

На правах рукописи

Поздеева Екатерина Олеговна

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ ФУНКЦИИ ГРИНА
УРАВНЕНИЯ ДИРАКА И ОДНОМЕРНЫЕ ТОЧНО
РЕШАЕМЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ МОДЕЛИ**

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва 2008

Работа выполнена в Институте химической физики им. Н.Н. Семенова Российской академии наук.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор

В.Г. Багров

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор

Г.В. Ефимов

доктор физико-математических наук,
профессор

Д.В. Гальцов

Ведущая организация:

Институт ядерных исследований РАН, г. Москва.

Защита диссертации состоится “_____” декабря 2008 г. в _____ час. на заседании диссертационного совета Д 720.001.01 в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан “_____” ноября 2008 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 720.001.01
кандидат физико-математических наук

А.Б. Арбузов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации

Изучением одномерного уравнения Дирака занимаются в таких областях современной физики, как одномерная суперсимметрия, одномерные ядерные модели, при анализе вопросов существования связанных состояний, изучении киральной симметрии трехмерного уравнения Дирака в безмассовом пределе, построении прозрачных потенциалов, исследовании спектральных свойств операторов, обусловленных их суперсимметричной структурой, а также при решении релятивистской проблемы туннелирования.

При построении большинства точно решаемых моделей для одномерного уравнения Дирака используется замкнутое соотношение между уравнением Дирака и суперсимметричной парой уравнений Шрёдингера. Нахождение же точных решений уравнений Шрёдингера, в свою очередь, основывается на хорошо проверенной алгебраической суперсимметричной технике, непосредственно связанной с техникой преобразований Дарбу.

В 1882 г. Г. Дарбу на основе решений одномерного уравнения Штурма–Лиувилля нашел формулы, позволяющие конструировать новые точно решаемые потенциалы уравнения Штурма–Лиувилля и соответствующие решения. В 1954 г. М. Крум сконструировал цепочки преобразований Дарбу n -ого порядка уравнения Шрёдингера. Современная концепция преобразований Дарбу принадлежит В. Б. Матвееву, обобщившему в 1979 г. результаты Дарбу–Крума применительно к бесконечным иерархиям линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

В настоящее время метод преобразований Дарбу обобщен на случай одномерного двухкомпонентного стационарного уравнения Дирака с произвольным матричным потенциалом. Одной из задач диссертации является систематическая разработка техники преобразований Дарбу и детальный анализ свойств преобразований Дарбу одномерного нестационарного уравнения Дирака с обобщенным матричным потенциалом.

В 2004 г. метод преобразований Дарбу (суперсимметричные преобразования) был применен С. В. Сакумаром к функциям Грина краевой задачи уравнения Шрёдингера с постоянной массой. При этом была получена формула для интеграла разности преобразованной и исходной функций Грина. Одной из задач диссертации является исследование преобразования Дарбу функции Грина краевой задачи уравнения Дирака и получение формул полного следа от разности преобразованной и исходной функций Грина. Интересной является также задача распространения аналогичной техники на функции Грина уравнения Шрёдингера с эффективной массой.

Границы применения преобразований Дарбу как метода анализа физических систем, решения спектральных задач (акустики океана), нахождения новых точно решаемых и интегрируемых моделей, включая космологические, расширяются.

Важное значение для понимания многих явлений в физике твердого тела и атомного ядра имеет изучение свойств релятивистской частицы, движущейся в одномерном *периодическом* потенциале. Этой задаче посвящен ряд работ, в которых для периодических продолжений точно решаемых потенциалов двухкомпонентного уравнения Дирака конструируются функции Ляпунова, позволяющие вычислить зонную структуру спектров. Одной из задач диссертации является приложение данной техники к Дарбу-преобразованному четырехкомпонентному уравнению Дирака, позволяющему выявить когерентно-швингеровское взаимодействие при каналировании нейтральных частиц спина $1/2$ в кристалле.

Данная диссертация посвящена *преобразованию Дарбу функции Грина* краевой задачи одномерного *уравнения Дирака*, нахождению *формул полного следа* от разности преобразованной и исходной функций Грина, обобщению *формул Сакумара* на случай преобразования Дарбу функции Грина краевой задачи одномерного *уравнения Дирака* и построению на основе метода преобразования Дарбу точно решаемых одномерных *моделей*. В данной работе идеи метода сплетающихся операторов применены для развития техники преобразования Дарбу одномерного *нестационарного* уравнения Дирака с эрмитовым матричным потенциалом *общего вида* (включающего в себя в

качестве частных случаев *скалярный, псевдоскалярный и векторный* потенциалы). Подробно исследованы *свойства* преобразования Дарбу нестационарного уравнения Дирака. С помощью техники преобразований Дарбу *четырёхкомпонентного уравнения Дирака* сконструирован ряд новых *тензорных* потенциалов четырёхкомпонентного уравнения Дирака. Для *каждого потенциала цепочки* сконструирована *функция Ляпунова*, позволяющая определить соответствующую зонную структуру.

Цель работы

1. Генерация ряда новых точно решаемых тензорных потенциалов одномерного четырёхкомпонентного уравнения Дирака с помощью преобразований Дарбу
2. Нахождение функций Ляпунова и изучение *зонной структуры* цепочки периодически продолженных точно решаемых тензорных потенциалов, сконструированных на основе метода преобразования Дарбу стационарного четырёхкомпонентного уравнения Дирака.
3. Обобщение метода преобразования Дарбу на одномерное *нестационарное* уравнения Дирака с произвольным матричным эрмитовым потенциалом. Получение явных выражений для оператора преобразования и потенциала преобразованного уравнения.
4. Изучение основных *свойств* преобразования Дарбу одномерного нестационарного уравнения Дирака.
5. Построение преобразования Дарбу функции Грина краевой задачи одномерного стационарного уравнения Дирака с потенциалом общего вида.
6. Конструирование формул полного следа от разности преобразованной и исходной функций Грина, обобщение формулы Саккумара на случай двухкомпонентного стационарного уравнения Дирака.

7. Построение преобразования Дарбу функции Грина краевой задачи и обобщение формулы Сакумара на случай одномерного уравнения Шрёдингера с эффективной массой.

Научная новизна и практическая ценность диссертации

Впервые техника преобразований Дарбу применена к *функциям Грина* регулярной краевой задачи одномерного стационарного уравнения Дирака.

Впервые систематически разработана техника преобразований Дарбу и детально проанализированы свойства преобразований Дарбу одномерного *нестационарного* уравнения Дирака с обобщенным матричным потенциалом.

Впервые техника преобразований Дарбу применена для одномерного *четырёхкомпонентного* стационарного уравнения Дирака, имеющего максимально адаптированный вид к конкретным физическим задачам.

Преобразование Дарбу нестационарного уравнения Дирака может найти применение в теории солитонов, а также в релятивистской квантовой механике, математической физике.

Точно решаемые модели четырёхкомпонентного одномерного уравнения Дирака могут найти применение при изучении движения релятивистских частиц в электромагнитных полях, наноструктур и изучении каналирования частиц в кристаллах.

Предложенный метод построения функции Грина может быть использован для теоретических расчетов различных процессов квантовой электродинамики и для решения спектральных задач в ядерной физике.

Положения, выносимые на защиту

- Преобразование Дарбу *функции Грина* регулярной краевой задачи одномерного стационарного уравнения Дирака:
 - конструирование преобразования Дарбу функции Грина краевой задачи одномерного стационарного уравнения Дирака с матричным эрмитовым потенциалом общего вида;

- нахождение формул полного следа от разности преобразованной и исходной функций Грина;
- обобщение теоремы Сакумара для случая одномерного стационарного уравнения Дирака.
- Обобщение метода операторов преобразования Дарбу на одномерное *нестационарное* уравнение Дирака:
 - построение матричного оператора преобразования Дарбу одномерного нестационарного уравнения Дирака с эрмитовым потенциалом общего вида и изучение его основных свойств;
 - исследование преобразования Дарбу нестационарного уравнения Дирака со скалярным потенциалом, нахождение условий, при которых тип преобразованного потенциала совпадает с исходным;
 - построение *интегрального* преобразования одномерного нестационарного уравнения Дирака с эрмитовым потенциалом, индуцированного преобразованием Дарбу этого уравнения.
- Применение техники преобразований Дарбу для случая *четырёхкомпонентного* одномерного стационарного уравнения Дирака
 - генерация семейства новых точно решаемых $(2n - 1)$ -солитонных гамильтонианов;
 - генерация ряда новых точно решаемых *тензорных* потенциалов уравнения Дирака;
 - построение *функции Ляпунова* для каждого периодического продолжения сгенерированного тензорного потенциала.

Апробация

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах: International Workshop *Classical and Quantum Integrable Systems* (January 21-24, Protvino, Russia 2008); *XXVIII*

международной конференции *Физика взаимодействия заряженных частиц с кристаллами* (27-29 мая, Москва 2008); *XVII-th International Colloquium Integrable Systems and Quantum Symmetries* (June 19-21, Prague, Czech Republic 2008); международной конференции *Математическая физика и ее приложения* (8-13 сентября, Самара 2008); *XX XVI* международной конференции *Физика взаимодействия заряженных частиц с кристаллами* (Москва, 2006); семинарах Лаборатории теоретической физики и Лаборатории информационных технологий Объединенного института ядерных исследований (Дубна, 2007).

Основные результаты диссертационной работы отражены в 9 публикациях.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Ее объем составляет 107 страниц, включает 8 рисунков и библиографию из 135 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность исследуемой проблемы, сформулирована цель и задачи диссертационной работы, проанализирована новизна и практическая ценность полученных в диссертации результатов, представлены положения, выносимые на защиту, описана структура диссертации.

В первой главе метод преобразования Дарбу применяется к одномерному четырехкомпонентному уравнению Дирака. Цепочками преобразований Дарбу сгенерированы точно решаемые гамильтонианы $H_n^{(i)}$ ($i = \overline{1, 4}$) вида

$$H_n^{(i)} = -i\alpha_1 \frac{d}{dx} \pm \varepsilon_n \beta \pm ink \operatorname{th}(kx) \gamma, \quad (1)$$

$\varepsilon_n = \sqrt{m^2 - n^2 k^2}$, $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, $\gamma = \alpha\beta$, k -параметр первого преобразования в цепочке. Сконструированные гамильтонианы связаны между собой соотношениями сплетения.

Исследуется структура спектров и собственных функций гамильтонианов $H_n^{(i)}$. Получены значения дискретных уровней энергии.

Для каждого периодизованного тензорного потенциала вида $\varepsilon_n \beta + i\gamma nk \tanh(kx)$ приведены функции Ляпунова

$$D_n(E) = 2[\cos(2pa)A_n(p, t_1) - (kt_1/p) \sin(2pa)]B_n(p, t_1), \quad (2)$$

$$t_1 = \text{th}(ka), \quad a = T/2, \quad p = \sqrt{E^2 - m^2} \quad (3)$$

где T – период. В общем случае (n принимает произвольные значения)

$$A_n = \frac{Im\Phi_n(\nu, t_1)}{\nu}, \quad B_n = \frac{Re\Phi_n(\nu, t_1)}{t_1}, \quad (4)$$

$$\Phi_n = \frac{(-1)^n \Gamma(1 + i\nu) \Gamma(1 + n - i\nu)}{\Gamma(1 - i\nu) \Gamma(n - i\nu)} \left\{ F(-n, n + 1; 1 - i\nu; \frac{1 - t_1}{2}) \right\}^2,$$

$F(-n, n + 1; 1 - i\nu; \frac{1 - t_1}{2})$ – гипергеометрическая функция, $\nu = \frac{p}{k}$.

Установлено, что преобразование Дарбу одномерного четырехкомпонентного уравнения Дирака позволяет сгенерировать достаточно реалистичное взаимодействие – когерентно–швингеровское.

Во второй главе на основе техники сплетающих операторов построено преобразование Дарбу одномерного нестационарного уравнения Дирака с самосопряженным потенциалом общего вида

$$V = \omega(x, t)I + (m + S(x, t))\sigma_3 + q(x, t)\sigma_1, \quad (5)$$

где σ_3, σ_1 – матрицы Паули, I – единичная матрица, $\omega(x, t), S(x, t), q(x, t)$ – функции от x и t , m – масса частицы.

Найден общий вид оператора преобразования первого порядка и преобразованного потенциала нестационарного уравнения Дирака, отличающийся от общего вида преобразованного потенциала в стационарном случае

$$L = A(\partial_x - u_x(x, t)u^{-1}(x, t)) \quad (6)$$

$$V_1 = iA_t A^{-1} - \gamma A_x A^{-1} + A([\gamma, u_x(x, t)u^{-1}(x, t)] + V_0)A^{-1}, \quad (7)$$

$$\gamma = i\sigma_2, \quad [A, \gamma] = 0, \quad (8)$$

где A – матричная функция от x и t , $u(x, t)$ – решение исходного матричного уравнения Дирака с потенциалом V_0 .

Подробно исследуются свойства преобразования Дарбу одномерного нестационарного уравнения Дирака. Исследуются условия, при которых преобразование Дарбу позволяет из скалярного потенциала (когда $\omega(x, t) \equiv 0$, $q(x, t) \equiv 0$) сконструировать снова скалярный потенциал. На основе свойств преобразования Дарбу строится преобразование, позволяющее сконструировать точно решаемый потенциал интегрального вида и соответствующие решения уравнения Дирака

$$V_2 = [\gamma, u(\int_{x_0}^x u^\dagger u dx' + C_1)^{-1} u^\dagger] + V_0, \quad (9)$$

$$\chi = L_{20}\psi = -L^\dagger L\psi - u(\int_{x_0}^x u^\dagger u dx' + C_1)^{-1} u^\dagger(\psi_x - u_x u^{-1}\psi), \quad (10)$$

где C_1 – эрмитова матрица.

В третьей главе рассматривается преобразование Дарбу функции Грина регулярной краевой задачи одномерного двухкомпонентного стационарного уравнения Дирака.

Выводятся формулы полного следа от разности преобразованной $G_1(x, x, E)$ и исходной $G_0(x, x, E)$ функций Грина:

$$\text{tr} \int_a^b (G_1(x, x, E) - G_0(x, x, E)) dx = \frac{\text{tr}(\psi \tilde{\varphi}^T)}{W\{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\}} \Big|_a^b, \quad (11)$$

$$\text{tr} \int_a^b (G_1(x, x, E) - G_0(x, x, E)) dx = \frac{\text{tr}(\tilde{\psi} \varphi^T)}{W\{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\}} \Big|_a^b, \quad (12)$$

φ, ψ – решения исходного уравнения Дирака. Спиноры $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ являются решениями преобразованного уравнения Дирака:

$$\tilde{\varphi} = L\varphi, \quad \tilde{\psi} = L\psi, \quad L = \partial_x - u_x u^{-1}, \quad (13)$$

где $u = (u_1(x), u_2(x))$ – матричная функция преобразования сконструированная из спиноров $u_1(x)$ и $u_2(x)$, являющихся решениями исходного уравнения Дирака при $E = \lambda_1$ и $E = \lambda_2$ соответственно.

Теорема Сакумара обобщается на случай функций Грина уравнения Дирака с самосопряженным потенциалом общего вида

$$\text{tr} \int_a^b G_1(x, x, E) - G_0(x, x, E) dx = \frac{1}{E - \lambda_1} + \frac{1}{E - \lambda_2} \quad (14)$$

и на случай уравнения Шрёдингера с эффективной массой.

В заключении перечислены основные результаты, полученные в диссертации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Методом преобразований Дарбу сгенерирована цепочка точно решаемых тензорных потенциалов четырехкомпонентного уравнения Дирака.
2. Для каждого периодического продолжения потенциалов цепочки найдены аналитически выраженные алгебраические конструкции, отвечающие за устойчивость решений стационарного уравнения Дирака с периодическими потенциалами.
3. Методом преобразований Дарбу сконструировано двухпараметрическое семейство точно решаемых дираковских гамильтонианов. Получены соотношения сплетения между различными членами этого семейства.
4. Метод преобразования Дарбу обобщен на одномерное *нестационарное* уравнение Дирака с самосопряженным потенциалом общего вида. Найдено, что оператор преобразования и потенциал преобразованного уравнения определяются зависящей от времени матричной функцией преобразования, которая является одним из матричных решений исходного нестационарного уравнения Дирака.
5. Исследованы свойства преобразования Дарбу одномерного *нестационарного* уравнения Дирака.
 - Установлено, что, в отличие от стационарного уравнения Дирака, взаимнооднозначное соответствие между пространствами решений исходного и преобразованного уравнений отсутствует. Но при определенных условиях можно установить взаимнооднозначное соответствие между ядрами операторов преобразования Дарбу и сопряженного к нему оператора преобразования.

- Найдены условия, при которых посредством преобразования Дарбу одномерного нестационарного уравнения Дирака из скалярного потенциала генерируется снова скалярный потенциал.
- 6. На основе исследованных свойств преобразования Дарбу построено преобразование, с помощью которого конструируются точно решаемые потенциалы интегрального вида нестационарного уравнения Дирака. Найден соответствующий вид решений. Сформулированы условия, при которых интегральное преобразование позволяет сгенерировать из скалярного потенциала снова скалярный потенциал. С помощью преобразования Дарбу и интегрального преобразования сконструированы новые точно решаемые потенциалы одномерного нестационарного уравнения Дирака.
- 7. Рассмотрено преобразование Дарбу функции Грина регулярной краевой задачи одномерного стационарного двухкомпонентного уравнения Дирака.
- 8. Получены формулы полного следа от разности преобразованной и исходной функций Грина регулярной краевой задачи одномерного стационарного двухкомпонентного уравнения Дирака.
- 9. Теорема Сакумара обобщена на случай преобразования Дарбу регулярной краевой задачи уравнения Дирака с самосопряженным матричным потенциалом общего вида и на случай преобразования Дарбу регулярной краевой задачи уравнения Шрёдингера с эффективной массой.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ

1. А. А. Печерицын, Е. О. Поздеева, Б. Ф. Самсонов, *Преобразование Дарбу нестационарного уравнения Дирака*. Известия вузов. Физика, **4**, 34-41 (2005).
2. Е. О. Поздеева. *Применение метода преобразования Дарбу и исследование волновых функций релятивистских частиц со спином $1/2$ при движении в периодическом потенциале Пешля-Теллера*. Математика и ее приложения, **3**, 39-50 (2006).
3. Е. О. Поздеева, *Метод преобразования Дарбу для исследования волновых функций релятивистских частиц при каналировании в кристалле*, Поверхность, **3**, 66–71 (2007).
4. E. Pozdeeva, *Darboux transformation of the Green Function for the Dirac Equation with the General Potential*. Int. J. Mod. Phys. A, **23**, 247-258 (2008).
5. E. Pozdeeva, *Connection between the Green functions of the supersymmetric pair of Dirac Hamiltonians*, J. Phys. A, **41**, 145208-145217 (2008).
6. E. Pozdeeva, A. Schulze-Halberg, *A trace formula for Dirac Green's functions related by Darboux transformations*, J. Phys. A, **41**, 265201-265214 (2008).
7. E. Pozdeeva, A. Schulze-Halberg, *The Formula for Green's Functions of Effective Mass Schrödinger equations and Nth – Order Darboux Transformations*, Int. J. Mod. Phys. A, **23**, 2635-2647 (2008).
8. Е. О. Поздеева, *Новое двупараметрическое семейство точно решаемых дираковских*, ТМФ, (2009), принята к печати [arXiv: 0807.1422 (hep-th)].
9. Е. О. Поздеева, *Когерентно–швингеровское взаимодействие из преобразований Дарбу*. Поверхность, **4**, 1–4 (2009), принята к печати [arXiv: 0708.4000 (hep-th)].