

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи
УДК 539.18+539.143

МАЛЫХ

Анастасия Владимировна

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ И ХАРАКТЕРИСТИК
РАССЕЯНИЯ В СИСТЕМАХ ТРЕХ ЧАСТИЦ С КУЛОНОВСКИМ И
КОНТАКТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Специальность: 01.04.16 — физика ядра
и элементарных частиц

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 2008

Общая характеристика диссертации

Актуальность темы. Диссертация посвящена актуальным проблемам низкоэнергетической трехчастичной динамики в применении к атомным и ядерным системам.

Существенное значение при описании атомных систем в пределе низких энергий играет тот факт, что взаимодействие между частицами с хорошей точностью может быть выбрано в виде потенциалов нулевого радиуса (контактного взаимодействия). Таким образом, энергии связи и характеристики рассеяния для трех частиц имеют универсальный характер, то есть не зависят от деталей взаимодействия, а определяются симметрией системы, кинематическими параметрами (отношением масс частиц) и безразмерными параметрами, описывающими взаимодействие (отношением длин рассеяния). Информация о трехчастичных энергиях и характеристиках рассеяния используется при изучении различных аспектов динамики многочастичных систем, например, в связи с активно исследуемыми в последние годы ультрахолодными квантовыми газами. Быстро развиваются исследования смесей ультрахолодных газов, в частности, экспериментально и теоретически рассматриваются смеси различных фермионов и бозонов с фермионами, изучается поведение примесей в квантовых газах. Современные экспериментальные методики предоставляют уникальные возможности для изменения в широких пределах свойств ультрахолодных газов, что позволяет исследовать принципиальные проблемы микроскопических квантовых состояний, в качестве примера которых следует указать образование Бозе-Эйнштейновского конденсата и появление сверхтекучести в бозонных системах, возникновение БКШ пар и двухатомных бозонных молекул в фермионных системах.

Интересной специфической возможностью является исследование ультрахолодных газов в ловушках различной формы, в частности, интенсивно исследуются ультрахолодные газы в оптических решетках, в которых движение является (квази)одномерным или (квази)двумерным. В этой связи можно заметить,

что изучение свойств трех частиц в конфигурационном пространстве низкой размерности имеет значение в связи с исследованием атомов, адсорбированных на поверхности, или в наноструктурах. Кроме того, точные аналитические решения для нескольких частиц с контактным взаимодействием, движущихся в одномерном конфигурационном пространстве, используются в ряде работ для анализа различных свойств мало- и многочастичных систем. Описание нескольких тел, движущихся в двумерном конфигурационном пространстве, имеет ряд специфических особенностей, например, таких как наличие двухчастичного связанного состояния с экспоненциально малой энергией для сколь угодно слабого потенциала с неположительным средним значением, существование хорошо обусловленного гамильтониана трех частиц с контактным взаимодействием, логарифмическая зависимость от энергии в разложении эффективного радиуса.

Контактные взаимодействия естественно возникают в теоретическом описании широкого круга квантовомеханических систем. Методы решения задачи на собственные значения и задачи рассеяния для систем с контактными взаимодействиями представляют общий интерес, таким образом полученные в диссертации усовершенствования подхода, связанного с решением гиперрадиальных уравнений, представляют собой заметное методическое достижение. Важно отметить, что разработанные подходы применимы к широкому кругу задач, которые не ограничиваются системами, рассмотренными в диссертации.

В течении ряда лет значительное внимание привлекает описание ядра ^{12}C в α -кластерной модели. Образование ядра ^{12}C в реакции с участием трех α -частиц играет ключевую роль в астрофизической проблеме нуклеосинтеза, поскольку является единственной возможностью сгорания гелия и образования более тяжелых элементов. Существенное значение в процессе образования ядра ^{12}C играет предсказанный Хойлом припороговый 3α резонанс (0_2^+ -состояние ^{12}C), который имеет принципиальное значение как пример трехчастичного распада. Благодаря существованию этого резонанса, а также припорогового α -резонанса, достаточно быстрое сгорание гелия объясняется двухступенчатым

резонансным механизмом реакции $3\alpha \rightarrow {}^8\text{Be} + \alpha \rightarrow {}^{12}\text{C}^*(0_2^+) \rightarrow {}^{12}\text{C} + \gamma$. Предсказанное резонансное 0_2^+ -состояние ${}^{12}\text{C}$ было обнаружено в экспериментах и до сих пор интенсивно изучается теоретически. Несмотря на то, что экспериментально свойства этого состояния хорошо изучены, теоретическое описание сравнимой точности встречает затруднения на протяжении всего периода исследования. Следует подчеркнуть, что значительные затруднения связаны с наличием принципиальной проблемы более общего характера, а именно, описания реакций и распадов в системе трех частиц с кулоновским взаимодействием. Разработка метода расчета 0_2^+ -состояние ${}^{12}\text{C}$ может также рассматриваться как необходимый этап описания низкоэнергетических реакций с участием α -частиц, например, нерезонансной реакции горения гелия, идущей при малых энергиях и больших плотностях. Горение гелия в таких условиях происходит при аккреции на белых карликах и в нейтронных звездах. С другой стороны, расчет трехчастичных характеристик ядра ${}^{12}\text{C}$ позволяет определить параметры самой α -кластерной модели. Построение эффективных взаимодействий для этой модели представляет значительный интерес для теоретического описания свойств различных ядер, для которых наличие α -кластеров является хорошим приближением.

Цель работы

- Изучение трехчастичной динамики систем, содержащих либо тождественные частицы либо частицы двух видов, обладающие различной перестановочной симметрией, как в трехмерном конфигурационном пространстве, так и в пространстве низкой размерности. Расчет энергий связи и характеристик рассеяния, определение асимптотического поведения решений, исследование изотопических зависимостей и вычисление универсальных констант.
- Построение эффективных потенциалов α -кластерной модели, описывающих основные двух- и трехчастичные характеристики. Изучение свойств 3α -системы вблизи трехчастичного порога, в частности, определение ха-

рактик возбужденного 0^+ состояния ядра ^{12}C .

- Развитие метода гиперсферических “поверхностных” функций: вывод аналитических выражений коэффициентов гиперрадиальных уравнений для систем трех частиц с контактным взаимодействием и разработка численных процедур для решения трехчастичных задач с кулоновским взаимодействием.

Научная новизна и практическая ценность

1. Определен колебательно-вращательный спектр систем трех частиц двух типов, в которых взаимодействие между различными частицами описывается потенциалами нулевого радиуса. Показано, что спектр может быть описан универсальной функцией для произвольных значений углового момента, количества колебательных состояний и отношения масс частиц. Для системы, содержащей два тождественных фермиона в состоянии с полным угловым моментом $L = 1$, были определены критические значения отношения масс, при которых появляются два нижних связанных состояния, изотопические зависимости энергий и ширин припороговых резонансов, а также сечения упругого $2+1$ рассеяния и коэффициента рекомбинации при энергии в окрестности трехчастичного порога. Полученные изотопические зависимости дают возможность предсказывать свойства экспериментально исследуемых двухкомпонентных систем для широкого интервала значений отношения масс различных частиц, например, энергии связанных состояний позволяют оценить роль образования двух- и трехатомных молекул в многочастичной динамике, а также описывать фазовые переходы в зависимости от концентрации различных компонент в ультрахолодных газах. В экспериментах скорость трехчастичной рекомбинации определяет один из существенных каналов потерь частиц из ловушек и зачастую оказывается фактором, лимитирующим время удержания частиц в ловушках.

2. Вычислены трехчастичные энергии связи и длины $2 + 1$ рассеяния состояний различной четности трех частиц (двух типов) с контактным парным взаимодействием. Исследована зависимость этих характеристик от двух безразмерных параметров – отношения масс различных частиц и отношения интенсивностей парных взаимодействий. Изучение зависимости от параметров взаимодействия имеет принципиальное значение в связи с уникальной возможностью управления двухчастичным взаимодействием в эксперименте, в частности, используя магнитное поле для подстройки энергии резонанса в связанном канале (резонанс Фешбаха).
3. Исследованы особенности описания трехчастичных систем в двумерном конфигурационном пространстве. Вычислены универсальные значения энергий связи и длины $2 + 1$ рассеяния для трех тождественных бозонов с контактным взаимодействием.
4. Получены аналитические выражения для всех коэффициентов гиперрадиальных уравнений, описывающих три частицы с контактным взаимодействием. Как вывод, так и сами выражения справедливы для различных систем с произвольной перестановочной симметрией и различной размерности конфигурационного пространства. Полученные аналитические выражения значительно облегчают анализ асимптотического поведения коэффициентов гиперрадиальных уравнений и его решений для больших и малых расстояний между частицами, а также позволяют увеличить точность численного расчета.
5. В α -кластерной модели построен набор эффективных потенциалов, воспроизводящих экспериментальные значения в 2α - и 3α -системах. Определение параметров α -кластерной модели имеет принципиальное значение для расчетов свойств различных α -кластерных ядер. Вычислены характеристики основного и возбужденного 0^+ состояний ядра ^{12}C . Определение параметров 0_2^+ резонанса имеет целый ряд астрофизических приложений.

Апробация работы

Основные результаты диссертации были представлены на международной летней школе "Нарушение CP-симметрии, бариогенезис и нейтрино" (Прероу, Германия, 15 - 21 сентября 2002 года), на рабочем совещании по вычислительной физике, посвященное памяти Станислава Меркурьева (Санкт-Петербург, Россия, 24-27 августа 2003 года), на DST-UNISA-JINR симпозиуме "Модели и методы в мало- и многочастичных системах" (Скукуза, Южная Африка, 6–9 февраля 2007 года), на международной летней школе имени Гельмгольца "Теория ядра и астрофизические приложения" (Дубна, Россия, 7-17 августа 2007 года), на 20-ой Европейской конференции по малочастичным проблемам в физике (Пиза, Италия, 10-14 сентября 2007 года), а также обсуждались на семинарах Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова ОИЯИ, Европейского центра теоретических исследований (Тренто, Италия), НовГУ им. Яр. Мудрого, Университета Южной Африки (Претория).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–8].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и двух приложений. Общий объем составляет 134 страницы, включая 22 рисунка, 11 таблиц и список литературы из 166 наименований.

Содержание работы

Введение содержит изложение проблем, изучаемых в диссертации, описание современного состояния исследований в данной области и литературный обзор. Формулируются цели исследования и поставленные в работе задачи, представлены используемые методы, а также изложена структура диссертации.

Первая глава диссертации посвящена расчету при низких энергиях свойств трех частиц с короткодействующим взаимодействием. В низкоэнергетическом

пределе двухчастичные характеристики не зависят от формы короткодействующих потенциалов и допускают универсальное описание. Таким образом, естественно использовать двухчастичные потенциалы, заданные в виде однопараметрических потенциалов нулевого радиуса, например, имеющих вид граничных условий при нулевом расстоянии между соответствующими частицами. Обсуждается использование потенциалов нулевого радиуса в трехчастичных уравнениях, характерные особенности трехчастичных систем, рассмотренные в этой главе, а также приводится обзор опубликованных результатов по данной тематике.

В первом разделе рассматривается система трех частиц (двух типов) с контактным взаимодействием между неодинаковыми частицами [4,5,8]. Вычислен колебательно-вращательный трехчастичный спектр для произвольных значений отношений масс m/m_1 . Для наиболее интересного случая с двумя тождественными бозонами при четном полном угловом моменте L либо с двумя тождественными фермионами при нечетном L найдено асимптотическое поведение при больших m/m_1 критических значений $L_c(m/m_1) \approx 0.401\sqrt{m/m_1}$ и $L_b(m/m_1) \approx 0.563\sqrt{m/m_1}$, таких что для $L > L_b(m/m_1)$ отсутствуют связанные состояния, для $L_c(m/m_1) \leq L \leq L_b(m/m_1)$ число связанных состояний N конечно и не превышает $N_{max} \approx 1.1\sqrt{L(L+1)} + 1/2$, а при $L < L_c(m/m_1)$ число связанных состояний бесконечно. В интервале значений углового момента $L_c(m/m_1) \leq L \leq L_b(m/m_1)$ энергии связи описываются универсальной функцией $\mathcal{E}(\xi, \eta)$, зависящей от двух масштабированных переменных $\zeta = \frac{N - 1/2}{\sqrt{L(L+1)}}$ и $\eta = \sqrt{\frac{m}{m_1 L(L+1)}}$. Более детально рассмотрен наиболее важный для описания низкоэнергетических процессов пример трех частиц с двумя тождественными фермионами в состоянии $L = 1$. Изучены изотопические зависимости трехчастичного спектра, сечения упругого 2+1 рассеяния и коэффициента рекомбинации. Основное и возбужденное состояния появляются при $m/m_1 = \lambda_1 \approx 8.17260$ и $m/m_1 = \lambda_2 \approx 12.91743$. Вычислены положения и ширины резонансов, в которые переходят связанные состояния при m/m_1 , приближающихся к λ_1 и λ_2 .

Обсуждена связь между возникновением трехчастичных связанных состояний с увеличением m/m_1 и осциллирующим поведением сечений упругого $2 + 1$ рассеяния и трехчастичной рекомбинации. В частности, существует связь двух интерференционных максимумов амплитуд рассеяния с возникновением двух связанных состояний в зависимости от m/m_1 . Аналогично, для $L > 1$ осциллирующая зависимость амплитуд рассеяния от m/m_1 связана с рождением N_{max} связанных состояний.

Во втором разделе рассматривается система трех частиц (двух типов) с контактными взаимодействиями в одномерном конфигурационном пространстве [7]. В наиболее интересном случае, когда взаимодействие между разными частицами притягивающее, изучены зависимости трехчастичных энергий связи и длин $2 + 1$ рассеяния для состояний произвольной четности от двух безразмерных параметров: отношение масс частиц и отношение интенсивностей парных взаимодействий. Для трехчастичной системы с двумя тождественными бозонами в случаях бесконечного и нулевого отталкивания между бозонами вычислены критические значения отношения масс, при которых рождаются связанные состояния и длина рассеяния становится нулевой. Необходимо отметить, что существует взаимно однозначное соответствие решений для двух трехчастичных систем: первой, в которой два тождественных бозона с бесконечным отталкиванием между ними, и второй, в которой два тождественных фермиона не взаимодействуют. Поэтому все полученные результаты для бозонных систем описывают и фермионный случай.

Существуют аналитические решения уравнения Шредингера для системы, состоящей из одной тяжелой частицы массы m_1 и двух легких частиц массы m (в пределе $m/m_1 \rightarrow 0$), как для нулевого, так и для бесконечного отталкивания легких частиц, а также получены решения для трех частиц одинаковой массы $m = m_1$ с бесконечным отталкиванием тождественных частиц. Получено строгое доказательство, что $m/m_1 = 1$ – точная граница, справа от которой существует по крайней мере одно связанное состояние; кроме того, в системе трех частиц одинаковых масс существует только одно связанное состояние вне

зависимости от интенсивности взаимодействия между тождественными частицами. Вычислены асимптотические зависимости числа связанных состояний и длины рассеяния в пределе $m/m_1 \rightarrow \infty$, а также энергии связи и длины $2 + 1$ рассеяния при сильном притяжении тождественных бозонов. Построена схематическая "фазовая" диаграмма, на которой задано число связанных состояний и знак длины $2 + 1$ рассеяния в плоскости двух параметров: отношение масс частиц и отношение интенсивностей взаимодействий.

В третьем разделе рассматриваются три тождественных бозона с контактным взаимодействием в двумерном конфигурационном пространстве [3]. Получены универсальные значения энергий связи основного и возбужденного состояний и длина $2 + 1$ рассеяния с высокой точностью. Исследовано асимптотическое поведение коэффициентов системы гиперрадиальных уравнений и их решений в пределе больших и малых расстояний между частицами, что позволило получить логарифмическую асимптотику полной волновой функции вблизи точки трехчастичного столкновения.

Вторая глава содержит вывод аналитических выражений для коэффициентов гиперрадиальных уравнений [3,4]. Аналитические выражения одинаковой формы были получены для трех частиц (двух типов) произвольной симметрии в трехмерном и одномерном конфигурационных пространствах, и для трех тождественных бозонов в двумерном конфигурационном пространстве. Как сам вывод, так и полученные выражения имеют значительно более широкую область применимости, в частности, аналогичные выражения могут быть получены для трех частиц произвольной перестановочной симметрии, с различными взаимодействиями между ними, а также в различных размерностях конфигурационного пространства. Метод вывода основан на наличии контактного взаимодействия между частицами, явной зависимости задачи на собственные значения на гиперсфере от гиперрадиуса и на использовании соотношения типа Хеллмана-Фейнмана. Аналитические выражения позволяют провести анализ асимптотического поведения коэффициентов системы гиперрадиальных уравнений и его решений как при больших, так и при малых расстояниях между

частицами. Кроме того, аналитические выражения удобны для проведения численных расчетов и улучшения их точности.

Третья глава посвящена изучению свойств 0^+ состояний ядра ^{12}C [1,2,6] в α -кластерной модели. Построен набор эффективных двух- и трехчастичных потенциалов α -кластерной модели, описывающих экспериментальные значения положения и ширины s -волнового α - α резонанса, s -, d - и g -волновые фазы α - α рассеяния, энергии основного и возбужденного 0^+ состояний ядра ^{12}C и среднеквадратичный радиус основного состояния. Полученные результаты расчета показывают способность α -кластерной модели описывать такие тонкие характеристики, как чрезвычайно малая по ядерным масштабам ширина 0_2^+ состояния и экспериментально измеряемый структурный параметр – матричный элемент монополярного перехода $0_2^+ \rightarrow 0_1^+$. А именно, даже для локальных двухчастичных потенциалов рассчитанные величины находятся в разумном согласии с экспериментальными данными (отличающиеся множителем порядка 2) и, кроме того, слабо зависят от выбора двухчастичных и приемлемых трехчастичных потенциалов. Изучение термов гиперрадиальных уравнений и структуры волновой функции убедительно доказывает двухступенчатый механизм распада 0_2^+ состояния, что согласуется с общепринятой точкой зрения.

Необходимая точность вычисления характеристик ^{12}C была достигнута с помощью решения уравнения на гиперсфере вариационным методом с гибким базисом пробных функций. С этой целью в базис были включены полностью симметризованные гипергармоники, позволяющие описать волновую функцию в области малых расстояний между частицами, и функции, описывающие кластерную конфигурацию $\alpha + {}^8\text{Be}$.

В заключении суммируются результаты, выдвигаемые на защиту.

В приложении А изложен метод гиперсферических “поверхностных” функций: введены гиперрадиальные координаты, записано уравнение на гиперсфере, а также определены коэффициенты гиперрадиальных уравнений. Система гиперрадиальных уравнений записана в двух эквивалентных формах. Обсуждается асимптотика эффективных потенциалов, а также особенности расчета

в двумерном случае. Кроме того, применение метода проиллюстрировано на точно решаемой задаче трех тождественных бозонов с контактными взаимодействиями в одномерном конфигурационном пространстве.

В приложении Б описаны используемые численные процедуры. Приведены подробности численного расчета и оценка точности вычисленных коэффициентов гиперрадиальных уравнений для систем трех частиц с контактными взаимодействиями (с помощью аналитических выражений) и с кулоновским взаимодействием (посредством вариационного метода). Сформулированы граничные условия для системы гиперрадиальных уравнений, соответствующие задаче на связанные состояния и задаче рассеяния. Приведены подробности численного интегрирования системы гиперрадиальных уравнений.

На защиту выносятся следующие результаты:

- 1.** Определен колебательно-вращательный спектр трех частиц (двух типов) с контактными взаимодействиями для произвольных значений отношений масс. Получена универсальная функция, описывающая спектр энергии. Для системы, содержащей два тождественных фермиона, в состоянии с полным угловым моментом $L = 1$ определены изотопические зависимости трехчастичных энергий связи и сечений упругого и неупругого рассеяния.
- 2.** Исследована система трех частиц (двух типов) с контактными взаимодействиями в одномерном конфигурационном пространстве, определены энергии связи и длины $2 + 1$ рассеяния. Получен ряд аналитических и качественных результатов. Построена схематическая "фазовая" диаграмма, на которой задано число связанных состояний и знак длины $2 + 1$ рассеяния в плоскости двух параметров — отношения масс и отношения интенсивностей взаимодействий.
- 3.** Изучена система трех тождественных бозонов с контактными взаимодействиями в двумерном конфигурационном пространстве. Получены точные значения энергий связи и длины $2 + 1$ рассеяния, исследовано асимптотическое поведение всех коэффициентов системы гиперрадиальных уравнений и определено

поведение полной волновой функции вблизи точки тройного столкновения.

4. Дан вывод аналитических выражений для коэффициентов гиперрадиальных уравнений, описывающих систему трех частиц с контактным взаимодействием.

5. Построен набор эффективных двух- и трехчастичных потенциалов α - кластерной модели, описывающий экспериментальные значения положения и ширины s -волнового α - α резонанса, s -, d - и g -волновые фазы α - α рассеяния, энергии основного и возбужденного 0^+ состояний ядра ^{12}C и среднеквадратичный радиус основного состояния.

6. В α -кластерной модели определены ширина возбужденного 0_2^+ состояния ^{12}C , матричный элемент монопольного перехода ($0_2^+ \rightarrow 0_1^+$) и среднеквадратичный радиус возбужденного состояния $R^{(2)}$. Исследован механизм распада 0_2^+ состояния на три α -частицы.

Публикации по результатам диссертации:

- [1] S. I. Fedotov, O. I. Kartavtsev, V. I. Kochkin, and A. V. Malykh, *3 α -cluster structure of the 0⁺ states in ¹²C and the effective $\alpha - \alpha$ interactions*, Phys. Rev. C **70**, 014006 (2004)
- [2] S. I. Fedotov, O. I. Kartavtsev, and A. V. Malykh, *Effective three-body interactions in the α -cluster model for the ¹²C nucleus*, Eur. Phys. J. A **26**, 201 (2005)
- [3] O. I. Kartavtsev and A. V. Malykh, *Universal low-energy properties of three two-dimensional bosons*, Phys. Rev. A **74**, 042506 (2006)
- [4] O. I. Kartavtsev and A. V. Malykh, *Low-energy three-body dynamics in binary quantum gases*, J. Phys. B **40**, 1429 (2007)
- [5] O. I. Kartavtsev and A. V. Malykh, *Universal description of the rotational-vibrational spectrum of three particles with zero-range interactions*, Письма ЖЭТФ т. **86**, стр. 713 (2007)
- [6] S. I. Fedotov, O. I. Kartavtsev, and A. V. Malykh, *Effective three-body interactions in the α -cluster model for the ¹²C nucleus*, Proc. of the DST-UNISA-JINR Symposium “Models and Methods in Few- and Many-Body Systems”, ed. S.A.Sofianos, Pretoria, UNISA Press, p. 64 (2007)
- [7] O. I. Kartavtsev, A. V. Malykh, and S. A. Sofianos, *Bound states and scattering lengths of three two-component particles with zero-range interactions under one-dimensional confinement*, Препринт ОИЯИ Е4-2008-146/LANL arXiv.0808.2704 [physics.atom-ph]/ ЖЭТФ т. **135**, вып. 2 (2009)
- [8] O. I. Kartavtsev and A. V. Malykh, *Universal three-body dynamics in binary mixtures of ultra-cold atoms*, Few Body Syst., to be published