

Объединенный институт ядерных исследований
Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова

На правах рукописи

НОВИКОВ Александр Николаевич

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ДИНАМИКЕ
МНОГОКОМПОНЕНТНОГО КОНДЕНСАТА
БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА**

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук
Нестеренко Валентин Олегович

Дубна 2014

Оглавление

Введение	3
1 Основы теории конденсации Бозе-Эйнштейна	13
1.1 Идеальный Бозе-газ	13
1.2 Роль межатомного взаимодействия	14
1.3 Приближение среднего поля	15
1.4 Многокомпонентный конденсат	18
2 Динамика конденсата Бозе-Эйнштейна в двойной потенциальной яме	21
2.1 Туннелирование в двойной потенциальной яме	21
2.2 Двух-модовая модель, недостатки двух-модового приближения	25
2.3 Динамика сильно связанного конденсата	28
2.3.1 Постановка задачи	28
2.3.2 Эффект межатомного взаимодействия	31
2.3.3 Эволюция осцилляций Джозефсона и макроскопического квантового самозахвата	33
3 Нелинейный транспорт конденсата Бозе-Эйнштейна в двойной потенциальной яме	37
3.1 Транспорт конденсата: основные идеи	37
3.2 Переходы Ландау-Зинера и Розена-Зинера в двухуровневой системе	39
3.3 Применение переходов Ландау-Зинера и Розена-Зинера для транспорта конденсата, построение обобщённой схемы	42
3.4 Численное моделирование транспорта	44
3.4.1 В рамках двух-модовой модели	44
3.4.2 В рамках решения нелинейного уравнения Гросса—Питаевского для единого параметра порядка	55
3.4.3 Аналогия транспорта конденсата с эффектом Джозефсона	64

4	Нелинейный транспорт конденсата Бозе-Эйнштейна в тройной потенциальной яме	74
4.1	Метод СТИРАП, основные идеи	74
4.2	Применение СТИРАП для транспорта конденсата	77
4.2.1	Схема транспорта	77
4.2.2	Результаты	78
	Заключение	85

Введение

В 1924 году была опубликована фундаментальная статья А. Эйнштейна [1], посвящённая квантовой статистике идеальной системы бозонов и обобщающая предложенную ранее Ш. Бозе квантовую статистику фотонов [2] для общего случая Бозе-системы. Таким образом, была впервые сформулирована статистика Бозе-Эйнштейна, описывающая энергетическое распределение Бозе-частиц в зависимости от температуры. Важнейшим следствием предложенной статистики являлось наличие фазового перехода в пределе сверхнизких температур ($T \rightarrow 0$), приводящего к макроскопической заселённости одного из энергетических состояний системы, в то время как числа заполнения остальных квантовых состояний становятся пренебрежимо малы. Данное явление было названо конденсацией Бозе-Эйнштейна, а соответствующая макроскопическая заселённость состояния — конденсатом Бозе-Эйнштейна (КБЭ).

Дальнейшее развитие идей конденсации связано с экспериментальным открытием в 1938 году П.Л. Капицей [3], Д.Ф. Алленом и А.Д. Майзнером [4] сверхтекучести гелия-II. Первое теоретическое обоснование предложенное Ф. Лондоном [5] постулировало, что в основе сверхтекучести лежит когерентное бездиссипативное движение новой фракции, образующейся вследствие Бозе-конденсации. Затем в 1941 году Л.Д. Ландау предложил феноменологическую теорию сверхтекучести в терминах элементарных возбуждений [6]. Микроскопическая теория для слабо-неидеального Бозе-газа была предложена Н.Н. Боголюбовым [7] в 1947 году. Несколько позже был опубликован ряд других важных работ, окончательно сформировавших основу современной теории КБЭ. О. Пенроуз и Л. Онзагер применили развитую ранее концепцию параметра порядка для описания бесконечной Бозе-жидкости [8], Л.П. Питаевским [9] и Е.П. Гроссом [10, 11] была разработана теория описания слабо взаимодействующего неоднородного КБЭ.

Несмотря на успехи в теории, экспериментальное получение конденсата долгое время сталкивалось со значительными техническими проблемами. Для получения КБЭ требуется достичь крайне низких температур и одновременно избежать перехода вещества в твёрдое состояние.

Первоначально КБЭ был экспериментально получен в жидком гелии-II, где малая эффективная масса атома позволяет реализовать фазовый переход при сравнительно высокой температуре (несколько кельвинов), а большая величина энергии нулевых колебаний препятствует затвердеванию. Отсутствие фазового перехода в твёрдое состояние характерно для любой сильно разреженной системы, где вероятность двухчастичных упругих столкновений превышает вероятность трёхчастичных столкновений. Простейшим примером такой системы является разреженный газ. Отметим, что температура фазового перехода зависит от плотности системы, что приводит к значительному понижению температуры конденсации в сильно разреженных газах (сотни нанокельвинов) по сравнению с гелием-II. Достичь области столь низких температур удалось только в середине 90-х годов XX века. Совершенствование лазерной техники и развитие экспериментальной методики охлаждения нейтральных атомов [12, 13] положили начало поиску КБЭ в газе атомов щелочных и щелочноземельных металлов. Впервые КБЭ был экспериментально получен в 1995 году в газе атомов рубидия [14] и, фактически одновременно, в газе атомов натрия [15]. В обоих экспериментах атомы удерживались оптико-магнитной ловушкой. Дальнейшее совершенствование экспериментальных технологий позволило получить конденсат в оптических ловушках [16], оптических решётках [17] и атомных чипах [18, 19]. Появились также другие виды конденсата, например молекулярный [20, 21] и фотонный [22].

Характерной особенностью КБЭ в ловушке, по сравнению с конденсатом в гелии-II, является слабое межатомное взаимодействие и сильная пространственная неоднородность. Несмотря на малость взаимодействия оно играет огромную роль в физике КБЭ, поскольку приводит к появлению характерной нелинейности, являющейся источником многих наблюдаемых эффектов. В достаточно хорошем приближении, взаимодействие в большинстве атомных КБЭ сводится к s -рассеянию [23] и характеризуется единственным параметром — длиной рассеяния. Взаимодействие может быть как отталкивающим [14, 24], так и притягивающим [25, 26]. В отличие от гелия-II, межатомное взаимодействие в КБЭ можно контролировать посредством резонанса Фешбаха [27]. В настоящее время также интенсивно исследуются конденсаты с эффективным спин-орбитальным [28, 29] и сильным дипольным взаимодействиями [30, 31].

Наиболее подробно эффекты взаимодействия и связанные с ними вопросы освещаются в известных обзорах [17, 32–35] и монографиях [36–38].

Современная физика конденсата крайне богата и открывает интересные перспективы для фундаментальных и прикладных исследований.

Важным свойством конденсата является возможность контроля (с высокой точностью) его основных параметров, а также многочисленные аналогии с другими системами. Из разнообразия прикладных направлений большой интерес представляют различные вопросы квантового контроля, квантовой интерферометрии [24, 39–41] и информатики, в частности использование запутанных и сжатых спиновых состояний [42]. Последнее представляется особенно актуальным в связи с перспективами их дальнейшего применения в квантовой метрологии и процессах квантовой обработки информации.

Часто данные проблемы рассматриваются в многокомпонентном КБЭ, что стимулирует интерес к его исследованию. Современная экспериментальная методика позволяет разделить удерживающий атомы потенциал на серию слабо связанных потенциальных ям. Полученную систему называют многокомпонентным конденсатом Бозе-Эйнштейна, где под компонентой подразумевают фракцию КБЭ в каждой потенциальной яме. При изучении многокомпонентного конденсата большое внимание уделяется туннельной динамике. Этому вопросу в основном и посвящена данная диссертация. Наиболее простым, но часто рассматриваемым видом многокомпонентного конденсата является КБЭ в двойной потенциальной яме (ДПЯ) [43, 44] (внешний джозефсоновский контакт). Также часто рассматривается КБЭ в одной потенциальной яме, атомы которого находятся на двух энергетических уровнях сверхтонкой спиновой структуры (внутренний джозефсоновский контакт) [45]. Обе системы описываются схожими уравнениями, но различаются по физической реализации и контролю [40].

Динамика КБЭ в ДПЯ была и остаётся предметом интенсивных теоретических и экспериментальных исследований. В основе такой динамики лежит туннелирование атомов через потенциальный барьер. Задача о туннелировании конденсата рассматривалась многими авторами с применением различных подходов и методик, таких как точно решаемая квантовая задача [46, 47], приближение среднего поля [48, 49], теория нелинейных когерентных мод [50] или связанных мод [51]. Отметим, что большая часть исследований в данной области проводилась для случая слабой связи, имеющей место при сильной пространственной разделённости левой и правой компонент конденсата. Данный случай является наиболее простым, поскольку позволяет рассмотреть туннельную динамику в рамках двух-модового приближения [46–48], что сильно упрощает задачу. Наиболее часто исследуются два динамических режима, определяемые величиной нелинейности и начальными условиями [48, 50, 51]: осцилляции Джозефсона и макроскопический квантовый самозахват.

Помимо осцилляций Джозефсона и макроскопического квантового

самозахвата возможен принципиально другой динамический режим — транспорт КБЭ между потенциальными ямами или уровнями сверхтонкой структуры. В данной работе под транспортом понимается контролируемый перенос заселённости из начального состояния в конечное, в котором происходит дальнейшее удержание конденсата. Для реализации транспорта были предложены многочисленные методы переноса заселённости. Первоначально, активно разрабатывались адиабатические методы [52–54]. Здесь можно указать такие транспортные протоколы, как нелинейные переходы Ландау-Зинера в двойной [55–57] и тройной [58] потенциальной яме, переход Розена-Зинера [59], асимметричное нелинейное туннелирование в оптических решетках [17, 60, 61], стимулированный Рамановский адиабатический переход (СТИРАП) в тройной потенциальной яме [62–64], транспорт в много-ямных потенциалах [65]. Также широко использовались неадиабатические ("быстрые") методы [66]: временная модуляция ловушек [67], методы оптимального контроля [68, 69], transitionless quantum driving [70] и метод инвариантов [71, 72].

Несмотря на долгую историю исследования динамики КБЭ в ДПЯ, до сих пор весьма актуален ряд нерешённых задач, в первую очередь касающихся нелинейных эффектов. В частности, не была должным образом изучена эволюция основных динамических режимов при переходе от слабой к сильной связи, имеющиеся работы [51, 73] лишь частично касаются этого вопроса. Используемое в большинстве работ двух-модовое приближение успешно работает для слабой связи [46, 47] и неприменимо для сильной связи, возникающей при существенном пространственном перекрытии компонент конденсата [74]. В этом случае, одним из возможных способов исследования КБЭ является использование более сложной модели [73–75], основанной на численном решении нелинейного, трёхмерного, зависящего от времени уравнения Гросса-Питаевского (УГП) [9–11] для единого параметра порядка, описывающего весь конденсат в ДПЯ. Именно такого рода реалистичный подход наряду с более простыми моделями используется в данной диссертации.

Другой нерешённой проблемой является построение универсальной транспортной схемы для взаимодействующего КБЭ. Очевидно, что транспорт должен удовлетворять определённым критериям, таким как возможность экспериментальной реализации, быстрота и качество перехода и т.д. При этом адиабатические методы обеспечивают качественный, но медленный переход. Быстрый переход приводит к появлению нежелательных дипольных осцилляций. Данная проблема может быть частично решена применением подходов "быстрой адиабатики". Эта группа методов [66] успешно применяется в случае внутреннего контакта Джозефсона [76, 77], но не всегда подходит для построения транспортных схем

для внешнего контакта, что связано с различием механизмов транспорта. Некоторые "быстрые" методы содержат в своей основе принципы [78, 79], сформулированные для идеальной системы, в связи с чем их применимость для взаимодействующего КБЭ не вполне очевидна.

Таким образом, несмотря на уже имеющиеся транспортные методики для КБЭ в ДПЯ, до сих пор является актуальным прямое численное моделирование транспортного процесса. Естественный путь построения транспортных схем — исследование переноса заселённости на основе упрощенных моделей [57, 80] с дальнейшим более точным моделированием процесса [81]. В конечном счёте такой подход позволяет предложить схему экспериментальной реализации транспорта.

Наиболее просто инициировать транспорт адиабатическим движением барьера. В теоретической [82] и экспериментальной [44] работах была продемонстрирована возможность получения джозефсоновского тока конденсата в ДПЯ при адиабатически медленном смещении барьера. Данная методика эквивалентна механизму создания инверсии заселённости КБЭ в ДПЯ [81], являющейся частным случаем транспорта. В последующих экспериментальных работах [83, 84] была показана возможность получения джозефсоновского тока при адиабатической эволюции слабой связи. Таким образом, возникает возможность интерпретации транспорта в терминах эффекта Джозефсона.

Для некоторых транспортных схем даже незначительное межатомное взаимодействие является критическим фактором, приводящим к разрушению переноса [62–65]. В отличие от ДПЯ, где транспорт может быть реализован множеством методик, перенос заселённости в тройной потенциальной яме [85] чаще всего осуществляется методом СТИРАП. По имеющимся данным [62, 64, 86], СТИРАП успешно реализуется только в близком к идеальному КБЭ, наличие нелинейности приводит к разрушению транспортного процесса. При этом в литературе отсутствует систематическое исследование пределов нелинейности, позволяющих реализовать транспорт.

Ряд описанных выше физических проблем до сих пор слабо исследован, что во многом определило **цели** данной диссертационной работы:

1. Рассмотреть эволюцию основных динамических режимов КБЭ в ДПЯ при переходе от слабой к сильной связи между компонентами конденсата в условиях нелинейности.
2. Для взаимодействующего КБЭ разработать эффективные протоколы переноса заселённости в ДПЯ. Сравнить нелинейный транспорт КБЭ с эффектом Джозефсона.

3. Исследовать влияние нелинейности и асимметрии ловушки на перенос КБЭ в тройной потенциальной яме посредством метода СТИ-РАП.

Научная новизна и практическая ценность работы заключается в систематическом исследовании трансформации основных динамических режимов КБЭ в ДПЯ при переходе от слабой к сильной связи, а также возможностей нелинейного транспорта. Помимо двух-модовой модели, был использован метод моделирования динамики конденсата, основанный на численном решении нелинейного, трёхмерного, зависящего от времени УГП для единого параметра порядка. Данный метод обеспечивает более реалистичное описание, близкое к условиям эксперимента и математически схож с теорией Хартри-Фока для системы бозонов [87]. Двух-модовая модель оперирует рядом приближений, позволяющих существенно упростить задачу, но при этом накладывает ограничения на параметры исследуемой системы.

Конкретно, были получены следующие новые результаты:

1. Проведено систематическое исследование эволюции основных динамических режимов при переходе от слабой к сильной связи. Установлено, что данный переход приводит к трансформации осцилляций Джозефсона и макроскопического квантового самозахвата в режим высокочастотных осцилляций.
2. Предложено обобщение перехода Ландау-Зинера (ОПЛЗ), позволяющее устранить его характерные недостатки (постоянство связи между энергетическими состояниями и бесконечность адиабатических энергий при $t \rightarrow \infty$). Установлено, что оригинальный и обобщённый переходы различаются в адиабатическом пределе, но становятся близки при увеличении скорости процесса. Полный перенос заселённости для взаимодействующего конденсата наблюдается в широком диапазоне скоростей процесса. Увеличение нелинейности приводит к расширению диапазона скоростей, с формированием соответствующего плато. Таким образом, нелинейность становится фактором, способствующим транспорту.
3. Результаты, полученные в рамках двух-модового приближения, подтверждены на примере инверсии заселённости КБЭ в ДПЯ как частного случая транспорта. Показано, что отталкивающее взаимодействие позволяет ускорить инверсию на 3 порядка. Процесс инверсии со скоростями ниже критической с хорошей точностью может рассматриваться как стационарный джозефсоновский ток. Прекраще-

ние процесса при критической скорости фактически означает переход к нестационарному (осциллирующему) джозефсоновскому току.

4. Систематически исследован транспорт КБЭ в тройной потенциальной яме, осуществляемый методом СТИРАП. Детально изучена зависимость транспорта от нелинейности и асимметрии потенциала для циклической эволюции. Продемонстрирована устойчивость процесса для малых значений нелинейности.

Данные результаты представляют определённую практическую ценность. В связи с тем, что режим сильной связи часто встречается в различных областях исследования КБЭ в ДПЯ (транспорт, интерференционные эффекты, создание запутанных состояний), обнаруженный эффект трансформации динамических режимов может быть интересен для широкого круга специалистов. Важность исследования транспортных процессов связана с возможностью генерирования различных геометрических фаз и перспективой их дальнейшего использования в построении алгоритмов квантовых вычислений. Обнаруженный эффект влияния нелинейности на перенос заселённости может быть актуален для дальнейшей разработки эффективных и универсальных транспортных методик. Аналогия транспорта с эффектом Джозефсона может быть использована для создания атомных квантовых интерферометров.

По материалам диссертации опубликовано 6 работ, входящих в систему цитирования Web of Science. Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 96 страницах, включая 26 рисунков и список литературы из 106 наименований.

Во введении изложена постановка физической задачи и обоснована актуальность исследуемых проблем.

Первая глава является вводной и даёт общее представление о явлении конденсации Бозе-Эйнштейна. Приводится теоретическое обоснование конденсации идеального газа, характеризуется природа и значимость межатомного взаимодействия в физике КБЭ. В рамках приближения среднего поля строится теоретический аппарат для описания динамики КБЭ. Дается обобщение УГП на случай многокомпонентного конденсата.

Данная глава служит основой для дальнейших построений, приведённых в диссертации. Оригинальные результаты исследований представлены в главах II, III и IV.

Вторая глава посвящена описанию нелинейной динамики КБЭ в ДПЯ. В начале представлены основы туннельной динамики конденсата

в ДПЯ (осцилляции Джозефсона и макроскопический квантовый самозахват). Далее следуют оригинальные результаты по систематическому исследованию эволюции динамики отталкивающего КБЭ при переходе от слабой к сильной связи между левой и правой фракциями конденсата. Режим сильной связи достигается увеличением числа частиц и соответствующим ростом химического потенциала, исследование выполнено на основе решения нелинейного УГП для единого параметра порядка. Получено, что в случае слабой связи результаты согласуются с экспериментом, переход к сильной связи характеризуется трансформацией осцилляций Джозефсона и макроскопического квантового самозахвата в режим высокочастотных осцилляций.

В третьей главе представлены оригинальные результаты по исследованию нелинейного транспорта КБЭ в ДПЯ. Дана общая характеристика транспортных процессов в квантовых системах, обсуждаются возможности транспорта КБЭ в ДПЯ. Исследован транспорт КБЭ, осуществляемый переходом Ландау-Зинера. Моделирование процесса сводится к решению УГП в рамках двух-модового приближения. В идеальном КБЭ полный переход осуществляется при строгом соблюдении условия адиабатичности $\alpha \rightarrow 0$, где α — скорость процесса. Показано, что включение и дальнейшее увеличение нелинейности приводит к расширению диапазона скоростей, формируя плато. Таким образом, нелинейность способствует транспорту. Приведены известные недостатки данного транспортного метода, для их устранения предлагается обобщение перехода введением дополнительной зависящей от времени связи между компонентами (ОПЛЗ). Проведено моделирование транспорта, реализуемого ОПЛЗ. Сравниваются результаты для обеих транспортных методик, отмечается их различие в адиабатическом пределе, которое исчезает при увеличении скорости процесса. Характерные особенности транспорта интерпретируются на основе анализа стационарных состояний.

Путём решения нелинейного УГП для единого параметра порядка исследовано создание инверсии заселённости КБЭ в ДПЯ как частного случая транспорта. Параметры системы и процедура формирования начальных условий соответствуют гайдельбергскому эксперименту. Также в соответствии с методикой данного эксперимента, транспортный процесс обеспечивается сдвигом барьера, меняющим первоначальную асимметрию ДПЯ на противоположную. В идеальном КБЭ полный перенос заселённости имеет место только при адиабатически медленном движении барьера. Наличие отталкивающего взаимодействия позволяет ускорить транспорт на 3 порядка, а также приводит к формированию плато скоростей. Таким образом, подтверждаются результаты, полученные для нелинейного транспорта в рамках двух-модовой модели. Показано, что

можно уменьшить негативное влияние дипольных осцилляций (сделать транспорт более устойчивым) введением зависящей от времени скорости движения барьера.

Далее проводится аналогия между транспортом КБЭ в ДПЯ и эффектом Джозефсона. Показано, что перенос заселённости при малых скоростях приближённо может рассматриваться как стационарный джозефсоновский ток. Плато скоростей фактически характеризует диапазон возможных значений данного стационарного джозефсоновского тока. Определяется величина критического тока при которой происходит переход от стационарного к нестационарному осциллирующему джозефсоновскому току. При соответствующей критической скорости также происходит разрушение (квази)адиабатического транспорта.

Четвёртая глава посвящена исследованию транспорта КБЭ в тройной потенциальной яме, реализуемого методом СТИРАП. Представлена схема реализации СТИРАП, анализируются возможности применения СТИРАП для транспорта КБЭ в тройной потенциальной яме. Оригинальным результатом является исследование влияния нелинейности на процесс переноса. Показано, что в рамках метода СТИРАП транспорт реализуется только при умеренном значении нелинейности и асимметрии потенциала. Исследование выполнено в рамках трёх-модового приближения.

В заключении суммируются основные результаты работы.

Апробация работы

Результаты, изложенные в диссертации, докладывались на научных семинарах Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединённого института ядерных исследований, представлялись в виде постерных докладов на 36-ой и 38-ой сессии ППК ОИЯИ по физике конденсированных сред. Также результаты представлялись на следующих конференциях:

1. XXII Международная конференция по лазерной физике, Семинар по физике холодных атомов в ловушке, 15-19 июля 2013 г., Прага, Чехия.
2. Конференция молодых специалистов по атомной оптике, 8-12 апреля 2013 г., Бирмингем, Великобритания.
3. XXI Международная конференция по лазерной физике, Семинар по физике холодных атомов в ловушке, 23-27 июля 2012 г., Калгари, Канада.

4. XX Международная конференция по лазерной физике, Семинар по физике холодных атомов в ловушке, 11-15 июля 2011 г., Сараево, Босния и Герцеговина.
5. XIX Международная конференция по лазерной физике, Семинар по физике холодных атомов в ловушке, 5-9 июля 2011 г., Фоз де Игуасу, Бразилия.
6. Конференция молодых специалистов по атомной оптике, 22-27 марта 2010 г., Амстердам, Нидерланды.
7. XVIII Международная конференция по лазерной физике, Семинар по физике холодных атомов в ловушке, 13-17 июля 2009 г., Барселона, Испания.

Глава 1

ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОНДЕНСАЦИИ БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНА

Данная глава посвящена общему описанию явления конденсации Бозе-Эйнштейна. Показано, что конденсация идеального газа непосредственно следует из статистики Бозе-Эйнштейна в пределе низких температур. Обсуждается роль межатомного взаимодействия в конденсате. Формулируется метод теоретического описания неоднородного взаимодействующего конденсата в ловушке, основанный на приближении среднего поля (уравнение Гросса-Питаевского). Приводится обобщение метода на случай конденсата в многокомпонентных ловушках.

1.1 Идеальный Бозе-газ

Согласно квантовой теории [1, 2], распределение бозе-атомов по энергиям в зависимости от температуры T (распределение Бозе-Эйнштейна) имеет вид

$$\bar{N}_i(T) = f_i(E, T) = \left(\exp \left(\frac{E_i - \mu}{k_B T} \right) - 1 \right)^{-1}, \quad (1.1)$$

где \bar{N}_i — среднее число атомов на уровне с энергией E_i , μ — химический потенциал, k_B — постоянная Больцмана. Полное число частиц $N = \sum_i \bar{N}_i(T)$. При температуре T большей, чем некоторая критическая температура T_C , бозе-атомы распределены по энергиям, вследствие чего макроскопические параметры газа (давление, теплоёмкость и т.д.) зависят от вклада каждого энергетического состояния E_i , определённого статистическим весом.

Температурная зависимость распределения Бозе-Эйнштейна (1.1) имеет характерную особенность: физическая картина кардинально меняется при $T \leq T_C$, когда энергия основного состояния E_0 сравнима с величиной химического потенциала μ . В пределе при $E_0 \rightarrow \mu$ среднее число атомов \bar{N}_0 в состоянии с E_0 макроскопически велико, так что $\bar{N}_0 \gg N_{th}$, где

$$N_{th} = \sum_{i>0} \left(\exp \left(\frac{E_i - \mu}{k_B T} \right) - 1 \right)^{-1}. \quad (1.2)$$

Таким образом, из распределения Бозе-Эйнштейна (1.1) следует принципиальная возможность макроскопической заселённости основного состояния системы. Этот эффект приводит к кардинальному изменению свойств Бозе-газа, зависящих только от вклада основного состояния. Полученное явление было названо *конденсацией Бозе-Эйнштейна*, а соответствующая система с энергией E_0 — *конденсатом Бозе-Эйнштейна (КБЭ)*.

Конденсация Бозе-Эйнштейна имеет место при соизмеримости длины тепловой волны де Бройля λ_{dB} со средним расстоянием между частицами d . При этом происходит перекрытие волновых функций Бозе-частиц, что приводит к формированию нового когерентного состояния (КБЭ). Для равновесного газа:

$$\lambda_{dB} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}. \quad (1.3)$$

Для квантовых систем, характеризуемых плотностью n , справедливо соотношение: $d \approx n^{-1/3}$. Таким образом, можно оценить критическую температуру фазового перехода T_C :

$$T_C(n) \approx \frac{2\pi\hbar^2}{m} n^{2/3}. \quad (1.4)$$

Соотношение (1.4) справедливо для однородного невзаимодействующего конденсата [88]. В случае неоднородного конденсата (в ловушке) и учёта взаимодействия выражение для T_C имеет более сложный вид [89].

1.2 Роль межатомного взаимодействия

Невзаимодействующий конденсат является идеализированной системой (идеальный КБЭ). Межатомное взаимодействие имеет место даже в очень разреженном газе. Взаимодействующий конденсат представляет особый интерес для теоретического и экспериментального исследования, поскольку даже слабое межатомное взаимодействие приводит к

характерной нелинейности, являющейся источником многих наблюдаемых эффектов (сверхтекучесть, макроскопический квантовый самозахват, коллапс КБЭ с притягивающим взаимодействием и т.д.).

Конденсат в ловушке является сильно разреженной системой с характерной плотностью $n = 10^{13} - 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. Радиус межчастичного взаимодействия r_0 много меньше, чем среднее расстояние между частицами $d = n^{-1/3}$, определяемое плотностью газа. В таких условиях доминируют, в основном, столкновения двух частиц, вклад от столкновений трёх и более частиц незначителен. При этом частицы взаимодействуют посредством низкоэнергетического s-рассеяния, определяемого единственным параметром — длиной s-рассеяния a_s . Данное свойство применимо только для достаточно разреженного газа, подчиняющегося условию:

$$|a_s| \ll n^{-1/3}. \quad (1.5)$$

Длина рассеяния может быть положительной (^{86}Rb) или отрицательной (^{85}Rb), в зависимости от вида атомов. Отталкивающее взаимодействие в КБЭ характеризуется положительной a_s , притягивающее взаимодействие — отрицательной a_s . Отметим, что конденсат с притягивающим взаимодействием коллапсирует [25] при некотором критическом значении параметров.

Для атомов, находящихся во внешнем магнитном поле, длину рассеяния можно менять на эксперименте посредством резонанса Фешбаха [27]. Взаимодействие в КБЭ влияет на многие наблюдаемые величины, имеющие важное физическое значение, такие как равновесное распределение плотности в ловушке, энергия основного состояния и т.д. Возможность манипулирования величиной и знаком взаимодействия несомненно делает КБЭ одним из наиболее интересных объектов исследования в современной физике.

Помимо вышеописанного КБЭ, в настоящее время также интенсивно исследуются конденсаты с сильным дипольным [30, 31], эффективным спин-орбитальным [28, 29] и другими взаимодействиями.

1.3 Приближение среднего поля

Многочастичный гамильтониан, описывающий систему взаимодействующих бозонов, удерживаемых внешним потенциалом $V_{ext}(\mathbf{r})$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{H}(\mathbf{r}) = \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ + \frac{1}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ и $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ — операторы уничтожения и рождения Бозе-частицы в точке с координатами \mathbf{r} , $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — потенциал двух-частичного взаимодействия. Решение уравнения Шрёдингера с гамильтонианом (1.6) даёт точное описание статических и динамических свойств системы. Как правило, решение уравнения Шрёдингера является достаточно сложной задачей. Одним из методов, позволяющих упростить задачу является приближение среднего поля.

Идея метода среднего поля в физике КБЭ заключается в выделении из вторично-квантованного оператора бозонного поля $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ его классической части, описывающей КБЭ [32]. Такое разделение возможно осуществить при помощи приближения Боголюбова [90] для операторов рождения и уничтожения Бозе частиц.

В случае однородного Бозе-газа, заключённого в объёме V , конденсация происходит в одночастичном состоянии $\Psi_0 = 1/\sqrt{V}$, имеющим фактически нулевой импульс. В этом случае полевой оператор может быть представлен в виде

$$\hat{\Psi} \equiv \sqrt{N/V} + \hat{\Psi}', \quad (1.7)$$

где $\hat{\Psi}'$ — оператор малого возмущения, описывающий нормальную фазу. При наличии конденсата можно полностью пренебречь вкладом $\hat{\Psi}'$ в полевой оператор $\hat{\Psi}$. Таким образом, КБЭ может быть описан классической функцией.

В случае неоднородного Бозе-газа (неравномерного распределения плотности) и зависящей от времени задачи, оператор $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ можно представить в виде:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}, t) + \hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t), \quad (1.8)$$

где

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (1.9)$$

волновая функция конденсата,

$$\hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t) = \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) - \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (1.10)$$

При наличии значительной конденсатной части ($\bar{N}_0 \gg N_{th}$) можно полностью пренебречь вкладом от $\hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t)$ [91] и описать КБЭ одночастичной

комплексной волновой функцией $\Psi(\mathbf{r}, t)$, которую часто называют параметром порядка. Данное понятие впервые было введено Л.Д. Ландау [92].

Запишем уравнение Гайзенберга для оператора поля $\widehat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ с гамильтонианом (1.6), в результате получим:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \widehat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \left[\widehat{\Psi}, \widehat{H} \right] = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + \int \widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \widehat{\Psi}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' \right] \widehat{\Psi}(\mathbf{r}, t). \quad (1.11)$$

Выражение (1.11) можно упростить, заменив оператор поля на параметр порядка. В параграфе 1.2 обсуждалось, что основной тип взаимодействия в КБЭ — двухчастичное s-рассеяние, поэтому потенциал взаимодействия $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ можно аппроксимировать потенциалом контактного взаимодействия в виде:

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (1.12)$$

где

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}, \quad (1.13)$$

константа взаимодействия, зависящая от длины s-рассеяния a_s . После данных преобразований, выражение (1.11) примет вид:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (1.14)$$

Уравнение (1.14), имеющее форму нелинейного уравнения Шрёдингера для волновой функции КБЭ, известно как *уравнение Гросса-Питаевского (УГП)*. Нелинейность уравнения (1.14) задаётся наличием члена $g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$, связанного с межатомным взаимодействием. УГП было независимо получено Л.П. Питаевским [9] и Е.П. Гроссом [10, 11].

Как известно, в стационарном состоянии волновая функция может быть записана в виде:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}) \exp \left[-\frac{iEt}{\hbar} \right], \quad (1.15)$$

где E — энергия стационарного состояния. Подставив волновую функцию (1.15) в уравнение (1.14), получим стационарное УГП (отметим, что для КБЭ: $E = E_0 = \mu$):

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r})|^2 - \mu \right] \Psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.16)$$

УПГ позволяет успешно описывать динамические и статические свойства КБЭ, но при этом имеет ряд ограничений. УГП справедливо только для конденсата при нулевой температуре, предполагая взаимодействие в виде низкоэнергетического s -рассеяния. Также, УГП не учитывает квантовые флуктуации, предполагая большое число атомов.

Стоит отметить, что уравнения (1.14) и (1.16) имеют как квантовые, так и классические свойства. Квантовость уравнений связана с наличием постоянной Планка \hbar и возможностью описания квантовых эффектов (туннелирование). В тоже время, в УГП не учтены квантовые флуктуации, в этом плане данное уравнение является классическим.

Комплексность волновой функции КБЭ позволяет представить её в виде:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{r}, t)} e^{i\phi(\mathbf{r}, t)}. \quad (1.17)$$

Квадрат модуля функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$ и градиент её фазы $\phi(\mathbf{r}, t)$ имеют физический смысл плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ и скорости атомов $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ соответственно:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2, \quad (1.18)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi(\mathbf{r}, t). \quad (1.19)$$

1.4 Многокомпонентный конденсат

Современные экспериментальные методики позволяют разделить потенциал, удерживающий атомы КБЭ, на серию слабо связанных потенциальных ям. Поэтому имеет смысл ввести понятие многокомпонентного конденсата Бозе-Эйнштейна (МКБЭ). Стоит отметить, что в литературе встречаются различные определения МКБЭ. Под МКБЭ часто понимается конденсат, состоящий из разного типа атомов или атомов одного типа, распределённых по уровням сверхтонкой структуры. Соответственно, компонентой КБЭ называют число атомов каждого типа или заселённость определённого сверхтонкого уровня. В данной работе, под МКБЭ будем понимать конденсат, состоящий из атомов одного вида, распределённых между потенциальными ямами удерживающей ловушки. Заселённость каждой потенциальной ямы будем называть компонентой конденсата. МКБЭ представляет большой интерес в современной физике в связи с возможностью наблюдения ряда характерных эффектов (туннелирование, квантовая интерферометрия) [34, 36, 37]. Далее будет представлен формализм для описания МКБЭ.

В случае МКБЭ, общий параметр порядка $\Psi(\mathbf{r}, t)$ удобно разложить в квазиортогональном базисе параметров порядка $\Psi_k(\mathbf{r}, t)$ для хорошо разделённых стационарных потенциальных ям [48, 49]:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{N} \sum_{k=1}^M \Psi_k(\mathbf{r}, t) = \sqrt{N} \sum_{k=1}^M \Phi_k(\mathbf{r}) \psi_k(t), \quad (1.20)$$

где индекс k обозначает k -ую компоненту КБЭ, M — полное число компонент, $\Phi_k(\mathbf{r})$ определяет стационарное распределение плотности для k -той компоненты КБЭ; $\psi_k(t)$ — зависящие от времени коэффициенты разложения, связанные с заселённостью и фазой k -той компоненты:

$$\psi_k(t) = \sqrt{N_k(t)} e^{i\phi_k(t)}. \quad (1.21)$$

Полное число частиц N в многокомпонентной системе сохраняется, что эквивалентно условию:

$$\frac{1}{N} \int |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^M N_k(t) = 1. \quad (1.22)$$

Приближение (1.20) позволяет исследовать динамику МКБЭ, но имеет определённые ограничения применимости. Данный вопрос будет подробно рассмотрен в параграфе 2.2.

Подставив параметр порядка в виде (1.20) в УГП (1.14), получим систему связанных уравнений, описывающую M -компонентный КБЭ. Для задач, рассматриваемых в диссертации, основной интерес представляет временная эволюция заселённостей и фаз, в то время как пространственные распределения $\Phi_k(\mathbf{r})$ могут быть исключены из рассмотрения путём пространственного интегрирования. В результате имеем [48, 49]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_k(t) = [E_k(t) + U_k N_k |\psi_k(t)|^2] \psi_k(t) - \sum_{j \neq k}^M \Omega_{kj}(t) \psi_j(t), \quad (1.23)$$

где U_k — параметр взаимодействия между атомами одной компоненты КБЭ, $E_k(t)$ — энергия основного состояния k -той компоненты КБЭ, $\Omega_{k \neq j}(t)$ — параметр связи между компонентами КБЭ. Данные величины определяются как:

$$\Omega_{kj}(t) = -\frac{1}{\hbar} \int \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \Psi_k^* \nabla \Psi_j + \Psi_k^* V_{ext}(t) \Psi_j \right] d\mathbf{r}, \quad (1.24)$$

$$E_k(t) = \frac{1}{\hbar} \int \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Psi_k^*|^2 + \Psi_k^* V_{ext}(t) \Psi_k \right] d\mathbf{r}, \quad (1.25)$$

$$U_k = \frac{g}{\hbar} \int |\Psi_k|^4 d\mathbf{r}. \quad (1.26)$$

Как видно из приведённых соотношений, параметры имеют размерность частоты и зависят от времени только в частном случае время-зависящего удерживающего потенциала. При изучении динамики МКБЭ удобно ввести в рассмотрение обобщённый параметр связи между компонентами КБЭ с амплитудой K :

$$\Omega_{kj}(t) = K\bar{\Omega}_{kj}(t). \quad (1.27)$$

С учетом соотношения (1.27), система УГП (1.23) запишется в виде:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_k(t) = [\bar{E}_k(t) + \Lambda |\psi_k(t)|^2] \psi_k(t) - \frac{1}{2} \sum_{j \neq k}^M \bar{\Omega}_{kj}(t) \psi_j(t), \quad (1.28)$$

где $\bar{E}_k(t) = \frac{E_k(t)}{2K}$, Λ — ключевой параметр, связанный с отношением межатомного взаимодействия к величине связи:

$$\Lambda = \frac{UN}{2K}. \quad (1.29)$$

В уравнении (1.28) время перенормированно как $2Kt \rightarrow t$. Подставив (1.21) в систему УГП (1.28), можно получить систему уравнений, описывающую временную динамику заселенностей и фаз компонент КБЭ:

$$\dot{N}_k = - \sum_{j \neq k}^M \bar{\Omega}_{kj} \sqrt{N_j N_k} \sin(\phi_j - \phi_k), \quad (1.30)$$

$$\dot{\phi}_k = - [\bar{E}_k + \Lambda N_k] + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k}^M \bar{\Omega}_{kj} \sqrt{\frac{N_j}{N_k}} \cos(\phi_j - \phi_k). \quad (1.31)$$

Представленный формализм отличается универсальностью, поскольку может быть применён к произвольному числу компонент конденсата. Далее, уравнения (1.30)-(1.31) будут использованы для описания туннельной и транспортной динамики МКБЭ. Будет показано, что несмотря на ограниченность приближения (1.20), полученные результаты согласуются с более точной моделью.

Глава 2

Динамика конденсата Бозе-Эйнштейна в двойной потенциальной яме

Первый параграф данной главы посвящён описанию КБЭ в двойной потенциальной яме, характеризуется динамика конденсата. Далее обсуждаются недостатки двух-модовой модели, применяемой для описания динамики двухкомпонентного КБЭ и приводится обзор альтернативных методик. В последнем параграфе исследуется эволюция туннельной динамики конденсата при переходе от слабой к сильной связи между его фракциями.

2.1 Туннелирование в двойной потенциальной яме

Наиболее простым видом МКБЭ является конденсат, удерживаемый в двойной потенциальной яме (ДПЯ). Схема ДПЯ представлена на рисунке 2.1.

Рассмотрим общий формализм описания МКБЭ применительно к конденсату в ДПЯ. Будем считать, что удерживающий потенциал V_{ext} и параметр связи Ω_{kj} не зависят от времени. Компоненты конденсата в ДПЯ разделены потенциальным барьером, очевидно, что параметр Ω_{kj} в этом случае имеет физический смысл проницаемости барьера, т.е.

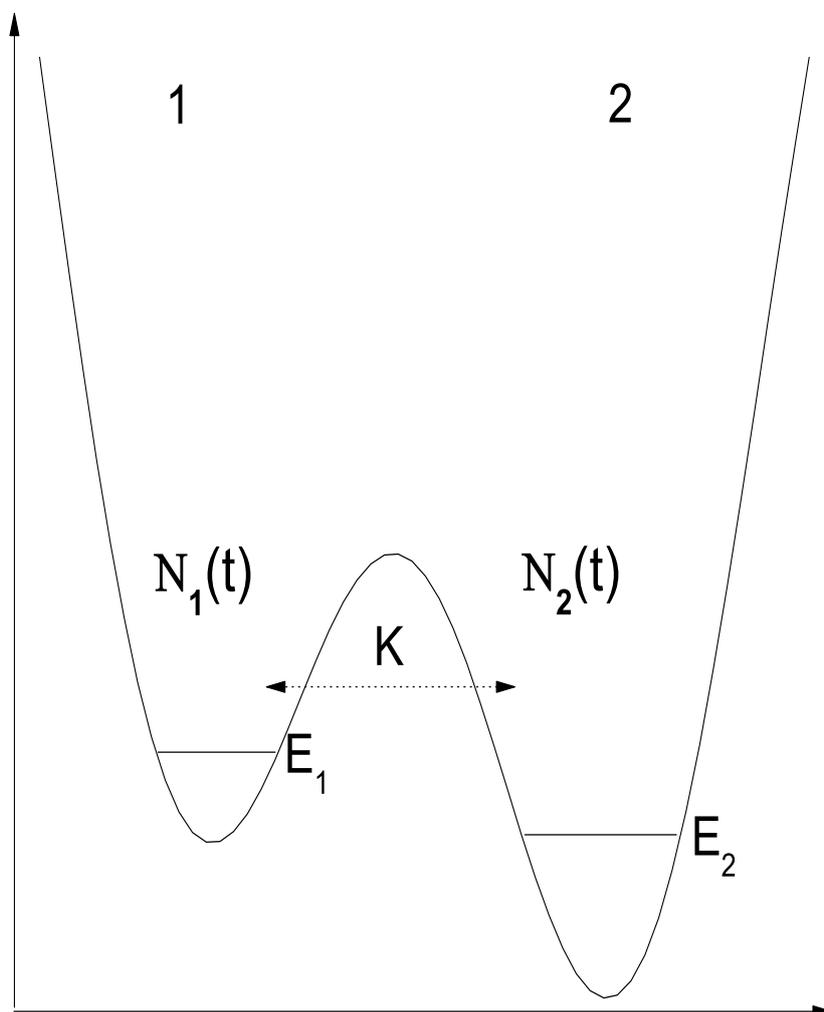


Рис. 2.1: Схема асимметричной двойной потенциальной ямы. Индексами 1 и 2 обозначены компоненты ямы с заселённостями N_1 и N_2 соответственно. E_1 и E_2 — энергии основного состояния левой (1) и правой (2) ям. В случае симметричной ямы $E_1 = E_2$. K — проникаемость потенциального барьера.

$\Omega_{12} \equiv K \equiv \text{const}$. Тогда, уравнение (1.23) запишется в виде:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_1(t) &= [E_1 + U_1 N_1] \psi_1(t) - K \psi_2(t), \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_2(t) &= [E_2 + U_2 N_2] \psi_2(t) - K \psi_1(t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Аналогично, можно записать систему уравнений (1.30) - (1.31) для заселённостей N_1 и N_2 и соответствующих фаз ϕ_1 и ϕ_2 . В результате получим систему, состоящую из четырёх дифференциальных уравнений, которую можно значительно упростить введением новых переменных [48]: разность заселённостей потенциальных ям z :

$$-1 < z = \frac{N_1 - N_2}{N} < 1 \quad (2.2)$$

и, соответственно, разность фаз θ :

$$\theta = \phi_2 - \phi_1. \quad (2.3)$$

В итоге имеем систему из двух уравнений, описывающую разность заселённостей $z(t)$ и разность фаз $\theta(t)$ компонент КБЭ в ДПЯ:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -\sqrt{1 - z^2} \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \Lambda z + \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \cos \theta + \Delta E, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где параметр взаимодействия Λ и разность энергий ΔE определены как:

$$\begin{aligned} \Lambda &= (U_1 + U_2)N/4K, \\ \Delta E &= (E_1 - E_2)/2K + (U_1 - U_2)N/4K. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отметим, что переход к новым переменным $z(t)$ и $\theta(t)$ позволяет не только упростить систему уравнений, но и является более правильным с физической точки зрения. Прежде всего, величины $z(t)$ и $\theta(t)$ измеряются на эксперименте. Кроме того, фаза каждой компоненты КБЭ ϕ_k определена с точностью до 2π и, таким образом, не имеет определённого физического смысла.

Отметим важную особенность, что $z(t)$ и $\theta(t)$ являются канонически сопряжёнными переменными [48] для классического гамильтониана, вытекающего из УГП:

$$H_{\text{cl}} = \frac{1}{2} [\Delta E z + \frac{\Lambda}{2} z^2 - \sqrt{1 - z^2} \cos 2\theta], \quad (2.6)$$

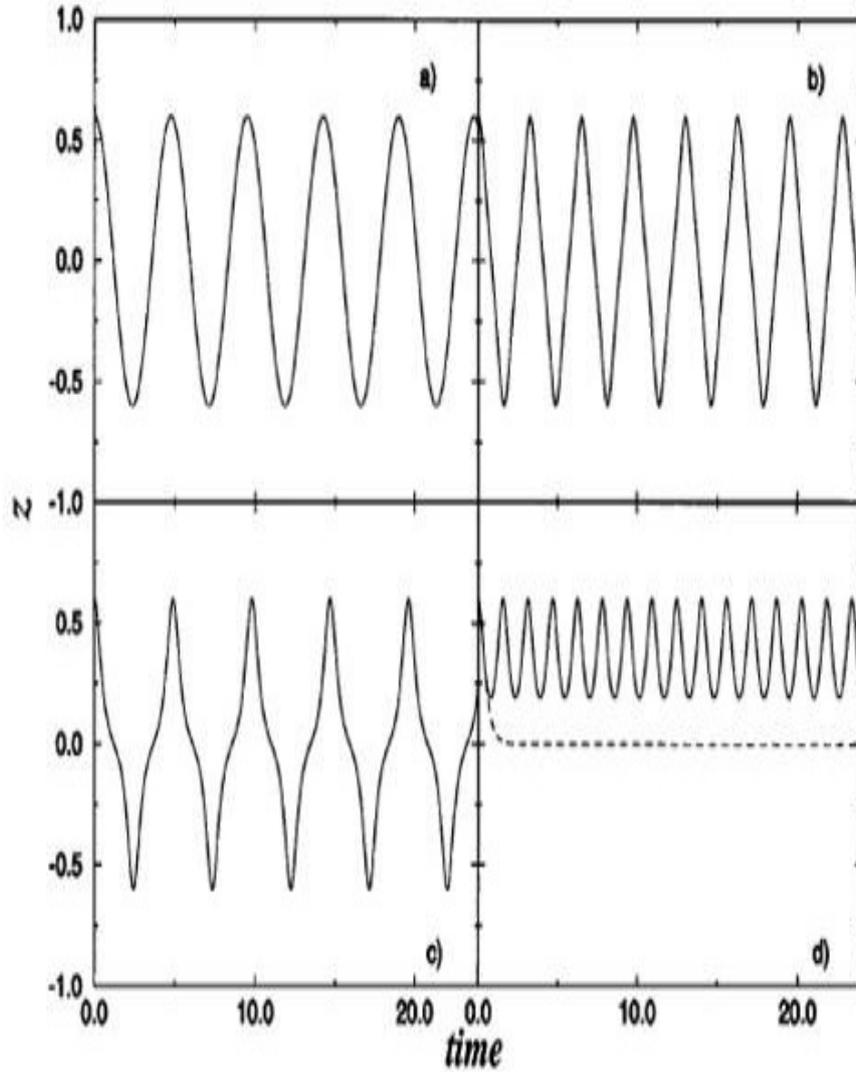


Рис. 2.2: Временная зависимость разности заселённостей z в ДПЯ. Расчёты выполнены с начальными условиями $z(t = 0) = 0.6$, $\theta(t = 0) = 0$ для разных параметров взаимодействия: $\Lambda = 1$ (a), $\Lambda = 8$ (b), $\Lambda = 9.99$ (c), $\Lambda = 10$ (d, сплошная линия), $\Lambda = 11$ (d, прерывистая линия). График взят из работы [48].

т.е.

$$\dot{z} = -\frac{\partial H_{cl}}{\partial \theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H_{cl}}{\partial z}. \quad (2.7)$$

Очевидно, что в основе динамики КБЭ в ДПЯ лежит туннелирование атомов через потенциальный барьер, описываемое системой уравнений (2.4). При этом характер туннелирования определяется многими факторами (межатомное взаимодействие, полное число частиц, параметры потенциала), входящими в уравнения через параметры Λ и ΔE . Решение системы (2.4) зависит также от начальных условий: $z(t=0)$ и $\theta(t=0)$.

Впервые уравнения (2.4) были получены и численно решены в работе [48]. Зависимость численного решения уравнений (2.4) от параметра взаимодействия Λ (для симметричной ямы ($\Delta E = 0$)) показана на рисунке 2.2. Как видно из рисунка 2.2 (а), при малых значениях Λ наблюдаются гармонические колебания $z(t)$. При этом, разность заселённостей осциллирует около среднего значения $\langle z \rangle = 0$. Данный режим колебаний называют осцилляциями Джозефсона (ОД). Характер осцилляций усложняется с ростом нелинейности, приводящей к ангармоничности колебаний (рис. 2.2 (b,c)). В том случае, если величина Λ превышает некоторое критическое значение Λ_{cr} , наблюдается режим туннелирования принципиально отличающийся от ОД, называемый макроскопическим квантовым самозахватом (МКСЗ) (показан рисунке 2.2 (d) сплошной линией). В отличие от ОД, при МКСЗ $z(t)$ осциллирует около $\langle z \rangle$, близкого к $z(t=0)$. Таким образом, МКСЗ характеризуется туннелированием лишь незначительной части конденсата, в то время как основная часть атомов удерживается в потенциальной яме. Отметим, что МКСЗ имеет место только в неидеальном КБЭ, т.е. является характерным эффектом межатомного взаимодействия.

Поведение $\theta(t)$ также различно для обоих режимов. ОД характеризуются осцилляциями $\theta(t)$ около $\langle \theta \rangle = 0$, в то время как для МКСЗ характерен линейный рост разности фаз. Существование режимов ОД и МКСЗ было подтверждено экспериментально [43].

2.2 Двух-модовая модель, недостатки двух-модового приближения

ОД и МКСЗ имеют место только в слабо связанном КБЭ, при сильной пространственной разделённости левой/правой компонент конденсата. Только в этом случае единый параметр порядка можно представить в виде суммы левой и правой компонент. Подобное представление не всегда является правильным и возможно в ограниченных случаях.

Рассмотрим более подробно введённое в параграфе 1.4 приближение (1.20). При этом ограничимся частным случаем двухкомпонентного КБЭ, когда параметр порядка может быть представлен в виде:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{N}(\Phi_1(\mathbf{r})\psi_1(t) + \Phi_2(\mathbf{r})\psi_2(t)), \quad (2.8)$$

где функции Ванье $\Phi_1(\mathbf{r})$ и $\Phi_2(\mathbf{r})$ описывают стационарные распределения атомов для изолированной левой и правой ямы, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ — соответствующие зависящие от времени амплитуды.

Для КБЭ в одной потенциальной яме, функция $\Phi(\mathbf{r})$ соответствует стационарному распределению атомов в основном состоянии с энергией E_0 , т.е. удовлетворяет стационарному уравнению Шрёдингера:

$$H(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = E_0\Phi(\mathbf{r}). \quad (2.9)$$

Для КБЭ в ДПЯ физическая картина немного меняется. Л.Д. Ландау было показано [93], что в двойном потенциале происходит расщепление состояния E_0 на два подуровня (моды) E_+ (основное состояние) и E_- (первое возбуждённое состояние), которым соответствуют симметричная $\Phi_+(\mathbf{r})$ и антисимметричная $\Phi_-(\mathbf{r})$ волновые функции. Аналогичный эффект имеет место для КБЭ в ДПЯ. В случае слабой связи между левой/правой фракциями КБЭ и слабого взаимодействия, уровни E_+ и E_- расположены близко друг к другу, но в тоже время хорошо отделены от более высоколежащих состояний. Таким образом, при рассмотрении динамики КБЭ можно ограничиться вкладом только от нижайших состояний E_+ и E_- . В этом случае, функции Ванье $\Phi_1(\mathbf{r})$ и $\Phi_2(\mathbf{r})$ могут быть представлены в виде симметричной и антисимметричной комбинации (двух-модовое приближение):

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{\Phi_+ + \Phi_-}{2}, \\ \Phi_2 &= \frac{\Phi_+ - \Phi_-}{2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Приближение (2.10) было впервые введено в работе Г.Д. Мильбурна [46] и в дальнейшем успешно использовалось другими авторами для описания динамики идеального и взаимодействующего КБЭ в ДПЯ. В случае слабой связи и слабого взаимодействия, результаты, полученные в рамках двух-модового приближения, хорошо согласуются с экспериментальными данными, что говорит о его высокой эффективности. Несмотря на это, данный подход обладает рядом существенных недостатков и весьма ограничен для описания динамики взаимодействующего КБЭ.

Двух-модовое приближение фактически постулирует, что атомы КБЭ распределены между нижайшими уровнями с энергиями E_+ и E_- , вклад

от более высоколежащих состояний не существенен. Это справедливо в случае идеального конденсата. Межатомное взаимодействие приводит к перемешиванию состояний, в результате чего на динамику системы могут оказывать влияние более высоколежащие уровни. В итоге, мы приходим к следующему ограничению применения двух-модового приближения: энергия межатомного взаимодействия должна быть много меньше, чем расстояние между энергетическими уровнями удерживающего потенциала. Если потенциал может быть записан в виде гармонического осциллятора, то условие применимости имеет вид [46]:

$$\hbar\omega_0 \gg \frac{N|U|}{V_{eff}}, \quad (2.11)$$

где ω_0 — осцилляторная частота, N — число атомов КБЭ, U — параметр взаимодействия, определяемый соотношением (1.26), $V_{eff} = 8\pi^{3/2}r_0^3$ — эффективный объём ловушки с радиусом r_0 . Преобразовав выражение (2.11), получим:

$$N \ll \frac{r_0}{a_{sc}}. \quad (2.12)$$

Для характерных экспериментальных значений r_0 и a_s , условие (2.12) имеет вид: $N < 1000$. Таким образом, приближение (2.8) справедливо лишь для конденсата с малым числом частиц. При этом, УПГ описывает КБЭ с макроскопическим числом частиц, обычно рассматривается $N > 1000$. Таким образом, решение УПГ в рамках двух-модового приближения имеет физический смысл только для КБЭ с ограниченным числом частиц $N \approx 1000$. Такое условие не всегда выполняется, следовательно решение УПГ в рамках данного приближения не всегда описывает реальную физическую картину.

Недостатки данного приближения многократно обсуждались в литературе [47–49]. Авторами были предложены различные модификации двух-модового приближения, позволяющие выйти за рамки слабой связи и ограниченности числа частиц. Наиболее известными являются теория связанных мод [51], много-модовое приближение [67], а также обобщение двух-модового приближения на случай зависимости туннельного коэффициента K от числа атомов КБЭ и межатомного взаимодействия [94]. При этом, данные методики также имеют характерные недостатки.

Очевидно, что наиболее простой путь решения проблемы — описание КБЭ единым параметром порядка $\Psi(\mathbf{r}, t)$, без разделения на левую и правую компоненты. Это позволяет рассмотреть динамику конденсата в режиме сильной связи. Кроме того, предложенный метод позволяет избежать применения ряда приближений (двух-модовое, пространственно-временная сепарабельность параметра порядка, постоянство проникае-

мости барьера), а также ограничения на число частиц (2.12). Математически, такой подход сводится к решению зависящего от времени УГП (1.14) для единого параметра порядка, что и было реализовано в ряде недавних работ диссертанта [73–75]. При этом алгоритм решения УГП может быть разным и зависит от поставленной задачи и имеющихся технических возможностей.

Очевидно, что данный подход является более реалистичным и позволяет моделировать динамику системы в условиях, максимально приближенных к экспериментальным. Отметим, что выбор способа описания КБЭ полностью определяется условиями задачи. Если система удовлетворяет условию слабой связи, то можно ограничиться двух-модовым приближением.

2.3 Динамика сильно связанного конденсата

2.3.1 Постановка задачи

Первые работы, посвящённые исследованию туннельной динамики КБЭ в ДПЯ были опубликованы более пятнадцати лет назад. За столь долгий период исследований ОД и МКСЗ были детально изучены как теоретически [46, 48, 49], так и экспериментально [43]. Несмотря на это, ряд вопросов до сих пор слабо исследован. В частности, не была должным образом изучена эволюция основных динамических режимов (ОД и МКСЗ) при переходе от слабой к сильной связи. Некоторые имеющиеся работы [51, 73] лишь частично затрагивают эту проблему.

Данная задача рассматривалась автором диссертации. Представленные далее результаты являются оригинальными и опубликованы в [74]. Рассмотрим подход к решению данной задачи, а также полученные результаты.

Очевидно, что используемое в подавляющем большинстве работ двух-модовое приближение [46, 47] неприменимо для сильной связи. В этом случае, одним из возможных способов исследования КБЭ является использование более точной модели [73–75], основанной на численном решении нелинейного, трёхмерного, зависящего от времени УГП (1.14) для единого параметра порядка [9–11]. Именно такой подход был использован в рассматриваемой задаче.

В соответствии с экспериментом по наблюдению ОД и МКСЗ [43], запишем удерживающий потенциал $V(\mathbf{r})$ в виде суперпозиции анизотропного трёхмерного гармонического осциллятора и стоячей волны, обеспе-

чивающей потенциальный барьер в направлении оси X :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) + V_0 \cos^2(\pi x/q_0), \quad (2.13)$$

где V_0 и q_0 экспериментальные параметры, определяющие высоту и ширину барьера. Следуя эксперименту, предполагаем КБЭ из атомов ^{86}Rb с длиной рассеяния $a_s = 5.75 \text{ nm}$. Полное число атомов $N=1000$ постоянно. В расчётах используются следующие частоты удерживающего потенциала: $\omega_x = 2\pi \times 78 \text{ Hz}$, $\omega_y = 2\pi \times 66 \text{ Hz}$, $\omega_z = 2\pi \times 90 \text{ Hz}$ и параметры барьера: $V_0 = 420 \times h \text{ Hz}$ и $q_0 = 5.2 \mu\text{m}$. Такой выбор параметров системы позволяет точно воспроизвести условия слабой связи в эксперименте [43]. Исследуемый режим сильной связи реализуется увеличением полного числа частиц N .

Алгоритм решения трёхмерного УГП (1.14) с удерживающим потенциалом (2.13) состоит из двух этапов. Первоначально вычисляется стационарное распределение атомов КБЭ в ДПЯ методом затухающего градиента [95], что задаёт начальные условия для временной эволюции. Затем моделируется временная динамика методом двуциклического временного расщепления [96]. Используемые численные методы универсальны и широко известны, поэтому не будем останавливаться на их описании.

Оба динамических режима, ОД и МКСЗ исследуются в терминах $z(t)$ и $\theta(t)$, определённых следующим образом:

$$z(t) = \frac{N_1(t) - N_2(t)}{N}, \quad \theta(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t), \quad (2.14)$$

где $N_{1,2}(t)$ — заселённости, $\phi_{1,2}$ — соответствующие фазы КБЭ в левой и правой потенциальной яме. Следуя эксперименту, моделирование динамики проводится во временном интервале, много меньшем, чем время жизни КБЭ. Таким образом, полное число частиц ($N_1(t) + N_2(t) = N$) с хорошей точностью можно принять постоянным, что достигается введением отражающих граничных условий. Заселённости компонент КБЭ определены следующим образом:

$$N_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dr^3 |\Psi_j(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (2.15)$$

где $j = 1, 2$ и $\Psi_1(\mathbf{r}, t) = \Psi(x \leq 0, y, z, t)$, $\Psi_2(\mathbf{r}, t) = \Psi(x \geq 0, y, z, t)$. Фаза каждой компоненты может быть вычислена, используя метод приращения аргумента. Метод справедлив при малом временном шаге δt , когда приращение фазы можно представить в виде:

$$\phi_j(t + \delta t) \approx \phi_j(t) + \delta\phi_j(t), \quad (2.16)$$

где

$$\delta\phi_j(t) = \sqrt{\frac{[\delta\gamma_j(t)]^2 + [\delta\zeta_j(t)]^2}{\gamma_j^2(t + \delta t) + \zeta_j^2(t + \delta t)}}. \quad (2.17)$$

В формуле (2.17), величины определены следующим образом:

$$\delta\gamma_j(t) = \gamma_j(t + \delta t) - \gamma_j(t), \quad (2.18)$$

$$\delta\zeta_j(t) = \zeta_j(t + \delta t) - \zeta_j(t), \quad (2.19)$$

где

$$\gamma_j(t) = \frac{1}{N_j} \int_{-\infty}^{+\infty} dr^3 \text{Im}(\Psi_j(\mathbf{r}, t)) |\Psi_j(\mathbf{r}, t)|^2, \quad (2.20)$$

$$\zeta_j(t) = \frac{1}{N_j} \int_{-\infty}^{+\infty} dr^3 \text{Re}(\Psi_j(\mathbf{r}, t)) |\Psi_j(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (2.21)$$

Начальная фаза $\phi_j(0)$ определяется как:

$$\phi_j(0) = \arctan \frac{\gamma_j(0)}{\zeta_j(0)}. \quad (2.22)$$

Основной задачей данного исследования является изучение эволюции динамики КБЭ при переходе от слабой к сильной связи. Режим сильной связи проще всего реализовать увеличением полного числа атомов. Как известно, химический потенциал взаимодействующего КБЭ пропорционален полному числу частиц [36]: $\mu \sim N^{2/5}$, таким образом, увеличение числа атомов приводит к росту химического потенциала и, соответственно, коэффициента проницаемости K . В приведённом исследовании было использовано $N=1000, 3000, 5000$ и 10000 атомов. Аналогично эксперименту [43], для наблюдения ОД и МКСЗ динамика системы инициировалась с начальных значений $z(t=0) = 0.35$ и $z(t=0) = 0.6$ соответственно. Во всех случаях $\theta(t=0) = 0$.

Технические возможности расчётного алгоритма позволяют фиксировать любые начальные условия в удерживающем потенциале всевозможной конфигурации (неравновесное начальное состояние). Но наиболее предпочтительна техника формирования начальных условий, аналогичная использованной в эксперименте (равновесное начальное состояние). В начальный момент времени, ДПЯ асимметрична за счёт сдвига барьера вправо, стационарное распределение атомов соответствует необходимым начальным условиям. Затем барьер быстро сдвигается влево для придания ловушке симметричной формы, стимулируя туннельную динамику КБЭ. Время движения барьера τ (показано на рисунках 2.4

и 2.5 вертикальной чертой) много меньше, чем период осцилляций конденсата и зависит от числа частиц [74]. В представленной диссертации были использованы обе методики (создание равновесного и неравновесного начальных состояний), сходство полученных результатов продемонстрировано на рисунках 2.4 и 2.5. Рассмотрим основные результаты, полученные в ходе исследования.

2.3.2 Эффект межатомного взаимодействия

Отталкивающее межатомное взаимодействие в КБЭ приводит к увеличению энергии взаимодействия, вследствие чего происходит возрастание химического потенциала. Эффект взаимодействия продемонстрирован на рис. 2.3, где показаны взаимное расположение удерживающего потенциала $V(x)$, плотности атомов $\rho(x)$, компонент химического потенциала для идеального μ_{x0} и взаимодействующего μ_x конденсата. Данные представлены для различных величин полного числа частиц. Плотность $\rho(x)$ задаётся соотношением:

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dydz |\Psi(x, y, z)|^2, \quad (2.23)$$

где параметр порядка $\Psi(x, y, z)$ определяется из решения УГП (1.14).

Из рисунка видно, что увеличение числа частиц приводит к росту подбарьерного перекрытия плотностей левой и правой компонент КБЭ. Для того, чтобы определить вид связи между компонентами КБЭ (слабая или сильная) необходимо сравнить величину химического потенциала с высотой барьера, а также подбарьерное перекрытие плотностей с максимальными значениями плотности в ямах. Поскольку барьер накладывается только в направлении оси X (см. (2.13)), то сравнение соответствующей части химического потенциала μ_{x0} или μ_x с высотой барьера V_0 наиболее информативно. В линейном случае:

$$\mu_0 = \mu_{x0} + \mu_{y0} + \mu_{z0}, \quad (2.24)$$

следовательно:

$$\mu_{x0} = \mu_0 - \frac{\hbar}{2}(\omega_y + \omega_z) = \mu_0 - \hbar\omega_x = \alpha\mu_0. \quad (2.25)$$

При выводе соотношения (2.25) учитывалось, что $\omega_y + \omega_z = 2\omega_x$. Очевидно, что

$$\alpha = \mu_{x0}/\mu_0 = 3/4. \quad (2.26)$$

Для нелинейного случая, оценка части химического потенциала μ_x намного сложнее. Но при этом должна наблюдаться корреляция между

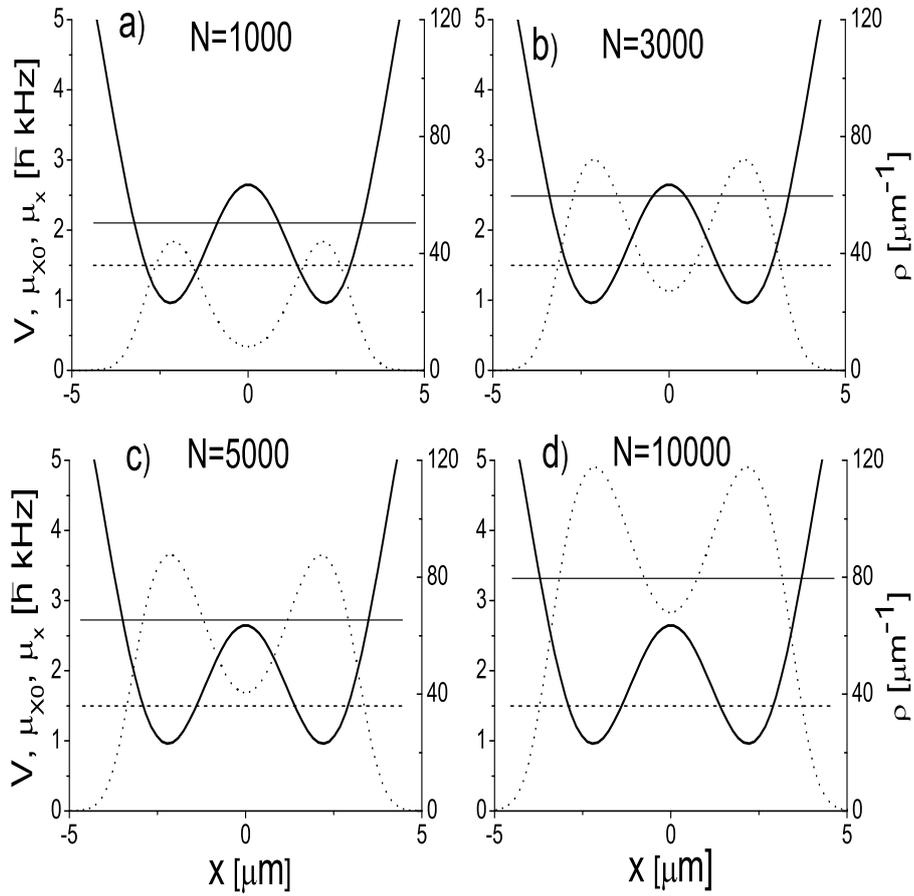


Рис. 2.3: Двойная потенциальная яма $V(x)$ (сплошная линия), химические потенциалы μ_x (сплошная тонкая линия) и μ_{x0} (прерывистая черта), распределение плотности $\rho(x)$ (пунктирная линия) в стационарном состоянии с $N_1 = N_2 = N/2$. Расчёты выполнены для различного числа частиц $N=1000$ (a), 3000 (b), 5000 (c), 10000 (d).

линейным и нелинейным случаем. Таким образом, можно использовать аналогичную оценку для грубого сравнения высоты потенциального барьера V_0 и соответствующей части химического потенциала:

$$\mu_x = \alpha\mu, \quad (2.27)$$

где μ — полный химический потенциал, получаемый из решения УГП.

Из рис. 2.3 видно, что в случае $N=1000$ наблюдается режим слабой связи для которого характерно незначительное подбарьерное перекрытие плотности и малость μ_x по сравнению с V_0 . Такой режим был экспериментально реализован и исследован в эксперименте [43]. Стоит отметить, что в этом случае КБЭ успешно исследуется в рамках двух-модового приближения (2.10). Для $N=3000$ очевидно, что система переходит в режим сильной связи (сильное подбарьерное перекрытие плотностей при $\mu_x < V_0$). Режимы с $N=5000$ и 10000 соответствуют надбарьерной динамике конденсата ($\mu_x > V_0$).

2.3.3 Эволюция осцилляций Джозефсона и макроскопического квантового самозахвата

Эволюция ОД и МКСЗ при переходе от слабой к сильной связи показана на рисунках 2.4 и 2.5. Прежде всего отметим, что для $N=1000$ частиц, расчёты полностью воспроизводят экспериментальные данные по наблюдению ОД и МКСЗ [43]. Из рис. 2.4 (а, е) видно, что характерная частота осцилляций разности заселённостей z и фаз θ ОД составляет $\omega = 2\pi \times 23$ Hz, что близко к экспериментальному значению $\omega = 2\pi \times 25$ Hz. Аналогично для МКСЗ (рис. 2.5, а), где осцилляции заселённости происходят около среднего значения $\langle z \rangle = 0.6$ с характерной частотой $\omega = 2\pi \times 72$ Hz, близкой к экспериментально наблюдаемой $\omega = 2\pi \times 78$ Hz. Небольшое расхождение с экспериментом, вероятнее всего, связано с экспериментальной неопределённостью полного числа частиц $N \approx 1150 \pm 150$, что несколько отличается от $N=1000$, используемого в расчётах. Также, рис. 2.5 (е) демонстрирует рост разности фаз со скоростью $\dot{\theta} = 2\pi \times 75$ Hz, близкой к экспериментальной величине $2\pi \times 78$ Hz. Полученное качественное и количественное согласие с экспериментом подтверждает высокую точность и надёжность используемого метода, который в дальнейшем будет использован для моделирования более сложной динамики КБЭ в ДПЯ.

Эволюция ОД с ростом числа частиц показана на рис. 2.4. Видно, что, несмотря на значительное изменение свойств системы (от режима слабой связи к надбарьерному прохождению), ОД сохраняют характерные черты туннелирования: осцилляции z и θ происходят около средних

значений $\langle z \rangle = 0$, $\langle \theta \rangle = 0$ с частотой ω , зависящей от числа частиц N . При этом, увеличение N не приводит к изменению амплитуды осцилляций. Как видно из рис. 2.4, эффект сильной связи для ОД сводится к увеличению частоты осцилляций, что имеет очень простое объяснение. Увеличение числа частиц приводит к возрастанию энергии взаимодействия, поскольку $E \sim UN$, и соответственно химического потенциала μ . Рост μ приводит к увеличению проницаемости барьера K и, следовательно к увеличению частоты, поскольку $\omega \sim K$.

Эволюция МКСЗ представлена на рис. 2.5. В случае слабой связи наблюдается режим МКСЗ, полученный экспериментально [43]. Выход за пределы режима слабой связи характеризуется переходом МКСЗ в новый режим осцилляций. Для $N=3000 - 5000$ отчётливо виден переход от осцилляций около среднего значения $\langle z \rangle = 0.6$ к значению $\langle z \rangle = 0$. В режиме $N=10000$ (надбарьерное прохождение) наблюдается трансформация МКСЗ к высокочастотным ОД. Также происходит эволюция динамики фазы: от неограниченного линейного роста к осцилляциям около среднего значения $\langle \theta \rangle = 2\pi$.

Наблюдаемый эффект трансформации МКСЗ в ОД в случае сильной связи, был наблюдаем ранее [97], но для одномерного КБЭ. В работе [97] было показано, что для достаточно большого межатомного взаимодействия амплитуда осцилляций z увеличивается с возрастанием члена NU_{1D} , что приводит к возобновлению простого атомного туннелирования КБЭ между двумя ямами. Авторы объясняли эффект в терминах много-модового приближения, посредством наличия связи между второй и третьей модой. Используемая в расчётах модель математически схожа с методом Хартри-Фока для системы бозонов [87], следовательно рассматривает вклад в динамику КБЭ не только от основного, но и от более высоколежащих состояний. Таким образом, данная модель должна воспроизводить эффект, описанный в [97], но для трёхмерного КБЭ. Фактически, в представленных модельных расчётах переход МКСЗ \rightarrow ОД является проявлением того-же эффекта: возрастание амплитуды туннелирования z в итоге приводит к возобновлению простого туннельного эффекта, схожего с ОД.

Отметим, что несмотря на сильное перекрытие левой и правой компонент КБЭ в режиме сильной связи, фракции конденсата сохраняют физическую индивидуальность. Эта особенность позволяет наблюдать динамику, аналогичную туннельному подбарьерному прохождению даже при больших величинах проницаемости барьера (режим сильной связи) или надбарьерном прохождении. При этом, применение канонически сопряжённых переменных z и θ остаётся справедливым и имеет физический смысл.

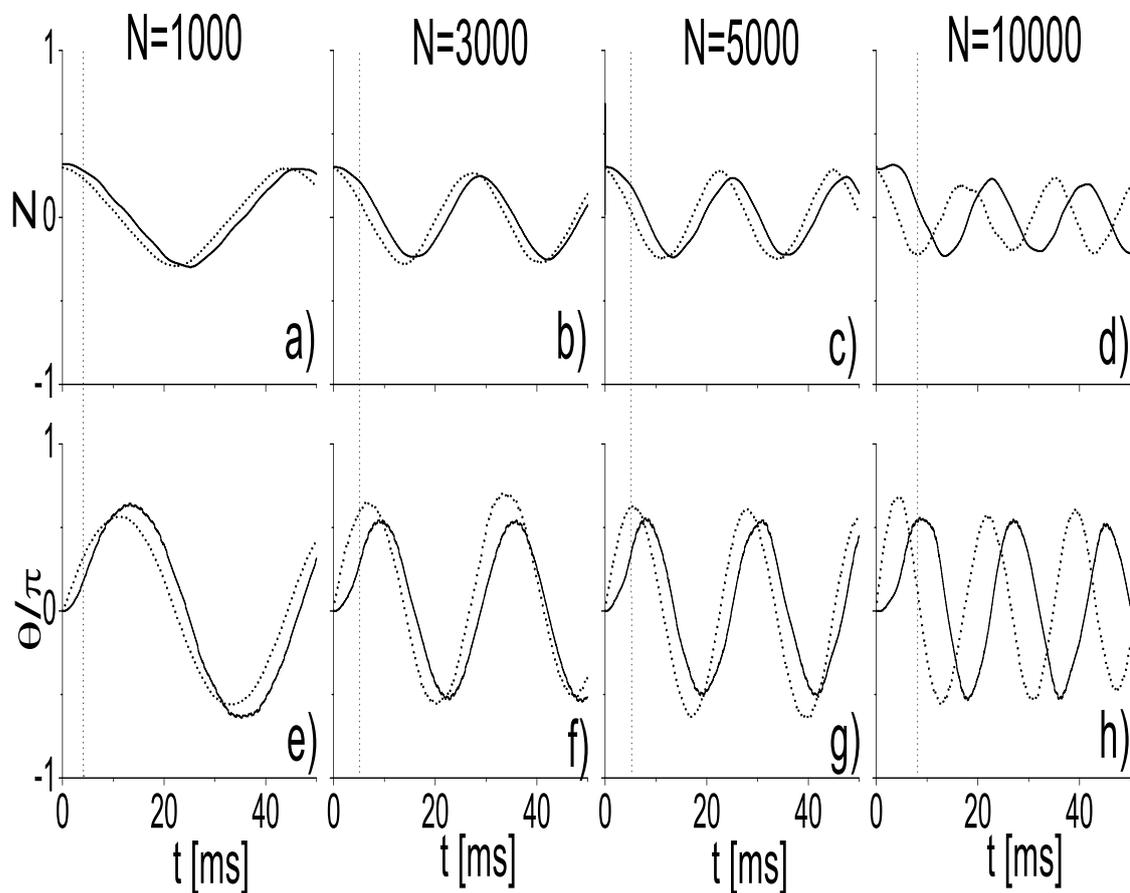


Рис. 2.4: Эволюция ОД: разность заселённости z (верхний ряд) и соответствующая разность фаз θ (нижний ряд) для $N=1000, 3000, 5000, 10000$. Для формирования начальных условий использована методика сдвига барьера (сплошная линия, время движения τ показано вертикальной прерывистой чертой) и создание неравновесного состояния (пунктирная линия).

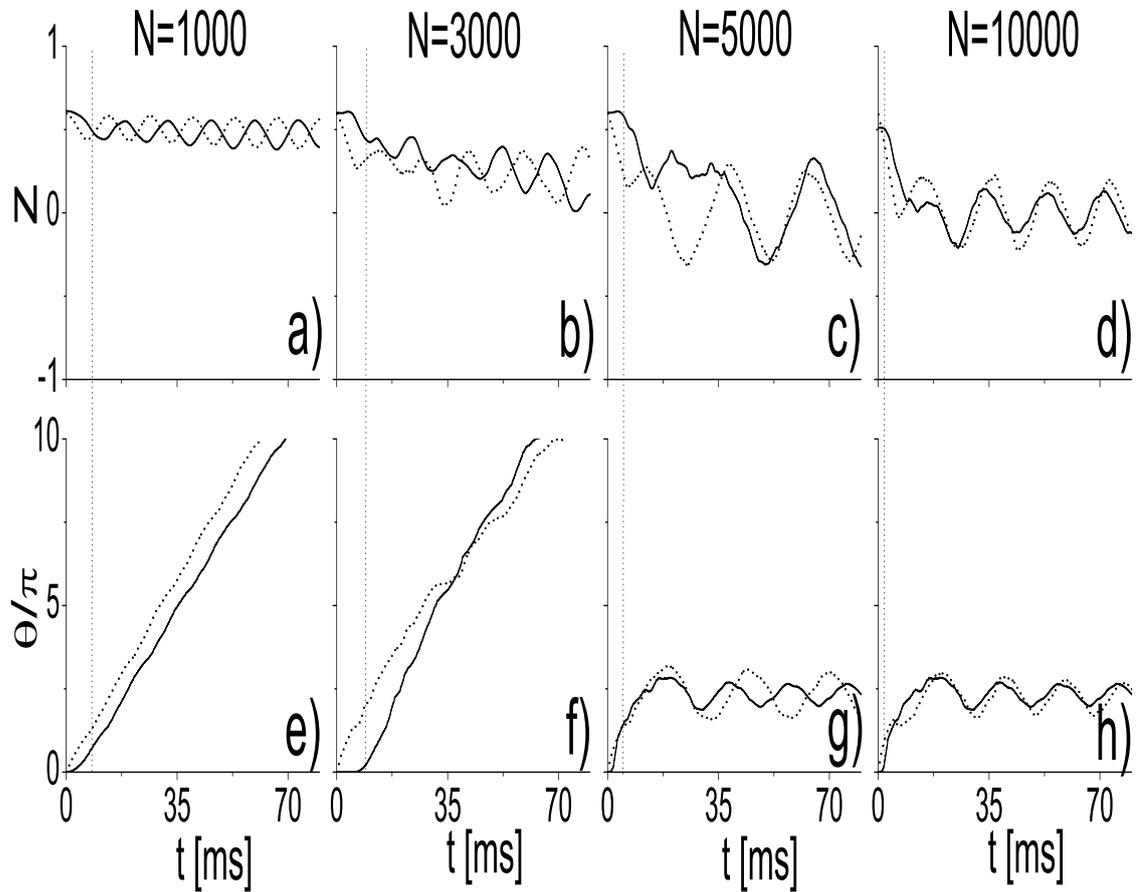


Рис. 2.5: Эволюция МКСЗ: разность заселённости z (верхний ряд) и соответствующая разность фаз θ (нижний ряд) для $N=1000, 3000, 5000, 10000$. Для формирования начальных условий использована методика сдвига барьера (сплошная линия, время движения τ показано вертикальной прерывистой чертой) и создание неравновесного состояния (пунктирная линия).

Глава 3

Нелинейный транспорт конденсата Бозе-Эйнштейна в двойной потенциальной яме

В данной главе будет рассмотрен принципиально другой динамический режим КБЭ в ДПЯ — контролируемый транспорт атомов между потенциальными ямами. В первом параграфе дано общее описание транспорта в квантовых системах. Затем представлены переходы Ландау-Зинера и Розена-Зинера, реализуемые в двухуровневых квантовых системах, рассматривается аналогия между системой двух уровней и конденсатом в ДПЯ. В третьем параграфе обсуждаются обобщение перехода Ландау-Зинера и возможности применения оригинальной и обобщённой схем для транспорта КБЭ в ДПЯ. Оригинальные результаты численного моделирования транспорта представлены в четвёртом параграфе главы. Далее, инверсный перенос заселённости, реализуемый в КБЭ сравнивается с эффектом Джозефсона.

3.1 Транспорт конденсата: основные идеи

Как было показано в предыдущей главе, туннелирование КБЭ в ДПЯ приводит к осцилляциям разностей заселённостей и фаз компонент, при этом режим осцилляций может быть разным (ОД или МКСЗ). Кроме рассмотренных динамических режимов, в МКБЭ также возможно созда-

ние другой динамики — контролируемого квантового транспорта. Транспорт является одним из режимов туннелирования, но в отличие от осцилляторной динамики (ОД и МКСЗ) позволяет получать состояния с фиксированной конечной заселённостью.

В случае МКБЭ под транспортом понимается процесс контролируемого переноса конденсата между потенциальными ямами ловушки. В начальный момент времени имеется стационарное состояние КБЭ с определённой заселённостью потенциальных ям (начальное состояние), затем в течении времени T осуществляется перенос КБЭ из одной потенциальной ямы в другую посредством удобного метода переноса заселённости. Результатом транспортного процесса является получение нового стационарного состояния с заданной заселённостью (конечное состояние). В идеале транспорт должен быть необратимым, т.е. время жизни конечного состояния с фиксированной заселённостью должно быть сравнимо со временем существования всей квантовой системы.

Очевидно, что транспорт должен удовлетворять определённым критериям, таким как возможность экспериментальной реализации, быстрота и качество перехода и т.д. Для ряда задач крайне желательно, чтобы транспорт был обратным, т.е. имел место обратный переход (конечное состояние \rightarrow начальное), а также устойчивым относительно различных факторов (нелинейность системы, нежелательные возмущения и др.).

Для реализации транспорта были разработаны и успешно применены многочисленные методы переноса заселённости. Большинство методов достаточно универсальны и могут быть использованы в различных квантовых системах. Системы могут различаться как по физическому происхождению (МКБЭ, квантовые точки, электронные газы), так и по структуре (несколько уровней, несколько потенциальных ям). Первоначально, активно разрабатывались адиабатические методы [52, 53]. Здесь можно указать такие транспортные протоколы как нелинейные переходы Ландау-Зинера [55–57] и Розена-Зинера [59], стимулированный Рамановский адиабатический переход (СТИРАП) [54]. При этом адиабатические методы обеспечивают качественный, но медленный переход. Быстрый переход приводит к появлению нежелательных возмущений. Данная проблема была частично решена применением подходов "быстрой адиабатики" [66], включающей в себя несколько различных методик: методы оптимального контроля [68, 69], transitionless quantum driving [70] и метод инвариантов [71, 72].

Отметим важность нелинейности в транспортных процессах. В ряде случаев, межатомное взаимодействие является благоприятным фактором, делая транспорт более устойчивым относительно посторонних воз-

буждений [81] и/или позволяет реализовать транспорт в более широком диапазоне параметров процесса [57, 61]. В то же время, некоторые транспортные методики [54] чувствительны к нелинейности, так что незначительное взаимодействие приводит к разрушению переноса.

Далее будут представлены оригинальные результаты по построению универсальной транспортной схемы для КБЭ в ДПЯ, являющейся обобщением переходов Ландау-Зинера и Розена-Зинера. Транспорт в рамках предложенного обобщённого перехода исследуется как в двух-модовом приближении [57], так и на основе решения нелинейного УГП для единого параметра порядка [81].

3.2 Переходы Ландау-Зинера и Розена-Зинера в двухуровневой системе

Переходы Ландау-Зинера и Розена-Зинера — хорошо известные процессы квантовой механики, реализуемые в двухуровневой системе, т.е. квантовомеханической системе, имеющей два возможных состояния: $|1\rangle$ и $|2\rangle$. Рассмотрим более подробно структуру и возможную динамику такой системы.

Характерный гамильтониан двухуровневой системы содержит параметры γ и Ω , определяющие энергию адиабатических состояний $|1\rangle$ и $|2\rangle$ и связь между ними. В матричной форме гамильтониан имеет вид:

$$H = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \gamma & \Omega \\ \Omega & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Собственные значения гамильтониана определяются соотношением:

$$E_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Omega^2 + \gamma^2}. \quad (3.2)$$

Энергетическая схема двухуровневой системы показана на рис. 3.1. Видно, что состояния $E_{1,2}$ отделены друг от друга энергетической щелью, величина которой определяется значениями γ и Ω . Наибольший интерес представляет временная динамика двухуровневой системы с зависящими от времени γ и/или Ω . Рассмотрим этот вопрос более подробно.

В простейшем случае можно предположить, что энергии адиабатических состояний линейно зависят от времени:

$$\gamma = \frac{1}{2} at, \quad (3.3)$$

следовательно энергетическое расстояние между уровнями:

$$\Delta(t) = at, \quad (3.4)$$

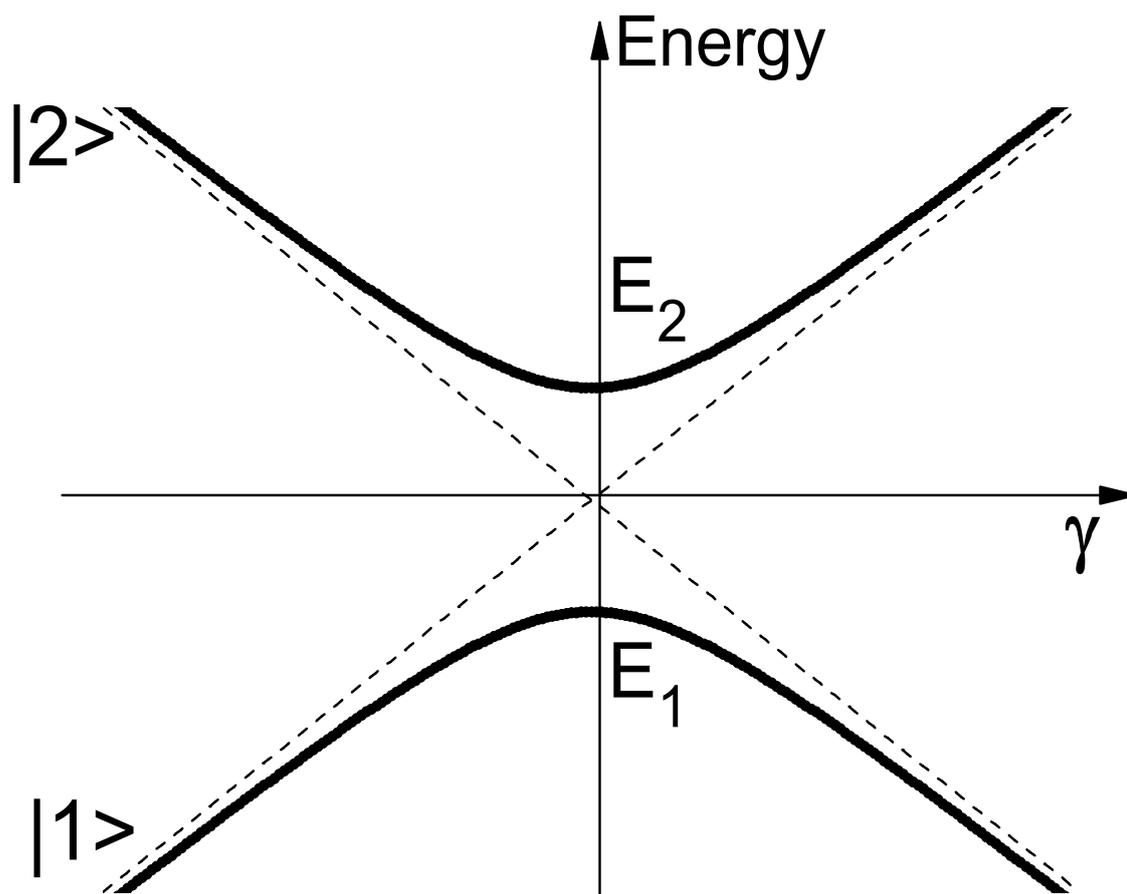


Рис. 3.1: Энергетическая схема двухуровневой системы: диабатические состояния $|1\rangle$ и $|2\rangle$ (пунктирная линия), собственные значения гамильтониана (3.1) E_1 и E_2 (сплошная линия).

где α имеет физический смысл скорости изменения гамильтониана (3.1). Динамика двухуровневой системы с зависящим от времени параметром Δ рассматривалась в работах Л.Д. Ландау [98] и К. Зинера [99]. Авторами было показано, что влияние параметра α особенно значительно в области максимального сближения состояний $E_{1,2}$ и при определённых условиях возможен квантовый переход между состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$.

Эволюция двухуровневой системы сильно зависит от скорости α . Если изначально система находилась в состоянии $|1\rangle$, то после адиабатической эволюции ($\alpha \rightarrow 0$) система остаётся в том же начальном состоянии $|1\rangle$, но приобретает фазовый множитель $e^{i\phi(t)}$ [101]. Данный тип эволюции был назван режимом адиабатического перехода. При этом, динамика принципиально меняется с увеличением скорости α . Система, находясь изначально в состоянии $|1\rangle$, фактически переходит в состояние E_1 . Таким образом, наблюдается непрерывная трансформация системы из состояния $|1\rangle$ в состояние $|2\rangle$, называемая диабатическим переходом.

В общем случае, находясь изначально в состоянии $|1\rangle$, система с вероятностью P может перейти в состояние $|2\rangle$ (диабатический переход) или остаться в начальном состоянии (адиабатический переход) с соответствующей вероятностью $1-P$. Математически, задача о нахождении вероятности перехода сводится к решению уравнения Шрёдингера с гамильтонианом (3.1) и дальнейшему нахождению матричных элементов перехода оператора эволюции. Для линейного случая, задача о нахождении вероятности P была решена аналитически в работе [99]. Было получено, что:

$$P = \exp\left(-\frac{\pi\Omega^2}{2\alpha}\right). \quad (3.5)$$

Выражение (3.5) определяет вероятность диабатического перехода Ландау-Зинера (ПЛЗ).

Представленный выше ПЛЗ — не единственно возможный переход в двухуровневой системе. Рассмотрим гамильтониан (3.1) с зависящей от времени величиной связи:

$$\Omega \equiv f(t). \quad (3.6)$$

Такая ситуация имеет место при наложении внешнего поля (лазерных импульсов), связывающего состояния $|1\rangle$ и $|2\rangle$. При этом, вид функции $f(t)$ зависит от ряда факторов, таких как: длительность и форма импульса, амплитуда и частота излучения и многие другие. Очевидно, что в этом случае вероятность перехода P не может быть найдена в общем виде, подобно ПЛЗ.

Впервые задача о переходе в двухуровневой системе под действием зависящей от времени связи была рассмотрена Н. Розеном и К. Зинером

для объяснения эксперимента Штерна и Герлаха [100]. Подобный переход был назван переходом Розена-Зинера (ПРЗ).

Описанные выше переходы в двухуровневой системе являются весьма общими и могут быть реализованы во многих квантовых системах, имеющих два возможных состояния. Далее будет рассмотрена возможность реализации ПЛЗ и ПРЗ для КБЭ в ДПЯ. Также, будет предложен новый режим, являющийся обобщением обоих методов.

3.3 Применение переходов Ландау-Зинера и Розена-Зинера для транспорта конденсата, построение обобщённой схемы

Рассмотрим схему КБЭ в ДПЯ, представленную на рисунке 2.1. Как видно, данная квантовая система имеет много физических аналогий с рассмотренной в параграфе 3.2 двухуровневой системой. Прежде всего, возможным состояниям $|1\rangle$ и $|2\rangle$ соответствуют левая и правая потенциальные ямы с определённым числом атомов КБЭ, определяющим заселённость состояния. Потенциальные ямы разделены барьером с проницаемостью K , что эквивалентно параметру связи Ω . Атомы КБЭ расположены на основных состояниях каждой потенциальной ямы с энергиями E_1 и E_2 . Согласно (1.25), энергии E_1 и E_2 связаны с формой удерживающего потенциала V_{ext} , вследствие чего могут меняться в зависимости от асимметрии ловушки.

Логично предположить, что незначительное, по сравнению с линейными размерами ловушки, изменение разности глубин потенциальных ям приводит к линейной зависимости энергий E_1 и E_2 от времени. При этом, для симметричной ямы: $E_1 = E_2$. Таким образом, справедливы соотношения:

$$E_1 = \frac{1}{2}\alpha t, E_2 = -\frac{1}{2}\alpha t. \quad (3.7)$$

Соответственно, разность энергий определяется как:

$$\Delta(t) = E_1 - E_2 = \alpha t. \quad (3.8)$$

Изменение энергий E_1 и E_2 согласно (3.7) при постоянной проницаемости барьера K эквивалентно переходу (3.4) в двухуровневой системе. Таким образом, имеется принципиальная возможность реализовать ПЛЗ или адиабатический переход ($\alpha \rightarrow 0$) в ДПЯ. Аналогично, введение зависящей от времени проницаемости барьера $K \equiv \Omega(t)$ при фиксированных энергиях E_1 и E_2 позволяет осуществить ПРЗ.

Реализация переходов Ландау - Зинера и Розена - Зинера в ДПЯ даёт возможность контролируемого переноса атомов КБЭ между потенциальными ямами. Перенос заселённости может регулироваться параметрами процесса: величиной α и/или зависимостью $\Omega(t)$. Таким образом, возможно создание в МКБЭ новой динамики — *контролируемого транспорта*.

Задачи о ПЛЗ и ПРЗ в МКБЭ рассматривались многими авторами. Б. Ву и К. Нью исследовали [60] вероятность ПЛЗ в двухуровневой системе при наличии нелинейности. Авторы одними из первых обратили внимание на возможность реализации ПЛЗ для КБЭ в оптической решётке и зависимость транспорта от параметра скорости α . Несколько позже, была опубликована работа О. Зобая и Б. М. Гаравея [61] напрямую посвящённая исследованию ПЛЗ во взаимодействующем КБЭ. Авторами был получен интересный результат о успешном применении ПЛЗ для транспорта идеального КБЭ в адиабатическом режиме. В отличие от большинства методов переноса заселённости, межатомное взаимодействие улучшало транспорт, поскольку увеличение нелинейности Λ способствовало полному переносу заселённости в большем диапазоне скоростей α . Также, была получена приближительная формула, описывающая вероятность перехода во взаимодействующем конденсате. ПРЗ в КБЭ был рассмотрен в работе Йе, Фу и Лью [59]. Авторы исследовали ПРЗ в двухуровневой системе при наличии нелинейности и продемонстрировали возможность реализации данного перехода для идеального и взаимодействующего КБЭ в ДПЯ введением зависящей от времени проницаемости потенциального барьера.

Большинство работ, посвящённых переносу заселённости в ДПЯ рассматривают переход, стимулированный изменением одного из параметров: проницаемость барьера $\Omega(t)$ или разность энергий $\Delta(t)$. При этом экспериментальная реализация транспорта приводит к одновременному изменению обоих параметров. В итоге, фиксирование одного из них является искусственным фактором. Кроме того, оригинальный ПЛЗ обладает другим недостатком: бесконечность адиабатических энергий при $t \rightarrow \infty$. Данные проблемы исследовались автором диссертации [57]. В оригинальной работе [57] было предложено обобщение ПЛЗ введением дополнительной зависящей от времени связи между состояниями. Фактически предложенный метод (ОПЛЗ) является обобщением переходов Ландау - Зинера и Розена - Зинера. В основе ОПЛЗ лежит изменение разности энергий $\Delta(t)$, согласно (3.8) и зависящая от времени проницаемость барьера:

$$\Omega(t) = K\bar{\Omega}(t), \quad \bar{\Omega}(t) = \exp\left\{-\frac{(\bar{t} - t)^2}{2\Gamma^2}\right\}, \quad (3.9)$$

где K — амплитуда, \bar{t} и Γ — параметры центра и ширины Гауссиана. Ширина Γ позволяет контролировать качество перехода, в то время как оптимально подобранное значение \bar{t} позволяет получить максимальную проницаемость барьера для симметричной ямы. Рассмотрим оригинальные результаты по транспорту атомов КБЭ в ДПЯ в рамках ПЛЗ и ОПЛЗ. Моделирование транспорта выполнено как в рамках двухмодового приближения, так и на основе решения нелинейного УГП для единого параметра порядка.

3.4 Численное моделирование транспорта

3.4.1 В рамках двух-модовой модели

Методика моделирования

Математически, транспорт КБЭ описывается системой уравнений, аналогичной (2.4). В отличие от рассмотренной ранее туннельной динамики, для транспорта характерна временная зависимость разности энергий $\Delta(t)$ и проницаемости барьера $\bar{\Omega}(t)$. Применительно к транспортной динамике КБЭ система уравнений (2.4) примет вид [57]:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -\bar{\Omega}(t)\sqrt{1-z^2}\sin\theta, \\ \dot{\theta} &= \Lambda z + \bar{\Omega}(t)\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\cos\theta + \Delta(t), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где проницаемость барьера $\bar{\Omega}(t) = \text{const}$ для ПЛЗ или определяется соотношением (3.9) для ОПЛЗ. Параметр $\Delta(t)$ изменяется по закону (3.8) для обоих транспортных режимов.

Как отмечалось ранее, $z(t)$ и $\theta(t)$ являются канонически сопряжёнными переменными. В случае транспорта КБЭ, описываемого уравнением (3.10), классический гамильтониан [48, 49] имеет вид [57]:

$$H_{\text{cl}} = \frac{1}{2}[\Delta(t)z + \frac{\Lambda}{2}z^2 - \bar{\Omega}(t)\sqrt{1-z^2}\cos 2\theta], \quad (3.11)$$

что позволяет найти химический потенциал μ [87]:

$$\mu = H_{\text{cl}} + V_{\text{int}} = \frac{1}{2}[\Delta(t)z + \Lambda z^2 - \bar{\Omega}(t)\sqrt{1-z^2}\cos 2\theta], \quad (3.12)$$

где $V_{\text{int}} = \Lambda z^2/4$.

Легко показать, что уравнения (3.10) инвариантны относительно преобразований:

$$\Lambda \rightarrow -\Lambda, \quad \alpha \rightarrow -\alpha, \quad \theta \rightarrow -\theta + \frac{\pi}{2} \quad (3.13)$$

или

$$\alpha \rightarrow -\alpha, \quad z \rightarrow -z, \quad \theta \rightarrow -\theta. \quad (3.14)$$

Данное свойство говорит о возможности транспорта КБЭ с любым видом взаимодействия (притягивающее или отталкивающее) в любом направлении (слева направо или справа налево) при выборе соответствующей начальной асимметрии $\Delta(t=0)$ и разности фаз $\theta(t=0)$.

Стационарные состояния

Общее условие стационарности механической системы имеет вид:

$$\frac{\partial H_{cl}}{\partial t} = 0. \quad (3.15)$$

Ввиду канонической сопряжённости переменных z и θ , условие (3.15) можно переписать в виде:

$$\dot{z} = \dot{\theta} = 0. \quad (3.16)$$

Приняв во внимание (3.16), из системы уравнений (3.10) получаем:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{2}n, \\ \Delta(t) + z(\Lambda \pm \frac{\bar{\Omega}(t)}{\sqrt{1-z^2}}) &= 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где n -действительное целое число.

Уравнение (3.17) содержит "+" или "-" для чётного и нечётного n соответственно. В случае слабой нелинейности ($|\Lambda| < \bar{\Omega}$) решение уравнения (3.17) содержит два действительных корня, в случае сильной нелинейности ($|\Lambda| > \bar{\Omega}$) — четыре действительных корня. Подстановка решений системы (3.17) в выражение (3.12) позволяет найти химические потенциалы $\mu_-(t)$ и $\mu_+(t)$, являющиеся собственными значениями стационарных состояний. Величины $\mu_-(t)$ и $\mu_+(t)$ представлены на рисунках 3.2 (для линейного случая, $\Lambda = 0$) и 3.5, 3.6 (нелинейный случай).

Как видно из рисунков 3.5 и 3.6, стационарные состояния формируют петлю, ширина которой в режиме сильного взаимодействия $|\Lambda| > \bar{\Omega}$ определяется выражением [57, 60]:

$$t_c = \frac{(|\Lambda|^{2/3} - (\bar{\Omega}(t_c))^{2/3})^{3/2}}{\alpha}, \quad (3.18)$$

где $\bar{\Omega}(t_c) \rightarrow 1$ для постоянной связи. В оригинальной работе показано [80], что в случае слабой нелинейности $|\Lambda| < \bar{\Omega}$ так же возможно появление нелинейных структур в стационарном спектре, но в отличии

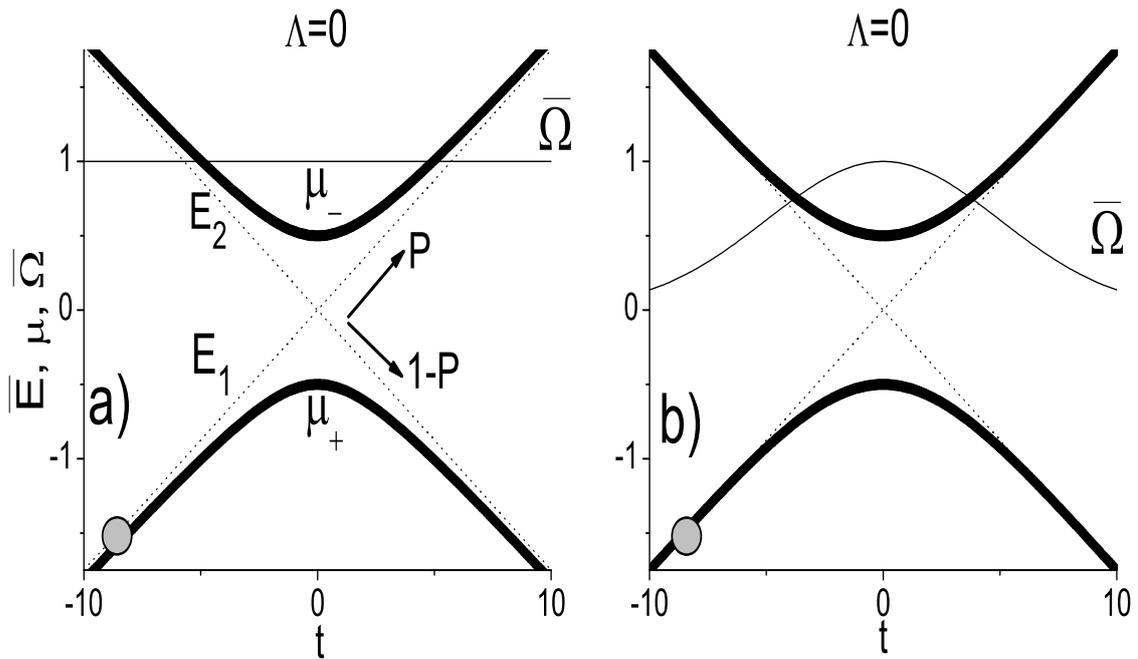


Рис. 3.2: а) Стационарные адиабатические уровни μ_{\pm} (толстая сплошная линия) в линейном случае для ПЛЗ. Проницаемость барьера $\bar{\Omega}$ изображена схематично тонкой сплошной линией. Расчёт выполнен для $\alpha = 0.35$. Диабатические энергетические уровни $E_{1,2}$ показаны пунктирной линией. КБЭ изначально находится на нижайшем уровне E_1 и обозначен точкой. Стрелки изображают вероятности диабатического перехода P , описываемого соотношением (3.5) и адиабатического перехода с вероятностью $1-P$. (б) Аналогично для ОПЛЗ.

от режима сильного взаимодействия, данные структуры не несут существенного физического смысла. В случае сильной нелинейности, на основе стационарных состояний возможно построить физическую интерпретацию транспорта, представленную далее. Схема стационарных и адиабатических состояний для ПЛЗ и ОПЛЗ представлена на рисунке 3.2.

Результаты

Результаты численного моделирования транспорта КБЭ продемонстрированы на рисунках 3.3 - 3.4. На рисунке 3.3 конечная заселённость второй потенциальной ямы $P = N_2(t = +\infty)$ представлена как функция от скорости α для различных значений нелинейности Λ . Во всех случаях, КБЭ изначально находится в первой потенциальной яме на уровне E_1 (показан на рисунке 3.2 (a,b)) т. е. $N_1(t = -\infty) = 1$, $N_2(t = -\infty) = 0$.

Видно, что в линейном случае ($\Lambda = 0$), перенос заселённости идентичен для ПЛЗ и ОПЛЗ. В случае отталкивающего взаимодействия $\Lambda = 4$ и $\Lambda = 20$, оба метода обеспечивают полный перенос заселённости в широком диапазоне скоростей α , формируя обширное α -плато. При очень больших скоростях α процесс становится слишком быстрым и не удовлетворяет условию адиабатичности [52]:

$$\frac{1}{2}|\Omega(t)\dot{\Delta}(t) - \dot{\Omega}(t)\Delta(t)| \ll |\Omega^2(t) + \Delta^2(t)|^{3/2}, \quad (3.19)$$

что приводит к неполному переносу заселённости. В случае отталкивающего КБЭ ($\Lambda = -2$ и $\Lambda = -4$), перенос заселённости неполный даже в адиабатическом режиме ($\alpha \rightarrow 0$).

Как видно из рис. 3.3, увеличение отталкивающего взаимодействия ($\Lambda > 0$) приводит к расширению α -плато, обеспечивая перенос заселённости в большем диапазоне скоростей. Таким образом, в отличие от других методов переноса заселённости, для ПЛЗ и ОПЛЗ нелинейность является благоприятным фактором, улучшающим транспорт. При этом, как следует из рис. 3.3, притягивающее взаимодействие ($\Lambda < 0$) ухудшает транспорт, т.к. увеличение нелинейности приводит к уменьшению конечной заселённости P . Наблюдаемый эффект асимметричного влияния нелинейности также подтверждается на рис. 3.4, демонстрирующим зависящую от времени заселённость потенциальных ям при различных значениях нелинейности. Отметим, что аналогичный эффект также наблюдался другими авторами [59, 61].

Данный эффект может интерпретироваться на основе анализа стационарных состояний для отталкивающего и притягивающего КБЭ. Схема собственных значений стационарных состояний μ_{\pm} для ОПЛЗ представлена на рисунке 3.5. Во всех случаях КБЭ изначально находится на

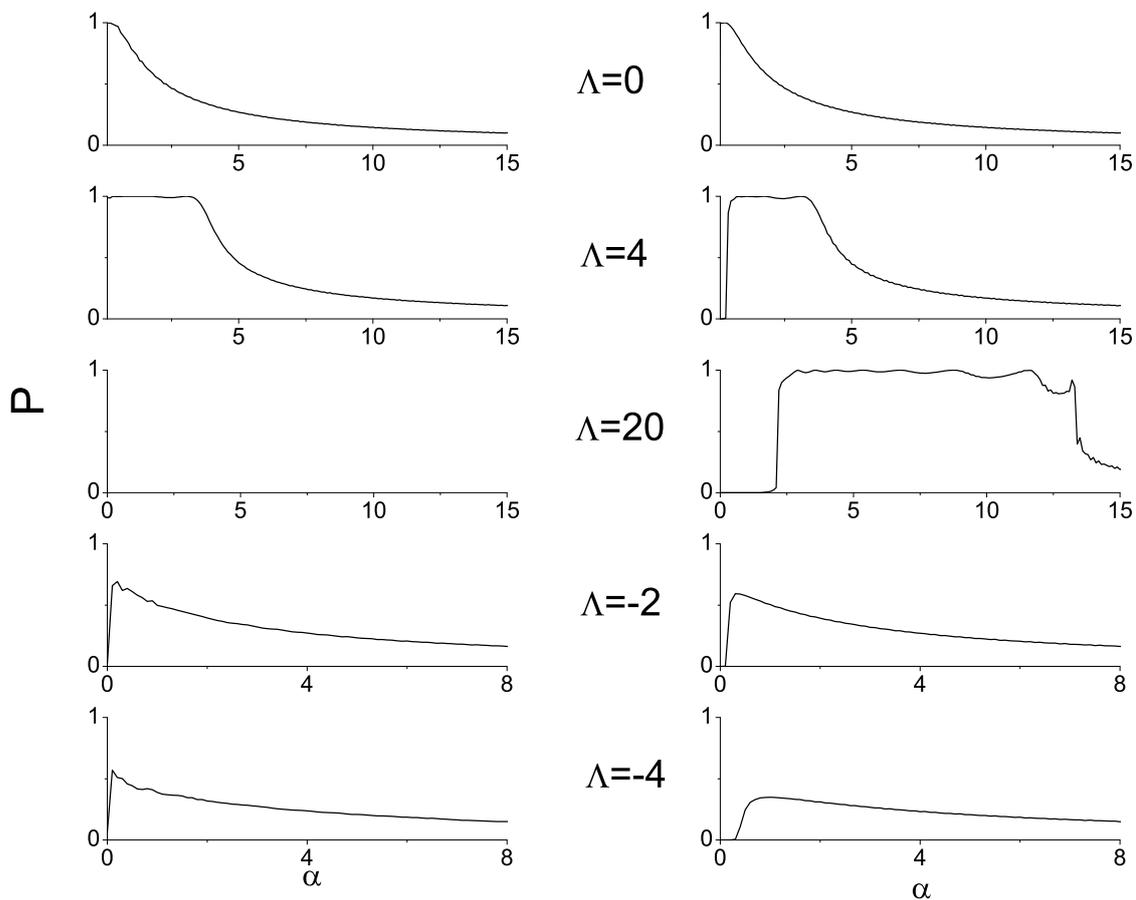


Рис. 3.3: Зависимость конечной заселённости P второй потенциальной ямы от скорости изменения разности глубин ям α для разных величин нелинейности Λ . Расчёты выполнены для ПЛЗ (левый столбец) и ОПЛЗ (правый столбец).

нижайшем уровне: $N_1(t = -\infty) = 1$ и $N_2(t = -\infty) = 0$. Сильная нелинейность $\Lambda > \bar{\Omega}$ формирует петлю в состоянии $\mu_+(\Lambda = -4)$ и $\mu_-(\Lambda = 4)$. Для притягивающего и отталкивающего КБЭ петля формирует возможный сценарий транспорта. В случае отталкивающего КБЭ (рис. 3.5, а), адиабатический переход из состояния E_1 в E_2 происходит по непрерывной кривой, вследствие чего перенос заселённости происходит с полной вероятностью ($P \rightarrow 1$). При этом ситуация кардинально меняется для притягивающего КБЭ (рис. 3.5, б), где переход между состояниями имеет критическую точку (показана на рисунке). При прохождении через данную критическую точку транспортный процесс имеет два возможных пути развития: часть атомов остаётся в начальном состоянии E_1 , в то время как оставшаяся часть переходит на уровень E_2 . Оба процесса почти равновероятны, вследствие чего полный перенос заселённости невозможен.

Как видно из рис. 3.3, ПЛЗ и ОПЛЗ демонстрируют весьма близкие результаты в широком диапазоне скоростей α . Характерные особенности каждого перехода проявляются только в адиабатическом режиме при малых скоростях α , при этом различие становится наиболее существенно с увеличением нелинейности Λ . Для обоих переходов влияние нелинейности проявляется в возникновении "окна" $0 \leq \alpha < \alpha_s$, где отсутствует перенос заселённости, т.е. $P = 0$. Отметим, что в случае ОПЛЗ соответствующее окно намного шире, чем для ПЛЗ. Данное различие можно трактовать на основе анализа стационарных состояний, представленных на рис. 3.6.

В случае слабой нелинейности $\Lambda < 1$ (рис.3.6 (а,б)) петли отсутствуют, стационарные спектры μ_{\pm} имеют одинаковую структуру для обоих переходов. В этом случае транспорт реализуется в очень узком диапазоне скоростей α . Режим большей нелинейности ($\Lambda > \bar{\Omega}$) (рис. 3.6 (с,д)) отличается наличием петель в стационарном спектре для ПЛЗ и ОПЛЗ. Ширина наблюдаемых петель $2t_C$ определяется соотношением (3.18). При $2t_C < \Gamma$ (рис.3.6 (е, ф)) спектры имеют схожую структуру, при этом наблюдается полный перенос заселённости ($P \approx 1$) для ПЛЗ и ОПЛЗ в близком диапазоне скоростей α , формирующих плато.

Отметим важный факт, что ширина петли $2t_C$ возрастает с увеличением нелинейности Λ или уменьшении скорости α . Это свойство имеет решающее значение для дальнейшего анализа. Рассмотрим случай малых скоростей α , связанный с появлением "окна" $P \approx 0$. Для стационарного спектра таких переходов (рис.3.6 (г, д)), выполняется условие $2t_C \geq \Gamma$. В этом случае границы Гауссиана $\bar{\Omega}(t)$, моделирующего проницаемость барьера несут решающую роль и формируют новый режим, имеющий место для ОПЛЗ и, соответственно, отсутствующий в слу-

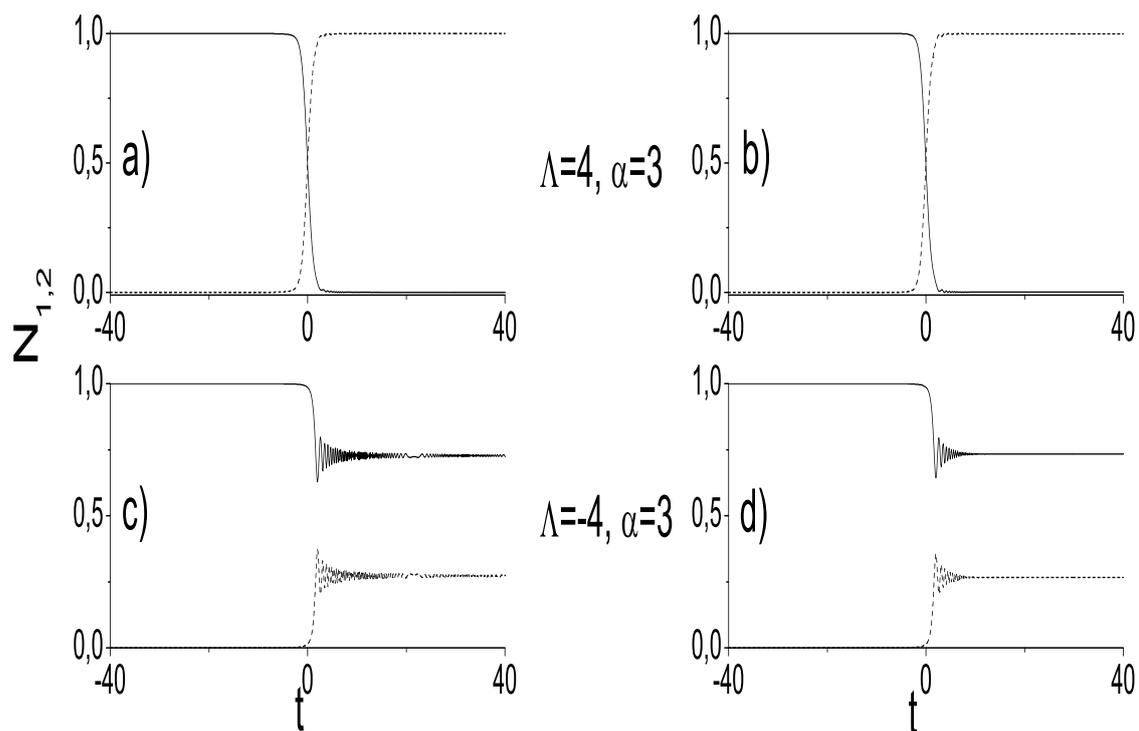


Рис. 3.4: ПЛЗ (левый столбец) и ОПЛЗ (правый столбец) КБЭ в ДПЯ. Зависящие от времени заселённости потенциальных ям N_1 (сплошная линия) и N_2 (пунктирная линия) рассчитаны для КБЭ с отталкивающим (a)-(b) и притягивающим (c)-(d) взаимодействием.

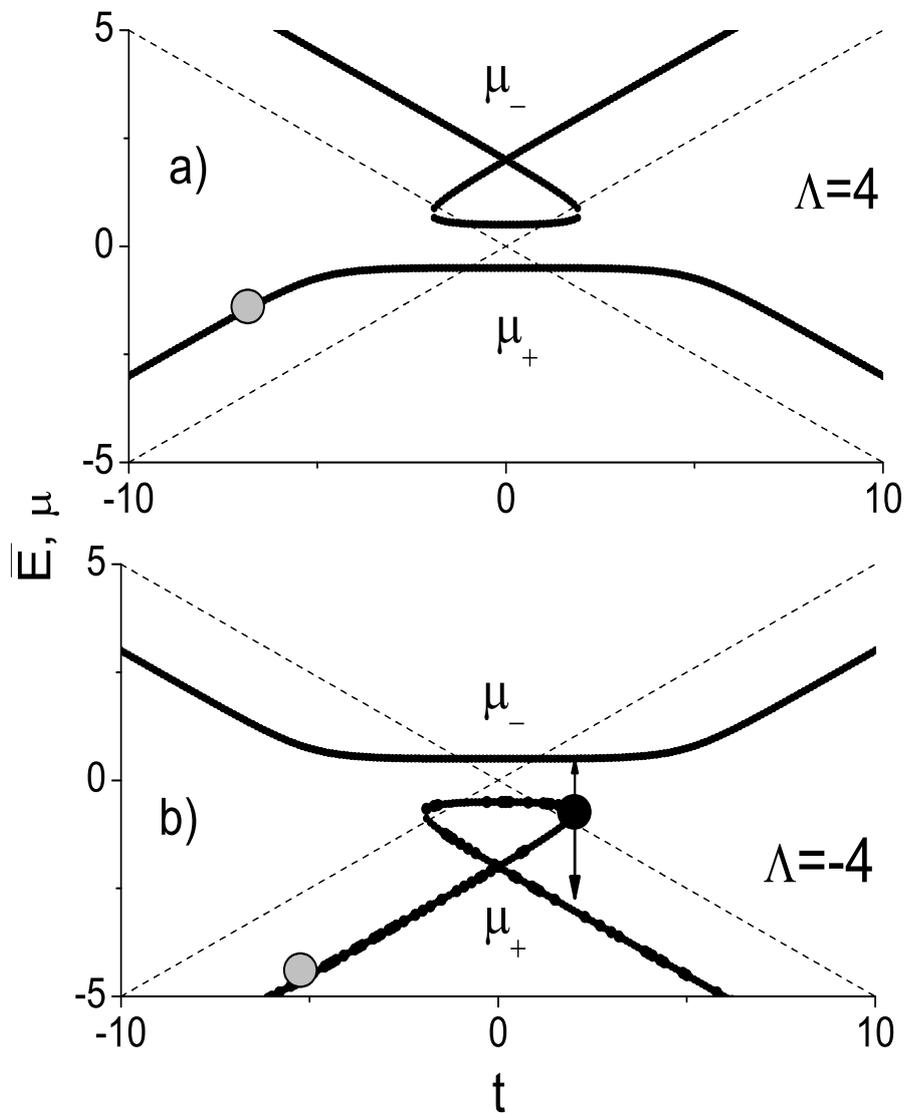


Рис. 3.5: Адиабатические состояния μ_{\pm} (сплошная линия) и диабатические энергии $E_{1,2}$ (пунктирная линия) для ОПЛЗ в отталкивающем (а) и притягивающем (б) КБЭ. Во всех случаях расчёт выполнен с $\alpha = 3$. Конденсат изначально находится в состоянии E_1 и обозначен серой точкой. На графике (б) показаны критическая точка и возможные направления перехода.

чае ПЛЗ. На границе Гауссиана выполняется условие $\bar{\Omega}(t) \ll 1$, поэтому в соответствии с (3.18) петля увеличивается и становится шире, чем для ПЛЗ. Это явно продемонстрировано на рис.3.6 (g, j). В этом случае энергетическая щель между μ_+ и μ_- сокращается на границах петли, увеличивая таким образом вероятность адиабатического переноса заселённости. В результате, в отличие от ПЛЗ основная динамика ОПЛЗ проявляется не в области максимального сближения стационарных состояний μ_{\pm} , а на их границах. В итоге, для более широких петель (рис. 3.6, j) ОПЛЗ приводит к слиянию состояний μ_+ и μ_- на границах петли и перекрывает перенос заселённости. В случае постоянной проницаемости, характерной для ПЛЗ, величина щели между μ_+ и μ_- практически не меняется, что обеспечивает перенос заселённости.

Эффект расстояния между μ_+ и μ_- для ОПЛЗ продемонстрирован на рис. 3.7. При малых α , изменение скорости процесса с $\alpha = 0.328$ до $\alpha = 0.348$ приводит к переносу заселённости с $N_2 \sim 0.02$ до $N_2 \sim 1$. Таким образом, транспорт методом ОПЛЗ позволяет регулировать перенос заселённости весьма незначительным изменением асимметрии ловушки.

Подводя итог, можно сказать, что автором диссертации был разработан крайне эффективный и простой метод переноса заселённости КБЭ в ДПЯ. Предложенный метод, являющийся обобщением транспортных схем Ландау - Зинера и Розена - Зинера позволяет реализовать перенос заселённости в отталкивающем и притягивающем КБЭ при любой нелинейности Λ в широком диапазоне скоростей α . Несмотря на сходство результатов, анализ стационарных состояний выявляет характерные особенности ОПЛЗ. Отметим, что представленные результаты не лишены недостатков. Весь численный анализ был выполнен в рамках двухмодового приближения. Таким образом, возможно некоторое искажение физических результатов, связанное с выходом за пределы применимости данного приближения при большой нелинейности. Также, транспортный процесс не связан с реальными параметрами удерживающего потенциала, следовательно представленные результаты имеют лишь качественное значение. Далее транспорт КБЭ в ДПЯ будет исследован на основе более точной модели с параметрами системы, соответствующими экспериментальным [43].

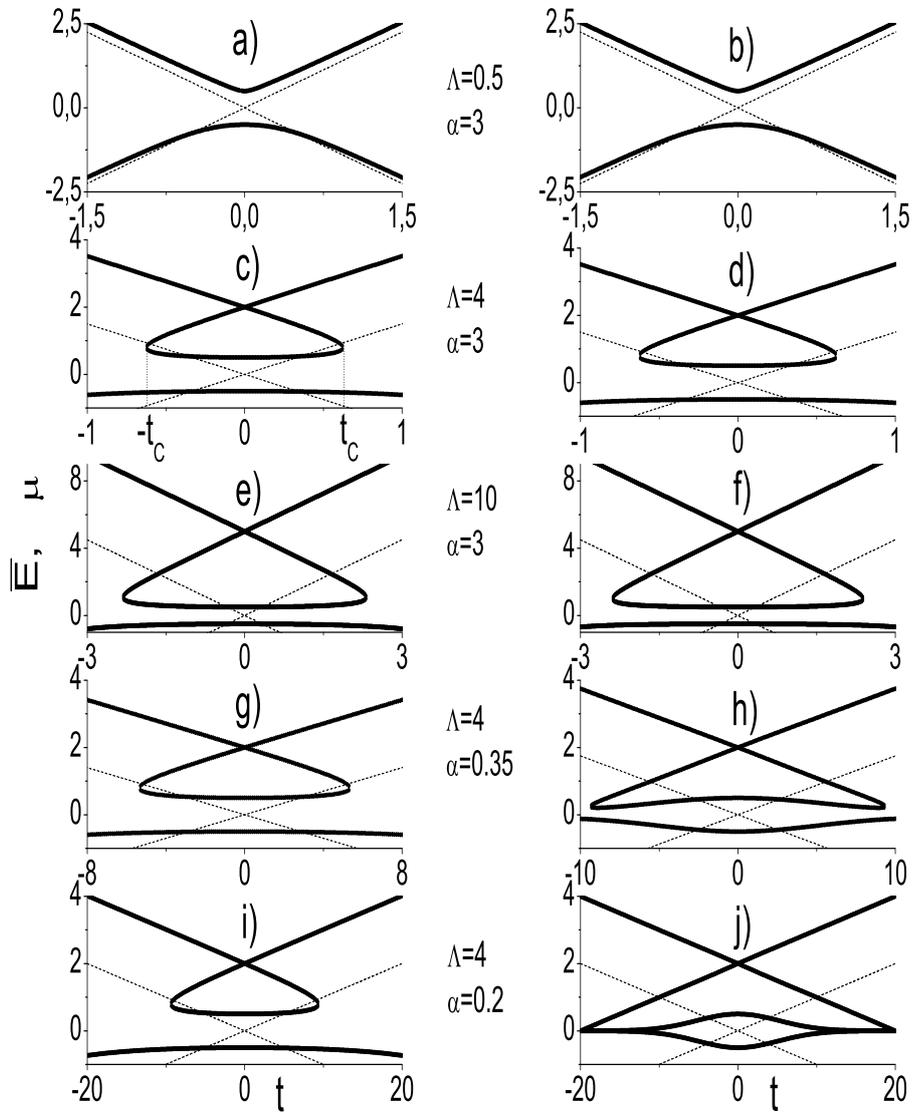


Рис. 3.6: Адиабатические состояния μ_{\pm} для ПЛЗ (левый столбец) и ОПЛЗ (правый столбец) при различных значениях скорости α и нелинейности Λ . Диабатические энергии показаны пунктиром. На графике (с) обозначена петля с границами $(-t_c; t_c)$.

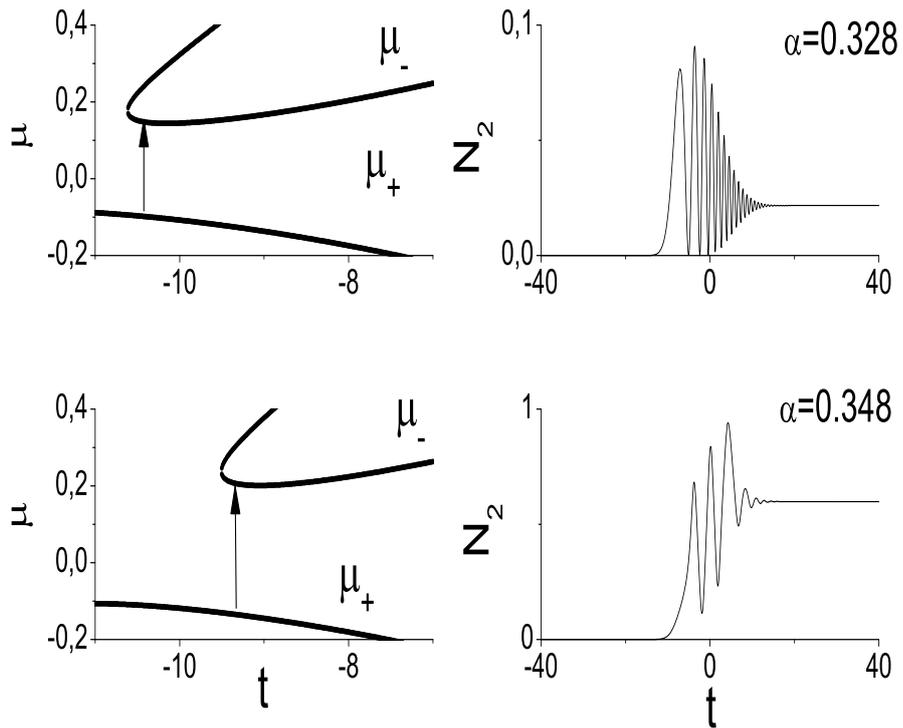


Рис. 3.7: Временная эволюция адиабатических состояний μ_{\pm} (левый столбец) и соответствующая заселённость второй потенциальной ямы N_2 (справа). Расчёты выполнены для скоростей $\alpha = 0.328$ (верхний ряд) и $\alpha = 0.348$ (нижний ряд) и нелинейности $\Lambda = 4$. Стрелками обозначено минимальное энергетическое расстояние между μ_+ и μ_- .

3.4.2 В рамках решения нелинейного уравнения Гросса—Питаевского для единого параметра порядка

Методика моделирования

В данном параграфе представлены результаты численного моделирования транспорта КБЭ в ДПЯ, основанные на решении нелинейного, зависящего от времени уравнения Гросса-Питаевского (УГП) для единого параметра порядка [9–11]. При рассмотрении транспорта использованы формализм исследования и параметры системы, аналогичные использованным ранее при изучении динамики сильно связанного КБЭ (см. параграф 2.3.1). Но в отличие от предыдущего исследования, транспорт будет рассмотрен только для $N = 1000$ при начальной разности заселённости $z(0) = 0.6$.

Под транспортом будем понимать процесс создания инверсии заселённости КБЭ в ДПЯ. Изначально ($t = 0$) ловушка асимметрична за счёт сдвига барьера вправо, $x(0) > 0$. При этом заселённости левой и правой потенциальных ям $N_1(0)$ и $N_2(0)$ соответствуют стационарному состоянию. Отметим, что $N_1(0) > N_2(0)$. Создание инверсии заселённости (транспорт) инициируется движением барьера влево для формирования формы ловушки, зеркально-симметричной по сравнению с начальным состоянием. Барьер движется со скоростью $v(t)$ в течении времени T , проходя расстояние $D = 2x(0)$. В результате такой динамики происходит инверсный перенос заселённости, т.е. в момент времени T , когда $x(T) = -x(0)$ заселённости потенциальных ям $N_1(T) = N_2(0)$ и $N_2(T) = N_1(0)$.

Для реализации транспорта возможно использование различных форм зависимости скорости от времени. В наиболее простом случае $v = const$ при $0 < t < T$ и $v = 0$, если $t \geq T$ [82]. Очевидно, что такая зависимость $v(t)$ является наиболее простой для реализации. Как было показано [81], движение барьера с постоянной скоростью возбуждает дипольные осцилляции КБЭ, что негативно сказывается на качестве транспорта. Поэтому наиболее предпочтительна более гладкая зависимость скорости от времени:

$$v(t) = \tilde{v}_0^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{T}\right), \quad (3.20)$$

где $v(0) = v(T) = 0$ и $v(\frac{T}{2}) = \tilde{v}_0^2$. Для дальнейшего анализа удобно ввести в рассмотрение среднюю скорость v_0 , совпадающую с постоянной скоростью: $v_0 = \tilde{v}/2 = v = const$.

При рассмотрении транспорта важное значение имеет качество переноса заселённости. В данной диссертации для характеристики транспорта были рассмотрены следующие величины: полнота инверсии

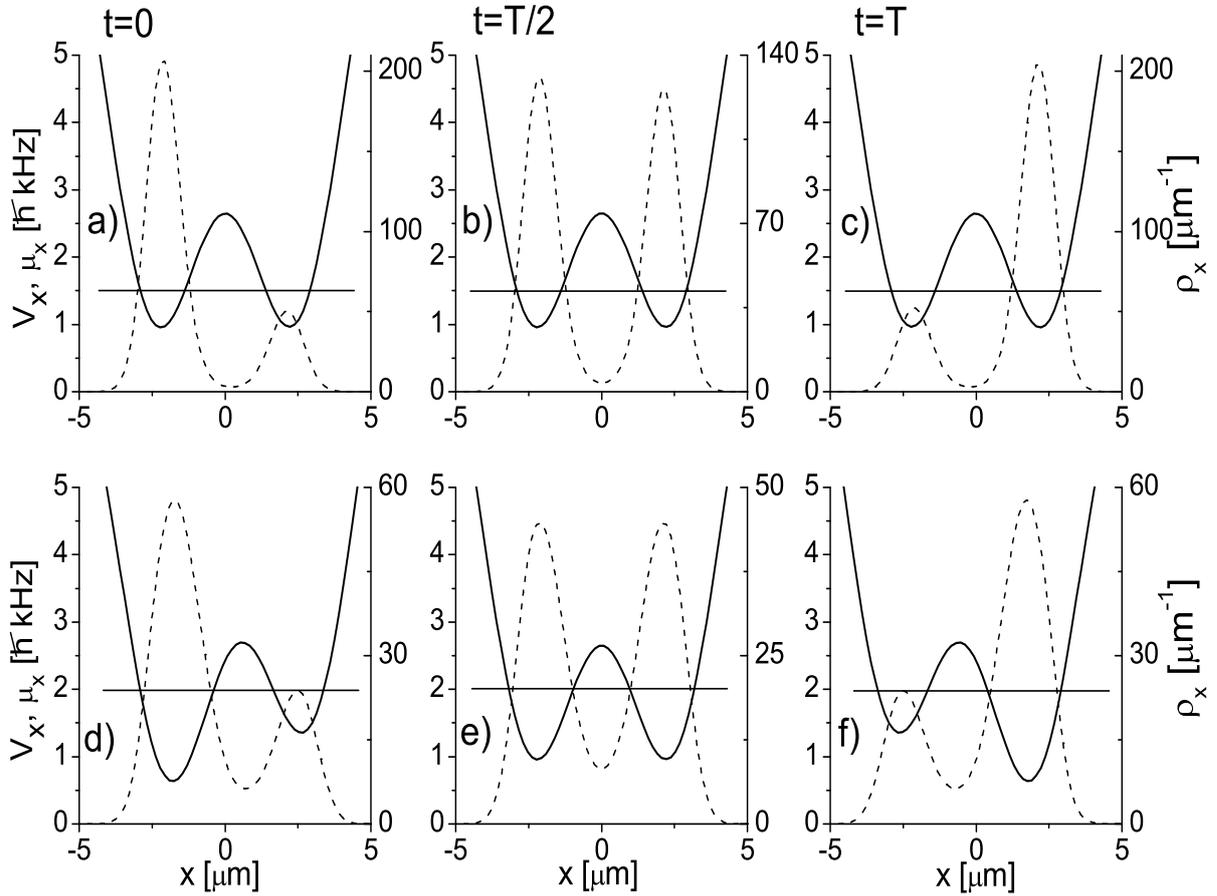


Рис. 3.8: Удерживающий потенциал V_x (сплошная линия), плотность ρ_x (пунктирная линия), компонента химического потенциала μ_x (сплошная прямая линия) в начальный $t = 0$, промежуточный $T/2$ и конечный T моменты времени процесса инверсии. Данные представлены для идеального (верхний ряд) и отталкивающего (нижний ряд) конденсата. Во всех случаях начальные заселённости ям $N_1(T) = 800$, $N_2(T) = 200$.

$P = -z(T)/z(0)$ (соотношение конечной и начальной разности заселённости потенциальных ям), а также шум $n = \frac{A}{N}$, где A — амплитуда дипольных осцилляций в конечном состоянии: $A = \max(N_{1,2}) - \min(N_{1,2})$ при $t > T$.

Решение УПГ (1.14) позволяет найти зависящую от времени энергию основного состояния $\mu(t)$, которая может трактоваться как химический потенциал КБЭ [32, 33, 36]. Для анализа транспорта важно значение компоненты химического потенциала μ_x . Процедура нахождения μ_x аналогична использованной ранее для анализа эволюции ОД и МКСЗ (см. параграф 2.3.2). Отметим, что в представленном исследовании величина μ_x используется исключительно в демонстрационных целях для сравнения с высотой барьера V_0 .

На рис. 3.8 показаны удерживающий потенциал V_{ext} в направлении оси X , компонента химического потенциала μ_x , а также плотность атомов $\rho(x)$, определяемая соотношением (2.23). Все величины представлены в начальный $t = 0$, промежуточный $T/2$ и конечный T моменты времени процесса инверсии. Данные представлены для идеального (рис. 3.8, верхний ряд) и отталкивающего (рис. 3.8, нижний ряд) КБЭ. Во всех случаях полное число частиц $N = 1000$ и начальные заселённости ям $N_1(0) = 800$, $N_2(0) = 200$, что соответствует разности заселённости $z(0) = 0.6$. Адиабатически медленное движение барьера приводит к инверсии заселённости, в результате $N_1(T) = 800$, $N_2(T) = 200$, соответственно $z(T) = -0.6$. В момент времени $T/2$ яма симметрична и $z(T/2) = 0$. В случае адиабатической эволюции (медленное движение барьера), состояние КБЭ в любой момент времени можно считать стационарным [101].

Для идеального КБЭ (рис. 3.8, верхний ряд) малой асимметрии ловушки $x(0) = 0.0064 \mu\text{m}$ достаточно для создания начальной разности заселённости $z(0) = 0.6$. При этом подбарьерное перекрытие левой и правой компонент конденсата крайне незначительно, значение μ_x много меньше, чем V_0 . Разность энергий основного и первого возбуждённого состояний в середине процесса $\Delta\mu(T/2)/h = 5 \text{ Hz}$ намного меньше, чем глубины потенциальных ям. Данные факты свидетельствуют о режиме слабой связи. В случае отталкивающего КБЭ (рис. 3.8, нижний ряд) видно, что взаимодействие существенно увеличивает химический потенциал, приводя к повышению проницаемости барьера. Таким образом, для формирования стационарного состояния с $N_1(0) = 200$, $N_2(0) = 800$ необходимо значительное пространственное разделение волнового пакета, что эффективно понижает связь между фракциями КБЭ. В итоге необходимые начальные заселённости реализуются при большей асимметрии ловушки $x(0) = 0.5 \mu\text{m}$, разность энергий достигает $\Delta\mu/h = 36 \text{ Hz}$.

Результаты

Результы численного моделирования транспорта (зависящие от времени заселённости $N_1(t)$ и $N_2(t)$) для идеального КБЭ представлены на рис. 3.9. Транспорт реализуется посредством движения барьера с постоянной $v = const$ (верхний ряд) и зависящей от времени $v(t)$ (нижний ряд) скоростью, причём средняя скорость v_0 (обозначена на рисунке) одинакова для обоих режимов. Полное смещение барьера за время переноса T также одинаково во всех случаях и составляет $D = 12.8 \text{ nm}$. Как видно из рис. 3.9 (а,с), адиабатический режим движения барьера, имеющий место при малых скоростях, приводит ко времени переноса $T = 2 \text{ s}$. При этом наблюдается устойчивый перенос заселённости при зависящей от времени скорости, в то время как для $v = const$ характерны дипольные возбуждения в течении всего процесса. Данный эффект связан с наличием скачков скорости в моменты времени 0 и T , что вызывает характерные осцилляции КБЭ. Таким образом, наиболее предпочтителен транспорт, инициированный движением барьера с зависящей от времени скоростью. Как следует из рис. 3.9 (b,d), в обоих случаях ($v = const$ и $v(t)$) качество инверсии значительно ухудшается при отклонении от адиабатического режима.

Аналогичный транспорт для отталкивающего КБЭ представлен на рис. 3.10. Отметим сходства и различия инверсии заселённости для идеального и отталкивающего КБЭ. Прежде всего, в обоих случаях качественный перенос заселённости имеет место только в случае адиабатической эволюции (рис. 3.10 (а,с)). Увеличению скорости приводит к возбуждению дипольных осцилляций, что значительно ухудшает (рис. 3.10, b) или даже разрушает транспорт (рис. 3.10, d).

Отталкивающее взаимодействие в КБЭ вносит ряд особенностей в создание инверсии заселённости. Прежде всего, нелинейность значительно меняет скорости процесса. Полное смещение барьера в случае взаимодействующего КБЭ составляет $1 \text{ }\mu\text{m}$, что на три порядка превышает значение для идеального конденсата. При этом, транспорт реализуется за значительно меньшее время переноса $T = 250 \text{ ns}$ при большей (на три порядка) скорости движения барьера. Таким образом, отталкивающее взаимодействие значительно способствует транспорту, делая процесс более быстрым, что упрощает экспериментальную реализацию. Влияние нелинейности на перенос заселённости объясняется повышением проницаемости барьера за счёт увеличения химического потенциала. В результате увеличивается связь между фракциями конденсата и инверсия реализуется быстрее.

Обобщённая информация о инверсных переходах КБЭ в ДПЯ пред-

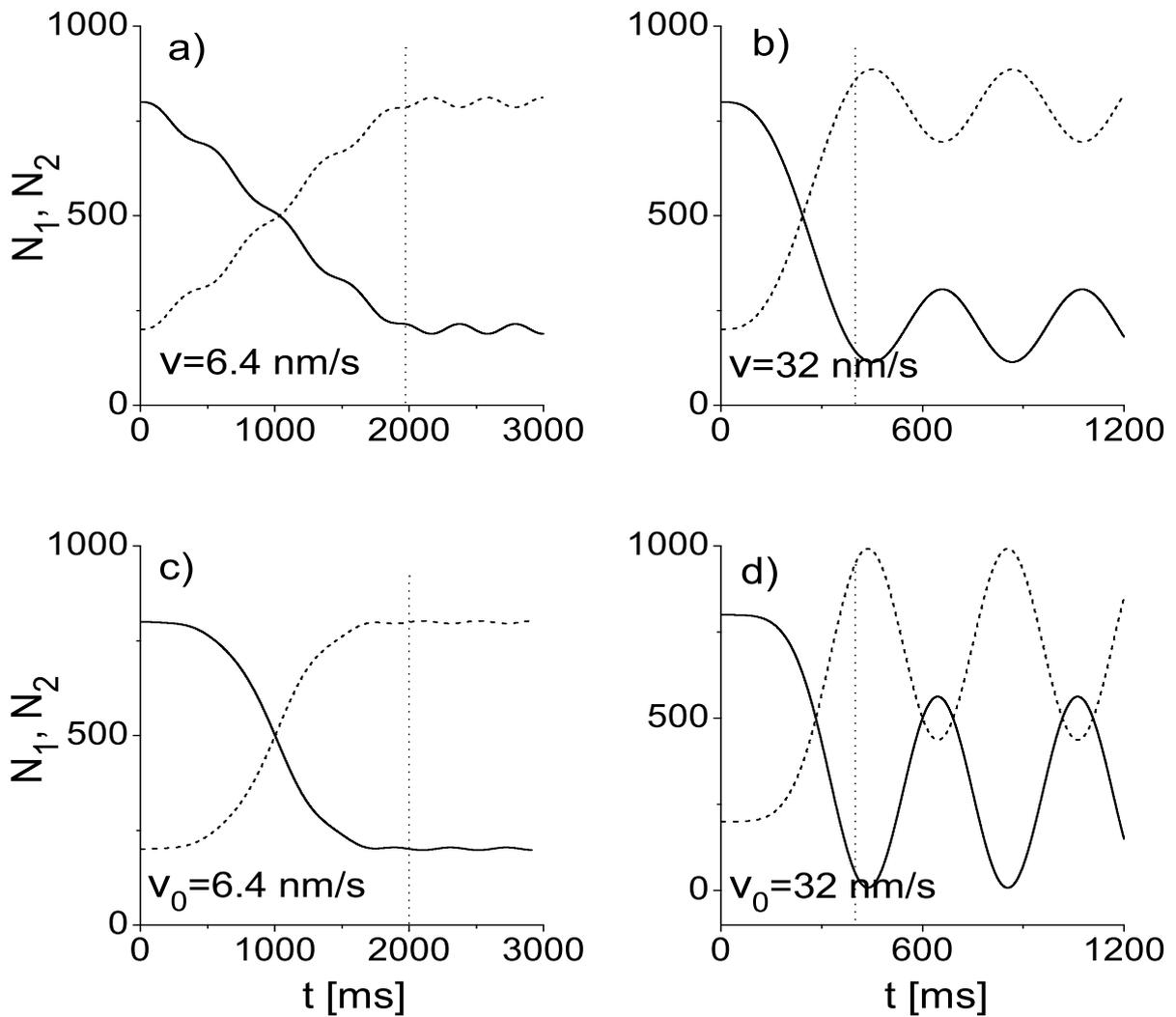


Рис. 3.9: Зависящие от времени заселённости $N_1(t)$ (сплошная линия) и $N_2(t)$ (пунктирная линия) при инверсном переносе заселённости в идеальном КБЭ. Во всех случаях $N_1(T) = 800$, $N_2(T) = 200$. Время движения барьера $T = 2 \text{ s}$ (a,c) и $T = 0.4 \text{ s}$ (b,d) обозначено вертикальной прерывистой чертой. Транспорт рассматривается для случая постоянной (a,b) и зависящей от времени скорости (c,d), средние скорости показаны на рисунке.

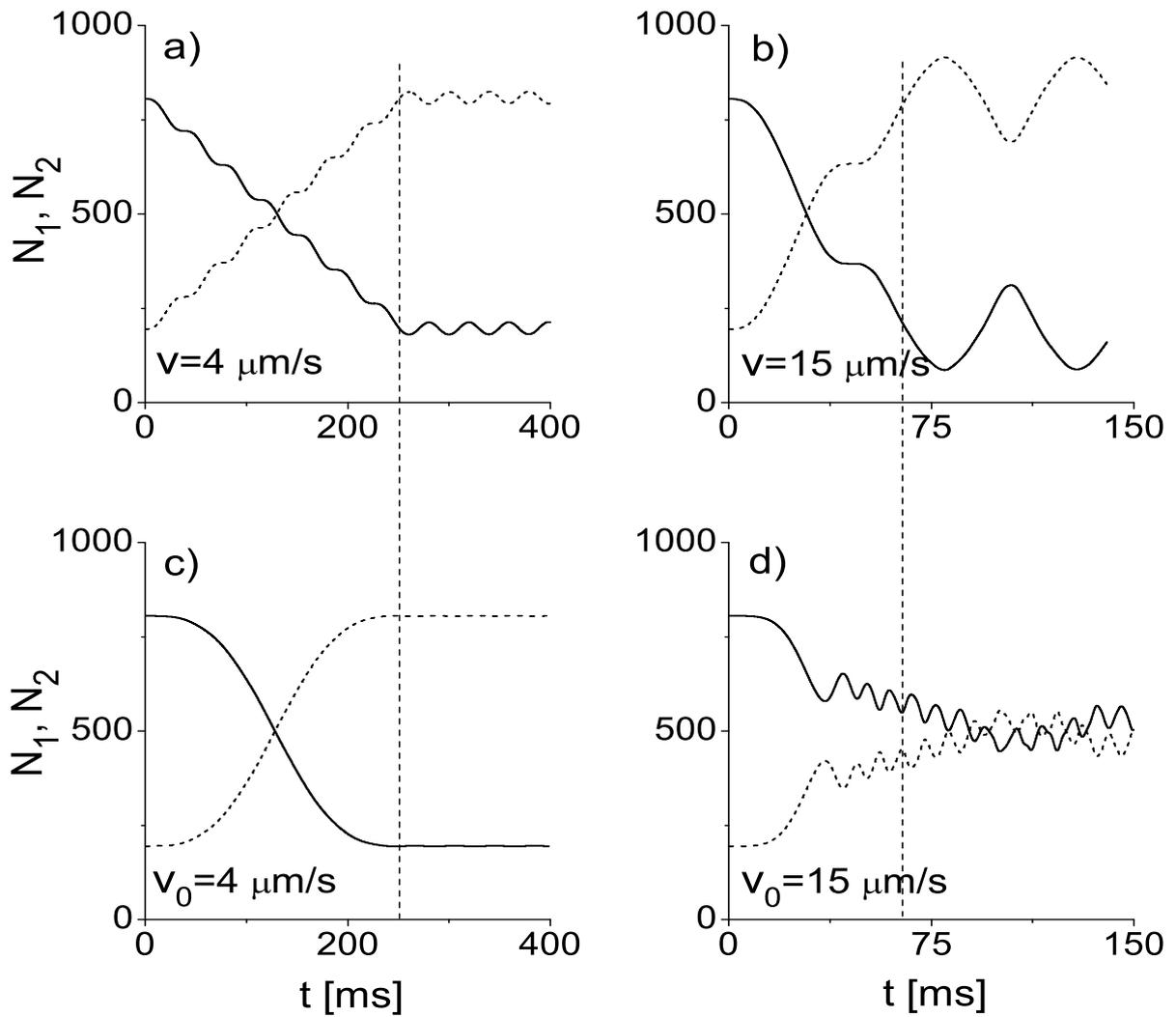


Рис. 3.10: Рисунок аналогичен рис. 3.9, но при наличии отталкивающего взаимодействия.

ставлена на рисунках 3.11 и 3.12, демонстрирующих полноту инверсии P и шум n в зависимости от скорости движения барьера.

Рис. 3.11 соответствует движению барьера с постоянной скоростью в случае идеального (левый столбец) и отталкивающего (правый столбец) КБЭ. Как следует из рис. 3.11 (а,с), в линейном случае полный перенос заселённости ($P = 1$) имеет место при малых скоростях $v < 0.04 \mu\text{m/s}$. При этом, для данных переходов характерен шум n , величина которого меняется в незначительном диапазоне $n = 0.02 - 0.04$. С увеличением скорости $v > 0.04 \mu\text{m/s}$ происходит ухудшение инверсии ($P < 1$), сопровождаемое увеличением шума n . Дальнейший рост скорости приводит к разрушению транспорта, наблюдаемое при этом значение шума $n \rightarrow 0.4$ свидетельствует о наличии осцилляций Раби. Как следует из рис. 3.11 (b,d), отталкивающее взаимодействие кардинально меняет процесс. Наличие взаимодействия приводит к формированию плато в широком диапазоне скоростей $0 < v < 19 \mu\text{m/s}$, характеризующееся полной инверсией ($P \approx 1$). При этом $v \approx 19 \mu\text{m/s}$ может рассматриваться как критическая скорость, превышение которой приводит к разрушению переноса. Отметим, что механизм разрушения процесса инверсии различен для идеального и отталкивающего конденсата. Во взаимодействующем КБЭ, при $v > v_{crit}$, $P \approx -0.4$, что соответствует $N_1(T) \approx 300$ и $N_2(T) \approx 700$, величина шума n намного меньше, чем для идеального КБЭ. Таким образом, имеет место частичный транспорт, сопровождаемый дипольными осцилляциями. Полученный результат по наблюдению плато согласуется с предыдущим исследованием, выполненным в рамках более простой двух-модовой модели [57].

На рис. 3.12 представлены аналогичные данные для случая зависящей от времени скорости барьера $v(t)$. По оси X отложено максимальное значение скорости $2v_0$. В целом, наблюдается сходство с рассмотренными ранее результатами для $v = const$ (рис. 3.11). Можно отметить единственное различие, что в случае отталкивающего взаимодействия перенос при $v > v_{crit}$ сопровождается меньшим шумом (рис. 3.12, d). Очевидно, что это связано с лучшей адиабатичностью процесса, что и обеспечивает более устойчивый транспорт.

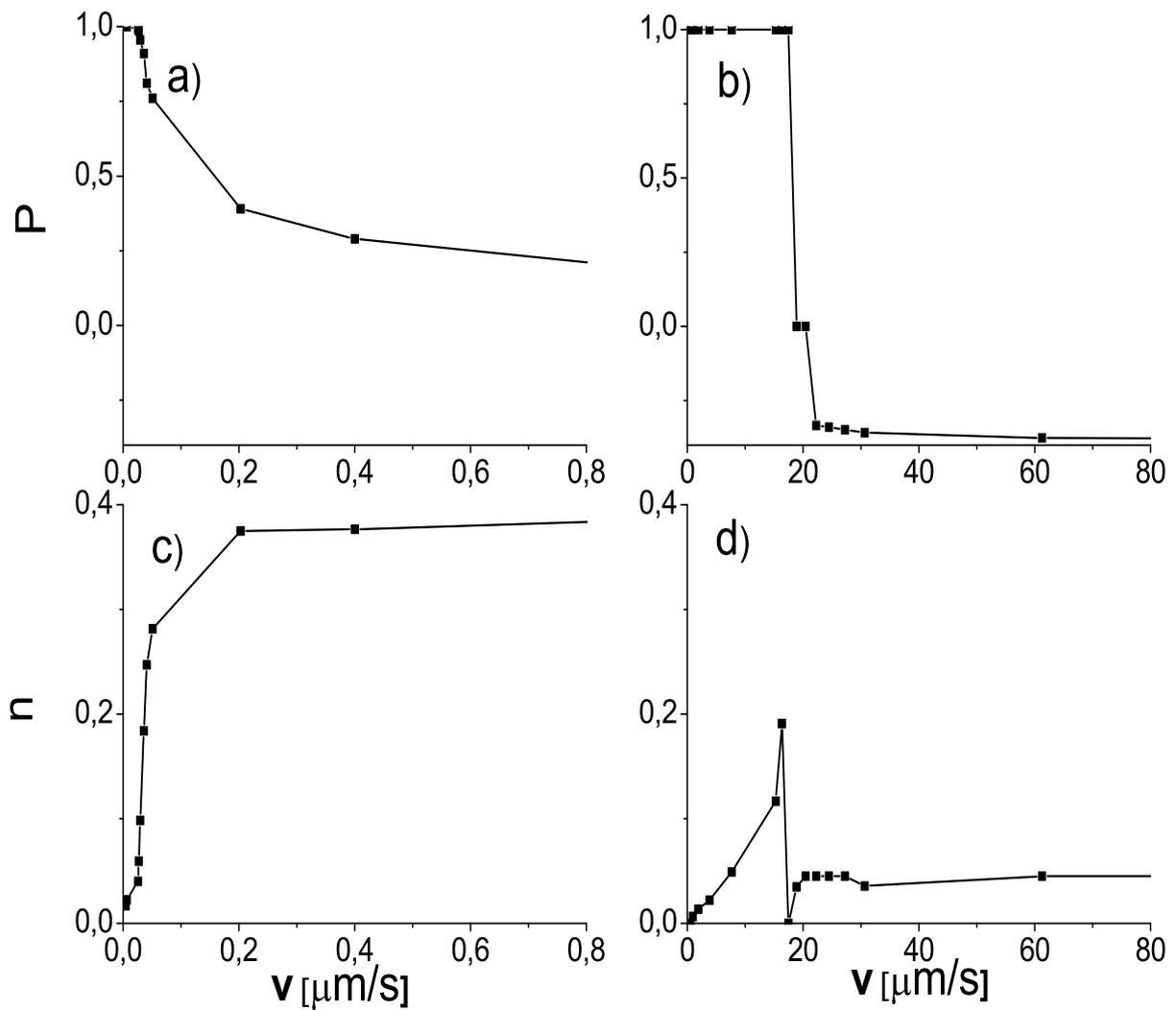


Рис. 3.11: Полнота P и шум n , характерные для инверсии идеального (левый столбец) и отталкивающего (правый столбец) КБЭ в ДПЯ в зависимости от величины постоянной скорости.

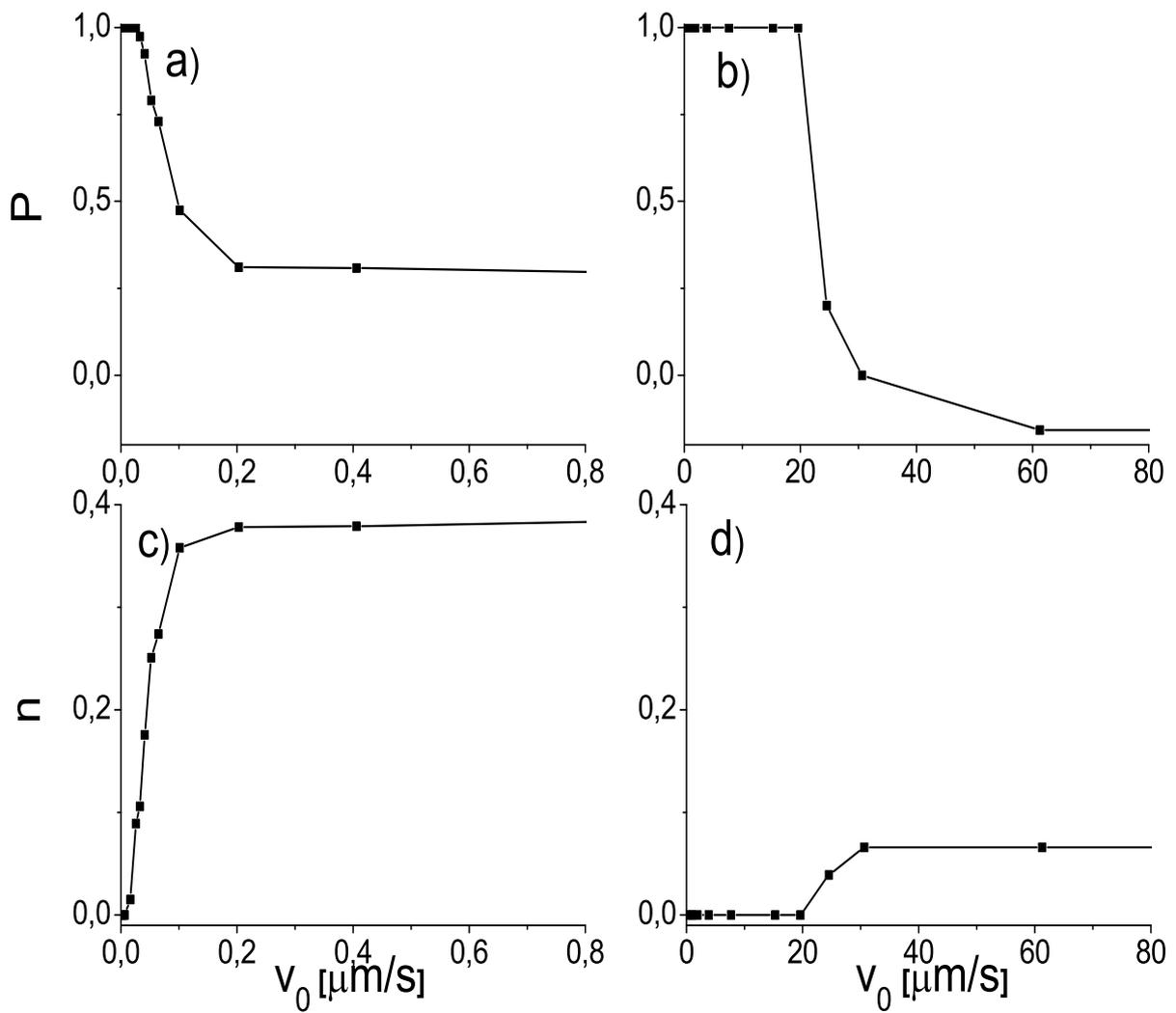


Рис. 3.12: Рисунок аналогичен рис. 3.11, но в зависимости от максимальной скорости $2v_0$.

3.4.3 Аналогия транспорта конденсата с эффектом Джозефсона

Эффект Джозефсона в сверхпроводниках

В 1962 году В.Д. Джозефсон предсказал необычный эффект [102], согласно которому через систему двух связанных сверхпроводников, разделённых тонким слоем диэлектрика возможно протекание сверхпроводящего (бездиссипативного) тока, обусловленного туннелированием куперовских пар. Характер прохождения сверхпроводящего тока зависит от величины внешнего тока в цепи, создаваемого источником. Система, в которой может наблюдаться эффект Джозефсона, может иметь различное строение (туннельный переход, мостик Дайема, точечный контакт и т.д.) и обобщённо называется джозефсоновским контактом. Простейшая схема такого контакта представлена на рис. 3.13.

Эффект Джозефсона может быть описан макроскопической волновой функцией

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, \quad (3.21)$$

где Ψ_1 и Ψ_2 — волновые функции, связанные с первым и вторым сверхпроводником. По аналогии с (1.17), волновые функции $\Psi_{1,2}$ зависят от плотности $\rho_{1,2}$ и фазы $\phi_{1,2}$ сверхпроводящих электронов в обоих сверхпроводниках:

$$\Psi_{1,2} = \sqrt{\rho_{1,2}} e^{i\phi_{1,2}}. \quad (3.22)$$

Заметим, что разделение общей волновой функции джозефсоновского контакта на левую и правую компоненты справедливо только при слабой связи между сверхпроводниками. Для любого туннельного эффекта слабая связь подразумевает малое, но не приводящее к полной изоляции отдельных подсистем подбарьерное перекрытие волновых функций. В случае джозефсоновского контакта критерием слабой связи является толщина разделяющего диэлектрического слоя, которая должна быть близка к длине когерентности куперовской пары сверхпроводящих электронов. При большей толщине не происходит перекрытия волновых функций левого и правого сверхпроводников, вследствие чего появление сверхпроводящего тока невозможно. При слишком тонком слое диэлектрика может возникнуть другой негативный эффект, связанный с очень сильным перекрытием волновых функций $\Psi_{1,2}$. В этом случае система сверхпроводник-диэлектрик-сверхпроводник фактически описывается единой волновой функцией, следовательно, образование сверхпроводящего тока в этом случае невозможно.

Согласно Фейнману [104], эффект Джозефсона можно описать на основе системы уравнений для слабо связанных квантовомеханических со-

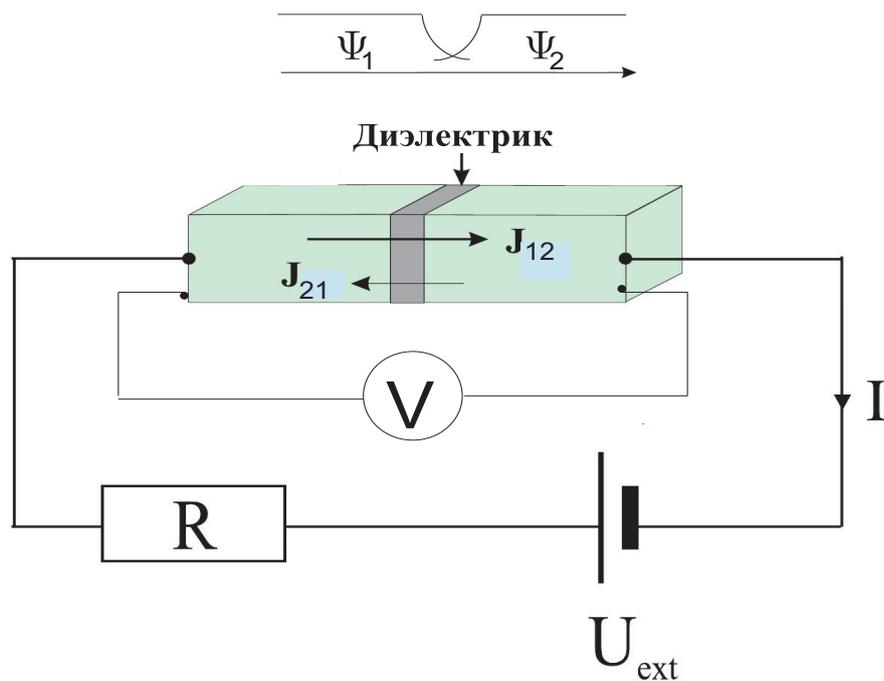


Рис. 3.13: Схема джозефсоновского контакта, состоящего из двух сверхпроводников, разделённых тонким слоем диэлектрика. J_{12} и J_{21} — возможные направления сверхпроводящего тока, зависящие от направления внешнего тока цепи I , задаваемого источником тока U_{ext} . V — измеряемое падение напряжения на джозефсоновском контакте. Слабо перекрывающиеся волновые функции Ψ_1 и Ψ_2 соответствуют случаю слабой связи между сверхпроводниками. Рисунок взят из работы [103].

стояний. В этом случае, с учётом приближений (3.21) и (3.22), система уравнений, описывающая эффект Джозефсона имеет вид:

$$\begin{aligned} J &= I_{max} \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \frac{2eV}{\hbar}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где J — величина сверхпроводящего тока, $I_{max} = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2}$ — максимальное значение тока в цепи, не приводящее к падению напряжения на контакте, $\theta = \phi_2 - \phi_1$ — разность фаз двух сверхпроводников, e — элементарный заряд, K и V — соответственно величина связи и падение напряжения на джозефсоновском контакте.

Рассмотрим частные случаи решения системы уравнений (3.23). Пусть сверхпроводящий ток J течёт бездиссипативно (без падения напряжения между сверхпроводниками), тогда $V = 0$ и, как видно из (3.23), $\theta = const$. Очевидно, что в этом случае система уравнений (3.23) сводится к простому выражению:

$$J = I_{max} \sin(const). \quad (3.24)$$

Соотношение (3.24) описывает стационарный эффект Джозефсона, характеризуемый постоянным током через контакт.

Если величина внешнего тока I превысит критическое значение I_{max} , то на контакте появится падение напряжения V . Это фактически означает что энергии куперовских пар E_1 и E_2 в левом и правом сверхпроводнике связаны соотношением [105]:

$$E_1 - E_2 = 2eV. \quad (3.25)$$

Разность энергий эквивалентна разности химических потенциалов $\Delta\mu$ левого/правого сверхпроводников:

$$\Delta\mu = 2eV. \quad (3.26)$$

Если $\Delta\mu \neq 0$, то к сверхпроводящему току J , протекающему через контакт, добавится ток одиночных электронов, называемый диссипативным током. При этом ток зависит от времени как:

$$J = I_{max} \sin\left(\frac{\Delta\mu}{\hbar}\right) \quad (3.27)$$

Данный эффект называется нестационарным эффектом Джозефсона. Как видно из соотношения (3.27), частота колебаний сверхпроводящего тока полностью определяется разностью химических потенциалов $\Delta\mu$ (или падением напряжения V).

Эффект Джозефсона в КБЭ

В работе [82] было показано, что стационарный эффект Джозефсона может быть реализован для КБЭ в ДПЯ посредством адиабатически медленного движения барьера (с постоянной скоростью), так что форма ловушки меняется от асимметричной к симметричной. При этом крайне важна адиабатичность движения, позволяющая атомам КБЭ туннелировать через барьер достаточно медленно, так что $\Delta\mu \approx 0$. В момент окончания движения наблюдается стационарный ток J , определяемый конечной разностью фаз θ . При этом величина критического тока I_{max} зависит от критической скорости v_{crit} движения барьера. При превышении критической скорости нарушается адиабатичность переноса, в результате $\Delta\mu \neq 0$ и в системе наблюдается нестационарный эффект Джозефсона. Результаты данного теоретического исследования были подтверждены на эксперименте [44].

Предложенный метод получения джозефсоновского тока конденсата [82] тесно пересекается с рассмотренным в параграфе 3.4.1 нелинейным транспортом КБЭ в ДПЯ [57]. Наблюдаемое плато скоростей соответствует области адиабатической эволюции когда $J < I_{max}$. Отсутствие плато при больших скоростях связано с превышением критической скорости v_{crit} и получением нестационарного тока $J > I_{max}$. Отметим, что транспорт КБЭ в ДПЯ, исследуемый в рамках двух-модового приближения [57] не связан напрямую с динамикой барьера и может быть реализован различными способами. При этом рассматриваемая система демонстрирует эволюцию слабой связи, что является достаточным для создания джозефсоновского тока [83, 84].

Далее будет исследована возможность реализации эффекта Джозефсона на основе инверсии заселённости КБЭ в ДПЯ. Особое внимание уделяется роли нелинейности. Моделирование процесса основано на решении нелинейного УГП для единого параметра порядка. По сравнению с предыдущими исследованиями [44, 82], автором диссертации рассматриваются не только разности заселённостей z и химических потенциалов $\Delta\mu$, но и разность фаз θ , что позволяет проводить более детальный анализ данных. Изложение основано на оригинальных результатах [81].

По определению, джозефсоновский ток может быть записан в виде:

$$J(t) = -\frac{\dot{z}(t)}{2} = -\frac{\dot{N}_1(t)}{N} = \frac{\dot{N}_2(t)}{N}. \quad (3.28)$$

Согласно [82], приблизительное значение тока определяется как:

$$\tilde{J} = I_{max} \sqrt{1 - z^2(t)} \sin \theta(t). \quad (3.29)$$

В представленном далее оригинальном исследовании величины $z(t)$, $\theta(t)$, а также токи $J(t)$ и \tilde{J}/I_{max} вычисляются из решения нелинейного УГП (1.14) для единого параметра порядка. Затем, сравнение точного (3.28) и приближительного (3.29) токов в определённый момент времени (например, $t = T/2$) позволяет оценить значение критического тока I_{max} . Разность химических потенциалов КБЭ в левой и правой потенциальной яме $\Delta\mu/h$ определяется согласно уравнениям для эффекта Джозефсона: $\Delta\mu/h = \dot{\theta}$.

На рисунке 3.14 представлена эволюция разности фаз $\theta(t)$ и джозефсоновского тока $J(t)$ для инверсного переноса заселённости в *идеальном* КБЭ, соответствующего рис. 3.9 (а,с). Рассмотрим сперва динамику с зависящей от времени скоростью (рис. 3.14 (с,d)), поскольку в этом случае транспорт более устойчив относительно дипольных осцилляций, что существенно упрощает анализ данных. Начальное значение разности фаз $\theta(t = 0) = 0$, затем, как следует из рис. 3.14 (с), наблюдается линейный рост $\theta(t)$. Разность фаз достигает максимума в середине процесса инверсии ($T/2 = 1000$ ms), затем понижаясь до величины $\theta_T \sim 0.027$ и далее осциллируя около данного значения. Такое поведение $\theta(t)$ приблизительно соответствует форме временной зависимости скорости (3.20), хотя и отличается конечным значением ($\theta_T \neq 0$, $v(T) = 0$). Как будет показано далее, конечное значение разности фаз не зависит от скорости движения барьера. Возможно, это связано с геометрической фазой [106], возникающей в процессе инверсии.

Первой половине временной эволюции ($t < T/2$) соответствует средняя разность химических потенциалов $\Delta\mu/h = -\dot{\theta} \sim 0.27$ Hz, что является крайне малой величиной. Согласно уравнению (3.27), стационарный эффект Джозефсона подразумевает $\theta(t) = const$ и соответственно $\Delta\mu = 0$. Наблюдаемое в процессе инверсии малое значение $\Delta\mu/h$ позволяет с высокой точностью говорить о квазистационарном токе Джозефсона. Стационарный ток имеет место только в крайне узкой области инверсии ($t = T/2$).

Рассмотрим джозефсоновский ток, представленный на рис. 3.14 (d). Точное значение тока J вычисляется согласно (3.28), т.е. следует из решения УГП (1.14), приближённое значение тока \tilde{J} определяется через θ и z , согласно уравнению (3.29). Для вычисления \tilde{J} использовано значение критического тока $I_{max} = 4.6$ Hz, полученного из условия $J(t) = \tilde{J}(t)$ в момент времени $t = T/2$. Как следует из рис. 3.14 (d), при $t < T/2$ значения токов J и \tilde{J} имеют близкие значения, зависящие от эволюции θ . Поскольку $J \sim \sin \theta$, можно с уверенностью говорить о наличии стационарного эффекта Джозефсона. При $t > T/2$ поведение токов J и \tilde{J} значительно различается. Ток J , согласно рис. 3.14 (с) осциллирует

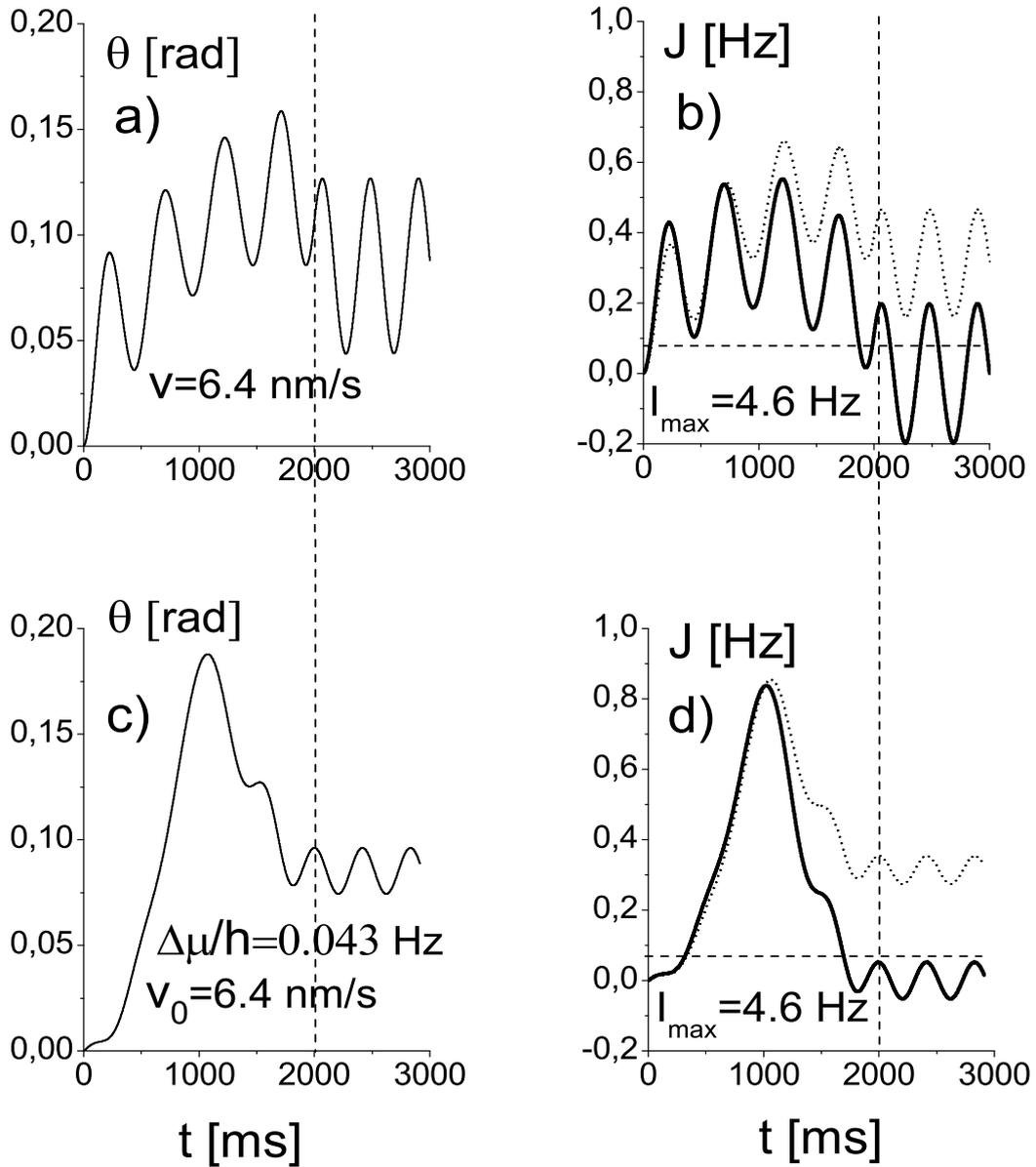


Рис. 3.14: Эволюция разности фаз $\theta(t)$ (левый столбец) и джозефсоновский ток (правый столбец) в идеальном КБЭ при постоянной (верхний ряд) и зависящей от времени (нижний ряд) скорости. Соответствующий перенос заселённости представлен на рис. 3.9. На рисунке показаны точное $J(t)$ (сплошная линия) и приближённое $\tilde{J}(t)$ (пунктирная линия) значения тока. На рисунках (b) и (d) критическое значение тока $I_{\max} = 4.6$ Hz использовано для нормировки тока $\tilde{J}(t)$. Для случая зависящей от времени скорости приведена разность химических потенциалов $\Delta\mu/h$. Время движения барьера $T = 2$ s показано вертикальной пунктирной чертой.

около значения близкого к нулю. Ток \tilde{J} имеет иное конечное значение, определяемое динамикой разности фаз.

На рис. 3.14 (a,b) представлены аналогичные данные для случая постоянной скорости. Несмотря на равенство средних скоростей (показаны на рисунке), перенос заселённости при $v = const$ сопровождается сильными дипольными осцилляциями. При этом динамика разности фаз и токов схожа с представленными на рис. 3.14 (c,d). В то же время, из рис. 3.14 (b) следует дополнительная информация: джозефсоновский ток не является постоянным даже при постоянной скорости движения барьера. Полученный результат несколько отличается от утверждения [82], согласно которому джозефсоновский ток обязательно пропорционален скорости движения барьера.

На рисунках 3.15 и 3.16 представлены зависящие от времени заселённости потенциальных ям $N_1(t)$ и $N_2(t)$, эволюция разности фаз $\theta(t)$ и токи J , \tilde{J} для транспорта *отталкивающего* КБЭ. Поскольку $v = const$ приводит к возникновению дипольных осцилляций, усложняющих анализ результатов, рассмотрим только динамику системы с переменной скоростью.

На рис. 3.15 рассмотрены медленная ($v_0 = 1\mu m/s$), средняя ($v_0 = 4\mu m/s$) и быстрая ($v_0 = 8\mu m/s < v_{crit}$) эволюции. Как видно, (рис. 3.15, левый столбец), во всех случаях успешно реализуется полный перенос заселённости. Динамика разности фаз (средний столбец) и токов (правый столбец) в отталкивающем КБЭ схожа с идеальным конденсатом. Значительное отличие проявляется в характерной скорости процесса. Как было показано ранее (параграф 3.4.2), средние скорости движения барьера в отталкивающем конденсате на 3 порядка превышают характерные скорости для идеального КБЭ. Конечная разность фаз θ_T постоянна при медленной эволюции (рис. 3.15, верхний ряд). Увеличение скорости приводит к низко-амплитудным осцилляциям θ_T около ненулевого значения. Как видно из рисунка, конечное значение θ_T определяет величину критического тока I_{max} . При больших значениях скорости $v_0 = 8\mu m/s$ разность химических потенциалов составляет $\Delta\mu/h \sim 25$ Hz, при этом $\theta < \pi/2$ и $J < I_{max}$. Таким образом, полученные результаты согласуются с [82] и транспорт КБЭ в ДПЯ может рассматриваться как квазиadiaбатический стационарный ток Джозефсона.

Рассмотрим результаты инверсии (заселённости N_1 и N_2 , разность фаз, ток конденсата) для случая $v \sim v_{crit}$, представленные на рис. 3.16. Отметим, что в случае зависящей от времени скорости, средняя критическая скорость в два раза меньше, чем максимальная критическая скорость, следующая из рисунков 3.11 и 3.12. Как видно на рис. 3.16, в интервале $11\mu m/s < v_0 < 13\mu m/s$ инверсия значительно отличает-

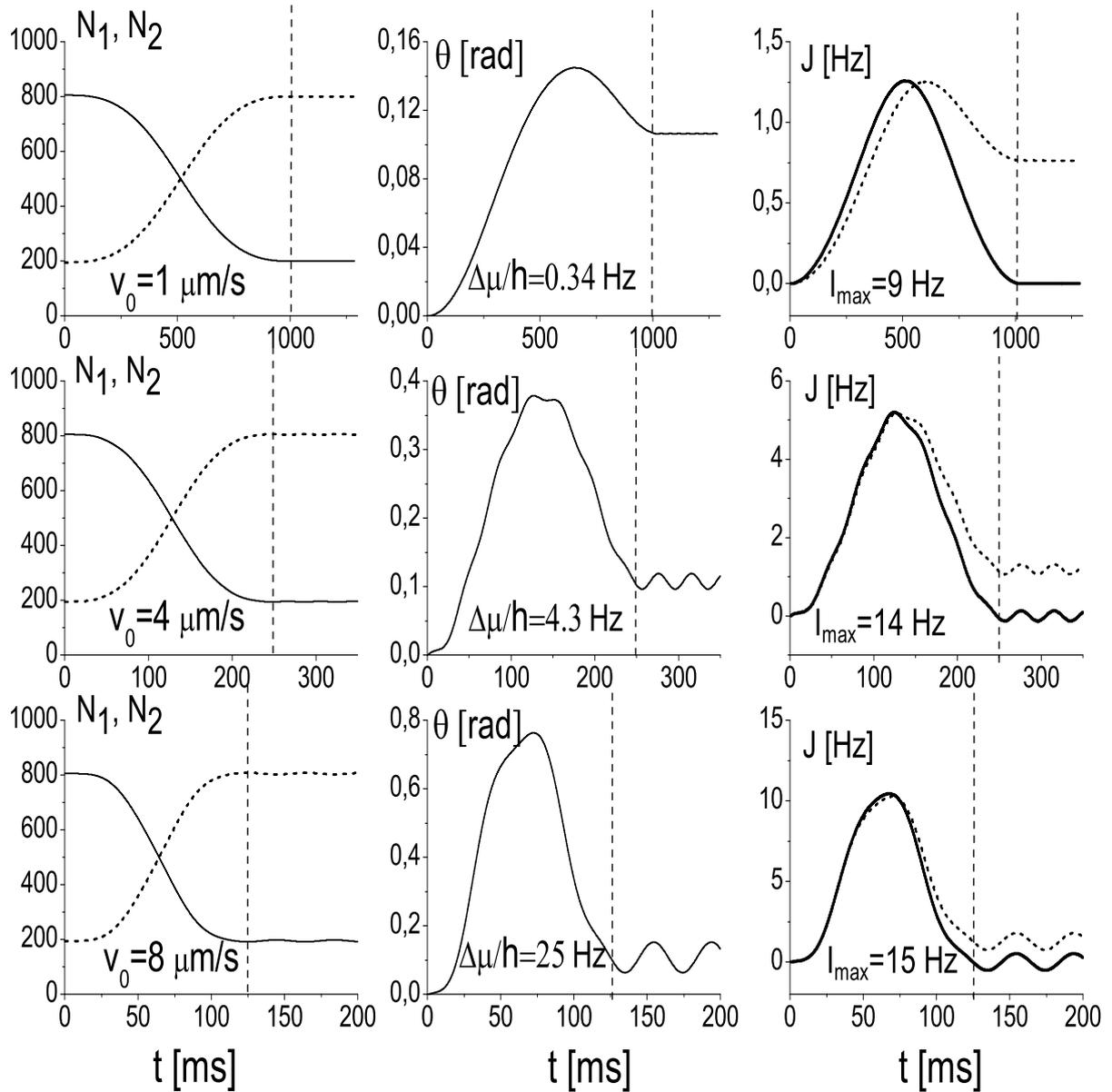


Рис. 3.15: Эволюция отталкивающего КБЭ для зависящей от времени скорости $v(t)$. Левый столбец: заселённости потенциальных ям N_1 (сплошная линия), N_2 (пунктирная линия). Средний столбец: разность фаз $\theta(t)$. Правый столбец: точное J (сплошная линия) и приближённое \tilde{J} значения тока. Рассмотрены медленная $v_0 = 1 \mu\text{m/s}$ (верхний ряд), средняя $v_0 = 4 \mu\text{m/s}$ (средний ряд) и быстрая $v_0 = 8 \mu\text{m/s} < v_{\text{crit}}$ (нижний ряд) эволюции. Для каждого случая рассчитано значение $\Delta\mu/h$ и I_{\max} . Время движения барьера обозначено прерывистой вертикальной чертой.

ся от рассмотренной ранее (большие значения $\Delta\mu/h$, осцилляции тока), что не характерно для стационарного эффекта Джозефсона. При $v \geq 12 \mu\text{m}/\text{s}$ наблюдается линейная зависимость $\theta(t)$ в то время как токи J и \tilde{J} осциллируют с частотой $\omega \approx \Delta\mu/h$. Величина также $\Delta\mu/h$ увеличивается с ростом скорости. Приблизительное значение тока \tilde{J} совпадает с точным J , величины обоих токов близки критическому значению I_{max} . Данные факты подтверждают переход к нестационарному джозефсоновскому току при $v \sim v_{crit}$. Отметим, что нестационарный ток модулируется низкочастотными дипольными осцилляциями и имеет общие черты с МКСЗ (возрастающая разность фаз, отличное от нуля среднее значение заселённости) в области критической скорости ($v = 12 \mu\text{m}/\text{s}$), но отличается от МКСЗ ($\langle z \rangle \rightarrow 0$) при более высоких скоростях.

Подводя итог можно сказать, что при $v < v_{crit}$ транспорт может рассматриваться как квазистационарный эффект Джозефсона. Разрушение транспорта при критической скорости фактически означает переход к нестационарному осциллирующему току Джозефсона. Как следует из расчётов, в широком диапазоне скоростей $v < v_{crit}$ значения $\dot{\theta}$ и $\Delta\mu$ отличны от нуля, но имеют малые значения, что позволяет рассматривать инверсию как стационарный ток.

Отметим важность адиабатичности для получения стационарного тока конденсата в ДПЯ. Стационарный эффект Джозефсона адиабатический по определению, поскольку слабый ток не приводит к квазичастичным возбуждениям и позволяет за счёт туннелирования поддерживать нулевую разность химических потенциалов. Критическая скорость может трактоваться как критическая точка перехода от стационарного к нестационарному току и, следовательно, от адиабатической к неадиабатической эволюции. Таким образом, наблюдаемая критическая скорость в рассмотренных ранее ПЛЗ и ОПЛЗ (рис. 3.3) может трактоваться не только как переход от адиабатической к быстрой эволюции, но и как переход от стационарного к нестационарному току.

Отметим также, что в данном исследовании ловушка трансформируется, проходя несколько стадий: начальная асимметричная форма \rightarrow симметричная форма \rightarrow форма, зеркально асимметричная начальной. В предыдущих теоретических [82] и экспериментальных [44] работах рассматривались симметрично — асимметричная и обратная трансформации. Несмотря на данное различие, наблюдаемые физические процессы аналогичны. По сравнению с более ранними работами [44, 82], представленное в диссертации исследование является более полным, поскольку учитывает влияние нелинейности и рассматривает разность фаз, что крайне информативно для изучения джозефсоновской динамики.

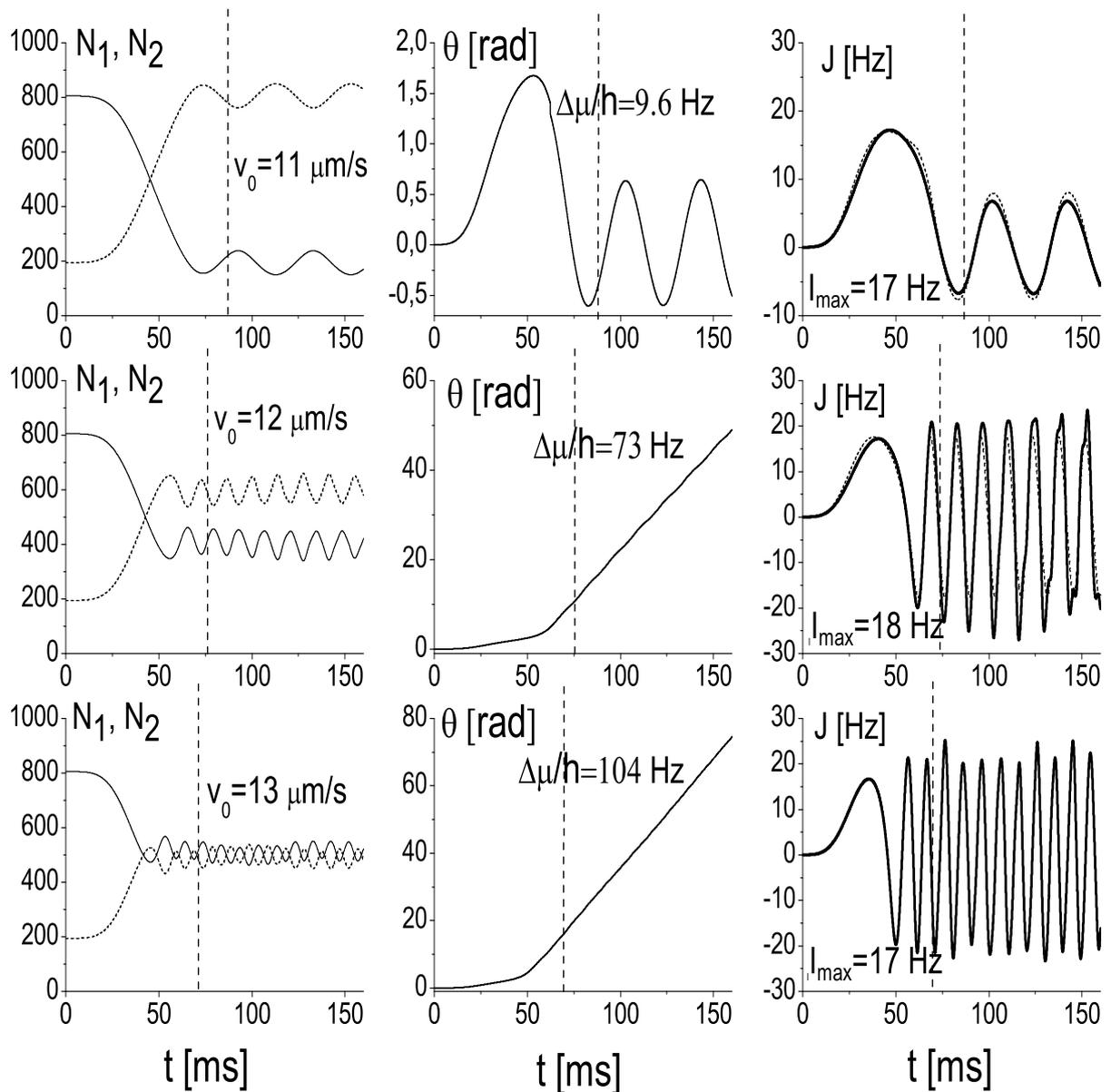


Рис. 3.16: Эволюция системы в области критической скорости. Рисунок аналогичен рис. 3.15, но для средних скоростей $v_0 = 11 \mu\text{m/s}$ (верхний ряд), $v_0 = 12 \mu\text{m/s}$ (средний ряд) и $v_0 = 13 \mu\text{m/s} < v_{crit}$ (нижний ряд).

Глава 4

Нелинейный транспорт конденсата Бозе-Эйнштейна в тройной потенциальной яме

В данной главе рассматривается контролируемый транспорт атомов КБЭ в тройной потенциальной яме. В первом параграфе описан стимулированный Рамановский адиабатический переход (СТИРАП), реализуемый в трёхуровневой квантовой системе. Во втором параграфе представлены физические основы применения метода СТИРАП для транспорта КБЭ в тройной потенциальной яме, а также результаты численного моделирования транспорта в рамках двух-модового приближения.

4.1 Метод СТИРАП, основные идеи

Стимулированный Рамановский адиабатический переход (СТИРАП) [52, 54] — адиабатический метод переноса заселённости, разработанный в квантовой оптике. Применение СТИРАП в трёх-уровневой квантовой системе, при соблюдении ряда требований, позволяет реализовать необратимый полный перенос заселённости из начального состояния $|1\rangle$ в конечное состояние $|3\rangle$ через промежуточное состояние $|2\rangle$. При этом время жизни конечного состояния $|3\rangle$ с фиксированной заселённостью должно быть сравнимо со временем жизни квантовой системы. Соблюдение требований СТИРАП (описаны далее) позволяет предотвратить

заселение промежуточного состояния $|2\rangle$ и, таким образом, минимизировать его вклад в динамику системы.

В основе СТИРАП лежит последовательностью лазерных импульсов накачки $\Omega_P(t)$ (pump) и разрядки $\Omega_S(t)$ (Stokes). Импульс накачки связывает начальное и промежуточное состояния, в то время как импульс разрядки стимулирует переход из промежуточного состояния в конечное. Для реализации СТИРАП необходимо выполнение трёх основных требований:

1. Резонансное условие для боровских частот и частот лазерного излучения:

$$\omega_p - \omega_s = \omega_3 - \omega_1, \quad (4.1)$$

позволяющее малое отклонение от частоты ω_2 :

$$\Delta = (\omega_2 - \omega_1) - \omega_p = (\omega_2 - \omega_3) - \omega_s. \quad (4.2)$$

2. Перекрытие импульсов $\Omega_P(t)$ и $\Omega_S(t)$ в течении времени τ , а также обратный порядок импульсов (импульс разрядки должен предшествовать импульсу накачки).
3. Соблюдение условия адиабатичности:

$$\Omega\tau > 10, \quad (4.3)$$

где $\Omega = \sqrt{\Omega_P^2(t) + \Omega_S^2(t)}$.

Схема СТИРАП продемонстрирована на рис. 4.1. Отметим, что кроме представленной λ -конфигурации, также возможны конструкции типа лестницы или ν -структуры [52].

Метод СТИРАП был разработан для заселения недипольных состояний (со спином $J \neq 1$), которые не могут быть возбуждены фотопоглощением, но могут быть заселены дипольным переходом через промежуточное состояние. В приближении вращающихся осей, гамильтониан СТИРАП можно выразить только через "медленные" частоты Раби [54]. При $\Delta = 0$ гамильтониан имеет вид:

$$\bar{H}(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega_P & 0 \\ \Omega_P & 0 & \Omega_S \\ 0 & \Omega_S & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Учёт взаимодействия между атомами КБЭ или наличие Δ приводит к появлению дополнительных элементов. Введём углы смешивания, определяемые следующим образом:

$$\sin \bar{\theta} = \Omega_P/\Omega, \quad \cos \bar{\theta} = \Omega_S/\Omega. \quad (4.5)$$

Решая задачу на собственные значения, можно найти возможные состояния системы:

$$\begin{aligned} |a^+\rangle &= \sin \bar{\theta} \sin \bar{\phi}|1\rangle + \cos \bar{\phi}|2\rangle + \cos \bar{\theta} \sin \bar{\phi}|3\rangle, \\ |a^0\rangle &= \cos \bar{\theta}|1\rangle - \sin \bar{\theta}|3\rangle, \\ |a^-\rangle &= \sin \bar{\theta} \cos \bar{\phi}|1\rangle - \sin \bar{\phi}|2\rangle + \cos \bar{\theta} \cos \bar{\phi}|3\rangle \end{aligned} \quad (4.6)$$

и соответствующий спектр:

$$\omega^\pm = \Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}. \quad \omega^0 = 0, \quad (4.7)$$

где $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ — дискретные энергетические состояния системы в отсутствие внешнего поля, связывающего компоненты. Угол смешивания $\bar{\theta}$ является функцией частот Раби и отклонения Δ [54] и не существенен в представленном далее исследовании.

Одной из основных целей СТИРАП является предотвращение заселения промежуточного уровня $|2\rangle$ с которого происходит утечка заселённости. Как видно из уравнений (4.6), это возможно если в течении всего процесса система находится только в состоянии $|a^0\rangle$, не имеющего вклада от промежуточного состояния $|2\rangle$. Такая динамика реализуется при строгом соблюдении условия адиабатичности (4.3) и последовательности импульсов Ω_P , Ω_S , показанных на 4.1. Только в этом случае: $\Omega_S(t) = 0$, $\Omega_P(t) = 0$, $\sin \theta = 0$, $\cos \theta = 1$ в начале процесса и $\Omega_S = 0$, $\Omega_P(t) = 0$, $\sin \theta = 0$, $\cos \theta = 0$ в конце. Таким образом, в отличии от $|a^+\rangle$ и $|a^-\rangle$, собственный вектор $|a^0\rangle$ соответствует состоянию $|1\rangle$ в начале процесса и состоянию $|3\rangle$ в конце. Согласно (4.3), адиабатичность метода можно регулировать путём изменения времени перекрытия импульсов τ или амплитуд $\Omega_P(t)$ и $\Omega_S(t)$, т. е. адиабатичность зависит исключительно от параметров лазерного излучения: ширины и амплитуды.

СТИРАП был изначально разработан для отдельных атомов и небольших молекул. Однако, как будет показано далее, этот метод с успехом может быть применён для транспорта КБЭ в тройной потенциальной яме.

4.2 Применение СТИРАП для транспорта конденсата

4.2.1 Схема транспорта

Автором диссертации исследовался [63] циклический СТИРАП транспорт в тройной потенциальной яме, содержащей атомы отталкивающего КБЭ. Схема перехода показана на рис. 4.2. Как видно из рисунка, потенциальные ямы разделены барьерами, с проницаемостями Ω_{12} и Ω_{23} . Сравнивая рисунки 4.1 (а) и 4.2 (а) очевидно, что проницаемости барьеров физически эквивалентны связям между состояниями $|1\rangle$, $|2\rangle$ и $|3\rangle$ в трёхуровневой системе, осуществляемым посредством импульсов накачки Ω_P и разрядки Ω_S . Разность энергий основных состояний ΔE эквивалентна малому отклонению Δ . Таким образом, применение СТИРАП для транспорта КБЭ возможно посредством изменения проницаемости барьеров $\Omega_{12,23}$ в соответствии с описанными выше условиями. Более строго, уравнение 1.23, описывающее динамику МКБЭ можно представить в виде:

$$i\hbar\dot{\psi}_k(t) = H(t)\psi_k(t), \quad (4.8)$$

где гамильтониан СТИРАП имеет вид [63]:

$$H(t) = \begin{pmatrix} \bar{E}_1 + A_1(t) & \Omega_P(t) & 0 \\ \Omega_P(t) & \bar{E}_2 + A_2(t) & \Omega_S(t) \\ 0 & \Omega_S(t) & \bar{E}_3 + A_3(t) \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

В выражении (4.9): $A_k = UN_k$ — величины, связанные с межатомным взаимодействием в КБЭ, $\Omega_P = \bar{\Omega}_{12}/2$ и $\Omega_S = -\bar{\Omega}_{23}/2$ амплитуды импульсов накачки и разрядки. Отметим, что в случае идеального конденсата $A_k = 0$ и гамильтониан (4.9) полностью совпадает с гамильтонианом СТИРАП (4.4) для трёхуровневой квантовой системы.

По аналогии с рассмотренными ранее ПЛЗ и ОПЛЗ, проницаемости барьеров можно представить виде Гауссиана с амплитудой K :

$$\Omega(t) = K\bar{\Omega}_{kj}(t), \quad \bar{\Omega}_{kj}(t) = \exp\left(-\frac{(t_{kj} - t)^2}{\Gamma_{kj}^2}\right), \quad (4.10)$$

где t_{kj} и Γ_{kj} параметры центра и ширины каждого импульса. Как отмечалось, для СТИРАП особенно важным является соблюдение условия адиабатичности (4.3). Общий критерий адиабатичности сформулирован в [101]. В характерных параметрах СТИРАП данный критерий имеет

вид:

$$|\dot{\theta}| \ll \Omega. \quad (4.11)$$

С учётом соотношения (4.10), условие (4.11) можно записать в виде:

$$\frac{\Omega_S \dot{\Omega}_P - \Omega_P \dot{\Omega}_S}{\Omega^3} \ll 1 \text{ или } \Omega_\tau \gg \frac{|d|}{\sqrt{2} \Gamma^2}, \quad (4.12)$$

где Ω_τ среднее значение амплитуды импульсов накачки и разрядки в течении времени перекрытия τ и $d = t_{12} - t_{23}$ — временной интервал (сдвиг) между импульсами. Как правило, с высокой точностью справедливы соотношения: $\Omega \approx 0.5K$ и $\tau \approx \Gamma$, в этом случае условие (4.12) примет вид:

$$K\tau^2 \gg \sqrt{2}|d|. \quad (4.13)$$

Из (4.13) следует, что для успешной реализации СТИРАП необходимы большие амплитуды импульсов или долгое время перекрытия.

В отличие от применения СТИРАП для транспорта отдельных атомов [54] или одностороннего переноса КБЭ [62], в диссертации рассмотрены все три возможных СТИРАП перехода: $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$, $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$, $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$. Другими словами, в качестве промежуточного состояния СТИРАП в разное время используется один из уровней $|2\rangle$, $|1\rangle$ и $|3\rangle$ и соответствующая пара импульсов $(\Omega_{12}, \Omega_{23})$, $(\Omega_{31}, \Omega_{12})$ и $(\Omega_{23}, \Omega_{31})$. Рассмотренная циклическая эволюция позволяет проверить устойчивость СТИРАП в цепочке переходов, а также может быть полезна для дальнейшего изучения геометрических фаз [106].

4.2.2 Результаты

Моделирование транспорта КБЭ в тройной потенциальной яме основывается на численном решении системы уравнений (1.30) - (1.31) для трёх компонент ($M=3$) с зависящими от времени проницаемостями барьеров в форме (4.10) в соответствии с условиям СТИРАП. Вычисления выполнены с шириной Гауссиана (4.10) $\Gamma = 5.4$ и сдвигом между импульсами $d = -5$, что удовлетворяет условию адиабатичности (4.13), т.к. $K\Gamma^2 \approx 30$ и $\sqrt{2}|d| \approx 7$.

Последовательность импульсов $\Omega_P(t)$ и $\Omega_S(t)$, а также зависящие от времени заселённости потенциальных ям N_i для различных значений нелинейности Λ и асимметрий ям Δ представлены на рис. 4.3. Все графики соответствуют циклическому переносу заселённости с начальными условиями $N_1 = 1, N_2 = N_3 = 0$ и $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3$.

Последовательность импульсов Ω_P и Ω_S , обеспечивающих циклический СТИРАП транспорт представлена на рис. 4.3 (а). Как следует из

рис. 4.3 (b), полный и устойчивый перенос заселённости, реализуемый тремя последовательными парами импульсов, наблюдается в идеальном КБЭ ($\Lambda = 0$) в симметричной яме ($\Delta = 0$). Незначительная заселённость промежуточного состояния имеет место в моменты времени $t = 20, 80, 140$, когда импульсы Ω_S максимальны. Время заселённости промежуточного состояния много меньше ширины Гауссиана, следовательно влияние данного состояния на конечный перенос заселённости незначительно. Отметим, что заселение промежуточного состояния говорит о неидеальной адиабатичности транспорта. Это не является дефектом метода, поскольку в итоге реализуется полный конечный перенос заселённости.

Рис. 4.3 (c)-(e) демонстрирует транспорт в симметричной ловушке ($\Delta = 0$) при наличии отталкивающего межатомного взаимодействия. Очевидно, что нелинейность ухудшает качество переноса заселённости. Влияние малой нелинейности $\Lambda = 0.1$ незначительно (рис. 4.3, c), увеличение Λ приводит к ухудшению транспорта (рис. 4.3, d). По имеющимся данным, сильная нелинейность полностью разрушает СТИРАП процесс (на рисунке не показано). В случае притягивающего взаимодействия наблюдается аналогичный эффект (рис. 4.3, e). Как следует из рис. 4.3 (d, e), переход зависит от вида взаимодействия в КБЭ, при этом асимметричный эффект нелинейности выражен значительно меньше, чем для ПЛЗ и ОПЛЗ в ДПЯ.

Влияние асимметрии ям Δ на процесс переноса в идеальном КБЭ ($\Lambda = 0$) показано на рис. 4.3 (f, h). Очевидно, что асимметрия оказывает негативное влияние на транспорт, нарушая качество и полноту переноса, а также приводит к увеличению заселённости промежуточного состояния. При этом влияние малой асимметрии не существенно и даже может быть использовано как фактор улучшения адиабатичности процесса [62, 64]. Сильная асимметрия приводит к разрушению транспорта.

На рис. 4.4 показана зависимость транспорта (заселённость конечного состояния N_3) от сдвига d между импульсами накачки Ω_P и разрядки Ω_S для линейного симметричного случая ($\Lambda = \Delta = 0$). Транспорт исследуется с шириной Гауссиана $\Gamma = 4.36$ для случаев обратной ($d < 0$) и прямой ($d > 0$) последовательности импульсов. Как видно из рисунка, наилучший переход наблюдается для обратного порядка импульсов ($d = -3$), соответствующий адиабатическому СТИРАП переходу. Отклонение от данного d нарушает адиабатичность и приводит к разрушению транспорта. Прямой порядок импульсов также приводит к почти полному переносу заселённости при $d = 3$, но в этом случае транспорт не адиабатический. Несмотря на хорошее качество неадиабатического перехода, адиабатический перенос более предпочтителен, поскольку в

неадиабатическом случае возможны утечки заселённости с промежуточного состояния, что не учтено в представленных расчётах. Отметим, что переход полностью отсутствует при $d = 0$, что является характерной особенностью СТИРАП [54].

Как видно, СТИРАП может быть с успехом применён для транспорта атомов КБЭ в тройной потенциальной яме. Несмотря на межатомное взаимодействие, метод успешно работает при малых значениях Λ . В сравнении с предыдущими исследованиями [62,64], применение СТИРАП для транспорта КБЭ не требует наличия малого отклонения Δ . Кроме того, как следует из приведённых расчётов, асимметрия ям, являющаяся физическим аналогом Δ , негативно влияет на транспорт. В отличие от СТИРАП процессов в других системах, перенос заселённости в КБЭ возможен и при прямой последовательности импульсов, что приводит к реализации неадиабатического перехода.

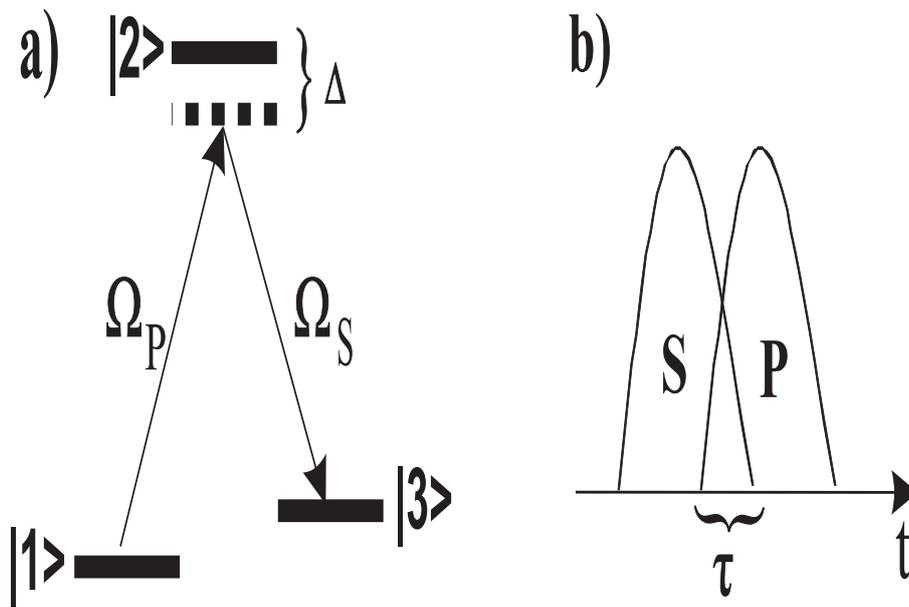


Рис. 4.1: а). Схема СТИРАП в трёхуровневой λ -системе. Стрелками обозначены импульсы накачки $\Omega_P(t)$ и разрядки $\Omega_S(t)$, обеспечивающие связь между состояниями $|1\rangle - |2\rangle$ и $|2\rangle - |3\rangle$ соответственно. б). Последовательность импульсов, перекрывающихся в течении времени τ .

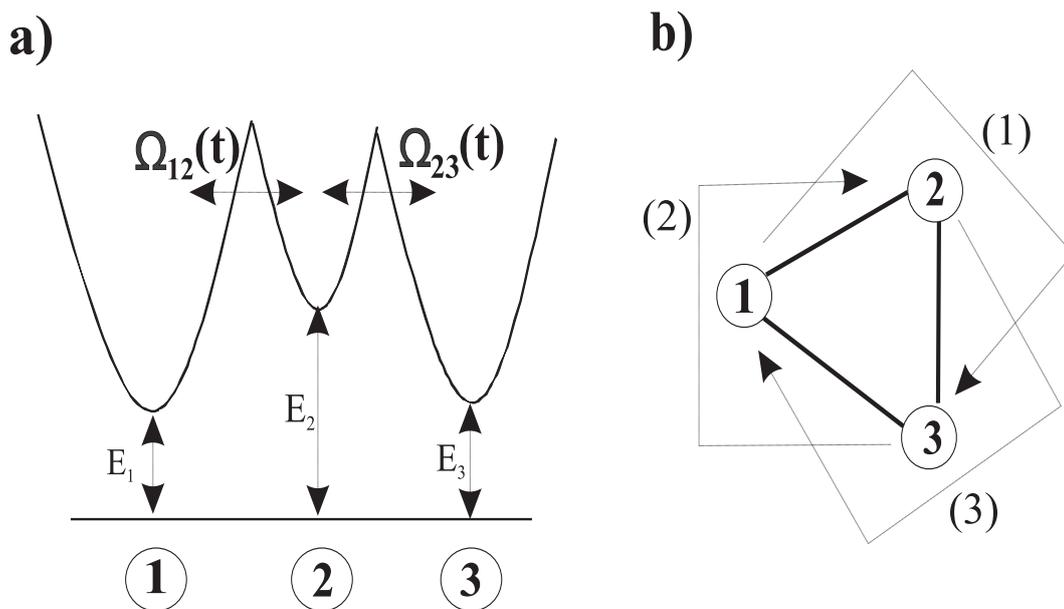


Рис. 4.2: а). Схема тройной потенциальной ямы, содержащая атомы взаимодействующего КБЭ. E_1 , E_2 , E_3 — основные состояния (глубины) ям, $\Omega_{12,23}(t)$ — проницаемости потенциальных барьеров. Каждая яма пронумерована, номер указан внизу. б) Циклическая конфигурация СТИРАП в тройной потенциальной яме с применением дополнительной связи между ямами 1-3. Сплошной толстой линией показана связь, посредством проницаемости барьеров, тонкой линией отображено направление СТИРАП переходов.

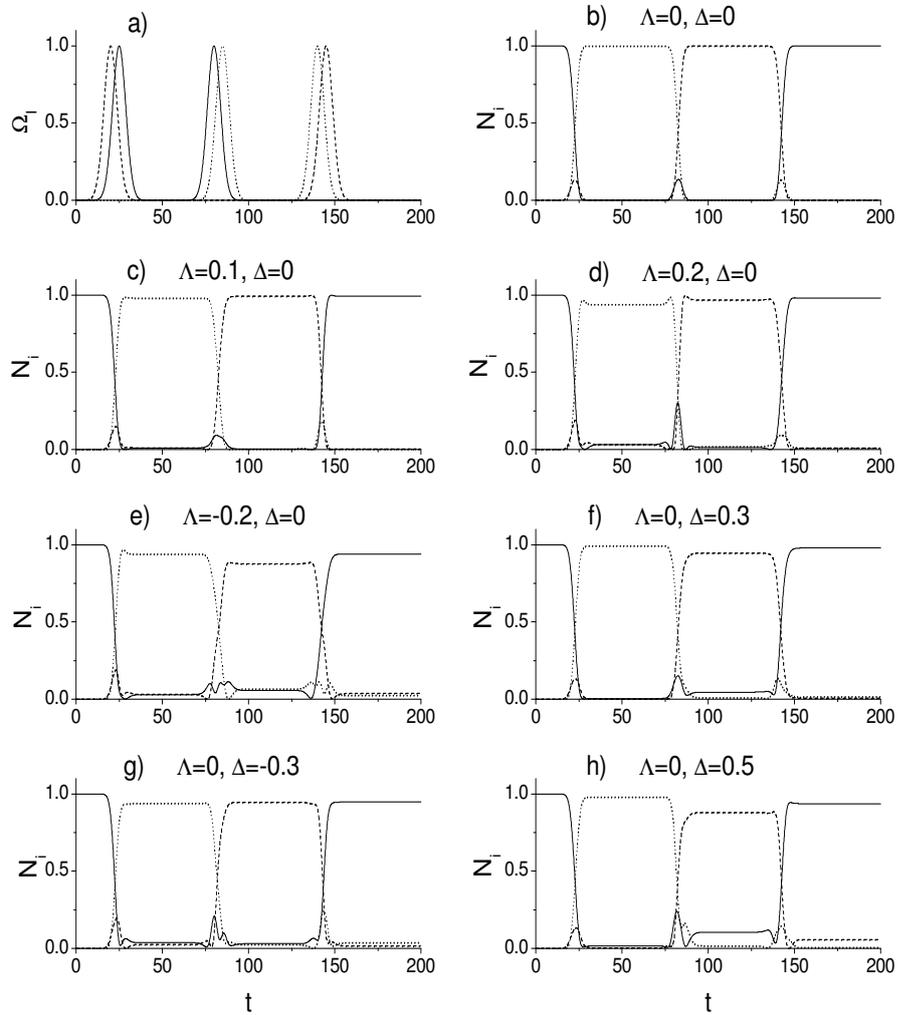


Рис. 4.3: Циклический СТИРАП транспорт в КБЭ. а) Последовательность пар импульсов разрядки Ω_S (первый в паре) и накачки Ω_P (второй), реализующих перенос заселённости между потенциальными ямами 1-3 (сплошная линия), 3-2 (прерывистая линия), 2-1 (пунктирная линия). б) Зависящие от времени заселённости потенциальных ям N_1 (сплошная линия), N_2 (прерывистая линия), N_3 (пунктирная линия) при различных значениях нелинейности Λ и асимметрии ям Δ .

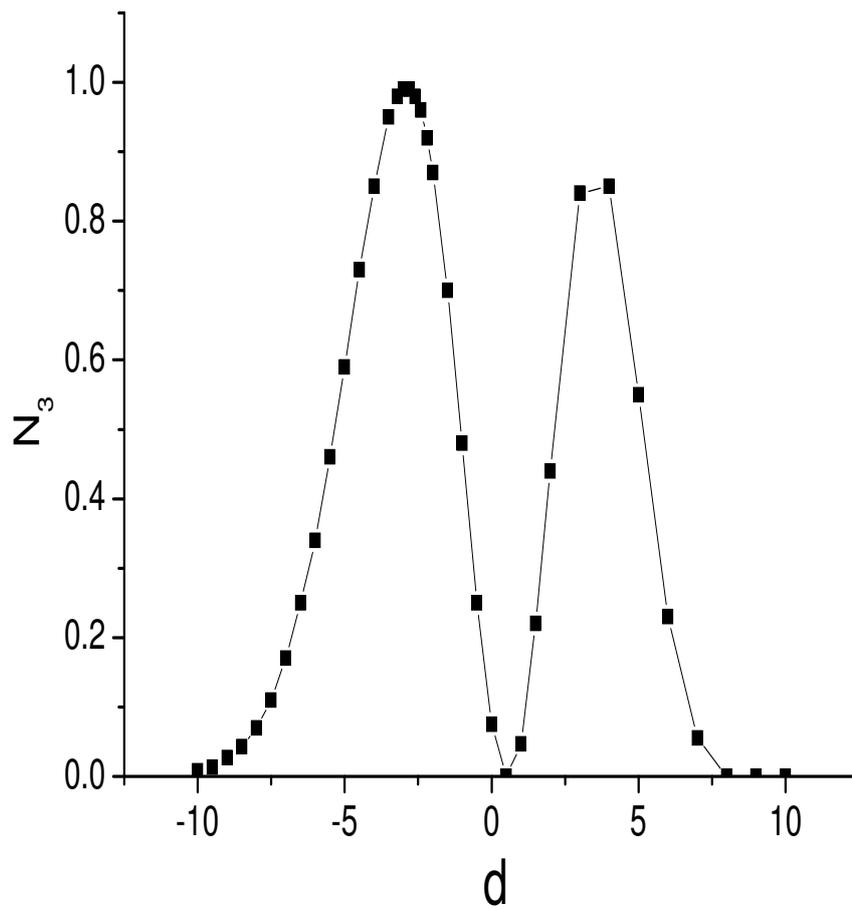


Рис. 4.4: Заселённость конечного состояния N_3 в зависимости от сдвига d между импульсами накачки Ω_P и разрядки Ω_S .

Заключение

Основные результаты диссертационной работы можно сформулировать в следующих положениях, выносимых на защиту:

1. Показано, что переход от слабой к сильной связи между левой и правой фракциями конденсата в двойной потенциальной яме характеризуется трансформацией осцилляций Джозефсона и макроскопического квантового самозахвата в режим высокочастотных осцилляций.
2. На основе переходов Ландау-Зинера (ПЛЗ) и Розена-Зинера разработана новая транспортная схема для КБЭ в ДПЯ — обобщённый переход Ландау-Зинера (ОПЛЗ). Показано, что предсказания ПЛЗ и ОПЛЗ различаются в адиабатическом пределе, но становятся близки при увеличении скорости процесса. Универсальность предложенных схем даёт возможность прямого и обратного нелинейного транспорта для конденсата с притягивающим и отталкивающим взаимодействием.
3. Установлено, что нелинейность способствует транспорту, реализуемому методами ПЛЗ и ОПЛЗ. А именно, в обоих методах увеличение нелинейности приводит к расширению диапазона скоростей процесса, формируя соответствующее плато. Свойства транспорта интерпретированы в приближении стационарных состояний.
4. Предложен метод, позволяющий осуществить инверсию заселённости КБЭ в ДПЯ (как частный вид транспорта) путём сдвига потенциального барьера. Анализ процесса основан на решении нелинейного УГП для единого параметра порядка. Показано, что взаимодействие в КБЭ ускоряет транспорт на 3 порядка и формирует плато скоростей, предсказанное в ОПЛЗ. Продемонстрировано, что данный вид транспорта можно рассматривать как проявление эффекта Джозефсона. Наблюдаемое плато соответствует диапазону возможного стационарного тока. При некоторой критической скоро-

сти, ограничивающей плато, происходит переход к осциллирующему джозефсоновскому току.

5. В рамках метода СТИРАП проведено сравнение транспорта конденсата в тройной потенциальной яме для различных значений нелинейности и асимметрии потенциала. Показано, что транспорт успешно реализуется при малых значениях нелинейности.

Исследования проводились в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова ОИЯИ в 2009-2014 годах. Представленные в диссертации расчёты выполнялись по оригинальным и существенно модернизированным диссертантом программам (в пакете MAPLE 10 и на Фортране). Основные результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в следующих работах:

1. Nesterenko V.O., Novikov A.N., de Souza Cruz F.F., Lapolli E.L. *STIRAP transport of Bose-Einstein condensate in triple-well trap* // **Laser Physics**-2008. -v. 19. -pp. 616-624.
2. Nesterenko V.O., Novikov A.N., Cherny A.Yu., de Souza Cruz F.F., Suraud E. *An adiabatic transport of Bose-Einstein condensates in double-well traps* // **Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics** -2009. -v. 42. -p. 235303 (8 pages).
3. Nesterenko V.O., Novikov A.N., Suraud E. *Adiabatic transport of Bose-Einstein condensates in a double-well trap: Case of weak nonlinearity* // **Laser Physics** -2010. -v. 20. -pp. 1149-1155.
4. Nesterenko V.O., Novikov A.N., Suraud E., Kvasil J. *Tunneling and transport dynamics of trapped Bose-Einstein condensates* // **Journal of Physics: Conference Series** -2010. -v. 248. -p. 012033 (8 pages).
5. Nesterenko V.O., Novikov A.N., Suraud E. *Strong-coupling dynamics of Bose-Einstein condensate in a double-well trap* // **Journal of Physics B: Atomic Molecular and Optical Physics** -2012. -v. 45. -p. 225303 (6 pages).
6. Nesterenko V.O., Novikov A.N., Suraud E. *Transport of the repulsive Bose-Einstein condensate in a double-well trap: interaction impact and relation to Josephson effect* // **arXiv**: 1409.0649 [cond-mat.quant-gas]. Принято к публикации в Laser Physics.

В заключении я выражаю особую благодарность своему научному руководителю Нестеренко Валентину Олеговичу за предоставление темы исследований, постоянную помощь и неоценимую поддержку в процессе работы. Я благодарен соавторам своих работ (Эрику Сьюро и Александру Юрьевичу Чёрному), составляющих основу данной диссертации. Хочу поблагодарить Юкалова Вячеслава Ивановича за многочисленные интересные обсуждения и полезную критику. Также я благодарен Дирекции Лаборатории теоретической физики за хорошие условия работы и создание благоприятной научной атмосферы.

Литература

- [1] Einstein A., Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Sitz. Ber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. **22**, 261 (1924).
- [2] Bose S. N., Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. Z. Phys. **26**, 178 (1924).
- [3] Kapitza P.L., Viscosity of Liquid Helium Below the λ -Point. Nature **141**, 74 (1938).
- [4] J.F. Allen and A.D. Misener, Flow of liquid Helium II. Nature **141**, 75 (1938).
- [5] London F. On the Bose-Einstein Condensation. Phys. Rev. **54**, 947 (1938).
- [6] Landau L.D., The theory of Superfluidity of Helium-III. J. Phys. U.S.S.R. **5**, 71 (1941).
- [7] Bogoliubov N.N., The microscopic theory of superfluidity. J. Phys. U.S.S.R. **11**, 23 (1947).
- [8] Penrose O and Onsager L., Bose-Einstein condensation and liquid helium. Phys. Rev. **104**, 576 (1956).
- [9] Pitaevskii L.P., Vortex lines in an imperfect Bose-gas. Zh. Eksp. Teor. Fiz.**40**, 646 [Sov. Phys. JETP **13**, 451] (1961).
- [10] Gross E.P., Structure of a quantized vortex in boson systems. Nuovo Cimento **20**, 454, (1961).
- [11] Gross E.P., Hydrodynamics of a Superfluid Condensate . J. Math. Phys. **4**, 195 (1963).
- [12] Phillips W.D., Laser cooling and trapping of neutral atoms. Rev. Mod. Phys. **70**, 721 (1998).

- [13] Ketterle W., van Druten N. J., Evaporative cooling of trapped atoms. *Adv. At. Mol. Opt. Phys* **37**, 181 (1996).
- [14] Anderson M.H., Ensher J.R., Matthews M.R., Wieman C.E., and Cornell E.A. Observation of Bose–Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. *Science* **269**, 198 (1995).
- [15] Davis K.B., Mewes M.O., Andrews M.R., van Druten N.J., Durfee D.S., Kurn D.M., Ketterle W., Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [16] Neuman K.C., Block S.M., Optical trapping. *Rev. Sci. Instrum.*, **75**, 2787 (2004).
- [17] Morsch O., Oberthaler M., Dynamics of Bose-Einstein condensates in optical lattices. *Rev. Mod. Phys.* **78**, 179 (2006).
- [18] Hänsel W., Hommelhoff P., Hänsch T.W., Reichel J., Bose–Einstein condensation on a microelectronic chip. *Nature* **413**, 498 (2001).
- [19] Ott H., Fortagh J., Schlotterbeck G., Grossmann A., Zimmermann C., Bose-Einstein Condensation in a Surface Microtrap. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 230401 (2001).
- [20] Zwierlein M.W., Stan C.A., Schunck C.H., Raupach S.M.F., Gupta S., Hadzibabic Z. and Ketterle W., Observation of Bose-Einstein Condensation of Molecules. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 250401 (2003).
- [21] Jochim S., Bartenstein M., Altmeyer A., Hendl G., Riedl S., Chin C., Denschlag J.H. and Grimm R., Bose–Einstein Condensation of Molecules. *Science* **302**, 2101 (2003).
- [22] Klaers J., Schmitt J., Vewinger F., Weitz M., Bose–Einstein condensation of photons in an optical microcavity. *Nature* **468**, 545 (2010).
- [23] Landau L.D. and Lifshitz E.M. *Quantum Mechanics* (3rd edition). Pergamon, London, 1987.
- [24] Andrews M.R., Townsend C.G., Miesner H.-J., Durfee D.S., Kurn D.M., Ketterle W., Observation of interference between two Bose condensates. *Science* **275**, 637 (1997).
- [25] Stoof H.T.C. Atomic Bose gas with a negative scattering length. *Phys. Rev. A.* **49**, 3824 (1994).

- [26] Moerdijk A.G., Stwalley W.C., Hulet R.G. and Verhaar B.J., Negative scattering length of ultracold Li-7 gas. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 40 (1994).
- [27] Feshbach H. Unified theory of nuclear reactions. *Ann. Phys.* **5**, 357 (1958).
- [28] Lin Y.-J., Jimenes-Garcia K., Spielman I.B. Spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates. *Nature* **471**, 83 (2011).
- [29] Stanescu T., Anderson B. and Galitski V.M., Spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates. *Phys.Rev. A* **78**, 023616 (2008).
- [30] Aikawa K., Frisch A., Mark M., Baier S., Reitzler A., Grimm R., Ferlaino F. Bose-Einstein condensation of Erbium. *Phys. Rev. Lett.* **108**, 210401 (2012).
- [31] Lahaye T., Menotti C., Santos L., Lewenstein M., Pfau T., The physics of dipolar bosonic quantum gases. *Rep. Prog. Phys.* **72**, 126401 (2009).
- [32] Dalfovo F., Giorgini S., Pitaevskii L.P. and Stringari S., Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [33] Legett A.J., Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts. *Rev. Mod. Phys.* **73**, 307 (2001).
- [34] Courteille P.W., Bagnato V.S., Yukalov V.I., Bose-Einstein condensation of trapped atomic gases. *Laser Phys.* **11**, 659 (2001).
- [35] Bloch I., Dalibard J., Zwirger W., Many-body physics with ultracold gases. *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
- [36] Pitaevskii L., Stringari S. Bose-Einstein condensation. Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [37] Pethick C.J., Smith H., Bose-Einstein condensation in dilute gases. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [38] Kevrekidis P.G., Frantzeskakis D.J., González R.C., Emergent nonlinear phenomena in Bose-Einstein condensates. Springer, 2007.
- [39] Dalton B. J, Two-mode theory of Bose-Einstein condensate interferometry. *J. Mod. Opt.* **54**, 615 (2007).
- [40] Dalton B. J and Ghanbari S., Two-mode theory of Bose-Einstein condensates: interferometry and the Josephson model. *J. Mod. Opt.* **59**, 287 (2012).

- [41] Sewell R.J., Dingjan J., Baumgärtner F., Llorente-Garcia I., Eriksson S., Hinds E.A., Lewis G., Srinivasan P., Muktadir Z., Gollasch C.O. and Kraft M., Atom chip for BEC interferometry. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **43**, 051003 (2010).
- [42] Gross C., Spin squeezing, entanglement and quantum metrology with Bose–Einstein condensates. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **45**, 103001 (2012).
- [43] Albiez M., Gati R., Foelling J., Hunsmann S., Cristiani M., Oberthaler M.K., Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping in a single bosonic Josephson junction. *Phys. Rev. Lett* **95**, 010402 (2005).
- [44] Levy S., Lahoud E., Shomroni I., Steinhauer J., The a.c. and d.c. Josephson effects in a Bose–Einstein condensate. *Nature* **449**, 579 (2007).
- [45] Hall D.S., Matthews M.R., Ensher J.R., Wieman C.E. and Cornell E.A., Dynamics of component separation in a binary mixture of Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1539 (1998).
- [46] Milburn G.J., Corney J., Wright E.M., Walls D.F., Quantum dynamics of an atomic Bose-Einstein condensate in a double-well potential. *Phys. Rev. A* **55**, 4318 (1997).
- [47] Holthaus M., Stenholm S., Coherent control of the self-trapping transition. *Eur. Phys. J. B* **20**, 451 (2001).
- [48] Smerzi A., Fantoni S., Giovanazzi S. and Shenoy S.R., Quantum coherent atomic tunneling between two trapped Bose-Einstein condensates, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4950 (1997).
- [49] Raghavan S., Smerzi A., Fantoni S. and Shenoy S.R., Coherent oscillations between two weakly coupled Bose-Einstein condensates: Josephson effect, π oscillations, and macroscopic quantum self-trapping. *Phys. Rev. A* **59**, 620 (1999)
- [50] Yukalov V.I, Yukalova E.P. and Bagnato V.S., Nonlinear coherent modes of trapped Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A* **66**, 043602 (2002).
- [51] Ostrovskaya E.A., Kivshar Yu.S., Lisak M., Hall B., Cattani F., Coupled-mode theory for Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A* **61**, 031601(R) (2000).

- [52] Vitanov N.V., Fleischhauer M., Shore B.W., Bergmann K., Coherent manipulation of atoms and molecules by sequential laser pulses. *Adv. Atom. Mol. Opt. Phys.* **46**, 55 (2001).
- [53] Kral P., Thanopoulos I., Shapiro M., Coherently controlled adiabatic passage. *Rev. Mod. Phys.* **79**, 53 (2007).
- [54] Bergmann K., Theuer H., Shore B.W., Coherent population transfer among quantum states of atoms and molecules. *Rev. Mod. Phys.* **70**, 1003 (1998).
- [55] Liu J., Fu L., Ou B.-Y., Chen S.-G., Wu B. and Niu Q., Theory of nonlinear Landau-Zener tunneling. *Phys. Rev. A* **66**, 023404 (2002).
- [56] Witthaut D., Graefe E.M., Korsch H.J., Towards a generalized Landau-Zener formula for an interacting Bose-Einstein condensate in a two-level system. *Phys. Rev. A* **73**, 063609 (2006).
- [57] Nesterenko V.O., Novikov A.N., Cherny A.Yu., de Souza Cruz F.F., Suraud E., An adiabatic transport of Bose-Einstein condensates in double-well traps. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **42**, 235303 (2009).
- [58] Wang F.-G., Ye D.-F., Fu L.-B., Chen X.-Z. and Liu J., Landau-Zener tunneling in a nonlinear three-level system. *Phys. Rev. A* **74**, 033414 (2006).
- [59] Ye D.-F., Fu L.-B. and Liu J., Rosen-Zener transition in a nonlinear two-level system. *Phys. Rev. A* **77**, 013402 (2008).
- [60] Wu B., Niu Q., Nonlinear Landau-Zener tunneling. *Phys. Rev. A* **61**, 023402 (2000).
- [61] Zobay O., Garraway B.M., Time-dependent tunneling of Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A* **61**, 033603 (2000).
- [62] Graefe E.M., Korsch H.J., Witthaut D., Mean-field dynamics of a Bose-Einstein condensate in a time-dependent triple-well trap: Nonlinear eigenstates, Landau-Zener models, and stimulated Raman adiabatic passage. *Phys. Rev. A* **73**, 013617 (2006).
- [63] Nesterenko V.O., Novikov A.N., de Souza Cruz F.F., Lapolli E.L., STIRAP transport of Bose-Einstein condensate in triple-well trap. *Laser Phys.* **19**, 616 (2008).

- [64] Rab M., Cole J.H., Parker N.G., Greentree A.D., Hollenberg L.C.L., Martin A.M., Spatial coherent transport of interacting dilute Bose gases. *Phys. Rev. A* **77**, 061602(R) (2008).
- [65] Nistazakis H.E., Rapti Z., Frantzeskakis D.J., Kevrekidis P.G., Sodano P., Trombettoni A., Rabi switch of condensate wave functions in a multicomponent Bose gas. *Phys. Rev. A* **78**, 023635 (2008).
- [66] Torrontegui E., Ibáñez S., Martínez-Garaot S., Modugno M., del Campo A., Guéry-Odelin D., Ruschhaupt A., Chen X., Muga J.G., Shortcuts to Adiabaticity. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **62**, 117 (2013).
- [67] Weiss C., Jinasundera T., Coherent control of mesoscopic tunneling in a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A* **72**, 053626 (2005).
- [68] Werschnik J. and Gross E.U.K., Quantum optimal control theory. *J. Phys. B* **40**, R175 (2007).
- [69] Brif C., Chakrabarti R. and Rabitz H., Control of quantum phenomena: past, present and future. *New J. Phys.* **12**, 075008 (2010).
- [70] Berry M.B., Transitionless quantum driving. *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 365303 (2009).
- [71] Torrontegui E., Martinez-Garaot S., Ruschhaupt A. and Muga J.G., Shortcuts to adiabaticity: Fast-forward approach. *Phys. Rev. A* **86**, 013601 (2012).
- [72] Torrontegui E., Chen Xi, Modugno M., Schmidt S., Ruschhaupt A., Muga J.G., Fast transport of Bose-Einstein condensates. *New J. Phys.* **14**, 013031 (2012).
- [73] Mele-Messeguer M., Julia-Diaz B., Guilleumas M., Polls A., Sanpera A., Weakly linked binary mixtures of $F=1$ Rb^{87} Bose-Einstein condensates. *New J. Phys.* **13**, 033012 (2011).
- [74] Nesterenko V.O., Novikov A.N., Suraud E., Strong-coupling dynamics of Bose-Einstein condensate in a double-well trap. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys* **45**, 225303 (2012).
- [75] Nesterenko V.O., Novikov A.N., Suraud E., Kvasil J., Tunneling and transport dynamics of trapped Bose-Einstein condensates. *J. Phys.: Conf. Ser* **248**, 012033 (2010).

- [76] Ruschhaupt A., Chen X., Alonso D., Muga J.G., Optimally robust shortcuts to population inversion in two-level quantum systems. *New J. Phys.* **14**, 093040 (2012).
- [77] Chen X., Lizuain I., Ruschhaupt A., Guéry-Odelin D., Muga J.G., Shortcut to Adiabatic Passage in Two- and Three-Level Atoms. *Phys. Rev. Lett.* **105**, 123003 (2010).
- [78] Lewis H.R. and Leach P.G.L, A direct approach to finding exact invariants for one-dimensional time-dependent classical Hamiltonians. *J. Math. Phys.* **23**, 2371 (1982).
- [79] Lewis H.R. and Riesenfeld W.B., An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field, *J. Math. Phys.* **10**, 1458 (1969).
- [80] Nesterenko V.O., Novikov A.N., Suraud E., Adiabatic transport of Bose-Einstein condensates in a double-well trap: Case of weak nonlinearity. *Laser Phys.* **20**, 1149 (2010).
- [81] Nesterenko V.O., Novikov A.N., Suraud E., Transport of the repulsive Bose-Einstein condensate in a double-well trap: interaction impact and relation to Josephson effect. arXiv:1312.2750v1 [cond-mat.quant-gas]. Принято к публикации в *Laser Physics*.
- [82] Giovanazzi S., Smerzi A., Fantoni S., Josephson effects in dilute Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4521 (2000).
- [83] Wright K.C., Blakestad R.B., Lobb C.J., Phillips W.D., Campbell G. K., Driving phase slips in a superfluid atom circuit with a rotating weak link. *Phys. Rev. Lett.* **110**, 025302 (2013).
- [84] Ryu C., Blackburn P.W., Blinova A.A., Boshier M.G., Experimental realization of Josephson junction for an atom SQUID. *Phys. Rev. Lett.* **111**, 205301 (2013).
- [85] Scherer D.R., Weiler C.N., Neely T.W, Anderson B.P., Vortex Formation by Merging of Multiple Trapped Bose-Einstein Condensates. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 110402 (2007).
- [86] Opatrny T. and Das K.K., Conditions for vanishing central-well population in triple well adiabatic transport. *Phys. Rev A.* **79**, 012113 (2009).

- [87] Lipparini E., Modern many-body physics: atomic physics, quantum dots and quantum fluids. World Scientific, Singapore, 2003.
- [88] Питаевский Л.П., Конденсация Бозе-Эйнштейна в магнитных ловушках. Введение в теорию. УФН **168**, 641 (1998).
- [89] Bagnato V.S., Pritchard D.E. and Kleppner D., Bose-Einstein condensation in an external potential. Phys. Rev. A **35**, 4354 (1987).
- [90] Bogolubov N.N., Lectures on quantum statistics (vol. 1). Gordon and Breach, New York, 1967.
- [91] Baum G., Pethick C.J., Ground-state properties of magnetically trapped Bose-condensed rubidium gas. Phys. Rev. Lett. **76**, 6 (1996).
- [92] Landau L.D., Statistical Physics. Butterworth-Heinemann, Oxford, 1937.
- [93] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Квантовая механика, М: Наука, 1974.
- [94] Ananikian D., Bergeman T., Gross-Pitaevskii equation for Bose particles in a double-well potential: two-mode models and beyond. Phys. Rev. A **73**, 013604 (2006).
- [95] Blum V., Lauritsch G., Maruhn J.A., Reinhard G.-P., Comparison of coordinate-space techniques in nuclear mean-field calculations. J. Comp. Phys. **100**, 364 (1992).
- [96] DeVries L.P., Application of the split operator Fourier transform method to the solution of the nonlinear Schroedinger equation. AIP Conf. Proc. **160**, 269 (1987).
- [97] Julia-Diaz B., Martorell J., Mele-Messeguer M., Polls A., Beyond standard two-mode dynamics in bosonic Josephson junctions. Phys. Rev. A **82**, 063626 (2010).
- [98] Landau L.D., Zur Theorie der Energieubertragung. II, Phys. Z. U. S. S. R. **2**, 46 (1932).
- [99] Zener C., Non-adiabatic crossing of energy levels. Proc. R. Soc. Lon. A **137**, 696 (1932).
- [100] Rosen N., Zener C., Double Stern-Gerlach experiment and related collision phenomena. Phys. Rev. **40**, 502 (1932).
- [101] Мессия А., Квантовая механика, том 2. М: Наука, 1979.

- [102] Josephson B.D., Possible new effects in superconductive tunnelling. Phys. Lett. **1**, 251 (1962).
- [103] Gati R., Bose-Einstein condensates in a single double-well trap. PhD thesis.
- [104] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М., Фейнмановские лекции по физике, т.9. М: Мир, 1967.
- [105] Шмидт В.В., Введение в физику сверхпроводников. М: МЦНМО, 2000.
- [106] Balakrishnan R., Mehta M., Geometric phase in a Bose-Einstein-Josephson junction. Eur. Phys. J. D **33**, 437 (2005).