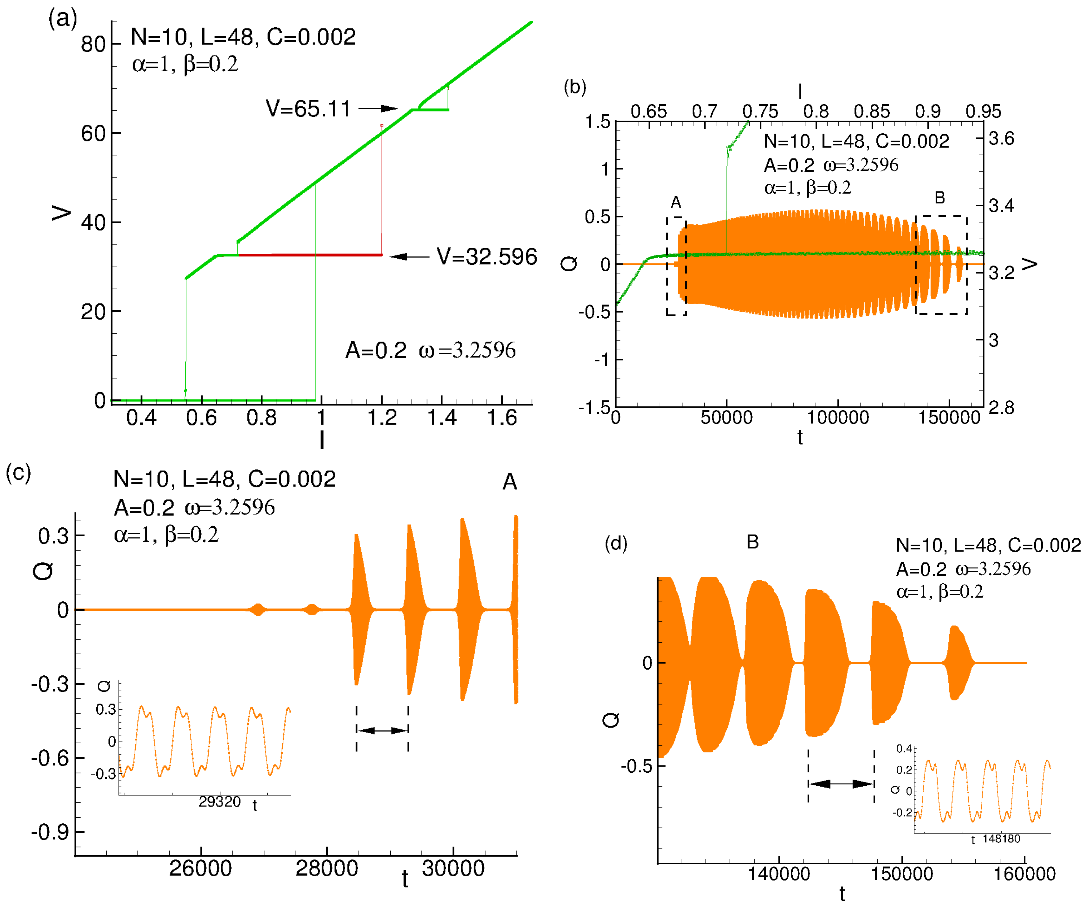

Рис. 1.11. (a) ВАХ системы из десяти ДП при $\beta = 0.2$, $\alpha = 1$, $L = 48$ и $C = 0.002$ при внешнем электромагнитном излучении с частотой $\omega = 3.2596$ и амплитудой $A = 0.2$. (б) Временная зависимость заряда для первого сверхпроводящего слоя в стеке при тех же параметрах, что и в (a). (c) и (d) Увеличенные части временной зависимости заряда в начале и в конце области с зарядом, соответственно. Вставки демонстрируют характер колебаний заряда в соответствующих областях.

На рис. 1.11(c, d) показана в увеличенном масштабе временная зависимость заряда в S-слое в начале и в конце токового интервала, где существует заряд, демонстрируя характер расщепления зарядовых колебаний. Амплитуда осцилляций заряда меняется со временем таким образом, что области со сравнительно большой амплитудой перемежаются областями с амплитудой равной нулю. Временной интервал (период) расщепления увеличивается по мере приближения к точке резонанса, но характер колебаний, показанный на вставке к фигурам, не изменяется. Наблюдаемое расщепление является проявлением процесса биения амплитуды осцилляций заряда под воздействием внешнего излучения. Таким образом, расщепление осцилляций заряда должно исчезать в интервале базового тока, соответствующем ступеньке Шапиро, так как в этой области частота собственных колебаний системы равна частоте внешнего излучения. Эта особенность показана на рис. 1.12.

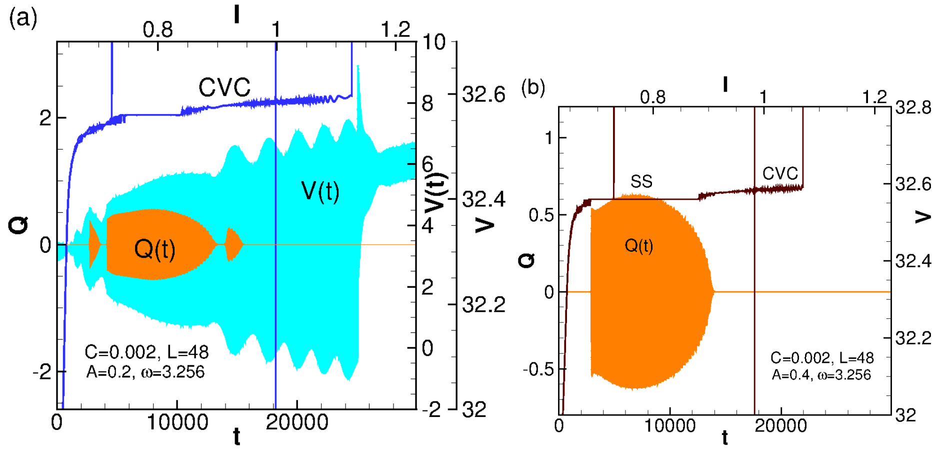

Рис. 1.12. (a) Временные зависимости заряда $Q(t)$ (для первого S-слоя) и напряжения $V(t)$ (для первого ДП в стеке) вместе с соответствующей частью ВАХ системы $N = 10$ ДП, шунтированной резонансным контуром с $\omega_{rc}^{p} = 3.2596$ при электромагнитном излучении с частотой $\omega_R = 3.256$ и амплитудой $A = 0.2$. V-ось указывает общее среднее напряжение стека; (b) $Q(t)$ вместе с ВАХ при той же частоте и $A = 0.4$.

Расщепление колебаний заряда наблюдается в случае, когда ширина ступеньки Шапиро меньше интервала зарядки (см. рис. 1.12(a)) или сама ступенька находится за пределами этого интервала как в случае показанном на рис. 1.11. Оно полностью исчезает при большой амплитуде внешнего излучения, когда интервал зарядки и ширина ступеньки Шапиро имеют одинаковый размер, и они перекрываются, как мы видим на рис. 1.12(b).

Наблюдаемое расщепление ни что иное как биения, возникающие при наложении двух периодических колебаний с частотами ω_J и ω_R, которое приводит к появлению модуляций на временной зависимости заряда и напряжения. На рис. 1.13 представлен результат расчета временной зависимости напряжения для одного шага по току при $I = 1.1$ и размере временного домена $Tf = 518144$ в нормированных величинах или $\approx 8 \times 10^{-9}$ сек. Биения колебаний напряжения

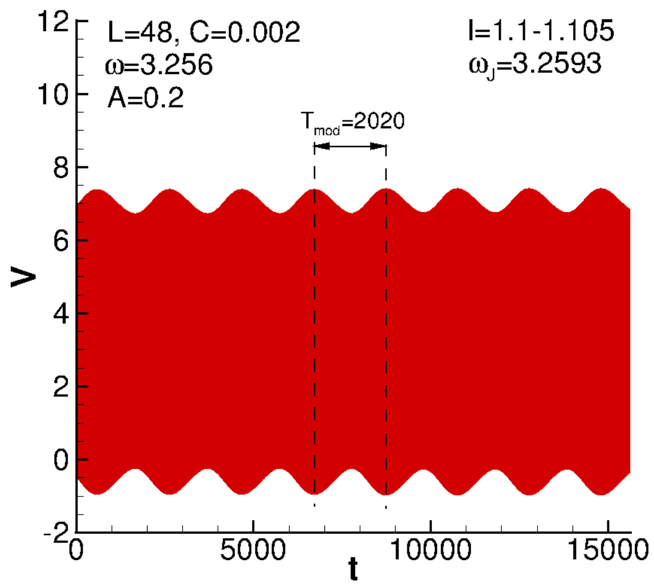

Рис. 1.13. Временная зависимость напряжения $V(t)$ (для первого ДП в стеке) системы с десятью ДП, шунтированной резонансным контуром с $L = 48$ и $C = 0.002$ при электромагнитном излучении с частотой $\omega_R = 3.256$ и амплитудой $A = 0.2$. Расчет проведен для одного шага по току $I = 1.1$.

демонстрируют постоянный период $T_m \approx 2020$, который зависит от разности между ω_J и ω_R и может быть записан в следующем виде:

$$T_m = \frac{2\pi}{\mid \omega_J - \omega_R \mid}. \tag{1.13}$$

Изменение базового тока приводит к изменению среднего напряжения и соответственно к изменению джозефсоновской частоты ω_J. Таким образом, период T_m уменьшается по мере увеличения разницы между двумя частотами, что и продемонстрировано на рис. 1.11 и рис. 1.12. Резонансная ветвь на ВАХ имеет малый наклон, что позволяет наблюдать биения на временной зависимости напряжения и заряда в широком интервале базового тока, исключая только область ступеньки Шапиро. В этой области происходит захват собственной частоты системы частотой внешнего излучения и колебания происходят с одной частотой. В отсутствии внешнего излучения биения не наблюдаются (см. рис. 1.9).

Подводя итог этой главы, отметим, что на основании полученных результатов по исследованию динамики электрического заряда на сверхпроводящих слоях нами был предложен новый метод определения этого заряда, основанный на измерении мощности выделяемой на шунтирующем конденсаторе. В связи с чем возникает ряд вопросов, в частности, чем (помимо факта наличия заряда) может быть полезно, определение значения электрического заряда? Может ли этот эффект использоваться в каком-либо приложении или это только основной физический эффект? Ответ на эти вопросы имеет много аспектов. Здесь мы подчеркиваем главное - возникновение продольной плазменной волны в стеке связанных джозефсоновских переходов. Это явление важно для различных явлений в физике и связанных с ними приложениях. В частности, пока не исследовано влияние продольной плазменной волны на когерентное электромагнитное излучение из слоистой системы ВТСП в терагерцовой области частот. Но, очевидно, она должна повлиять на мощность излучения. Появление заряда на S-слоях и продольной плазменной волны с различными параметрами также может быть важно для систем наноэлектроники, основанных на внутренних джозефсоновских переходах [76, 77, 78, 79]. Отметим еще одну интересную особенность, связанную с тем, что для возникновения и накопления электрического заряда на S-слоях потребуется некоторое время. Этот вопрос еще не был затронут в предыдущих исследованиях. Шунтирование системы резонансным контуром может влиять на время накопления заряда, а следовательно на скорость ответной реакции перехода. Таким образом, оптимизация шунтирования предлагает новые способы управления поведением внутренних джозефсоновских переходов (особенно на высоких частотах), а именно контроль процесса “зарядки”, которые открывают новые возможности для приложений.

Глава 2

Джозефсоновский переход с нетривиальным барьером

В последние годы большой интерес представляют фермионы Майорано (ФМ), проявление которых в системах конденсированного состояния обсуждалось во множестве различных работ [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30]. Интерес к таким фермионам проистекает из их неабелевой квантовой статистики, которая составляет основу топологических квантовых вычислений [23, 80, 81, 82]. ФМ могут быть реализованы как локализованные внутрищелевые состояния в сверхпроводнике [26, 27, 28, 29]. Такие состояния могут возникать в ДП типа сверхпроводник-нормальный метал-сверхпроводник, на основе сверхпроводников с триплетным p-спариванием. В последнее время выяснилось, что сверхпроводник с s-спариванием может наводить, за счет эффекта близости, в материалах с сильной спин-орбитальной связью во внешнем магнитном поле сверхпроводимость p-типа [28, 26, 27, 83] (а также смотри обзоры [84] и [85]).

Экспериментальным свидетельством майорановских связанных состояний может служить наличие пика плотности состояний внутри сверхпроводящей щели или дробного эффекта Джозефсона, заключающегося в появлении только четных ступенек Шапиро на ВАХ ДП во внешнем электромагнитном поле. Дробный эффект Джозефсона обусловлен 4π-периодичностью сверхпроводящего тока в ДП с майорановскими связанными состояниями. В последнее время в литературе появились работы [35, 86, 33], посвященные экспериментальной реализации таких состояний. Однако, многие эксперименты встретили довольно резкую критику, связанную с неоднозначностью интерпретации полученных результатов.

Эксперименты по наблюдению ступенек Шапиро на ВАХ ДП позволяют определить вычислить периодичность ток-фазового соотношения в переходе

[12]. Сравнительно недавно ступеньки Шапиро были проанализированы для одномерных проводов, поддерживающих майорановские связанные состояния, где при расчете ВАХ менялось напряжение в системе [87, 88, 89]. Однако, более реалистичный эксперимент [12], в котором менялся бы ток в системе, до настоящего времени не проводился.

В работе [39] был теоретически промоделирован такой эксперимент в рамках модели одномерного ДП (с емкостью равной нулю) где показано, что помимо четных целых ступенек Шапиро возникают также дополнительные ступеньки при нечетных и дробных частотах внешнего электромагнитного излучения. Однако в этом случае, в отличие от эксперимента, в котором меняется напряжение в системе, четные ступеньки доминируют в широком диапазоне параметров даже в случае нескольких мод в частности, в присутствии 2π-периодической компоненты сверхпроводящего тока, что давало бы ясное экспериментальное свидетельство наличия майорановских фермионов.

Настоящая глава посвящена исследованию топологических свойств ДП, а именно, исследованию ДП с триплетным p-спариванием в рамках модели, учитывающей емкость перехода. Как было отмечено в работе [32], одним из проявлений майорановских связанных состояний является 4π-периодичность сверхпроводящего тока и возникновение дробного эффекта Джозефсона. Исследования, описанные в этой главе, направлены на изучение дробного эффекта Джозефсона и других проявлений 4π-периодичности сверхпроводящего тока в ДП с триплетным p-спариванием.

2.1. Модель джозефсоновского перехода с нетривиальным барьером шунтированного сопротивлением и емкостью

Рассматриваемый нами SNS джозефсоновский переход (сверхпроводник-нормальный метал-сверхпроводник), подключенный к источнику постоянного тока, показан на Рис. 2.1. Он состоит из двух топологических сверхпроводников

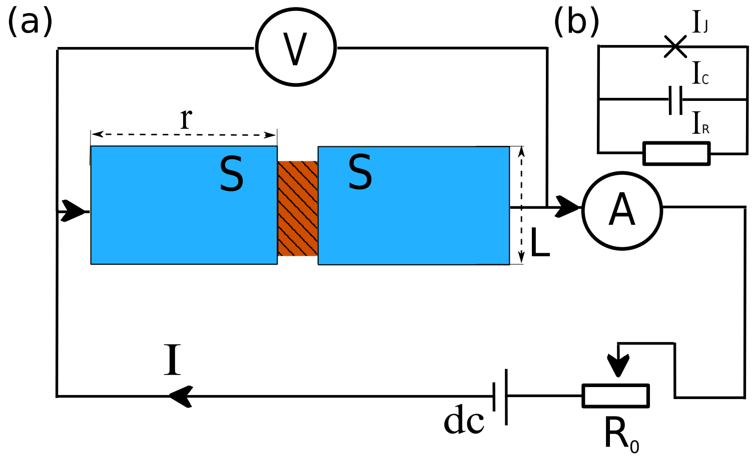

Рис. 2.1. (a) Джозефсоновский переход в электрической цепи [31]. Переход имеет ширину L в поперечном направлении и r в продольном. (b) Схематическое представление ДП в рамках RCSJ-модели. I_J, I_C и I_R токи Джозефсона, смещения и квазичастичный, соответственно.

с триплетным p-спариванием [26, 27]. В p-состоянии орбитальный момент куперовской пары $L = 1$ и полный спин пары $S = 1$. Отметим, что приведенный в данной главе анализ такого ДП относится к топологическим сверхпроводникам в 1D геометрии [26, 27] при условии, что поперечный размер L стремится к нулю.

В ДП, показанном на рис. 2.1, возникают локализованные андреевские состояния. Было показано [28], что при наличии триплетного p-спаривания в сверхпроводнике они образуют майорановские связанные состояния, которые могут быть получены в виде решения уравнения Боголюбова-де Жена [32]. Толщина сверхпроводящих слоев полагается большой $r >> 1$, следовательно, можно пренебречь рекомбинацией майорановских состояний [39]. Локализованные внутрещелевые решения имеют вид [32]:

$$E = -\Delta_0 \sqrt{D} \cos(\phi/2), \tag{2.1}$$

где Δ_0 - амплитуда сверхпроводящей щели, ϕ - разность фаз в переходе, D - параметр прозрачности барьера.

Джозефсоновский ток может быть написан в виде:

$$I_J(\phi) = \frac{2e}{\hbar} \partial E/\partial\phi = \frac{e\Delta_0}{\hbar} \sqrt{D} \sin(\phi/2). \tag{2.2}$$

Отметим 4π-периодичность сверхпроводящего тока, которая при замене $\phi \to 2eVt/\hbar$ в уравнении (2.2), приводит к возникновению дробного эффекта Джозефсона [32].

Для описания системы, показанной на рис. 2.1(a), использовалась RCSJ-модель (см. Рис. 2.1 (b)). Она включает резистивную компоненту тока, учитывающую процесс диссипации, которая может возникнуть, например, из-за квазичастичного туннелирования, а также шунтирование емкостью C_j, чтобы учесть токи смещения из-за возможного накопления заряда на слоях [90]. Фазовая динамика в рамках этой модели, с учетом уравнения (2.2), и в присутствии внешнего излучения, описывается уравнением [90, 91]

$$\ddot{\phi} + \beta\dot{\phi} + I_J(\phi) = I + A\sin(\omega_R t), \tag{2.3}$$

где A и ω_R - амплитуда и частота внешнего излучения. Параметр диссипации $\beta = \sqrt{\hbar/(2eI_c R_j^2 C_j)}$, R_j и C_j - сопротивление и емкость перехода. I, I_J и A нормированы на критический ток перехода $I_c = e\Delta_0/\hbar$, время нормировано на обратную плазменную частоту ($t \to t\omega_p$, где $\omega_p = \sqrt{2eI_c/(\hbar C_j)}$). Для расчета вольт-амперной характеристики использовалась система уравнений

$$\begin{cases} \ddot{\phi} + \beta\dot{\phi} + I_J(\phi) = I + A\sin(\omega_R t) \\ V = \dfrac{d\phi}{dt}, \end{cases} \tag{2.4}$$

где V нормировано на $V_0 = \hbar\omega_p/2e$. Отметим, что замена переменных $\phi/2 \to \phi$ в этой системе не является скейлингом (маштабной инвариантностью). Так как, при такой замене параметр β меняется на $\beta' = \dfrac{\beta}{\sqrt{2}}$. Полученная система решается численно методом Рунге-Кутта четвертого порядка.

Майорановские связанные состояния могут наблюдаться также в джозефсоновском переходе с дополнительной компонентой тока, представленной обычным $I_c sin(\phi)$ членом. В этом случае, сверхпроводящий ток равен, сумме 4π- и 2π-компоненте джозефсоновского тока. В нормированном виде выражение для сверхпроводящего тока принимает вид

$$I_s = I_J(\phi)/I_c = \gamma\sin(\phi/2) + \delta sin(\phi), \tag{2.5}$$

где параметр γ - определяет вклад 4π-периодической компоненты тока, а параметр δ - определяет вклад обычного джозефсоновского тока, который в рассматриваемых случаях равен либо 1, либо 0.

2.2. Пертурбативный анализ ступенек Шапиро

Как уже отмечалось ранее, использование дробного эффекта Джозефсона в переходах с нетривиальными барьерами является одним из наиболее перспективных методов обнаружения 4π-периодичности сверхпроводящего тока [38, 39], и в последние годы данный эффект активно исследуется в различных системах. Для того, чтобы лучше понять природу этого эффекта, в рамках настоящей диссертации нами был проведен пертурбативный анализ фазовой динамики ДП с триплетным p-спариванием под действием внешнего периодического сигнала. Для этого перепишем уравнение движения (2.3), используя параметра Мак-Камбера β_c:

$$\beta_c\ddot{\phi} + \dot{\phi} + sin(\phi/2) = I + Asin(\omega_R t)). \qquad (2.6)$$

Учитывая, что в нашем случае $A >> 1$, сверхпроводящий ток можно считать малым параметром. Таким образом, разность фаз ϕ и ток I можно разложить по этому малому параметру:

$$\phi = \phi_0 + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2,$$
$$I = I_0 + \epsilon I_1 + \epsilon^2 I_2,$$

где $\epsilon > 0$ - малая величина, I_0 - базовый ток через переход и I_α, $\alpha = 1, 2, 3, ...$ определяются из условия $< \dot{\phi}_\alpha >= 0$ (нет дополнительного накопления напряжения и заряда на слоях). После подстановки разности фаз ϕ в выражение для сверхпроводящего тока, получаем:

$$\begin{aligned} sin(\phi/2) &= sin(\phi_0/2 + \epsilon\phi_1/2 + \epsilon^2\phi_2/2) \\ &= sin(\phi_0/2)cos(\epsilon\phi_1/2 + \epsilon^2\phi_2/2) + cos(\phi_0/2)sin(\epsilon\phi_1/2 + \epsilon^2\phi_2/2) \\ &\approx sin(\phi_0/2) + cos(\phi_0/2)(\epsilon\phi_1/2 + \epsilon^2\phi_2/2), \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\beta_c\ddot{\phi}_\alpha + \dot{\phi}_\alpha = f_\alpha(t),$$

где $f_0(t) = I_0 + A\sin(\omega_R t)$, $f_1(t) = I_1 + \sin(\phi_0/2)$.

В нулевом приближении уравнение (2.6) имеет вид

$$\beta_c\ddot{\phi}_0 + \dot{\phi}_0 = I_0 + A\sin(\omega_R t). \qquad (2.7)$$

Для решения этого уравнения используем замену

$$Y_\alpha = \dot{\phi}_\alpha. \tag{2.8}$$

Следовательно, уравнение (2.7) можно переписать в общем виде

$$\beta_c \dot{Y}_\alpha + Y_\alpha = f_\alpha(t), \tag{2.9}$$

Решение уравнения можно получить, используя интегральный множитель $e^{\frac{t}{-\beta_c}}$

$$=> Y_\alpha(t) = Y_\alpha(0) + e^{\frac{t}{-\beta_c}} \int\limits_0^t e^{\frac{t'}{\beta_c}} f_\alpha(t') dt'.$$

$$=> \phi_\alpha(t) = \int\limits_0^t Y_\alpha(t') dt' + \phi_\alpha(0).$$

Для $\alpha = 0$, получаем

$$Y_0(t) = I_0 + \frac{A}{\gamma} cos(\omega_R t + \alpha_0), \tag{2.10}$$

где $\alpha_0 = cos^{-1}(\frac{\beta_c \omega_R}{\gamma})$, $\gamma = \sqrt{(\beta_c \omega_R)^2 + 1}$

После обратной замены $Y_\alpha = \dot{\phi}_\alpha$ получаем

$$\phi_0(t) = \phi_0 + I_0 t + \frac{A}{\omega_R \gamma} sin(\omega_R t + \alpha_0). \tag{2.11}$$

Сверхпроводящий ток в нулевом приближении равен

$$\begin{aligned} I_s &\sim sin(\phi_0(t)/2) \\ &\sim Im(e^{i\phi_0(t)/2}) \\ &= Im \sum_n J_n(\frac{A}{2\gamma\omega_R}) e^{i([I_0/2 + n\omega_R]t + n\alpha_0 + \phi_0/2)}, \end{aligned}$$

где J_n - функции Бесселя.

Условием для появления ступенек Шапиро является $I_0/2 + n\omega_R = 0$ или $I_0 = 2 \mid n_0 \mid \omega_R$. Таким образом, ступеньки, отвечающие нулевому приближению, являются кратными $2\omega_R$.

Ширина ступеньки Шапиро определяется из условия:

$$\Delta I_s^{n_0} = Max(I_s^{n_0}) - Min(I_s^{n_0})$$
$$= J_{n_0}(\frac{A}{2\gamma\omega_R})[sin(\phi_0/2 + n_0\alpha_0)_{max} - sin(\phi_0/2 + n_0\alpha_0)_{min}]$$

$$=> \Delta I_s^{n_0} = 2J_n(\frac{A}{2\gamma\omega_R}). \tag{2.12}$$

В первом приближении уравнение (2.6) имеет вид

$$\beta_c\dot{Y}_1 + Y_1 = I_1 - sin(\phi_0(t)/2). \tag{2.13}$$

При условии $< \dot{\phi}_1 >= 0, I_1 = 0$, это уравнение имеет решение

$$Y_1 = \sum_n J_n(\frac{A}{2\gamma\omega_R})(\frac{1}{\gamma_0})cos(I_0t/2 + n\omega_Rt + n\alpha_0 + \delta_0), \tag{2.14}$$

где $\omega_n = I_0/2 + n\omega_R$, $\delta_n = cos^{-1}(\frac{\beta_c\omega_n}{\gamma_n})$, $\gamma_n = \sqrt{(\beta_c\omega_n)^2 + 1}$.

$$Y_1 = \sum_n J_n(\frac{A}{2\gamma\omega_R})\gamma_n^{-1}cos(\omega_nt + n\alpha_0 + \delta_n), \tag{2.15}$$

$$\phi_1 = \sum_n J_n(\frac{A}{2\gamma\omega_R})(\frac{1}{\gamma_n\omega_n})sin(\omega_nt + n\alpha_0 + \delta_n). \tag{2.16}$$

В первом приближении сверхпроводящий ток определяется выражением

$$I_s \sim \frac{1}{2}\phi_1 cos(\phi_0/2) \tag{2.17}$$
$$\sim \sum_{n_1,n_2} J_{n_1}(x)J_{n_2}(x)(\frac{1}{2\gamma_{n_1}\omega_{n_1}})sin(\omega_{n_1}t + n_1\alpha_0 + \delta_{n_1})cos(\omega_{n_2}t + n_2\alpha_0 + \delta_{n_2})$$

$$I_s \sim \sum_{n_1,n_2} J_{n_1}(x)J_{n_2}(x)(\frac{1}{4\gamma_{n_1}\omega_{n_1}})[sin([\omega_{n_1} + \omega_{n_2}]t + [n_1 + n_2]\alpha_0 + \delta_{n_1})+$$
$$sin([\omega_{n_1} - \omega_{n_2}]t + [n_1 - n_2]\alpha_0 + \delta_{n_1})], \tag{2.18}$$

где $x = \frac{A}{2\gamma\omega_R}$.

Условием для появления в первом приближении ступеньки Шапиро является $I_0 =\mid n_1 + n_2 \mid \omega_R$, при котором первый из двух членов в правой части уравнения (2.18) становится независимым от времени. Это условие может быть переписано в виде $(n_1 + n_2) = 2n - 1$ для целых чисел $n = 1, 2, \ldots$ и полученные из него ступеньки Шапиро являются нечетными. Таким образом, нечетные ступеньки тока для ДП с 4π-периодичностью сверхпроводящего тока имеют субгармонический характер, так как появляются во втором порядке по теории возмущений. Уравнение (2.18) можно переписать в виде:

$$I_s \sim \sum_{n_1} J_{n_1}(x) J_{2n+1-n_1}(x)(\frac{1}{4\gamma_{n_1}\omega_{n_1}}) sin((2n+1)\alpha_0 + \delta_{n_1}), \qquad (2.19)$$

Ширина этих ступенек для $\beta_c\omega_R >> 1$, $\alpha_0 \sim \frac{\pi}{2}$, может быть рассчитана из уравнения (2.19)

$$\begin{aligned} \Delta I_s &\approx \sum_{n_1} J_{n_1}(x) J_{2n+1-n_1}(x)(\frac{1}{2\gamma_{n_1}\omega_{n_1}}) cos(\delta_{n_1}) \\ &\approx \sum_{n_1} J_{n_1}(x) J_{2n+1-n_1}(x)(\frac{\beta_c}{2\gamma_{n_1}^2}), \end{aligned}$$

где $\omega_{n_1} = I_0/2 + n_1\omega_R = -(n_1 - n_2)$. Таким образом,

$$\Delta I_s = \sum J_{n_1}(x) J_{2n+1-n_1}(x)(\frac{\beta_c}{2[((2n+1) - 2n_1)^2(\beta_c\omega_R)^2 + 1]}),$$

где $n_1 + n_2 = 2n + 1$.

Для $n = 1$, оставляя только первый член в сумме, ширина ступеньки Шапиро может быть записана в виде:

$$\Delta I_s = \frac{\beta_c J_0(x) J_1(x)}{2[(\beta_c\omega_R)^2 + 1]}.$$

Фактор 1/2 появляется из-за того, что $I_s \sim sin(\phi/2)$, а не $sin(\phi)$.

Отметим, что когда $C_j \to 0, \beta_c \to 0$, ширина субгармонических ступеней обращается в нуль, что приводит к существованию только четных ступенек Шапиро для джозефсоновских переходов без емкости. Таким образом, наш анализ воспроизводит результаты, полученные в работах [32, 38, 39] в рамках модели без емкости, где отмечается отсутствие нечетных ступенек Шапиро на ВАХ джозефсоновских переходов, поддерживающих связанные майорановские состояния. Отметим также, что полученные нечетные ступеньки имеют субгармоническую природу в отличие от аналогичных ступенек, показанных в работе [39], так как они появляются даже без 2π периодического члена в ток-фазовом соотношении.

2.3. Нечетные ступеньки Шапиро в джозефсоновском переходе с нетривиальным барьером

В этом разделе приведены результаты численного моделирования динамики ДП с 4π-периодическим сверхпроводящим током. Для численного расчета ВАХ была использована система уравнений (2.4). Полученная в результате расчета временная зависимость напряжения $V = \hbar\dot{\phi}/(2e)$ для фиксированного базового тока I, затем усредняется при помощи стандартной процедуры, описанной в работах [91, 92]. Полученные ВАХ представлены на рис. 2.2.

На основе анализа этих ВАХ были получены следующие основные результаты. Во-первых, для переходов с нетривиальным спариванием на ВАХ видны как четные, так и нечетные ступеньки Шапиро, как и ожидалось из аналитических результатов. Ширина четных ступенек больше, по сравнению с нечетными, как при $\beta < 1$ (см. рис. 2.2(a)), так и при $\beta > 1$ (см. рис. 2.2(b)). Для сравнения на рис. 2.2(c) показан аналогичный график для ДП с s-спариванием. Отношение ширины четных ступенек к нечетным можно охарактеризовать параметром $\eta = \dfrac{\Delta I^{\text{even}}}{\Delta I^{\text{odd}}}$. На рис. 2.2(d) изображен график η как функция β для переходов с p-спариванием. Фитирование результатов численного расчета, экспоненциаль-

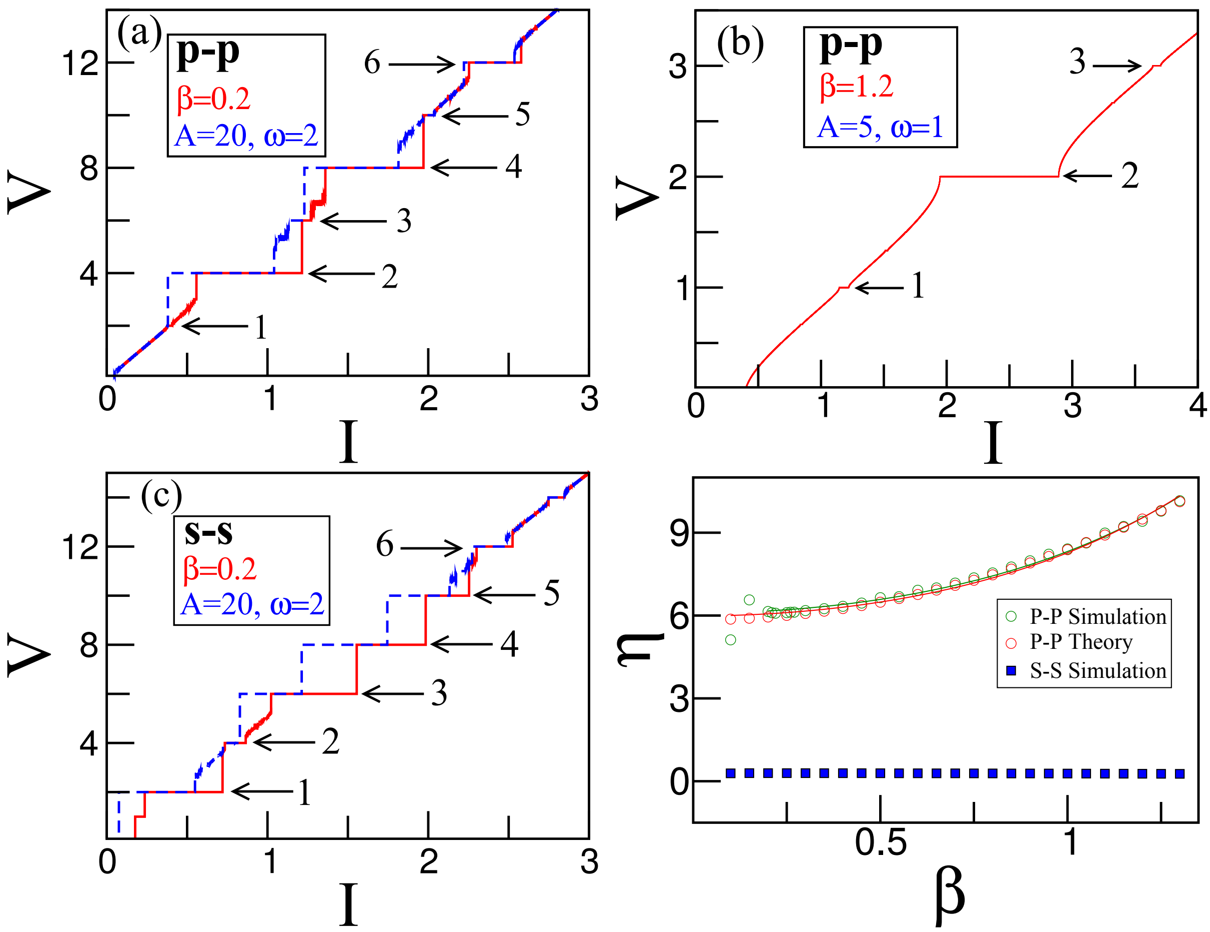

Рис. 2.2. Верхние панели: ВАХ джозефсоновского перехода с триплетным p-спариванием. (a) Показывает ВАХ для перехода со слабой диссипацией ($\beta = 0.2$) с $A = 20$ и $\omega_R = 2$. В то время как (b) представляет переход с сильной диссипацией ($\beta = 1.2$) с $A = 5$ и $\omega_R = 1$. (c) Показывает ВАХ перехода с s-спариванием (все параметры такие же, как на (a)). На рис. 2.2(d) показано отношение ширины четных и нечетных ступенек Шапиро, $\eta = \dfrac{\Delta I^{\text{even}}}{\Delta I^{\text{odd}}}$ для переходов с -спариванием и s-симметрией как функция β при $A = 10$ и $\omega_R = 3$. Для переходов с p-спариванием $\eta \sim e^{0.31\beta^2}$, а для переходов с s-спариванием η практически не меняется с β. Красные сплошные (синие штриховые) кривые на панелях (a) и (c) соответствуют данным, полученным при увеличении (уменьшении) тока.

ной функцией, дает $\eta \sim \exp(0.3\beta^2)$. Отметим, что аналитический результат для η, полученный с использованием уравнений (2.2) и (2.12), обеспечивает почти идеальное совпадение с данными численного расчета, демонстрируя таким образом точность аналитического решения в широком диапазоне β. Отметим также, что поведение η как функции β, в случае переходов с p-спариванием, сильно контрастирует с результатами, полученными для переходов с s-спариванием, где η не сильно изменяется с β, как показано на рис. 2.2(d). Таким образом, экспоненциальная зависимость η от параметра диссипации β является фазочувствительной особенностью 4π-периодичности сверхпроводящего тока в ДП. В более ранних работах [32, 38, 39] предполагалось, что на ВАХ таких ДП, из-за 4π-периодичности джозефсоновского тока появляются только четные ступеньки Шапиро. Этот вывод является следствием анализа задачи в пределе $C_j \to 0$, где $\beta \to \infty, \beta_c \to 0$, что приводит к исчезновению субгармонических нечетных ступенек. Тем не менее, наши исследования показывают, что в переходах с емкостью C_j могут появляться как четные, так и нечетные ступеньки. Таким образом, присутствие нечетных ступенек Шапиро необязательно означает отсутствие майорановских связанных состояний в ДП.

2.4. Лестничная структура субгармоник на вольт-амперной характеристике

Как известно, наличие емкости в ДП является необходимым условием для возникновения субгармонических ступенек Шапиро. Такие ступени могут образовывать так называемые лестничные структуры на ВАХ, которые позволяют выделить еще один характерный признак наличия 4π-периодичности сверхпроводящего тока в ДП, помимо дробного эффекта Джозефсона. Известно, что они встречаются в обычных переходах с s-спариванием [91], а порядок возникновения ступенек на ВАХ может быть описан бесконечной дробью

$$V \;=\; \left[N \pm 1/(n \pm (1/m \pm 1/(p \pm 1...)))\right]\omega, \qquad (2.20)$$

где N, n, m, p - целые числа. Последовательности ступенек, содержащие только N, называются ступенями первого уровня, те, которые содержат N и n, являются ступенями второго уровня, и так далее. Ступеньки в последовательности подчиняются правилу суммирования Фарея [93]. Лестничные структуры для переходов с s- и p-спариванием показаны на рис. 2.3. Отметим, что для перехода

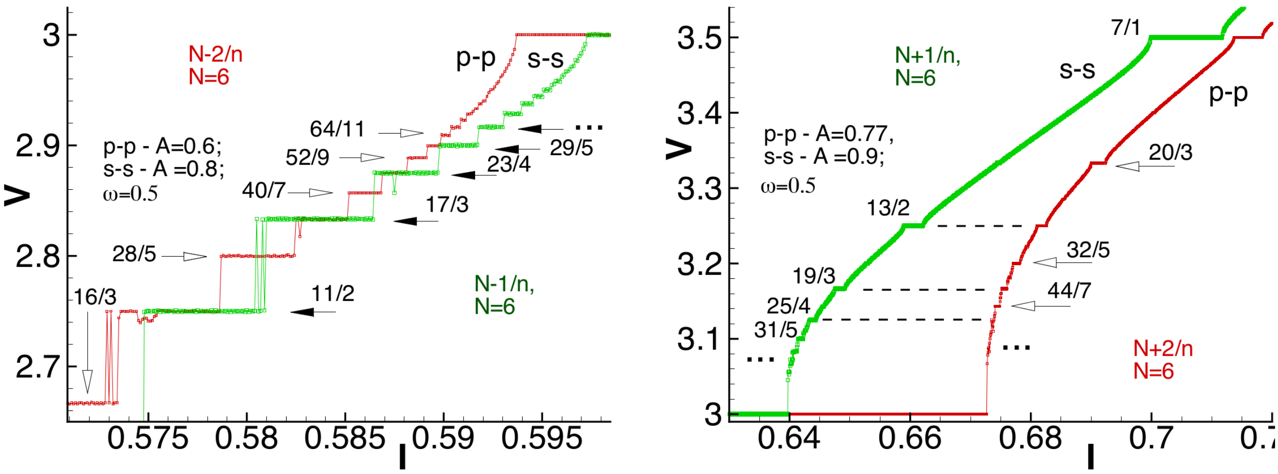

Рис. 2.3. (a) Лестничная структура ДП с p-спариванием (при $A = 0.6$) и s-спариванием (при $A = 0.8$) для $D = 0.7$ и $\omega = 0.5$. Стрелками отмечены дополнительные последовательности характерные для ДП с p-спариванием. (b) То же, что и в (a), но с разными амплитудами внешнего излучения (ДП с p-спариванием $A = 0.77$, переход с s-спариванием $A = 0.9$). Отметим, что дополнительная последовательность ступенек для перехода с p-спариванием сохраняется.

с s-спариванием, при приближении к $V = 6\omega$ ступеньке, присутствуют только субгармоники второго уровня, описываемые выражением $V = (N \pm 1/n)\omega$ для разных n. Напротив, для перехода с p-спариванием возникают дополнительные ступеньки, соответствующие $V = (N \pm 2/n)\omega$ (рис. 2.3). Это различие в структуре приводит нас к гипотезе о том, что в отличие от джозефсоновских переходов с s-спариванием, непрерывные дроби для переходов с p-спариванием демонстрируют дополнительную последовательность ступенек. Таким образом, присутствие этой дополнительной последовательности ступенек можно рассматривать как признак наличия 4π-периодичности сверхпроводящего тока.

Два конкретных примера этого явления представлены на рис. 2.3. На рис. 2.3 (a) показано, что ступеньки Шапиро, описываемые непрерывной дробью $V = (N - 1/n)\omega$ с $N = 6$, появляются на ВАХ ДП с s-спариванием при $\beta = 0.2$, $\omega = 0.5$ и $A = 0.8$. Напротив, ступеньки на ВАХ ДП с p-спариванием появляются в соответствии с $V = (N - 2/n)\omega$ с $N = 6$ и разными n. Далее, как показано на рис. 2.3 (b), ступеньки Шапиро, описываемые непрерывной дробью

$V = (N + 1/n)\omega$ с $N = 6$, появляются для обычных ДП при $A = 0.9$. Напротив, для ДП с 4π-периодичностью сверхпроводящего тока, ступеньки появляются при $V = (N + 2/n)\omega$ с $N = 6$. Таким образом, в обоих случаях для перехода с p-спариванием ступеньки появляются при $V = (N \pm 2/n)\omega$, что приводит к дополнительной последовательности ступенек. Следовательно, можно сделать вывод, что разница между переходами с s-спариванием и p-спариванием заключается в проявлении дополнительной последовательности ступенек. Предполагается, что дополнительный коэффициент 2, приводящий к дополнительным ступеням, является проявлением 4π-периодичности сверхпроводящего тока в ДП. Наконец, отметим, что разницу между этими двумя типами переходов можно также подчеркнуть, сравнивая наибольшую ширину первой субгармоники этих непрерывных дробей. Наибольшей субгармоникой является $V = 20\omega/3$

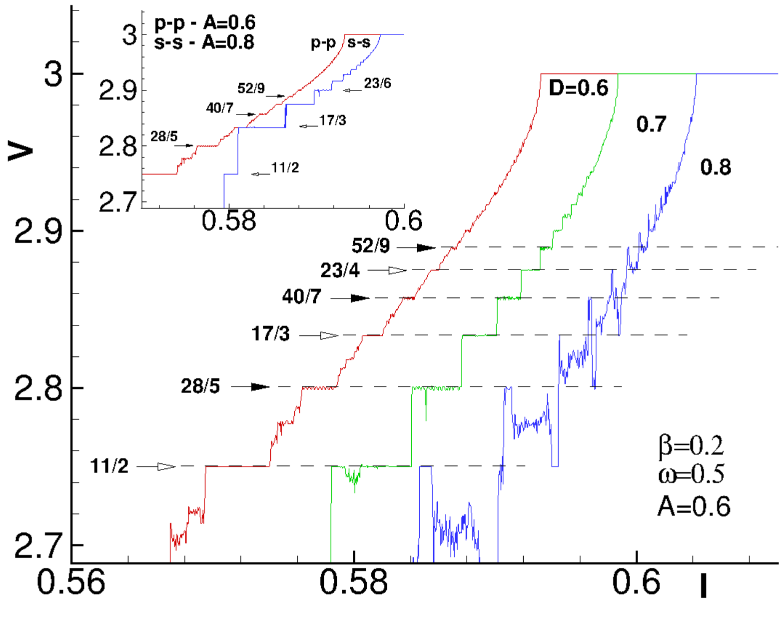

Рис. 2.4. Увеличенная часть ВАХ $p-p$ ДП, на которой видна лестничная структура при $\beta = 0.2, \omega = 0.5, A = 0.6$ и разных значениях коэффициента прозрачности D. Кривые сдвинуты вправо на $\Delta I = 0.05$. На вставке проведено сравнение ВАХ в области лестничной структуры для $p-p$ и $s-s$ перехода.

(серия 8/1, 7/1, 20/3, ...) для переходов с p-спариванием. Напротив, для переходов с s-спариванием наибольшая субгармоника соответствует $V = 13\omega/2$ (7/1, 13/2, ...).

Отметим также, что наблюдаемые лестничные структуры чувствительны к изменению параметров системы. В частности, изменение прозрачности барьера D может привести к разрушению структуры на ВАХ. На Рис. 2.4 показана увеличенная часть ВАХ с лестничной структурой при разных значениях D. Ступени, соответствующие дополнительной последовательности, отмечены закрашенными стрелками.

Ширина субгармоник ступенек Шапиро изменяется с увеличением параметра прозрачности. Для значений $D < 0.6$ лестничные структуры на ВАХ отсутствуют. При значениях прозрачности барьера $D > 0.7$ происходит разрушение субгармоник и на ВАХ возникает структура “танцующих” ступенек [94], где устойчивые области разделены хаотическими интервалами. Таким образом, изменение D может приводить к исчезновению лестничной структуры на ВАХ. Следовательно, правильный выбор величины параметра прозрачности может позволить оптимизировать регистрацию 4π-периодичности сверхпроводящего тока в ДП.

2.5. Джозефсоновский переход с двумя компонентами сверхпроводящего тока

Возникновение майорановских связанных состояний не является помехой для протекания обычного джозефсоновского тока в ДП [30, 95]. Как известно [39], 4π-периодичность тока проявляется даже в случае, если амплитуда 4π-периодичной компоненты тока на порядок меньше обычного джозефсоновского тока для перехода в $1D$ геометрии. Обсудим влияние диссипации на свойства перехода с двумя компонентами сверхпроводящего тока. ВАХ джозефсоновского перехода, учитывающая оба вклада в сверхпроводящий ток, представлена на Рис. 2.5(a). Расчет проведен при параметре диссипации $\beta = 2$. В данном расчете амплитуды 4π- и 2π-периодической компоненты тока полагаются равными $\gamma = 0.3, \delta = 1$, соответственно.

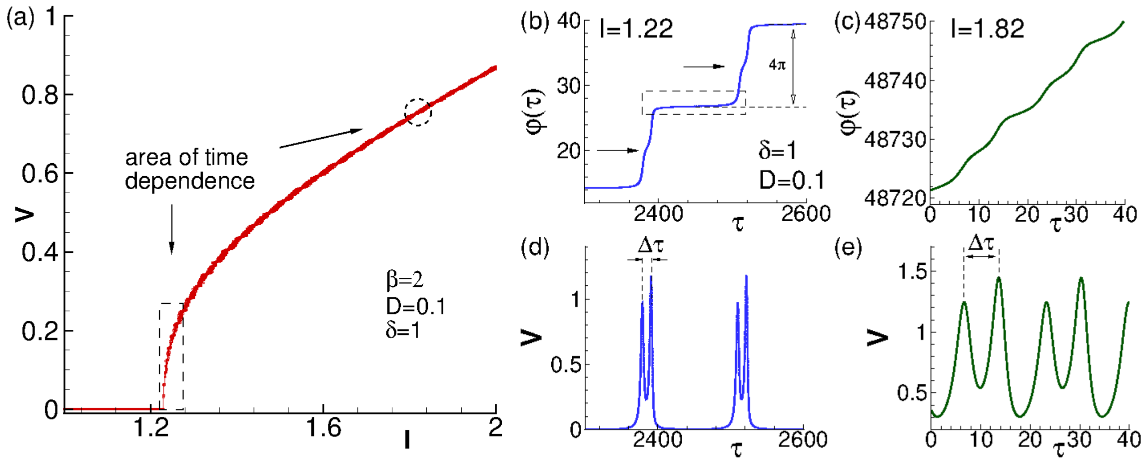

Рис. 2.5. (a) ВАХ перехода с двумя компонентами сверхпроводящего тока при $\beta = 2$. Временная зависимость фазы (b), (c), и напряжения (d), (e). Для (b) и (d) расчет проведен вблизи критического тока при $I = 1.22$ с увеличении базового тока I. Для (c) и (e) расчет проведен при $I = 1.82$ с увеличении базового тока I.

Рассчитанные временные зависимости фазы и напряжения в области перехода из сверхпроводящего в резистивное состояние представлены на Рис. 2.5(b-e). В расчете предполагалось, что амплитуда 4π-периодической компоненты тока $\gamma = 0.3$ гораздо меньше амплитуды нормальной компоненты $\sin(\phi)$. Тем не менее, колебания фазы в таком переходе кардинально меняются для значений тока, близких к критическому $I_c \approx 1 + \gamma/\sqrt{2} = 1.22$. Решение $\phi(\tau)$ превращается из 2π- в 4π-периодического для значений тока, близких к критическому значению I_c (см. Рис. 2.5(b)) и становится 2π-периодическим для больших значений тока (см. Рис. 2.5(c). На Рис. 2.5(b) можно также видеть модуляции отмеченные стрелками, возникающие при учете компоненты $\sin(\phi)$.

Изменение периодичности колебаний фазы с ростом тока может быть объяснено следующим образом. Добавление 4π-периодической компоненты может увеличить или уменьшить величину плоских горизонтальных участков (отмеченных на Рис. 2.5(b) пунктирным прямоугольником) в зависимости от знака $\sin(\phi/2) > 0$. Разница между короткими и длинными периодами растет по мере приближения к значению $I_c \approx 1.22$. Это хорошо видно на временной зависимости напряжения, представленной на Рис. 2.5(d) и (e). Расстоя-

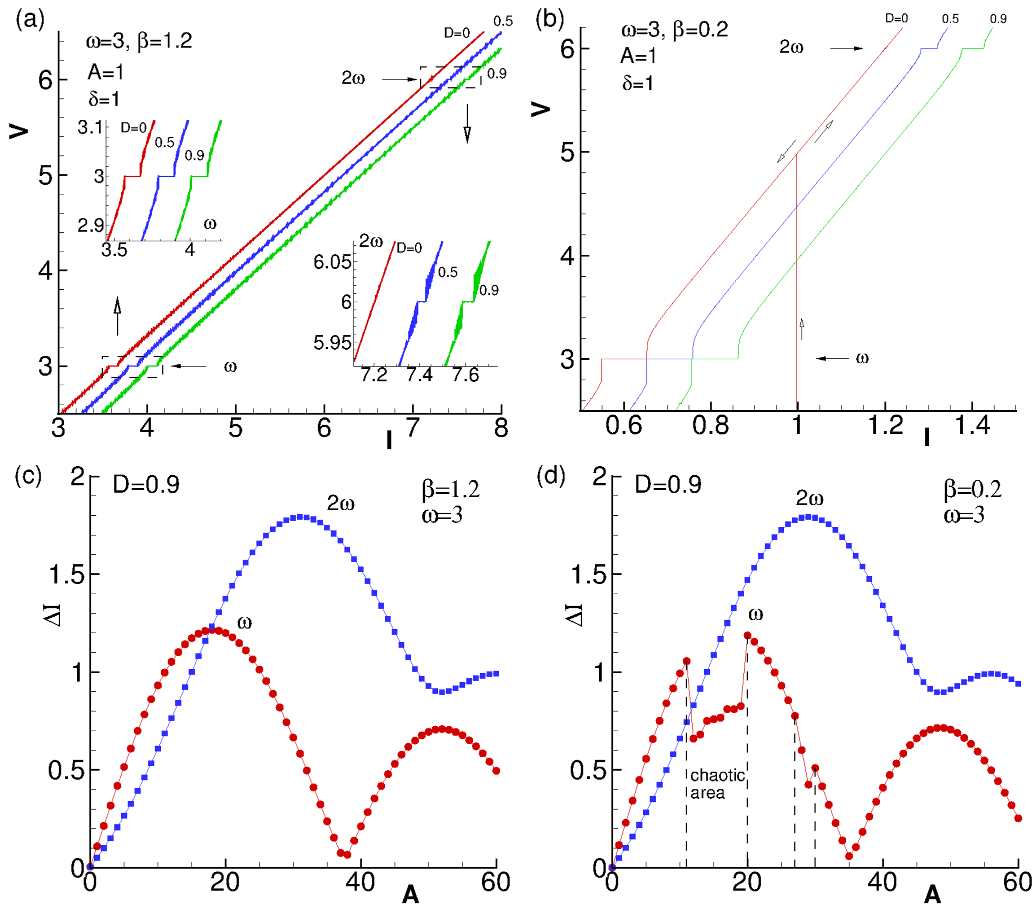

Рис. 2.6. (a) ВАХ ДП с двумя компонентами сверхпроводящего тока при $\beta = 1.2$ все кривые сдвинуты вправо на величину $\delta I = 0.5$. Вставки демонстрируют ω и 2ω-ступеньки. (b) тоже самое при $\beta = 0.2$ все кривые сдвинуты вправо на величину $\delta I = 0.1$. Полыми стрелками указано направление расчета. (c) зависимость ширины 2ω и ω гармоник ступеньки Шапиро от амплитуды внешнего излучения A при $\gamma = 0.9$ и $\beta = 1.2$. Кружками на рисунке отмечены данные для ω-ступеньки, квадратами для 2ω-ступеньки. (d) тоже самое при $\beta = 0.2$.

ние между ближайшими максимумами напряжения для $I = 1.22$ (см. Рис. 2.5(d)) $\Delta\tau \approx 12.12$ гораздо больше, чем в случае $I = 1.82$ (см. Рис. 2.5(e)) где $\Delta\tau \approx 7.13$. Таким образом, 2π-периодическая функция тока от фазы превращается в 4π-периодическую, когда $I \approx I_c$, и снова становится 2π-периодической для $I >> I_c$. Данные результаты, полученные при большой диссипации $\beta = 2$, хорошо согласуются с результатами, полученными в работе [39].

Интересный результат можно получить при исследовании дробного эффекта Джозефсона в ДП с двумя компонентами сверхпроводящего тока. На Рис. 2.6 показаны ВАХ ДП в присутствии дополнительной компоненты тока при различных значениях ее амплитуды $\gamma = 0, 0.7, 0.95$. Амплитуда и частота внешнего излучения принимались равными $A = 1$ и $\omega = 3$, соответственно. На рисунках представлены результаты для джозефсоновских переходов с разной величиной диссипации: $\beta = 1.2$ (Рис. 2.6(a)) и $\beta = 0.2$ (Рис. 2.6(b)). На вставках к Рис. 2.6(a) видно, что величина ω-ступеньки не изменяется с изменением γ. В тоже время ширина 2ω-ступеньки увеличивается при увеличении амплитуды $\sin(\phi/2)$. Аналогичный результат наблюдается и при $\beta = 0.2$. Сравнение, в обоих случаях ω и 2ω-ступенек показывает, что величина первой гармоники больше второй при любых значениях амплитуды 4π-периодической компоненты тока.

Обсудим влияние параметров внешнего электромагнитного воздействия на свойства перехода с двумя компонентами тока. Рассчитанная зависимость ширины ступенек Шапиро от амплитуды внешнего излучения, представлена на Рис. 2.6(c) и (d). Расчет проводился для $\beta = 1.2$ и $\beta = 0.2$, соответственно. На Рис. 2.6(c) видно, что четные ступени преобладают над нечетными при $A > 18$. Отметим, что похожий эффект наблюдается и для $\beta = 0.2$ (см. Рис. 2.6(d)), но для значений амплитуд больших $A = 11$. Это происходит, отчасти, потому, что ω-ступеньки частично разрушаются под воздействием хаоса в интервале амплитуд $11 < A < 20$ (эта область отмечена на Рис. 2.6(d) пунктирными линиями). Таким образом, 4π периодичность сверхпроводящего тока может проявлять себя при больших амплитудах внешнего излучения как в джозефсоновских переходах с малой диссипацией, так и в переходах с большой диссипацией.

Таким образом, в настоящей главе показано, что ВАХ ДП с p-спариванием, в рамках модели, учитывающей емкость, могут предоставить фазочувствительный метод выявления периодичности в ток-фазовом соотношении. Найдены две характерные особенности, качественно отличающие ДП с p-спариванием от аналогов с s-спариванием. Во-первых, отношение ширины нечетных ступенек Шапиро, являющихся субгармониками по своей природе, к ширине четных ступеней является уменьшающейся функцией диссипации перехода. Напротив, в обычных переходах с s-спариванием это отношение в значительной степени не зависит от β. Во-вторых, было обнаружено, что лестничная структура ступенек Шапиро, возникающая на ВАХ ДП с p-спариванием, качественно отличается от своих обычных аналогов (первые следуют последовательности $N \pm 2/n$, а последние $N \pm 1/n$), что указывает на наличие дополнительной последовательности субгармоник для переходов с 4π-периодичностью сверхпроводящего тока. Наши результаты представляют собой обобщение критериев обнаружения 4π-периодичности сверхпроводящего тока на случай переходов обладающих емкостью.

Тестирование нашей теории может быть проведено на основе измерения ВАХ ДП под действием внешнего излучения с определенной амплитудой A и частотой ω. Такие эксперименты являются довольно стандартными для переходов с s-спариванием [96]. Недавно такой эксперимент был проведен для одномерного резистивного перехода, поддерживающего майорановские краевые состояния [33]. Наше конкретное предложение включает измерение η как функцию эффективной емкости ДП с p-спариванием, а также исследование лестничных структур, возникающих на измеренных ВАХ.

Глава 3

Система связанных джозефсоновских переходов в неравновесных условиях

Неравновесные эффекты, вызванные разбалансом заряда в объемных сверхпроводниках, исследуются довольно давно [12, 97]. В системе СДП неравновесные эффекты изучались в работах [9, 49, 50, 47, 48, 51, 52, 65, 98]. В подходе, использованном в работах [50, 47], применялась теория возмущений для определения обобщенного скалярного потенциала сверхпроводящих слоев. В этих теориях зарядовый разбаланс учитывался не непосредственно, а на основе флуктуаций скалярного потенциала. В работе [54], использующей неравновесные функции Грина, зарядовый разбаланс учитывается как независимая степень свободы, и ее результаты отличаются от предыдущих исследований.

В настоящей главе представлены результаты исследования фазовой динамики и ВАХ системы СДП с разбалансом ветвей спектра элементарных возбуждений сверхпроводника. Для расчета ВАХ системы решалась полная система уравнений, включающая дифференциальное уравнение второго порядка для разности фаз, кинетическое уравнение и обобщенное соотношение Джозефсона. Рассматривались непериодические граничные условия, учитывающие эффект близости. В данной главе приведены результаты исследования влияния неравновесных условий на свойства ступенек Шапиро, возникающих под действием внешнего электромагнитного излучения. Показано, что неравновесные условия приводят к существенным изменениям свойств ступенек Шапиро на ВАХ.

3.1. Модель системы связанных джозефсоновских переходов с разбалансом ветвей спектра элементарных возбуждений квазичастиц

Ключевым моментом теории, разработанной в работах [47, 9, 53], является неравновесный характер эффекта Джозефсона в слоистых сверхпроводниках. Сверхпроводящие слои, толщина которых d_s^l меньше характерной длины неравновесной релаксации l_E и дебаевской длины экранирования r_D, находятся в нестационарном неравновесном состоянии из-за инжекции квазичастиц и куперовских пар, и ненулевого инвариантного потенциала

$$\Phi_l(t) = \phi_l + \frac{\hbar}{2e}\dot{\theta}_l, \tag{3.1}$$

образующегося внутри них, где ϕ_l - электростатический потенциал, θ - фаза сверхпроводящего конденсата, $\Phi = 0$ в равновесном состоянии (здесь и ниже $e =\mid e \mid$). Важно отметить, что в неравновесном режиме нарушается обычное джозефсоновское соотношение $d\varphi_l/dt = (\hbar/2e)V$, связывающее джозефсоновскую разность фаз $\varphi_l(t)$ между слоями $l-1$ и l, и напряжение $V_l = \phi_{l-1} - \phi_l$ [47, 9, 53] и вместо него возникает обобщенное соотношение Джозефсона (из определения Φ)

$$\frac{d\varphi_l}{dt} = \frac{2e}{\hbar}V_l + \frac{2e}{\hbar}(\Phi_{l-1} - \Phi_l). \tag{3.2}$$

Таким образом, Φ_l - новые важные динамические переменные теории. Отметим, что сдвиг химического потенциала сверхпроводящего конденсата от его равновесного значения равен $\delta\mu_s = e\Phi$ и определяется из выражения для плотности заряда внутри сверхпроводящего слоя [67, 99]

$$\rho = -2e^2N(0)(\Phi_l - \Psi_l) = -\frac{1}{4\pi r_D^2}(\Phi_l - \Psi_l), \tag{3.3}$$

где Ψ_l - потенциал определяемый электронно-дырочным разбалансом ветвей спектра элементарных возбуждений сверхпроводника и $N(0)$ - плотность состояний.

Система $N+1$ сверхпроводящих слоев (S-слоев), представленная на рисунке 3.1, характеризуется параметром порядка $\Delta_l(t) = |\Delta| \exp(i\theta_l(t))$ и зависящей от времени фазой $\theta_l(t)$. Соотношение Джозефсона может быть переписано, с

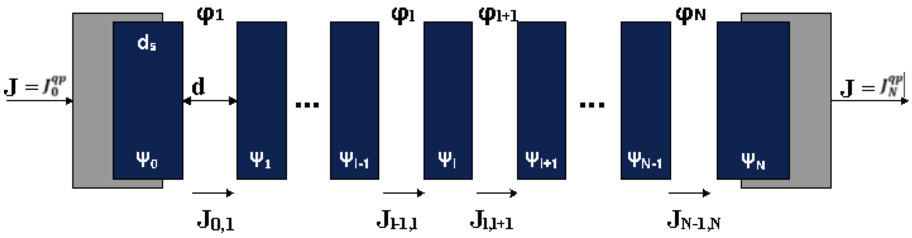

Рис. 3.1. Слоистая система $N + 1$ сверхпроводящих слоев образует стек джозефсоновских переходов. Поскольку первый и последний слои находятся в контакте с нормальным металлом, их толщины d_s^0 и d_s^N из-за эффект близости отличаются от толщины других S-слоев d_s внутри стека.

учетом связи между СДП и разбаланса ветвей спектра элементарных возбуждений сверхпроводника, в виде [65, 98]

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_l(t)}{dt} &= \frac{2e}{\hbar}\Big((1+2\alpha)V_l(t) - \alpha(V_{l-1}(t) + V_{l+1}(t)) \\ &+ \Psi_l(t) - \Psi_{l-1}(t)\Big), \qquad (3.4)\end{aligned}$$

где $\alpha = \epsilon\epsilon_o/2e^2N(0)d_s$ - параметр связи, ϵ - диэлектрическая постоянная, ϵ_o - вакуумная диэлектрическая проницаемость.

Полная плотность тока $J_{l-1,l} \equiv J_l$ через каждый S-слой задается как сумма сверхпроводящего, квазичастичного, диффузионного токов и тока смещения:

$$J_l = C\frac{dV_l}{dt} + J_c \sin\varphi_l + \frac{\hbar}{2eR}\dot{\varphi}_l + \frac{\Psi_{l-1} - \Psi_l}{R}, \qquad (3.5)$$

где C_j - емкость перехода, J_c - критическая плотность тока, а R - сопротивление перехода. Это уравнение вместе с обобщенным джозефсоновским соотношением и кинетическими уравнениями для Ψ_l:

$$\frac{\partial \Psi_l}{\partial t} = \frac{4\pi r_D^2}{d_s^l}(J_l^{qp} - J_{l-1}^{qp}) - \frac{\Psi_l}{\tau_{qp}}, \tag{3.6}$$

описывают неравновесные эффекты в джозефсоновских переходах в ВТСП, возникающие в результате разбаланса ветвей спектра элементарных возбуждений в сверхпроводящих слоях. В формуле (3.6) d_s^l - толщина l-го S-слоя, а τ_{qp} - время релаксации квазичастиц.

В обезразмеренной форме система уравнений может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot{v}_l &= \Big[I - \sin\varphi_l - \beta\dot{\varphi}_l + A\sin\omega\tau + I_{noise} + \psi_l - \psi_{l-1}\Big] && (3.7)\\
\dot{\varphi}_1 &= v_1 - \alpha(v_2 - (1+\gamma)v_1) + \frac{\psi_1 - \psi_0}{\beta} && (3.8)\\
\dot{\varphi}_l &= (1+2\alpha)v_l - \alpha(v_{l-1} + v_{l+1}) + \frac{\psi_l - \psi_{l-1}}{\beta} && (3.9)\\
\dot{\varphi}_N &= v_N - \alpha(v_{N-1} - (1+\gamma)v_N) + \frac{\psi_N - \psi_{N-1}}{\beta} && (3.10)\\
\zeta_0\dot{\psi}_0 &= \eta_0\left(I + A\sin\omega\tau - \beta\dot{\varphi}_{0,1} + \psi_1 - \psi_0\right) - \psi_0 && (3.11)\\
\zeta_l\dot{\psi}_l &= \eta_l(\beta[\dot{\varphi}_{l-1,l} - \dot{\varphi}_{l,l+1}] + \psi_{1-1} + \psi_{l+1} - 2\psi_l) - \psi_l && (3.12)\\
\zeta_N\dot{\psi}_N &= \eta_N\left(-I - A\sin\omega\tau + \beta\dot{\varphi}_{N-1,N} + \psi_{N-1} - \psi_N\right) - \psi_N && (3.13)
\end{aligned}$$

где точка показывает производную по $\tau = \omega_p t$, $I = J/J_c$ - нормированная плотность тока, $\omega_p = \sqrt{\frac{2eJ_c}{\hbar C}}$ - плазменная частота. Другими нормированными параметрами являются параметр диссипации $\beta = \frac{\hbar\omega_p}{2eRI_c}$, нормированное время релаксации квазичастиц $\zeta_l = \omega_p\tau_{qp}$ и параметр неравновесности $\eta_l = \frac{4\pi r_D^2\tau_{qp}}{d_s^l R}$. Параметром непериодических граничных условий является $\gamma = \frac{d_s^l}{d_s^0} = \frac{d_s^l}{d_s^N}$, где $l = 1, 2, 3, ..., N-1$. Член $A\sin\omega\tau$ отражает эффект внешнего излучения с амплитудой A и частотой ω, которые нормируются на J_c и ω_p, соответственно. Поскольку в эксперименте всегда присутствует внешний шум, нами также был добавлен шум I_{noise} в базовый ток. Его амплитуда нормирована на критическую плотность тока J_c и равна $\sim 10^{-8}$.

Эта система уравнений решается численно методом Рунге-Кутта четвертого порядка. Предполагается, что из-за эффекта близости толщина первого и последнего S-слоя больше толщины средних. Поэтому неравновесные параметры зависят от параметра γ следующим образом, $\eta_{0,N} = \eta_l \gamma$, где $l = 1, 2, ..., N-1$. В этой главе рассматривается система СДП с параметром диссипации $\beta = 0.2$ (параметр Маккамбера $\beta_c = 25$).

3.2. Ступенька Шапиро в неравновесных условиях

В настоящей главе рассматривается система СДП с учетом разбаланса заряда в спектре элементарных возбуждений квазичастиц при непериодических граничных условиях. Непериодические граничные условия позволяют выделить S-слои, в которые происходит инжекция квазичастиц из нормального электрода, что невозможно при рассмотрении задачи с периодическими граничными условиями. Одной из характерных черт ВАХ системы СДП в неравновесных условиях является интенсивное ветвление вблизи критического тока и в области гистерезиса, вызванное переходами между вращающимися и осциллирующими состояниями в стеке [100, 65, 98]. Моделируемые ВАХ стека СДП в случае без зарядового разбаланса $\eta = 0$ (сплошная линия) и с учетом разбаланса при $\eta = 0.6$ (линия крупным пунктиром) представлены на рис. 3.2. Расчет был выполнен для стека с пятью СДП, параметр связи $\alpha = 0.5$ и $\gamma = 0.5$. Показана также ВАХ без зарядового разбаланса при периодических граничных условиях в рамках модели CCJJ + DC - емкостно связанная модель ВТСП с диффузионным током. Облучение системы электромагнитными волнами с частотой $\omega_R = 6$ и амплитудой $A = 1.6$ приводит к появлению ступеньки Шапиро на ВАХ. Положение ступеньки в этом случае (линия крупным пунктиром на вставке) соответствует каноническому значению напряжения $V = 30$ и находится в согласии со значе-

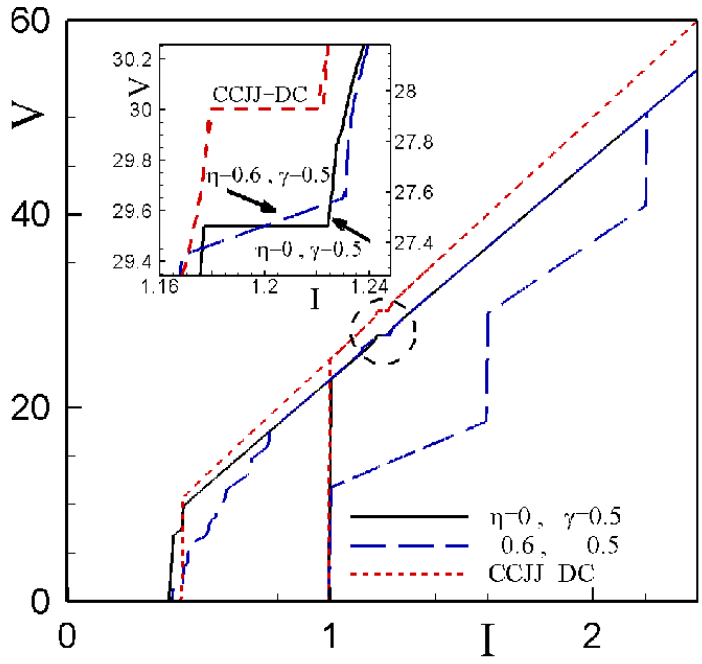

Рис. 3.2. ВАХ стека СДП без зардового разбаланса $\eta = 0$ (сплошная линия) и с учетом разбаланса при $\eta = 0.6$ (линия крупным пунктиром). Для сравнения показаны результаты, полученные в рамках модели CCJJ + DC при периодических граничных условиях (линия мелким пунктиром). Увеличенная часть ВАХ со ступенькой Шапиро показаны на вставке.

нием частоты внешнего излучения $V = N\omega = 30$, где $N = 5$ - число переходов в стеке. Отметим, что непериодические граничные условия с $\gamma = 0.5$ сдвигают внешнюю ветвь относительно ВАХ с периодическими граничными условиями, что приводит к соответствующему сдвигу ступенек Шапиро. Учет зарядового разбаланса приводит к появлению наклона ступеньки Шапиро, что наглядно продемонстрировано на вставке (линия крупным пунктиром). Наклон вызван разностью потенциалов разбаланса Ψ_l на противоположных краях ступеньки. Отметим также, что ширина ступеньки увеличивается с увеличением неравновесного параметра, как видно на вставке к рис. 3.2.

На рис. 3.3(a) показано, что величина наклона ступеньки Шапиро $\delta = \Delta V/\Delta I$ возрастает с η, а в случае $\eta = 0$ - наклон ступеньки отсутствует. Наклон как функция η, показанный на рис. 3.3(b), демонстрирует монотонную зависимость. Фитирование данных (сплошная линия) дает $\delta = 8.18664\eta + 1.93047\eta^2$. Используя тот факт, что дебаевская длина экранирования в высокотемпера-

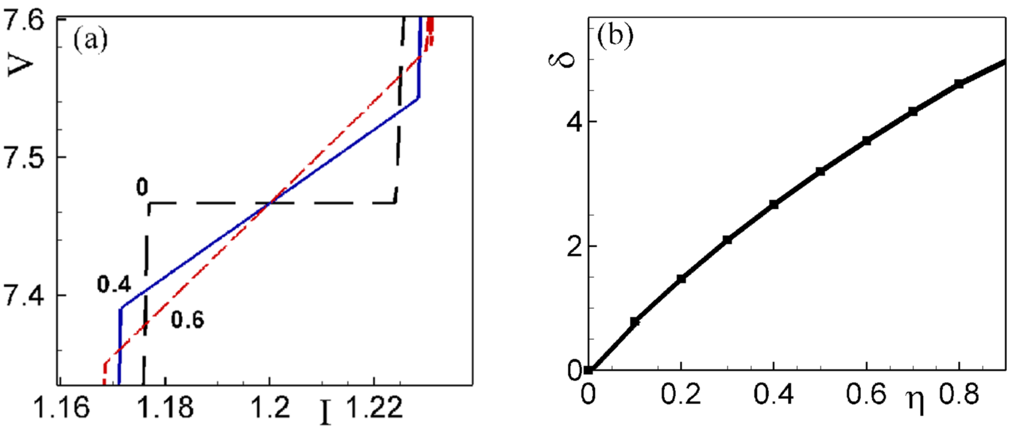

Рис. 3.3. (a) увеличенная часть ВАХ в области ступеньки Шапиро при разных значениях параметра неравновесности: $\eta = 0$, линия крупным пунктиром; $\eta = 0.4$, сплошная линия; $\eta = 0.6$, линия мелким пунктиром. (b) Значение наклона ступеньки Шапиро для разных значений η. Точки результаты расчета и сплошная линия представляет результаты фитинга.

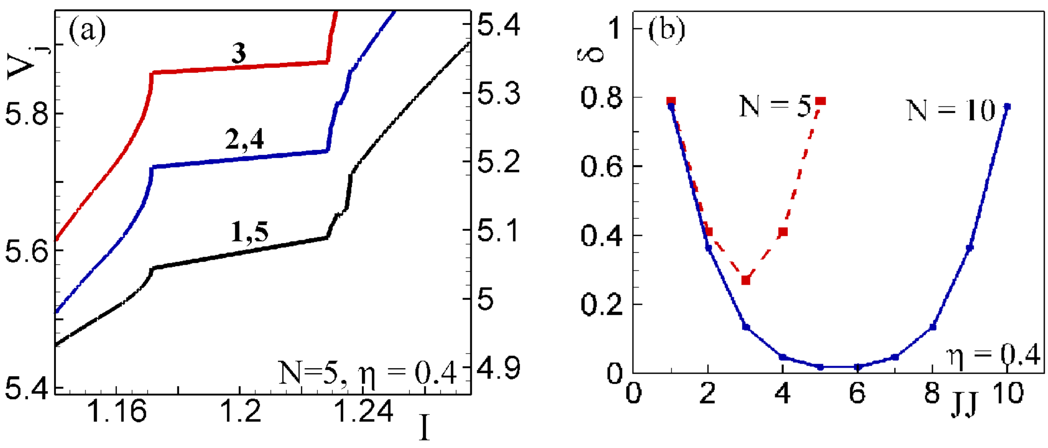

Рис. 3.4. (a) Увеличенная часть ВАХ в области ступеньки Шапиро для каждого ДП. Числа указывают положение перехода в стеке. (b) Распределение наклона ступеньки Шапиро в стеке с 5 и 10 ДП.

турных сверхпроводниках, таких как BSCCO, сравнима с толщиной S-слоя ($r_D \approx d_s$), можно рассчитать $\eta = \frac{4\pi r_D \tau_{qp}}{R}$. Это позволяет оценить время релаксации для квазичастиц на основе результатов фитирования наклона ступеньки в экспериментально полученных ВАХ, которые приведены в таблице 3.1.

Наклон ступеньки на ВАХ каждого отдельного ДП в стеке может иметь разное значение. Это вызвано убыванием потенциала разбаланса Ψ по мере удаления от границы с нормальными электродами. Увеличенная часть ВАХ со ступенькой Шапиро для каждого ДП в стеке при $N = 5$ и $\eta = 0.6$ показаны на рис. 3.4(a). Отметим, что наклон и сдвиг ступеньки меняется вдоль стека. Ступенька на ВАХ ДП в середине стека имеет минимальный наклон. Эта особенность связана с тем, что потенциал зарядового разбаланса в середине стека имеет наименьшее значение. Распределение наклона вдоль стека для $N = 5$ и $N = 10$ СДП показано на рис. 3.4(b). На нем видно, что в стеке с десятью СДП зарядовый разбаланс в середине стека отсутствует, а наклон второго и третьего ДП в стеке с десятью переходами меньше, чем в случае $N = 5$. Исходя из этого результата, естественно ожидать, что в стеке с большим количеством ДП средние переходы не будут демонстрировать наклона.

Сдвиг ступеньки Шапиро также зависит от значения γ и от параметра связи α. Влияние параметра связи на сдвиг ступеньки Шапиро показано на рис. 3.5(a). Усиление связи между переходами приводит к увеличению средней величины сдвига ступенек в стеке. Ступеньки на ВАХ при $\alpha = 0, 0.2, 0.6, 1$ обозначены большим штриховым прямоугольником. ВАХ при больших α демонстрируют также дополнительные ступеньки, которые появляются на внутренней ветви. Эти ступеньки выделены малым штриховым прямоугольником.

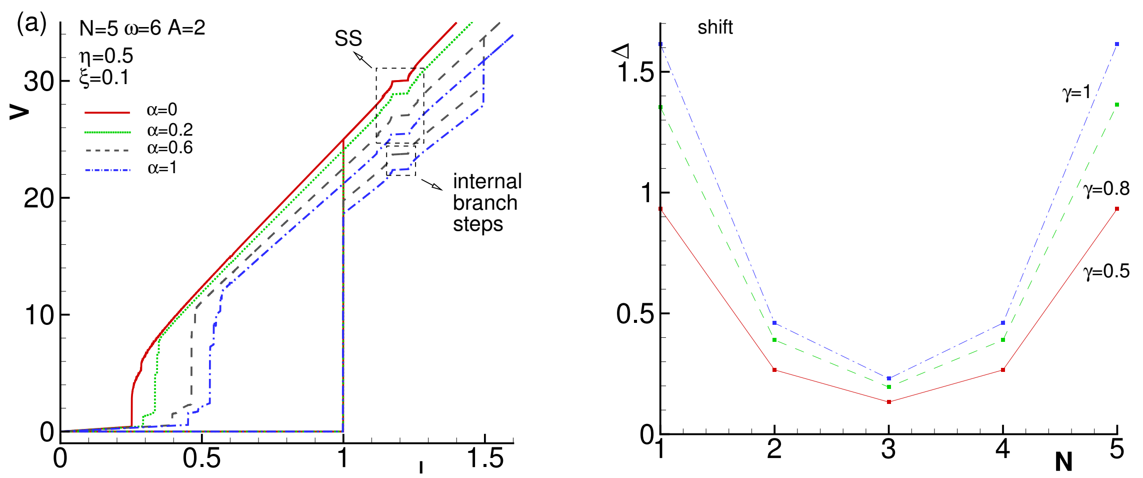

Рис. 3.5. (a) ВАХ стека с пятью СДП при разных параметрах связи $\alpha = 0, 0.2, 0.6, 1$. (б) Распределение величины сдвига ступеньки вдоль стека с пятью СДП при разных параметрах $\gamma = 0.5, 0.8, 1$.

Рис. 3.5(b) показывает распределение сдвига ступеньки вдоль стека с параметрами $\gamma = 0.5, 0.8, 1$. Видно, что максимальное значение сдвига демонстрируют первый и последний джозефсоновский переход. Сдвиг проявляется также на средних S-слоях из-за связи между джозефсоновскими переходами.

Сдвиг и наклон ступенек Шапиро на ВАХ СДП проявляется в некоторых экспериментальных работах. В частности, в работе [101] авторы объяснили наклон как проявление эффекта фазовой диффузии. Согласно представленным результатам, наклон ступеньки Шапиро также может быть связан с эффектом зарядового разбаланса.

Остановимся теперь на возможности экспериментальной проверки предсказанных проявлений зарядового разбаланса в СДП. В таблице 3.1 приведены оценки значения параметров модели, полученные из экспериментальных работ [102, 4, 103, 104]. В частности, можно оценить туннельную частоту ν для ква-

Таблица 3.1. Значение параметров для внутренних джозефсоновских переходов в ВТСП

Параметр	Значение	Оценка
N(0), $states/eV cm^3$	10^{22}	10^{22}
d_s, Å	$3 \sim 5$	4
$\Delta(T)$, meV	from 30 to 0 at T=T_c	20
I_c, A/cm^2	$10^2 \sim 10^5$	10^4
τ_{qp}, ps	$1 \sim 1000$ at T=4.2 K	300

зичастиц [102] на основе формулы $\nu = \frac{I_c(0)}{2\pi e \Delta N(0) d_s}$, что дает $\nu \approx 1.24 \times 10^9 c^{-1}$. Это позволяет найти неравновесный параметр $\eta = \nu\tau_{qp} = 0.375$. В принципе, неравновесный параметр может быть больше при соответствующем выборе параметров, представленных в таблице. Для нормированного времени релаксации было получено $\xi = \omega_p\tau_{qp} \sim 0.3$ при $\omega_p \sim 1$ ГГц. Таким образом, согласно результатам наших оценок ожидается, что экспериментальные ВАХ могут продемонстрировать наклон и сдвиг ступенек Шапиро в переходах с разбалансом ветвей в спектре элементарных возбуждений сверхпроводника.

Важно отметить, что экспериментальное исследование влияния зарядового разбаланса на ступеньку Шапиро на внутренней ветви ВАХ было проведено в работе [55]. Наблюдаемый сдвиг ступеньки от канонического значения объяснялся разбалансом ветвей спектра элементарных возбуждений в сверхпроводящем слое, близком к нормальному электроду, где соответствующий ДП находился в резистивном состоянии. Принимая во внимание контактное напряжение между нормальным электродом и первым S-слоем [55, 105], авторы определили новое положение V^*_{ss} ступеньки Шапиро посредством

$$V^*_{ss} = \frac{\hbar\omega}{2e} - \delta V, \tag{3.14}$$

где $\delta V = J\tau_{qp}/(2e^2N(0))$. Для описания полученных экспериментальных результатов авторами была использована теория стационарного зарядового разбаланса, когда потенциал разбаланса не зависит от времени и кинетические уравнения для Ψ на S-слое имеют в вид:

$$\Psi_n = \frac{\tau_{qp}}{2e^2N(0)}(J^{qp}_{l-1} - J^{qp}_{l}). \tag{3.15}$$

Таким образом, непериодические граничные условия в нашей модели позволяют учесть контактное напряжение, приводящее к сдвигу ступенек Шапиро.

На основании значения сдвига ступеньки Шапиро можно также провести оценку времени релаксации для квазичастиц:

$$\tau_{qp} = \delta V \frac{A2e^2N(0)}{I}, \tag{3.16}$$

где A - площадь мезы, а I - базовый ток.

Отметим также, что в общем случае СДП находятся в нестационарном состоянии при любом значении тока [53], а эффект зарядового разбаланса на ступеньку Шапиро в этом случае еще не исследован. Динамика потенциала квазичастиц в нестационарном случае определяется кинетическими уравнениями (3.13) вместо уравнения (3.15). И как было показано, нестационарный разбаланс заряда приводит к наклону на ступеньке Шапиро. Наклон и ширина ступеньки зависят от значения параметра неравновесности. Мы предполагаем, что наклон ступеньки, наблюдаемый в работе [101], может быть вызван зарядовым разбалансом, но авторы объяснили его как результат фазовой диффузии. Кроме того, небольшой наклон ступеньки Шапиро на ВАХ наблюдается в работе [55] (см. там Рис. 3.3), одноко авторы его не обсуждают. Отметим также важность роли непериодических граничных условий в системе СДП, который в настоящее время исследован не достаточно полно. Как уже было показано выше, непериодические граничные условия могут быть причиной сдвига ступеньки на экспериментальных ВАХ. Таким образом, ответ на вопрос о том, насколько сильны неравновесные эффекты в системе СДП, можно получить посредством измерения наклона и сдвига ступенек Шапиро.

Заключение

В рамках настоящей диссертации, нами было исследовано влияние внешнего излучения на динамику ДП, шунтированного LC-контуром. Зависимость ширины ступеньки Шапиро от амплитуды внешнего излучения кардинально изменяется, когда ступенька находится на резонансной ветви, возникающей на ВАХ. Этот эффект может быть полезен для методов и технологий, использующих отклик ДП на микроволновое излучение. Была продемонстрирована реализация параметрического резонанса и возбуждение продольной плазменной волны в системе СДП, шунтированной LC-контуром, в интервале тока, соответствующем резонансной ветви на ВАХ. Было обнаружено, что временная зависимость напряжения на шунтирующей емкости (или напряжения в системе СДП) отражает наличие электрического заряда возникающего на S-слоях, связанного с возбуждением ППВ. На основе чего, был предложен новый метод обнаружения электрического заряда в системах СДП с LC-шунтированием.

Нами впервые был рассмотрен ДП с триплетным p-спариванием в рамках модели, учитывающей емкость перехода. Было обнаружено, что нечетные ступени Шапиро в таком переходе имеют субгармоническую природу. Благодаря чему отношение ширины четных ступеней к ширине нечетных, как функция диссипации, кардинально отличается от такой в переходе с s-спариванием, и может служить признаком определения периодичности сверхпроводящего тока. Было также показано, что дополнительная последовательность ступенек Шапиро, возникающая в лестничной структуре на ВАХ, позволяет определить наличие 4π-периодичности сверхпроводящего тока в ДП. И было изучено влияние прозрачности барьера на возможность наблюдать такие структуры. Был исследован ДП с двумя компонентами сверхпроводящего тока и показано, что ток имеет 4π-периодичность в области малых значений напряжения и становится 2π-периодическим при увеличении напряжения, даже если амплитуда 4π-периодической компоненты тока гораздо меньше 2π-периодической.

Были проведены детальные исследования СДП в ВТСП во внешнем электромагнитном поле с учетом эффекта разбаланса ветвей спектра элементарных возбуждений квазичастиц. Было показано, что разбаланс заряда приводит к наклону ступенек Шапиро на ВАХ СДП. Величина наклона увеличивается с увеличением параметра неравновесности. Связь между переходами приводит к распределению величины наклона вдоль стека. На ВАХ также наблюдается сдвиг ступеньки Шапиро от ее канонического положения, определяемого частотой внешнего излучения. Этот сдвиг обусловлен возникновением контактного напряжения и в меньшей степени зарядовым разбалансом.

Список литературы

1. *T. M. Benseman, A. E. Koshelev, K. E. Gray, et al.* / Tunable terahertz emission from $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ mesa devices // Phys. Rev. B – 2011. – Vol. 84. – pp. 064523.
2. *A. E. Koshelev* / Stability of dynamic coherent states in intrinsic Josephson-junction stacks near internal cavity resonance // Phys. Rev. B – 2010. – Vol. 82. – pp. 174512.
3. J. Pfeiffer, A. A. Abdumalikov, Jr., M. Schuster, and A. V. Ustinov / Resonances between fluxons and plasma waves in underdamped Josephson transmission lines of stripline geometry // Phys. Rev. B – 2008. – Vol. 77. – pp. 024511.
4. A. A. Yurgens / Intrinsic Josephson junctions: recent developments // Supercond. Sci. Technol. – 2000. – Vol. 13. – pp. R85
5. L. Ozyuzer, A. E. Koshelev, C. Kurter, et al. / Emission of Coherent THz Radiation from Superconductors // Science – 2007. – Vol. 318. – pp. 1291.
6. U. Welp, K. Kadowaki and R. Kleiner / Superconducting emitters of THz radiation // Nat. Photonics – 2013. – Vol. 7. – pp. 702.
7. Yu. M. Shukrinov and F. Mahfouzi / Influence of Coupling between Junctions on Breakpoint Current in Intrinsic Josephson Junctions // Phys. Rev. Lett. – 2007ю – Vol. 98. – pp. 157001.
8. Yu. M. Shukrinov, F. Mahfouzi, and M. Suzuki / Structure of the breakpoint region on current-voltage characteristics of intrinsic Josephson junctions // Phys. Rev. B – 2008. – Vol. 78. – pp. 134521.
9. T. Koyama and M. Tachiki / $I-V$ characteristics of Josephson-coupled layered superconductors with longitudinal plasma excitations // Phys. Rev. B – 1996. – Vol. 54. – pp. 16183.
10. Yu. M. Shukrinov, F. Mahfouzi / Branching in current-voltage characteristics of intrinsic Josephson junctions // Supercond. Sci. Technol. – 2007. – Vol. 20. – pp. S38.

11. Yu. M. Shukrinov, F. Mahfouzi, and N. F. Pedersen / Investigation of the breakpoint region in stacks with a finite number of intrinsic Josephson junctions // Phys. Rev. B – 2007. – Vol. 75. – pp. 104508.
12. M. Tinkham / Introduction to Superconductivity // 2-nd edition – New York: McGraw-Hill – 1996. – p. 454.
13. C. A. Hamilton / Josephson voltage standards // Rev. Sci. Instrum. – 2000. – Vol. 71. – pp. 3611.
14. A. M. Hriscu and Yu. V. Nazarov / Quantum Synchronization of Conjugated Variables in a Superconducting Device Leads to the Fundamental Resistance Quantization// Phys. Rev. Lett. – 2013. – Vol. 110. – pp. 097002.
15. P. Hadley and M. R. Beasley / Dynamical states and stability of linear arrays of Josephson junctions // Appl. Phys. Lett. – 1987. – Vol. 50. – pp. 621.
16. K. Wiesenfeld, P. Colet, and S. H. Strogatz / Synchronization Transitions in a Disordered Josephson Series Array // Phys. Rev. Lett. – 1996. – Vol. 76. – pp. 404.
17. G. Filatrella, N. F. Pedersen, and K. Wiesenfeld / High-Q cavity-induced synchronization in oscillator arrays // Phys. Rev. E – 2000. – Vol. 61 – pp. 2513.
18. A. N. Grib, P. Seidel, and J. Scherbel / Synchronization of overdamped Josephson junctions shunted by a superconducting resonator // Phys. Rev. B – 2002. – Vol. 65. – pp. 094508.
19. M. V. Fistul / Macroscopic quantum tunneling in globally coupled series arrays of Josephson junctions // Phys. Rev. B – 2007. – Vol. 75. – pp. 014502.
20. Yu. M. Shukrinov , I. R. Rahmonov , K. V. Kulikov and P. Seidel / Effects of LC shunting on the Shapiro steps features of Josephson junction // Europhys. Lett. – 2015. – Vol. 110. – pp. 47001.
21. V. K. Kornev and N. V. Kolotinskiy / Shapiro Steps Induced by Resonance Irradiation // IEEE Trans. Appl. Supercond. – 2016. – Vol. 26. – No. 5. – pp. 1601605.

22. A. Yu. Kitaev / Unpaired Majorana fermions in quantum wires // Physics-Uspekhi – 2001. – Vol. 44. – pp. 131-136.
23. G. Moore and N. Read / Nonabelions in the fractional quantum hall effect // Nucl. Phys. B – 1991. – Vol. 360. – pp. 362; N. Read and D. Green / Paired states of fermions in two dimensions with breaking of parity and time-reversal symmetries and the fractional quantum Hall effect // Phys. Rev. B – 2000. – Vol. 61. – pp. 10267.
24. N. B. Kopnin and M. M. Salomaa / Mutual friction in superfluid ^3He: Effects of bound states in the vortex core // Phys. Rev. B – 1991. – Vol. 44. – pp. 9667.
25. L. S. Levitov, T. P. Orlando, J. B. Majer, and J. E. Mooij / Quantum spin chains and Majorana states in arrays of coupled qubits // arXiv: cond-mat/0108266.
26. R. M. Lutchyn, J. D. Sau, and S. Das Sarma / Majorana Fermions and a Topological Phase Transition in Semiconductor-Superconductor Heterostructures // Phys. Rev. Lett. – 2010. – Vol. 105. – pp. 077001.
27. Y. Oreg, G. Refael, and F. von Oppen / Helical Liquids and Majorana Bound States in Quantum Wires // Phys. Rev. Lett. – 2010. – Vol. 105. – pp. 177002.
28. L. Fu and C. L. Kane / Superconducting Proximity Effect and Majorana Fermions at the Surface of a Topological Insulator // Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 100. – pp. 096407.
29. L. Fu and C. L. Kane / Josephson current and noise at a superconductor/quantum-spin-Hall-insulator/superconductor junction // Phys. Rev. B – 2009. – Vol. 79. – pp. 161408(R); J. D. Sau, R. M. Lutchyn, S. Tewari, and S. Das Sarma / Generic New Platform for Topological Quantum Computation Using Semiconductor Heterostructures // Phys. Rev. Lett. – 2010. – Vol. 104 – pp. 040502; J. Alicea / Majorana fermions in a tunable semiconductor device // Phys. Rev. B – 2010. – Vol. 81 – pp. 125318; A. Cook and M. Franz / Majorana fermions in a topological-insulator nanowire proximity-coupled to an s-wave superconductor // Phys. Rev. B – 2011. – Vol. 84 – pp. 201105; D. Sau and S. D. Sarma / Realizing a robust practical

Majorana chain in a quantum-dot-superconductor linear array // Nature communications – 2012. – Vol. 3. – pp. 964; A. Das, Y. Ronen, Y. Most, Y. Oreg, M. Heiblum, and H. Shtrikman / Zero-bias peaks and splitting in an $Al - InAs$ nanowire topological superconductor as a signature of Majorana fermions // Nature Phys. – 2012. – Vol. 8. – pp. 887; M. T. Deng, C. L. Yu, G. Y. Huang, M. Larsson, P. Caroff, and H. Q. Xu / Anomalous Zero-Bias Conductance Peak in a $Nb - InSb$ Nanowire-Nb Hybrid Device // Nano Lett. – 2012. – Vol. 12 – pp. 6414; A. D. K. Finck, D. J. Van Harlingen, P. K. Mohseni, K. Jung, and X. Li / Anomalous Modulation of a Zero-Bias Peak in a Hybrid Nanowire-Superconductor Device // Phys. Rev. Lett. – 2013. – Vol. 110. – pp. 126406; H. O. H. Churchill, V. Fatemi, K. Grove-Rasmussen, M. T. Deng, P. Caroff, H. Q. Xu, and C. M. Marcus / Superconductor-nanowire devices from tunneling to the multichannel regime: Zero-bias oscillations and magnetoconductance crossover // Phys. Rev. B – 2013. – Vol. 87. – pp. 241401.

30. M. Wimmer, A. R. Akhmerov, M. V. Medvedyeva, J. Tworzydlo, and C. W. J. Beenakker / Majorana Bound States without Vortices in Topological Superconductors with Electrostatic Defects // Phys. Rev. Lett. – 2010. – Vol. 105 – pp. 046803.
31. M. Maiti, K. M. Kulikov, K. Sengupta, and Y. M. Shukrinov / Josephson junction detectors for Majorana modes and Dirac fermions // Phys. Rev. B – 2015. – Vol. 92. – pp. 224501.
32. H.-J. Kwon, K. Sengupta, and V. M. Yakovenko / Fractional ac Josephson effect in p- and d-wave superconductors // Eur. Phys. J. B – 2004. – Vol. 37. – pp. 349.
33. L. P. Rokhinson, X. Liu, and J. K. Furdyna / The fractional a.c. Josephson effect in a semiconductorЏsuperconductor nanowire as a signature of Majorana particles // Nature Phys. – 2012. – Vol. 8. – pp. 795.
34. K. Sengupta, I. Žutić, H.-J. Kown, V. M. Yakovenko, and S. Das Sarma / Midgap edge states and pairing symmetry of quasi-one-dimensional organic

superconductors // Phys. Rev. B – 2001. – Vol. 63. – pp. 144531.

35. V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, and L. P. Kouwenhoven / Signatures of Majorana Fermions in Hybrid Superconductor-Semiconductor Nanowire Devices // Science – 2012. – Vol. 336. – pp. 1003; W. Chang, V. E. Manucharyan, T. S. Jespersen, J. Nygaard, and C. M. Marcus / Tunneling Spectroscopy of Quasiparticle Bound States in a Spinful Josephson Junction // Phys. Rev. Lett. – 2013. – Vol. 110. – pp. 217005; S. Nadj-Perge, I. K. Drozdov, J. Li, H. Chen, S. Jeon, J. Seo, A. H. MacDonald, B. A. Bernevig, and A. Yazdani / Observation of Majorana fermions in ferromagnetic atomic chains on a superconductor // Science – 2014. – Vol. 346. – pp. 602; E. J. H. Lee, X. Jiang, M. Houzet, R. Aguado, C. M. Lieber, and S. D. Franceschi / Spin-resolved Andreev levels and parity crossings in hybrid superconductor-semiconductor nanostructures // Nature Nanotech. – 2014. – Vol. 9. – pp. 79.
36. E. J. H. Lee, X. Jiang, R. Aguado, G. Katsaros, C. M. Lieber, and S. D. Franceschi / Zero-Bias Anomaly in a Nanowire Quantum Dot Coupled to Superconductors // Phys. Rev. Lett. – 2012. – Vol. 109. – pp. 186802.
37. Jie Liu, A. C. Potter, K. T. Law, and P. A. Lee / Zero-Bias Peaks in the Tunneling Conductance of Spin-Orbit-Coupled Superconducting Wires with and without Majorana End-States // Phys. Rev. Lett. – 2012. – Vol. 109. – pp. 267002; D. Bagrets and A. Altland / Class D Spectral Peak in Majorana Quantum Wires // Phys. Rev. Lett. – 2012. – Vol. 109. – pp. 227005.
38. M. Houzet, J. S. Meyer, D. M. Badiane, and L. I. Glazman / Dynamics of Majorana States in a Topological Josephson Junction // Phys. Rev. Lett. – 2013. – Vol. 111. – pp. 046401.
39. F. Domínguez, F. Hassler, and G. Platero / Dynamical detection of Majorana fermions in current-biased nanowires // Phys. Rev. B – 2012. – Vol. 86. – pp. 140503.
40. P. Virtanen, T. T. Heikkil, and F. S. Bergeret / Stimulated quasiparticles in spin-split superconductors // Phys. Rev. B – 2016. – Vol. 93. – pp. 014512.

41. I. V. Bobkova and A. M. Bobkov / Quasiclassical theory of magnetoelectric effects in superconducting heterostructures in the presence of spin-orbit coupling // Phys. Rev. B – 2017. – Vol. 95. – pp. 184518.
42. I. V. Bobkova and A. M. Bobkov / Thermospin effects in superconducting heterostructures // Phys. Rev. B – 2017. – Vol. 96. – pp. 104515.
43. I. V. Bobkova, A. M. Bobkov, and M. A. Silaev / Gauge theory of the long-range proximity effect and spontaneous currents in superconducting heterostructures with strong ferromagnets // Phys. Rev. B – 2017. – Vol. 96. – pp. 094506.
44. J. Linder and J. W. A. Robinson / Superconducting spintronics // Nature Physics – 2015. – Vol. 11. – pp. 307.
45. S. A. Kivelson and D. S. Rokhsar / Bogoliubov quasiparticles, spinons, and spin-charge decoupling in superconductors // Phys. Rev. B – 1990. – Vol. 41. – pp. 11693.
46. H. L. Zhao and S. Hershfield / Tunneling, relaxation of spin-polarized quasiparticles, and spin-charge separation in superconductors // Phys. Rev. B – 1995 – Vol. 52. – pp. 3632.
47. S. Artemenko and A. Kobelkov / Intrinsic Josephson Effect and Violation of the Josephson Relation in Layered Superconductors // Phys. Rev. Lett. – 1997. – Vol. 78. – pp. 3551.
48. S. E. Shafranjuk and M. Tachiki / Emission of plasmons caused by quasiparticle injection to a high-T_c superconductor // Phys. Rev. B. – 1999. – Vol. 59. – pp. 14087.
49. C. Helm, C. Preis, C. Walter, J. Keller / Theory for the coupling between longitudinal phonons and intrinsic Josephson oscillations in layered superconductors // Phys. Rev. B – 2000. – Vol. 62. – pp. 6002.
50. C. Helm, J. Keller, C. Preis, and A. Sergeev / Static charge coupling of intrinsic Josephson junctions // Physica C – 2001. – Vol. 362. – pp. 43.
51. C. Helm, L. N. Bulaevskii, E. M. Chudnovsky, M. P. Maley / Reflectivity and Microwave Absorption in Crystals with Alternating Intrinsic Josephson

Junctions // Phys. Rev. Lett. – 2002. – Vol. 89. – pp. 057003.

52. L. N. Bulaevskii, C. Helm, A. R. Bishop, M. P. Maley / Optical properties of crystals with spatial dispersion-Josephson plasma resonance in layered superconductors // Europhys. Lett. – 2002. – Vol. 58. – pp. 057003.
53. D. A. Ryndyk / Collective Dynamics of Intrinsic Josephson Junctions in High-T_c Superconductors // Phys. Rev. Lett. – 1998. – Vol. 80. – pp. 3376.
54. J. Keller and D. A. Ryndyk / Static charge-imbalance effects in intrinsic Josephson systems // Phys. Rev. B – 2005. – Vol. 71. – pp. 054507.
55. S. Rother, Y. Koval, P. Müller, R. Kleiner, D.A. Ryndyk, J. Keller, C. Helm / Charge-imbalance effects in intrinsic Josephson systems // Phys. Rev. B – 2003. – Vol. 67. – pp. 024510.
56. Shukrinov Yu. M. and Mahfouzi F. / Current-voltage characteristics of intrinsic Josephson junctions with charge-imbalance effect // Physica C: Superconductivity – 2007. – Vol. 460-462 – pp. 1303.
57. A. Larsen, H. D. Jensen, and J. Mygind / Self-induced steps in a small Josephson junction strongly coupled to a multimode resonator // Phys. Rev. B – 1991. – Vol. 43. – pp. 10179.
58. H. D. Jensen, A. Larsen, and J. Mygind / Chaos in self-pumped resonator coupled Josephson junctions // Physica B – 1990. – Vol. 165. – pp. 1661.
59. M. Tachiki, K. Ivanovic, K. Kadowaki, and T. Koyama / Emission of terahertz electromagnetic waves from intrinsic Josephson junction arrays embedded in resonance LCR circuits // Phys. Rev. B – 2011. – Vol. 83. – pp. 014508.
60. T. Zhou, J. Mao, H. Cui, et al. / The model of Josephson junction arrays embedded in resonant cavities and the phase-locking properties // Physica C – 2009. – Vol. 469. – pp. 785.
61. K. K. Likharev / Dynamics of Josephson Junctions and Circuits // Gordon and Breach – New York – 1986.
62. E. Almaas and D. Stroud / Dynamics of a Josephson array in a resonant cavity // Phys. Rev. B – 2002. – Vol. 65. – pp. 134502.

63. P. Barbara, A. B. Cawthorne, S. V. Shitov, and C. J. Lobb / Stimulated Emission and Amplification in Josephson Junction Arrays // Phys. Rev. Lett. – 1999. – Vol. 82. – pp. 1963.
64. Y. M. Shukrinov, I. R. Rahmonov and K. V. Kulikov / Double resonance in the system of coupled Josephson junctions // JETP Lett. – 2012. – Vol. 96. – pp. 588.
65. Yu. M. Shukrinov, F. Mahfouzi, and P. Seidel / Equidistance of branch structure in capacitively coupled Josephson junctions model with diffusion current // Physica C – 2006. – Vol. 449. – pp. 62.
66. Yu. M. Shukrinov and I. R. Rakhmonov / Diffusion current in a system of coupled Josephson junctions // JETP – 2012. – Vol. 115. – pp. 289.
67. S. N. Artemenko and A. F. Volkov / Electric fields and collective oscillations in superconductors // Sov. Phys. Usp. – 1979. – Vol. 22. – pp. 295.
68. Ю.М. Шукринов, И.Р. Рахмонов, К.В. Куликов / Применение численных методов для исследования эффекта Джозефсона // Учебное пособие. – Дубна: ОИЯИ – 2016. – 94 с.
69. T. G. Zhou, J. Mao, T. S. Liu, Y. Lai and S. L. Yan / Phase Locking and Chaos in a Josephson Junction Array Shunted by a Common Resistance // Chin. Phys. Lett. – 2009. – Vol. 26. – pp. 077401.
70. A. Barone and G. Paterno / Phys. Applications of the Josephson Effect // John Wiley and Sons – 1982.
71. P. Seidel, M. Siegel and E. Heinz / Microwave-induced steps in high-T_c Josephson junctions // Physica C – 1991. – Vol. 180. – pp. 284.
72. Doh Yong-Joo, J. Kim, K.-T. Kim and H.-J. Lee / Microwave-induced constant voltage steps in surface junctions of $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ single crystals // Phys. Rev. B – 2000. – Vol. 61. – pp. R3834.
73. B. Jeanneret, S.P. Benz / Application of the Josephson effect in electrical metrology // Eur. Phys. J. Special Topics – 2009. – Vol. 172. – pp. 181.
74. Yu. M. Shukrinov and M. A. Gaafar / Charging of superconducting layers and

resonance-related hysteresis in the current-voltage characteristics of coupled Josephson junctions // Phys. Rev. B – 2011. – Vol. 84. – pp. 094514.

75. R. Yamapi, G. Filatrella / Noise effects on a birhythmic Josephson junction coupled to a resonator // Phys. Rev. E – 2014. – Vol. 89. – pp. 052905.

76. F. Rudau, R. Wieland, J. Langer, X.J. Zhou, M. Ji, N. Kinev, L.Y. Hao, Y. Huang, J. Li, P.H. Wu, T. Hatano, V.P. Koshelets, H.B. Wang, d. Koelle, and R. Kleiner / Three-Dimensional Simulations of the Electrothermal and Terahertz Emission Properties of $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$ Intrinsic Josephson Junction Stacks // Phys. Rev. App. – 2016. – Vol. 5. – pp. 044017.

77. X.J. Zhou, J. Yuan, H. Wu, Z.S. Gao, M. Ji, D.Y. An, Y. Huang, F. Rudau, R. Wieland, B. Gross, N. Kinev, J. Li, A. Ishii, T. Hatano, V.P. Koshelets, D. Koelle, R. Kleiner, H.B. Wang, and P.H. Wu / Tuning the Terahertz Emission Power of an Intrinsic Josephson-Junction Stack with a Focused Laser Beam // Phys. Rev. App. – 2015. – Vol. 3. – pp. 044012.

78. K. Delfanazari, H. Asai, M. Tsujimoto, T. Kashiwagi, T. Kitamura, T. Yamamoto, W. Wilson, R. A. Klemm, T. Hattori, and K. Kadowaki / Effect of Bias Electrode Position on Terahertz Radiation From Pentagonal Mesas of Superconducting $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ // IEEE Trans. on terahertz sci. and tech. – 2015. – Vol. 5. – No. 3. – pp. 505.

79. X. Zhou, Q. Zhu, M. Ji, D. An, L. Hao, H. Sun, Sh. Ishida, F. Rudau, R. Wieland, J. Li, D. Koelle, H. Eisaki, Y. Yoshida, T. Hatano, R. Kleiner, H. Wang, and P. Wu / Three-terminal stand-alone superconducting terahertz emitter // Appl. Phys. Lett. – 2015. – Vol. 107. – pp. 122602.

80. A. Y. Kitaev / Fault-tolerant quantum computation by anyons // Ann. Phys. – 2003. – Vol. 303. – pp. 2.

81. D. A. Ivanov / Non-Abelian Statistics of Half-Quantum Vortices in p-Wave Superconductors // Phys. Rev. Lett. – 2001. – Vol. 86. – pp. 268.

82. A. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Friedman, and S. DasSarma / Non-Abelian anyons and topological quantum computation // Phys. Rev. Mod. – 2008. – Vol.

80. – pp. 1083.

83. J. Linder, Y. Tanaka, T. Yokoyama, A. Sudb?, and N. Nagaosa / Unconventional Superconductivity on a Topological Insulator // Phys. Rev. Lett. – 2010. – Vol. 104. – pp. 067001.
84. C. W. J. Beenakker / Search for Majorana fermions in superconductors // Annu. Rev. Con. Mat. Phys. – 2013. – Vol. 4. – pp. 113.
85. J. Alicea / New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems // Rep. Prog. Phys. – 2012. – Vol. 75. – pp. 076501.
86. J. G. Rodrigo, V. Crespo, H. Suderow, S. Vieira, and F. Guinea / Topological superconductivity in lead nanowires // Phys. Rev. Lett. – 2012. – Vol. 109. – pp. 237003.
87. L. Jiang, D. Pekker, J. Alicea, G. Refael, Y. Oreg, and F. von Oppen / Unconventional Josephson Signatures of Majorana Bound States // Phys. Rev. Lett. – 2011. – Vol. 107. – pp. 236401.
88. P. San-Jose, E. Prada, and R. Aguado / ac Josephson Effect in Finite-Length Nanowire Junctions with Majorana Modes // Phys. Rev. Lett. – 2012. – Vol. 108. – pp. 257001.
89. D. I. Pikulin and Y. V. Nazarov / Phenomenology and dynamics of a Majorana Josephson junction // Phys. Rev. B – 2012. – Vol. 86. – pp. 140504(R).
90. K. K. Likharev James Lukens, Reviewer / Dynamics of Josephson junctions and Circuits // State University of New York – Stony Brook – USA – 1988.
91. Y. M. Shukrinov, S. Y. Medvedeva, A. E. Botha, M. R. Kolahchi, and A. Irie / Devil's staircases and continued fractions in Josephson junctions // Phys. Rev. B – 2013. – Vol. 88. – pp. 214515.
92. Y. M. Shukrinov and M. A. Gaafar / Charging of superconducting layers and resonance-related hysteresis in the current-voltage characteristics of coupled Josephson junctions // Phys. Rev. B – 2011. – Vol. 84. – pp. 094514.
93. R. C. Hilborn / Chaos and Non-linear Dynamics: An Introduction // Oxford University Press – New York – 2000.

94. A. E. Botha, Yu. M. Shukrinov, M. R. Kolahchi / A Farey staircase from the two-extremum return map of a Josephson junction // Nonlinear Dynamics – 2015. – Vol. 84. – Issue 3. – pp. 1363.
95. A. C. Potter and P. A. Lee / Multichannel Generalization of Kitaev's Majorana End States and a Practical Route to Realize Them in Thin Films // Phys. Rev. Lett. – 2010. – Vol. 105. – pp. 227003.
96. J. Clarke / Finite-Voltage Behavior of Lead-Copper-Lead Junctions // Phys. Rev. B – 1971. – Vol. 4. – pp. 2963; H. Dayem and J. J. Wiegand / Behavior of Thin-Film Superconducting Bridges in a Microwave Field // Phys. Rev. – 1967. – Vol. 155. – pp. 419; K. Y. Constantinian et al. / Electron transport and microwave dynamics of hybrid $Nb/Au/CaSrCuO/YBaCuO$ planar Josephson junctions // J. Phys.: Conf. Ser. – 2010. – Vol. 234. – pp. 042004.
97. A. I. Larkin and D. N. Langenberg / Nonequilibrium Superconductivity // Modern Problems in Condensed Matter Science – Ed. by A. I. Larkin, D. N. Langenberg. – North-Holland: Elsevier Science Ltd – 1986. – p. 711.
98. Yu. M. Shukrinov, and F. Mahfouzi / Collective Dynamics of Intrinsic Josephson Junctions in HTSC // J. Phys.: Conf. Ser. – 2006. – Vol. 43. – pp. 1143.
99. G. M. Eliashberg / Inelastic Electron Collisions and Nonequilibrium Stationary States in Superconductors // Zh. Eksp. Teor. Fiz. – 1971. – Vol. 61. – pp. 1254.
100. H. Matsumoto, S. Sakamoto, F. Wajima, T. Koyama, M. Machida / Simulation of $I-V$ hysteresis branches in an intrinsic stack of Josephson junctions in high-T_c superconductors // Phys. Rev. B – 1999. – Vol. 60. – pp. 3666.
101. Myung-Ho Bae, R.C. Dinsmore III, M. Sahu, Hu-Jong Lee, and A. Bezryadin / Zero-crossing Shapiro steps in high-T_c superconducting microstructures tailored by a focused ion beam // Phys. Rev. B – 2008. – Vol. 77. – pp. 144501.
102. D. A. Ryndyk / Nonequilibrium Josephson effect in systems of tunnel superconducting junctions and in layered superconductors // JETP – 1999. – Vol. 89. – pp. 975.
103. K. Tamasaku, Y. Nakamura, and S. Uchida / Charge dynamics across the

CuO_2 planes in $La_{2-x}Sr_xCuO$ // Phys. Rev. Lett. – 1992. – Vol. 69. – pp. 1455.

104. V. M. Krasnov / Nonlinear Nonequilibrium Quasiparticle Relaxation in Josephson Junctions // Phys. Rev. Lett. – 2009. – Vol. 103. – pp. 227002.

105. D. A. Ryndyk, J. Keller and C. Helm. / Non-equilibrium effects due to charge fluctuations in intrinsic Josephson systems // J. Phys.: Condens. Matter. – 2002. – Vol. 14. – pp. 815.