

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

КЛОПОТ

Ярослав Николаевич

**АКСИАЛЬНАЯ АНОМАЛИЯ И ПЕРЕХОДНЫЕ
ФОРМФАКТОРЫ МЕЗОНОВ**

01.04.02 – Теоретическая физика

Диссертация на соискание
ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель – доктор
физико-математических наук
О.В. Теряев

Научный консультант – кандидат
физико-математических наук
А.Г. Оганесян

Дубна 2014

Оглавление

Введение	3
1 Аномальное правило сумм и переходный формфактор пиона	9
1.1 Аксиальные токи и их дивергенции	9
1.2 Аномальное правило сумм в изовекторном канале	10
1.3 Адронные вклады и коллективный эффект мезонного спектра	13
1.4 Кварк-адронная дуальность	15
1.5 Экспериментальные данные и “проблема BABAR”	19
1.6 Компенсация поправок в аномальном правиле сумм	20
1.7 Вид поправки к переходному формфактору пиона	21
2 Октетный канал аномального правила сумм и смешивание	27
2.1 Аномальное правило сумм в октетном канале	28
2.2 Смешивание	30
2.3 Константы распада η, η' мезонов	35
2.4 Параметры смешивания: сравнение	42
2.5 Логарифмическая поправка в октетном канале	44
2.6 Интервал дуальности в октетном канале	49
3 Переходные формфакторы η и η' мезонов	57
3.1 Переходные формфакторы η и η' мезонов	57
3.2 Аномальное правило сумм во времени-подобной области	60
3.2.1 Переходный формфактор пиона во времени-подобной области и модель векторной доминантности	61
3.2.2 η и η' мезоны во времени-подобной области	66
3.3 Массовая поправка	71
Заключение	80
Литература	83

Введение

Симметрии и связанные с ними законы сохранения играют важнейшую роль в современных представлениях о фундаментальных взаимодействиях. Преобразования симметрии - это преобразования, не меняющие физические свойства системы. В классической физике это означает, что действие соответствующей системы (а следовательно и уравнения движения) остается инвариантными при таких преобразованиях. Согласно первой теореме Нётер, каждой глобальной симметрии отвечает сохраняющийся ток, который собственно и выражает закон сохранения, поскольку приводит к наличию сохраняющегося заряда.

Квантовой аномалией называется такое явление, при котором, при переходе к квантовой теории происходит нарушение классической симметрии и соответствующего закона сохранения.

В дальнейшем мы будем интересоваться аксиальной (называемой также киральной) $U_A(1)$ аномалией. Вкратце опишем, в чем она заключается. Рассмотрим безмассовый Лагранжиан Дирака, он является инвариантным при преобразовании полей

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{-i\Theta\gamma_5} \Psi.$$

Соответствующий Нётеровский ток

$$j_{5\mu} = \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \Psi$$

сохраняется в классической теории,

$$\partial^\mu j_{5\mu} = 0,$$

в то же время в квантовой теории возникает ненулевое значение дивергенции этого тока

$$\partial^\mu j_{5\mu} = -\frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta},$$

где $F_{\mu\nu}$ является тензором электромагнитного поля. Эту аномалию называют также аномалией Адлера-Белла-Джекива [1, 2].

Распад нейтрального пиона $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ является вероятно наилучшим примером процесса, который практически полностью происходит благодаря аксиальной аномалии. Исторически исследование именно этого процесса привело к открытию квантовых аномалий.

Явление аксиальной аномалии играет важную роль в непертурбативной КХД и физике адронов. Обнаруженная впервые при исследовании ширины распада нейтрального пиона, аксиальная аномалия стала важным физическим примером и послужила импульсом к исследованию квантовых аномалий в широком классе теорий поля. Известно значение аномалий в Стандартной модели.

Сегодня квантовые аномалии являются предметом исследования в самых разных областях фундаментальной науки - в гравитации, теории струн, теории твердого тела, описании столкновений тяжелых ионов.

Диссертация посвящена изучению аксиальной аномалии, связанной с “историческим” примером распада псевдоскалярных мезонов. Хорошо известно, что аксиальная аномалия определяет двухфотонный распад π^0 мезона ($\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$) с большой точностью - это довольно редкий случай, когда теория так хорошо описывает низкоэнергетический процесс. Однако, использование дисперсионного вида аксиальной аномалии [3–7] оказывается исключительно продуктивным и при исследовании процессов с виртуальными фотонами.

Одним из следствий дисперсионного подхода к аксиальной аномалии является так называемое аномальное правило сумм [5–7]. В частности, оно позволяет описать переходные формфакторы π^0 , η и η' [8–16] мезонов при произвольных переданных импульсах виртуального фотона Q^2 и без использования КХД факторизации. Этот метод также нашел применение в работах [18, 19].

Переходные формфакторы мезонов дают важную информацию о динамике КХД, позволяя проверить наше понимание свойств КХД как низкоэнергетической области, где играют существенную роль непертурбативные эффекты, так и в области высоких энергий, где имеются предсказания пертурбативной КХД.

В последние годы появился ряд экспериментальных данных, исследующих пе-

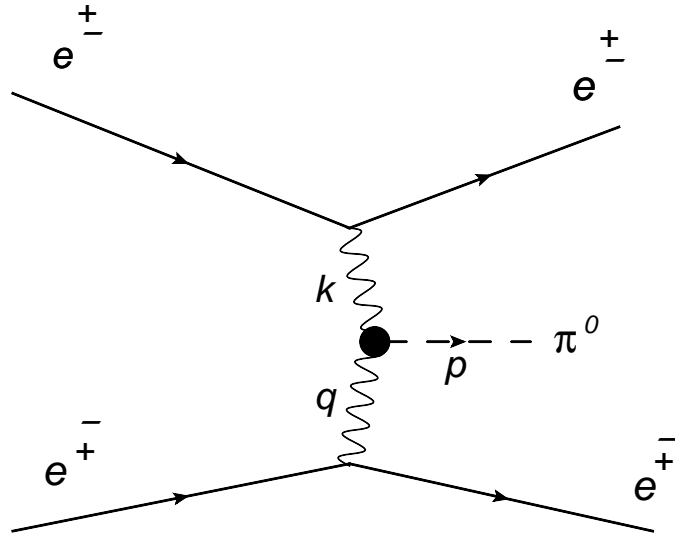


Рис. 1: Процесс рождения π^0 мезона при e^+e^- рассеянии.

реходы $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0(\eta, \eta')$, имеющих хорошую точность и достигающих 35 ГэВ^2 по переданному импульсу виртуального фотона [20–22]. Второй фотон в этих экспериментах находится практически на массовой поверхности. Эти эксперименты проводятся на электрон-позитронных коллайдерах – диаграмма исследуемых процессов приведена на Рис. 1.

Особый интерес у научного сообщества вызвали данные коллаборации BABAR, появившиеся в 2009 году [20]. Переходный формфактор пиона, измеренный этой коллаборацией, выявил систематическое превышение теоретических значений при $Q^2 = 10 - 35 \text{ GeV}^2$. При этом поведение формфактора указывало на превышение – с явной тенденцией к дальнейшему росту – предела, предсказанного из пертурбативной КХД [24]

$$Q^2 F_{\pi\gamma} \rightarrow \sqrt{2} f_\pi, \quad f_\pi = 0.1307 \text{ GeV}.$$

При меньших значениях $Q^2 < 10 \text{ GeV}^2$ эти экспериментальные данные в целом неплохо согласовывались и с большинством теоретических расчетов, и с более ранними данными CELLO [25] и CLEO [26]. Конечно, такой неожиданный экспериментальный результат вызвал значительный интерес теоретиков. В результате, переходные формфакторы были (повторно) исследованы с использованием правил сумм на све-

товом конусе [27–30], включая различные модификации пионной амплитуды распределения [31–33], в подходе голографической КХД [34, 35], в различных модельных подходах, как, например, киральная кварковая модель и ее различные модификации [36, 37], модели векторной доминантности и ее модификации [38, 39]. Некоторые другие подходы в исследовании переходных формфакторов можно найти в работах [40–46].

Хотя позже появились измерения переходного формфактора пиона коллаборацией Belle [22], которые уже не показывали такого роста пионного формфактора, как в случае BABAR, тем не менее, данные BABAR остаются (см. [23]) и требуют объяснения. Ожидаемые высокоточные данные коллабораций BES-III [47], KLOE-2 [48] (в пространственно-подобной области, т.е. при $-Q^2 = q^2 < 0$) и CLAS [49] (во времени-подобной области, т.е. при $q^2 > 0$), а также дальнейшие теоретические исследования (в особенности подходы, применимы в обеих областях) разрешит эту проблему протеворечивости данных и даст нам более полное понимание переходных формфакторов мезонов, а следовательно, и свойств адронов.

Целью настоящей диссертации является развитие применение метода, основанного на аномальных правилах сумм. В рамках поставленной цели в диссертации решаются следующие задачи:

- вычисление переходного формфактора пиона с помощью аномального правила сумм;
- получение оценки поправки к спектральной плотности, позволяющей объяснить весь спектр экспериментальных данных переходного формфактора пиона;
- оценка параметров смешивания η и η' мезонов с помощью аномального правила сумм в октетном канале;
- вычисление переходных формфакторов η и η' мезонов;
- получение выражений для переходных формфакторов π^0 , η и η' мезонов во времени-подобной области с помощью аналитического продолжения аномального правила сумм;
- оценка кварковых массовых поправок.

Основные результаты диссертации отражены в работах [8–17].

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения.

В **первой главе** приводится краткое описание вывода аномального правила сумм в изовекторном канале, которое затем применяется для исследования переходного формфактора пиона. Обсуждается коллективный эффект мезонного спектра. Получено обоснование интерполяционной формулы Бродского-Лепажя для переходного формфактора пиона. В связи с данными BABAR, проведено исследование возможности поправки к переходному формфактору пиона. Предложен вид такой поправки.

Во **второй главе** приводится исследование адронных вкладов в октетном канале аномального правила сумм. В этом канале низшие адронные вклады дают значительно смешивающиеся η и η' мезоны. Исследуются различные схемы смешивания в η - η' системе. Определяются константы распада η и η' мезонов в разных схемах смешивания, а также схемно-независимым образом. Обсуждается численное значение порога континуума в октетном канале в контексте кварк-адронной дуальности.

В **третьей главе** получены выражения для переходных формфакторов η и η' мезонов, проведено сравнение с экспериментальными данными. Исследованы поправки от масс кварков. Исследуются переходные формфакторы во времени-подобной области, обсуждается связь с моделью векторной доминантности.

В **заключении** приводятся результаты, выносимые на защиту.

Благодарности.

Я хотел бы поблагодарить моего научного руководителя О.В. Теряева за постановку интересных задач и разъяснения научных вопросов. Я очень признателен ему за помощь, поддержку и внимание к моей работе.

Особо также хочу поблагодарить моего научного консультанта А.Г. Оганесяна за многочисленные обсуждения, ценные советы, внимание и отзывчивость.

Выражаю признательность коллективу Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, с которыми в разное время имел интересные и полезные обсуждения, в частности, И. Аникину, С. Михайлову, С. Ге-

расимову, С. Голоскокову, А. Дорохову, А. Пимикову, А. Беднякову, С. Григорьеву,
В. Погосяну, А. Патрушеву, Г. Вартанову, Ш.Х. Танйылдызы.

Глава 1

Аномальное правило сумм и переходный формфактор пиона

1.1 Аксиальные токи и их дивергенции

Аксиальная аномалия в КХД приводит к неисчезающей дивергенции аксиального тока в киральном пределе. Рассмотрим октет аксиальных токов

$$J_{\mu 5}^{(a)} = \sum_q \bar{q} \gamma_5 \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{\sqrt{2}} q,$$

($a = 1, \dots, 8$, суммирование происходит по ароматам u, d, s , λ^a - матрицы Гелл-Манна) и синглетный аксиальный ток

$$J_{\mu 5}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 u + \bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 d + \bar{s} \gamma_\mu \gamma_5 s).$$

Синглетный аксиальный ток имеет электромагнитный и глюонный аномальные члены:

$$\begin{aligned} \partial^\mu J_{\mu 5}^{(0)} = & \frac{1}{\sqrt{3}} (m_u \bar{u} \gamma_5 u + m_d \bar{d} \gamma_5 d + m_s \bar{s} \gamma_5 s) + \\ & \frac{\alpha_{em}}{2\pi} C^{(0)} N_c F \tilde{F} + \frac{\sqrt{3} \alpha_s}{4\pi} N_c G \tilde{G}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $N_c = 3$ - число цветов, F и G - тензоры электромагнитного и глюонного полей, \tilde{F} и \tilde{G} - их дуальные выражения

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}G_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

В то же время, дивергенции токов

$$J_{\mu 5}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 u - \bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 d)$$

и

$$J_{\mu 5}^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 u + \bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 d - 2\bar{s}\gamma_\mu\gamma_5 s)$$

имеют только электромагнитный аномальный член:

$$\begin{aligned} \partial^\mu J_{\mu 5}^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(m_u\bar{u}\gamma_5 u - m_d\bar{d}\gamma_5 d) + \\ &\quad \frac{\alpha_{em}}{2\pi}C^{(3)}N_c F\tilde{F}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \partial^\mu J_{\mu 5}^{(8)} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(m_u\bar{u}\gamma_5 u + m_d\bar{d}\gamma_5 d - 2m_s\bar{s}\gamma_5 s) + \\ &\quad \frac{\alpha_{em}}{2\pi}C^{(8)}N_c F\tilde{F}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Электромагнитные зарядовые факторы $C^{(a)}$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned} C^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_u^2 - e_d^2) = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \\ C^{(8)} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(e_u^2 + e_d^2 - 2e_s^2) = \frac{1}{3\sqrt{6}}, \\ C^{(0)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(e_u^2 + e_d^2 + e_s^2) = \frac{2}{3\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В дальнейшем, для краткости, компоненты $J_{\mu 5}^{(3)}$ и $J_{\mu 5}^{(8)}$ будем называть *изовекторным* и *октетным* током соответственно.

1.2 Аномальное правило сумм в изовекторном канале

Следуя [6], приведем в сокращенном виде вывод аномального правила сумм, которое будет использоваться в дальнейшем.

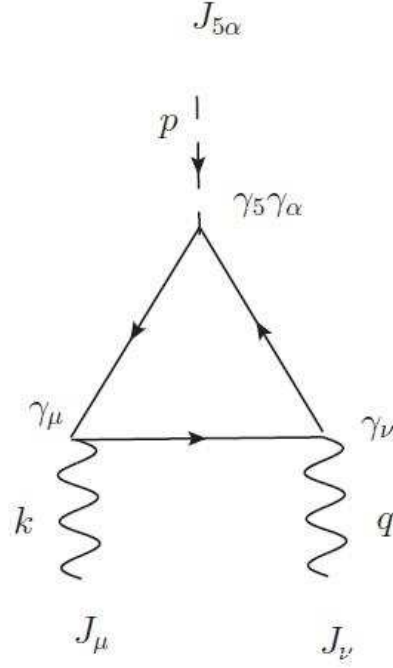


Рис. 1.1: Треугольная диаграмма.

Вычисление матричных элементов операторных соотношений (1.4) и (1.5), которые связаны с фотон-пионными переходами, приводит к трехточечной амплитуде, составленной из аксиального тока $J_{\alpha 5}^{(3)}$ с импульсом $p = k + q$ и двух электромагнитных токов

$$J_\mu = ((2/3)\bar{u}\gamma_\mu u - (1/3)\bar{d}\gamma_\mu d)$$

с импульсами k и q (VVA-амплитуда)

$$T_{\alpha\mu\nu}(k, q) = \int d^4x d^4y e^{(ikx+iqy)} \langle 0 | T \{ J_{\alpha 5}(0) J_\mu(x) J_\nu(y) \} | 0 \rangle. \quad (1.7)$$

Эту амплитуду можно представить в виде разложения на шесть тензорных структур [50] (также используются другие разложения, см. например [51, 52]):

$$\begin{aligned} T_{\alpha\mu\nu}(k, q) = & F_1 \varepsilon_{\alpha\mu\nu\rho} k^\rho + F_2 \varepsilon_{\alpha\mu\rho\nu} q^\rho \\ & + F_3 k_\nu \varepsilon_{\alpha\mu\rho\sigma} k^\rho q^\sigma + F_4 q_\nu \varepsilon_{\alpha\mu\rho\sigma} k^\rho q^\sigma \\ & + F_5 k_\mu \varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} k^\rho q^\sigma + F_6 q_\mu \varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} k^\rho q^\sigma, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где коэффициенты $F_j = F_j(p^2, k^2, q^2; m^2)$, $j = 1, \dots, 6$ являются Лоренц-инвариантными амплитудами (формфакторами). Эти формфакторы не содержат кинематических сингулярностей и удобны для дисперсионного представления, который используется для вывода аномальных правил сумм.

Симметрии амплитуды $T_{\alpha\mu\nu}(k, q)$ накладывают ограничения на формфакторы F_j .

Бозе-симметрия предполагает инвариантность при перестановках $\mu \leftrightarrow \nu, k \leftrightarrow q$ в тензорных структурах и $k^2 \leftrightarrow q^2$ в аргументах скалярных функций F_j :

$$\begin{aligned} F_1(k, q) &= -F_2(q, k), \\ F_3(k, q) &= -F_6(q, k), \\ F_4(k, q) &= -F_5(q, k). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Векторные тождества Уорда для амплитуды $T_{\alpha\mu\nu}(k, q)$

$$k^\mu T_{\alpha\mu\nu} = 0, \quad q^\nu T_{\alpha\mu\nu} = 0 \tag{1.10}$$

в терминах формфакторов выражаются следующим образом:

$$F_1 = (k \cdot q) F_3 + q^2 F_4, \quad F_2 = k^2 F_5 + (k \cdot q) F_6. \tag{1.11}$$

Аномальное тождество Уорда для $T_{\alpha\mu\nu}(k, q)$ [1, 2]

$$p^\alpha T_{\alpha\mu\nu}(k, q) = 2m T_{\mu\nu}(k, q) + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho q^\sigma \tag{1.12}$$

в терминах формфакторов выглядит так:

$$F_2 - F_1 = 2mG + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}, \tag{1.13}$$

где G формфактор, связанный с псевдотензором 2-го ранга $T_{\mu\nu}$ который входит в “нормальный член” в уравнении (1.12):

$$T_{\mu\nu}(k, q) = G \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho q^\sigma. \tag{1.14}$$

Выписывая дисперсионные соотношения без вычитаний для формфакторов, получаем конечное вычитание дивергенции аксиального тока приводящее к аномальному правилу сумм в нужной нам кинематической конфигурации ($k^2 = 0, q^2 \neq 0$) [6]:

$$\int_{4m^2}^{\infty} A_3(s, q^2; m^2) dt = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}, \quad (1.15)$$

где

$$A_3(s, q^2; m^2) = \frac{1}{2} \text{Im}_{p^2} (F_3(s, q^2; m^2) - F_6(s, q^2; m^2)). \quad (1.16)$$

Аномальное правило сумм (3.8) обладает несколькими важными свойствами: пертурбативные и пертурбативные поправки к интегральному члену отсутствуют¹. Пертурбативных поправок нет вследствие теоремы Адлера-Бардина [53]. Непертурбативные поправки также должны быть нулевыми вследствие принципа т'Хофта. Принцип т'Хофта в изначально предложенной форме [54] предполагает, что аномалии фундаментальных полей воспроизводятся на адронном уровне. В дисперсионном подходе это означает отсутствие поправок к дисперсионным правилам сумм.

Нужно подчеркнуть, что сама спектральная плотность $A_3(s, Q^2; m^2)$ может иметь поправки - и пертурбативные и непертурбативные - однако интеграл

$$\int_{4m^2}^{\infty} A_3(s, Q^2; m^2) ds$$

должен в точности равняться аномальному члену $\frac{1}{2\pi}$. Также заметим, что поправки первого порядка по α_s к A_3 в безмассовом случае, как следует из [55], равны нулю.

1.3 Адронные вклады и коллективный эффект мезонного спектра

Формфактор $F_{\pi\gamma}$ перехода $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*$ определяется матричным элементом:

$$\int d^4x e^{ikx} \langle \pi^0(p) | T \{ J_\mu(x) J_\nu(0) \} | 0 \rangle = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho q^\sigma F_{\pi\gamma}, \quad (1.17)$$

где k, q - импульсы фотонов, $p = k + q$, $J_\mu = ((2/3)\bar{u}\gamma_\mu u - (1/3)\bar{d}\gamma_\mu d)$ - электромагнитный ток легких кварков.

¹В случае синглетного тока ($a = 0$) это свойство не выполняется из-за наличия глюонной аномалии.

Трехточечная корреляционная функция $T_{\alpha\mu\nu}(k, q)$ имеет вклады пиона (полюс при $p^2 = m_\pi^2$) и высших состояний:

$$T_{\alpha\mu\nu}(k, q) = \frac{if_\pi}{p^2 - m_\pi^2} p_\alpha k^\rho q^\sigma \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\pi\gamma} + (\dots), \quad (1.18)$$

где f_π константа распада пиона, которая определяется как проекция тока $J_{5\alpha}^{(3)}$ на однопионное состояние:

$$\langle 0 | J_{5\alpha}^{(3)} | \pi^0(p) \rangle = ip_\alpha f_\pi. \quad (1.19)$$

Константа распада пиона $f_\pi = 130.7$ MeV экспериментально хорошо определена из распада заряженного пиона $\pi^- \rightarrow \mu^- \nu$. При этом константы распада нейтрального и заряженного пионов совпадают с большой точностью, как было показано в [56].

Используя кинематические тождества

$$\delta_{\alpha\beta}\epsilon_{\sigma\mu\nu\tau} - \delta_{\alpha\sigma}\epsilon_{\beta\mu\nu\tau} + \delta_{\alpha\mu}\epsilon_{\beta\sigma\nu\tau} - \delta_{\alpha\nu}\epsilon_{\beta\sigma\mu\tau} + \delta_{\alpha\tau}\epsilon_{\beta\sigma\mu\nu} = 0, \quad (1.20)$$

можем выделить пионный вклад в $\frac{1}{2}(F_3 - F_6)$. Следовательно, вклад пиона в $Im(F_3 - F_6)/2$ (мнимая часть берется по p^2) будет

$$\frac{1}{2}Im(F_3 - F_6) = f_\pi \pi F_{\pi\gamma}(Q^2) \delta(s - m_\pi^2), \quad (1.21)$$

где $Q^2 = -q^2$.

Известно, что при $Q^2 = 0$ пионный вклад насыщает аномальное правило сумм (1.15) [3] и $F_{\pi\gamma}$ выражается через ширину распада $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ [2]:

$$F_{\pi\gamma}(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2 f_\pi}. \quad (1.22)$$

С другой стороны, при $Q^2 \neq 0$ в пертурбативной хромодинамике при использовании факторизации, в ведущем порядке по константе распада предсказывается значение переходного формфактора пиона [24, 57]:

$$F_{\pi\gamma}(Q^2) = \frac{\sqrt{2}f_\pi}{3Q^2} \int_0^1 dx \frac{\varphi_\pi(x, Q^2)}{x} + \mathcal{O}(1/Q^4), \quad (1.23)$$

где $\varphi_\pi(x)$ обозначает функцию распределения пиона. Пионная амплитуда распределения зависит от масштаба перенормировки [24, 58] и при больших Q^2 принимает

простой асимптотический вид [59] $\varphi_\pi^{\text{asympt}}(x) = 6x(1-x)$. Это приводит к асимптотическому поведению переходного формфактора пиона:

$$F_{\pi\gamma}^{\text{asympt}}(Q^2) = \frac{\sqrt{2}f_\pi}{Q^2} + \mathcal{O}(1/Q^4). \quad (1.24)$$

Таким образом, вклад пиона в аномальное правило сумм (1.15):

$$2\pi f_\pi^2/Q^2. \quad (1.25)$$

Можно заметить, что при $Q^2 \neq 0$ аномальное правило сумм (1.15) не может быть насыщено только пионным вкладом из-за поведения $1/Q^2$, поэтому нужно рассматривать вклады высших резонансов. Более массивные псевдоскалярные состояния имеют такое же поведение и подавлены фактором m_π^2/m_{res}^2 , как следует из ЧСАТ (поскольку $\partial_\mu J_\mu^3$ зануляется в киральном пределе). Другие вклады представлены аксиальными мезонами, самым легким из которых является $a_1(1260)$ мезон. На самом деле вклад продольно-поляризованного a_1 мезона ведет себя при больших Q^2 аналогичным образом (1.24). Вклад поперечно-поляризованного a_1 в (1.15) убывает еще быстрее. То же самое можно сказать о мезонах с более высокими спинами. Таким образом, можно сделать важный вывод: в случае $Q^2 \neq 0$ аномальное соотношение не может быть описано с помощью любого конечного количества мезонов, поскольку все переходные формфакторы являются убывающими функциями. Поэтому, можно сделать вывод, что только бесконечное количество высших состояний может насытить аномальное правило сумм, и, следовательно, при $Q^2 \neq 0$ *аксиальная аномалия является коллективным эффектом мезонного спектра* в отличие от случая с реальными фотонами $Q^2 = 0$, когда аномальное правило сумм насыщается одним пионным вкладом.

Следует также заметить, что этот вывод не зависит от конкретного вида пионной амплитуды распределения.

1.4 Кварк-адронная дуальность

В предыдущем разделе, выделяя адронные вклады, мы в определенной мере уже полагались на кварк-адронную дуальность. Теперь перейдем к анализу аномального

правила сумм (1.15) с использованием кварк-адронной дуальности. Исходя из гипотезы кварк-адронной дуальности, представим спектральную плотность A_3 в виде вкладов пиона (наинизшего состояния спектра адронов в изовекторном канале) и континуума:

$$A_3(s, Q^2) = \pi f_\pi \delta(s - m_\pi^2) F_{\pi\gamma}(Q^2) + A_3 \theta(s - s_0^{(3)}), \quad (1.26)$$

где $s_0^{(3)}$ - порог континуума.

Подставляя (1.26) в (1.15), получим правило сумм в следующем виде:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}\pi} = \pi f_\pi F_{\pi\gamma}(Q^2) + \int_{s_0^{(3)}}^{\infty} ds A_3. \quad (1.27)$$

Однопетлевое вычисление в безмассовом случае [52, 60] приводит к простому выражению для функции спектральной плотности:

$$A_3(s, Q^2) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \frac{Q^2}{(s + Q^2)^2}, \quad (1.28)$$

и следовательно, аномальное правило сумм выглядит так:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}\pi} = \pi f_\pi F_{\pi\gamma}(Q^2) + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_{s_0^{(3)}}^{\infty} ds \frac{Q^2}{(s + Q^2)^2}. \quad (1.29)$$

Проведя интегрирование, получаем выражение для переходного формфактора пиона

$$F_{\pi\gamma}(Q^2) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2 f_\pi} \frac{s_0^{(3)}}{s_0^{(3)} + Q^2}. \quad (1.30)$$

При $Q^2 = 0$ функция спектральной плотности (1.28) пропорциональна $\delta(s)$, таким образом соответствующий вклад континуума зануляется. Это соответствует тому, что вклады аксиальных состояний равны нулю, а вклады высших псевдоскалярных состояний должны быть подавлены, чтобы обеспечить сохранение аксиального тока в киральном пределе.

Порог континуума пиона был вычислен из двухточечных правил сумм в пионерских работах Шифмана-Вайнштейна-Захарова [64], $s_0^\pi = 0.75 \text{ GeV}^2$.

Также порог континуума $s_0^{(3)}$ можно определить [8] из асимптотики аномального правила сумм при больших Q^2 используя асимптотическое значение пионного формфактора (1.24), вычисленное в пертурбативной КХД [24]. Из (1.24) и (1.30) немедленно получаем: $s_0^{(3)} = 4\pi^2 f_\pi^2 = 0.67 \text{ GeV}^2$. Подставляя это выражение в (1.30), получим выражение для пионного формфактора при произвольных $Q^2 \geq 0$

$$F_{\pi\gamma}(Q^2) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2 f_\pi} \frac{1}{1 + Q^2/(4\pi^2 f_\pi^2)}. \quad (1.31)$$

Полученное выражение было предложено в качестве интерполяционной формулы в работах Бродского и Лепажя [57] (исходя из известных пределов при $Q^2 = 0$ и $Q^2 \rightarrow \infty$), а также позже было получено Радюшкиным в подходе локальной кварк-адронной дуальности [65]. Подчеркнем, что теперь эта формула получила обоснование из аномального правила сумм - точного непертурбативного КХД соотношения, прямого следствия дисперсионного подхода к аксиальной аномалии.

Интересно также расширить модель кварк-адронной дуальности добавлением следующего резонанса - аксиального a_1 мезона. С учетом вклада этого мезона, аномальное правило сумм (1.15) будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}\pi} = \pi f_\pi F_{\pi\gamma}(Q^2) + I_{a_1} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_{s_1}^{\infty} ds \frac{Q^2}{(s + Q^2)^2}, \quad (1.32)$$

где I_{a_1} обозначает вклад a_1 мезона (который в принципе может быть аналогично пиону выражен через формфакторы), s_1 - порог континуума в модели " $\pi^0 + a_1 +$ континуум".

Используя асимптотическую формулу пионного формфактора (1.30), можно оценить поведение вклада a_1 мезона при больших Q^2

$$I_{a_1} = \frac{1}{2\pi} Q^2 \frac{s_1 - s_0}{(s_1 + Q^2)(s_0 + Q^2)}. \quad (1.33)$$

Это уравнение можно рассматривать в качестве интерполяционной формулы для вклада a_1 , при этом асимптотики больших и малых Q^2 выполняются - соответствующий вклад зануляется.

График для вкладов π^0 , a_1 мезонов и континуума (для порога континуума $s_1 = 2.5 \text{ GeV}^2$) показан на Рис. (1.3). Этот график демонстрирует коллективный эффект: вклады от бесконечного числа высших резонансов (вклад континуума) начинают доминировать при сравнительно небольших значениях $Q^2 \simeq 1.5 \text{ GeV}^2$.

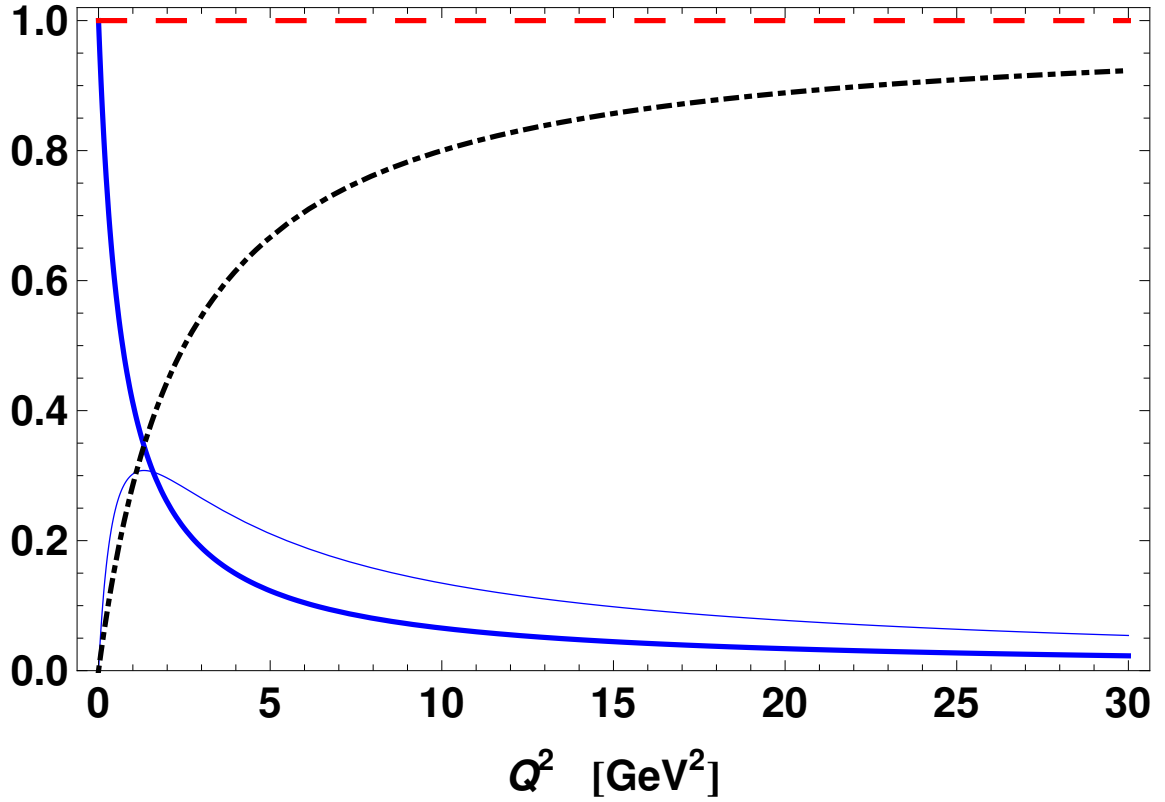


Рис. 1.2: Относительные вклады π^0 (толстая синяя линия), a_1 (тонкая синяя линия) мезонов (интервалы дуальности $s_0 = 0.7 \text{ GeV}^2$ и $s_1 - s_0 = 1.8 \text{ GeV}^2$ соответственно) и континуума (пунктирно-точечная линия) (порог континуума $s_1 = 2.5 \text{ GeV}^2$) в аномальное правило сумм (пунктирная красная прямая).

1.5 Экспериментальные данные и “проблема BABAR”

К настоящему моменту данные измерений переходного формфактора пиона коллаборациями CELLO [25], CLEO [26], BABAR [20] и Belle [22] покрывают область $Q^2 = 0.7\text{--}35 \text{ GeV}^2$ (см. Рис. 1.3). В то время, как при $Q^2 < 10 \text{ GeV}^2$ все данные вполне согласуются друг с другом, при бóльших виртуальностях данные BABAR и более поздние данные Belle существенно различаются. Данные BABAR демонстрируют стабильную тенденцию к росту, наблюдается систематичное превышение (кроме одной точки) приведенного ранее теоретического асимптотического значения [24] $Q^2 F_{\pi\gamma} \rightarrow \sqrt{2} f_\pi$, $f_\pi = 0.1307 \text{ GeV}$. Такое поведение формфактора оказалось неожиданным - в рамках пертурбативной КХД предсказывался монотонный выход формфактора на близкие к асимптотическому значения, подобно формуле Бродского-Лепаж. Эти экспериментальные данные естественно вызвали значительный интерес у физического сообщества: это, в конечном итоге, подвергало сомнению вычисления формфактора, основанные на КХД факторизации и указывало на упущение в стандартном подходе КХД каких-то существенных свойств адронов. Несколько исследований, основанных на правилах сумм на световом конусе пришли к выводу, что в рамках современных представлений о КХД данные BABAR не могут быть удовлетворительно объяснены [?, 27–30]. Через два года вышли данные коллаборации Belle [22], которые уже не имели такого противоречия с теоретическим описанием. И тем не менее, “проблема BABAR” до сих пор остается, поскольку коллаборация BABAR свои данные не отзывала (см. недавнюю публикацию [23]).

Учитывая отличие данных Belle и BABAR, при численном анализе рассмотрим два набора данных: CELLO+CLEO+Belle (набор данных I) и CELLO+CLEO+BABAR (набор данных II).

Сравнивая переходный формфактор (1.31) с набором экспериментальных данных I (с данными Belle), получаем хорошее описание с $\chi^2/d.o.f. = 1.01$, где $d.o.f. = 35$ - количество степеней свободы. Пунктирная линия на Рис. 1.3 обозначает график, заданный формулой (1.31). В то же время данные II (с данными BABAR) описываются этим выражением ожидаемо хуже: $\chi^2/d.o.f. = 2.29$, $d.o.f. = 37$.

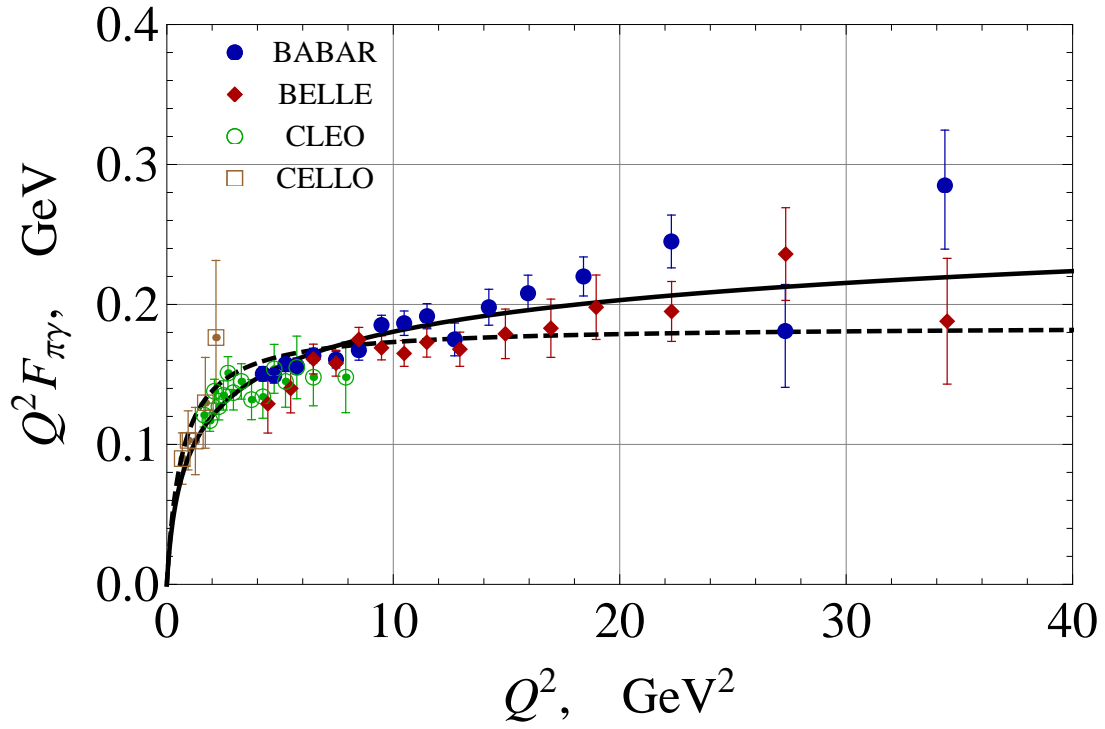


Рис. 1.3: Переходный формфактор π^0 мезона (умноженный на Q^2) как функция Q^2 . Пунктирная кривая – без поправки (1.31), непрерывная кривая – с поправкой (1.40).

Таким образом, если данные BABAR правильны, возникает необходимость исследования возможных поправок к формуле (1.31).

1.6 Компенсация поправок в аномальном правиле сумм

Как уже было замечено, аномальное правило сумм является точным (т.е. $\int_0^\infty A_3(s; Q^2) ds$ не имеет поправок). Однако спектральная плотность может иметь поправку (обозначим ее δA_3), которая приведет к поправкам ко вкладам континуума

$$\delta I_{cont} = \int_{s_0^{(3)}}^\infty \delta A_3 ds$$

и адронов. Конечно, при этом, для сохранения правила сумм, поправки к отдельным членам (вкладам резонансов и континуума) в результате должны взаимно компенсироваться.

Рассмотрим в качестве примера модель “ π^0 +континуум”. Из уравнения (1.29) лидирующие вклады пиона и континуума:

$$I_\pi^0 = \pi f_\pi F_{\pi\gamma}^0(Q^2) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \frac{s_0^{(3)}}{s_0^{(3)} + Q^2}, \quad (1.34)$$

$$I_{cont}^0 = \int_{s_0^{(3)}}^{\infty} A_3^{(3)}(s, Q^2) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \frac{Q^2}{s_0^{(3)} + Q^2}, \quad (1.35)$$

при этом имеется связь между поправками к пиону и континууму

$$\delta I_\pi + \delta I_{cont} = 0. \quad (1.36)$$

Важно, что лидирующие вклады пиона (1.34) и континуума (1.35) имеют *существенно разное поведение* по Q^2 , в результате степенная $1/Q^2$ поправка к континууму оказывается порядка главного члена вклада пиона. Это приводит к тому, что при больших Q^2 малая относительная поправка к континууму может приводить к значительной поправке к пионному вкладу, а следовательно и к пионному формфактору. Действительно, из (1.34), (1.35) и (1.36) отношение относительных поправок

$$\left| \frac{\delta I_{cont}/I_{cont}^0}{\delta I_\pi/I_\pi^0} \right| = \frac{s_0^{(3)}}{Q^2}. \quad (1.37)$$

Например, при $Q^2 = 20 \text{ GeV}^2$, $s_0 = 0.7 \text{ GeV}^2$ относительная поправка пиона почти в 30 раз больше относительной поправки континуума.

1.7 Вид поправки к переходному формфактору пиона

Обсудим теперь источники возможных поправок в спектральной плотности. Однопетлевые поправки в спектральную функцию в вектор-вектор-аксиальном корреляторе в безмассовом пределе равны нулю, как следует из результатов [55]. Если это сокращение происходит благодаря конформной инвариантности [66,67], то можно ожидать ненулевых двухпетлевых и высших поправок из-за эффектов бета-функции, которые недавно были обнаружены в приближении мягкого фотона [68]. Тем не менее,

эти высшие α_s -поправки, а также поправки из операторного разложения, достаточно малы, чтобы произвести к увеличению переходного формфактора, измеренного ВАВАР: $\delta F_{\pi\gamma} \sim \log(Q^2)/Q^2$. Ясно, что из соображений размерности, такой член не может появиться в локальном операторном разложении.

Заметим также, что даже если учесть поправку от масс кварков, и вместо полюсных значений масс кварков (которые дают пренебрежимо малый вклад в пионном случае), будут использованы некоторые большие эффективные массы – такая поправка только ухудшит описание данных ВАВАР из-за отрицательного знака (обсуждение таких поправок приведем в Главе 3).

Поэтому поправка, обсуждаемая далее, возникает не из локального операторного разложения, воспроизводя вклад оператора размерности 2. Возможными источниками такой поправки могут быть нелокальные конденсаты, инстантоны или короткие струны [69].

Хотя явный вид этой поправки неизвестен, можно предложить ее простейший вид, полагаясь на общие ограничения аномального правила сумм. А именно, поправка должна зануляться

- при $s_0^{(3)} \rightarrow \infty$ (вклад континуума в этом пределе зануляется),
- при $s_0^{(3)} \rightarrow 0$ (полный интеграл аномального правила сумм не имеет поправок),
- при $Q^2 \rightarrow \infty$ (пертурбативная теория в пределе больших Q^2 работает хорошо),
- при $Q^2 \rightarrow 0$ (аномалия отлично описывает ширину двухфотонного распада пиона).

Поэтому, такая поправка представима в виде

$$\delta I_\pi = \frac{s_0^{(3)} Q^2}{(s_0^{(3)} + Q^2)^2} f\left(\frac{Q^2}{s_0^{(3)}}\right), \quad (1.38)$$

где f - безразмерная функция $Q^2/s_0^{(3)}$ и, возможно, некоторых параметров.

Ожидая поведения поправки типа $\log(Q^2)/Q^2$ (для описания данных ВАВАР), можно предложить простейшую (хотя и не единственную) форму такой поправки:

$$\delta I_\pi = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \frac{\lambda s_0^{(3)} Q^2}{(s_0^{(3)} + Q^2)^2} \left(\ln \frac{Q^2}{s_0^{(3)}} + \sigma \right), \quad (1.39)$$

где λ и σ - безразмерные параметры. Тогда переходный формфактор пиона с учетом поправки будет иметь вид:

$$F_{\pi\gamma}(Q^2) = \frac{1}{\pi f_\pi} (I_\pi + \delta I_\pi) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2 f_\pi} \frac{s_0^{(3)}}{s_0^{(3)} + Q^2} \left[1 + \frac{\lambda Q^2}{s_0^{(3)} + Q^2} \left(\ln \frac{Q^2}{s_0^{(3)}} + \sigma \right) \right]. \quad (1.40)$$

В качестве порога континуума в (1.40) будем использовать $s_0^{(3)} = 4\pi^2 f_\pi^2 = 0.67 \text{ GeV}^2$, что предполагает восстановление факторизации при больших Q^2 . Тем не менее, даже в случае нарушения факторизации при всех Q^2 , можно использовать другое значение $s_0^{(3)}$, например, полученное из правил сумм Шифмана-Вайнштейна-Захарова [64]. Более того, можно рассмотреть вариант с зависимым от Q^2 порогом континуума [43], который приведет к эффективному изменению параметра σ .

Аппроксимация набора данных (II) функцией (1.40) методом минимизации функции хи-квадрат дает значения параметров $\lambda = 0.14$, $\sigma = -2.36$, при этом $\chi^2/d.o.f. = 0.94$ ($d.o.f. = 35$). График формфактора пиона (умноженного на Q^2) с этими параметрами приведен на Рис. 1.3 в виде непрерывной кривой. Нужно заметить, что предложенная поправка меняет свой знак при $Q^2 \simeq 8 \text{ GeV}^2$, улучшая описание данных по сравнению с формфактором без поправки и при $Q^2 \lesssim 8 \text{ GeV}^2$, и при $Q^2 \gtrsim 8 \text{ GeV}^2$. Также $F_{\pi\gamma}$ (1.40) с этими же параметрами λ, σ хорошо описывает и набор данных (I) с $\chi^2/d.o.f. = 0.84$ ($d.o.f. = 37$).

В итоговой Таблице (1.7) приведены результаты фитирования функции без поправки (Ур. (1.31), столбец в таблице обозначен $\delta I_\pi = 0$) и с поправкой (Ур. (1.40), столбец в таблице обозначен $\delta I_\pi \neq 0$) различных наборов данных. Видно, что наборы данных, не включающие данные BABAR, могут быть хорошо описаны и без поправки, однако поправка позволяет улучшить и такие данные. Наборы же данных с включением данных BABAR описываются намного хуже, если не учитывать поправку.

Необходимо заметить, что поправка (1.39) требует члена типа $\log Q^2$ в самой спектральной плотности δA_3 . Такая форма поправки отличается от поправки, предложенной в работе [18] и может соответствовать ей в случае, если бы прелогариф-

	$\delta I_\pi = 0 : \chi^2/d.o.f.$	$\delta I_\pi \neq 0 : \chi^2/d.o.f.$	λ	σ
CELLO+CLEO+BABAR+Belle	1.86	0.91	0.12	-2.50
CELLO+CLEO+Belle (set I)	1.01	0.46	0.07	-3.03
CELLO+CLEO+BABAR (set II)	2.29	0.94	0.14	-2.36
BABAR	3.61	0.99	0.20	-2.39
Belle	0.80	0.40	0.14	-2.86

Таблица 1.1: $\chi^2/d.o.f.$ из Ур. (1.31) ($\delta I_\pi = 0$) и лучший фит Ур. (1.40) ($\delta I_\pi \neq 0$) с различными наборами экспериментальных данных.

мический фактор в (1.39) не зависел от $s_0^{(3)}$. Однако, такая поправка нарушила бы приведенное выше условие зануления (в пределе $s_0^{(3)} \rightarrow 0$).

Также есть явное отличие нашей модели поправки от естественного появления члена $\log Q^2$ в треугольной амплитуде, где сама треугольная амплитуда была использована в качестве модели для переходного формфактора [36]. В нашем же подходе член $\log Q^2$ возникает в спектральной плотности, и в переходном формфакторе возникает вследствие интегрирования.

Интересно также получить зависимость относительной поправки к вкладу континуума в аномальное правило сумм от Q^2 , и сравнить его, используя выражения для формфактора $F_{\pi\gamma}^*$, полученного в разных подходах:

$$|\delta I_{cont}/I_{cont}^0| = \sqrt{2}\pi f_\pi (F_{\pi\gamma}^* - F_{\pi\gamma}^0)/I_{cont}^0 = \frac{2\sqrt{2}\pi^2 f_\pi (s_0 + Q^2)}{Q^2} F_{\pi\gamma}^* - \frac{s_0}{Q^2}. \quad (1.41)$$

На Рис. 1.4 показано отношение $\delta I_{cont}/I_{cont}^0$ полученное 1) для нашего фита (непрерывная кривая) и 2) извлеченного нами из работы [31] (пунктирная кривая). Видно, что относительная поправка к континууму действительно мала, хотя это, как уже было подчеркнуто выше, приводит к значительной относительной поправке к пионному формфактору.

Таким образом, исходя из точного непертурбативного аномального правила сумм получена формула для переходного формфактора пиона при произвольных виртуальностях фотона Q^2 . При $Q^2 = 0$ она связана с шириной распада пиона, а при $Q^2 \rightarrow \infty$, основываясь на асимптотике, вычисленной в пертурбативной КХД, полученная формула приводит к выражению для интервала дуальности (т.е. поро-

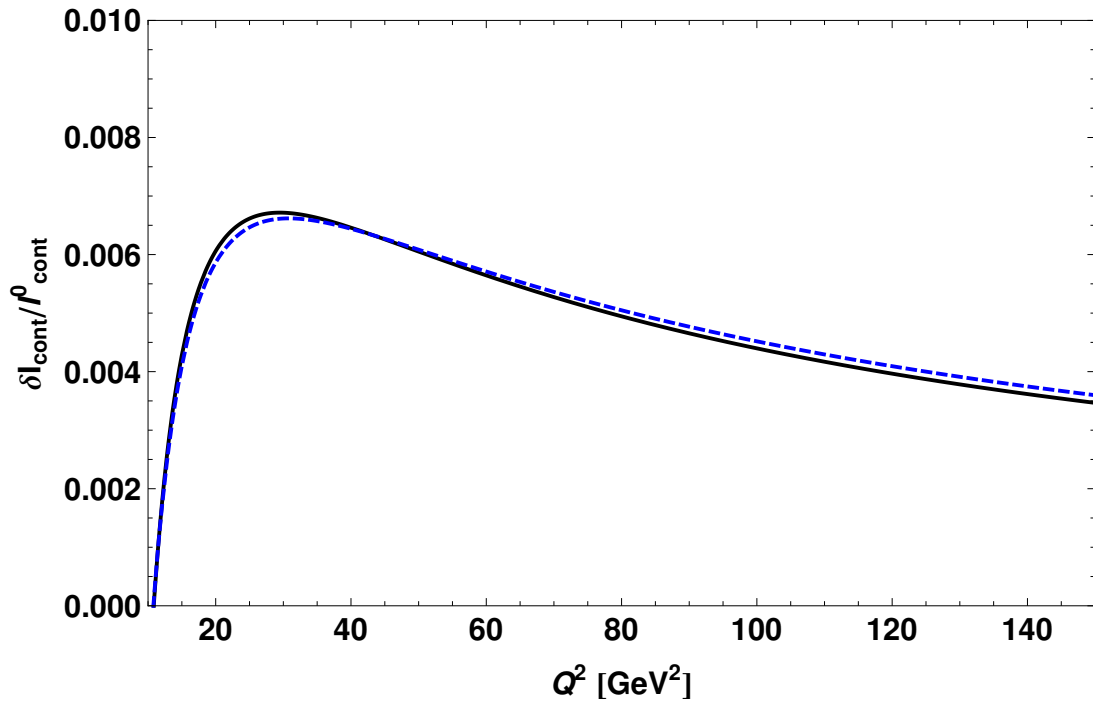


Рис. 1.4: Относительная поправка к континууму $\delta I_{cont}/I_{cont}^0(Q^2)$: наш фит (1.40) (непрерывная черная кривая) и фит, полученный в [31] (пунктирная синяя кривая).

га континуума в модели $\pi^0 + continuum$). Полученное выражение для переходного формфактора пиона применимо даже при нарушении КХД факторизации за счет поправки, выходящей за рамки операторного разложения. Проведен анализ современных экспериментальных данных показывающий, что они не исключают наличие такой поправки, хотя и не указывают однозначно на её существование.

В случае, когда КХД факторизация выполняется, полученная формула обосновывает интерполяционную формулу Бродского-Лепаж.

Глава 2

Октетный канал аномального правила сумм и смешивание

Как уже было отмечено в предыдущей главе, аномальное правило сумм можно записать также для восьмой компоненты октетного тока

$$J_{\mu 5}^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{u}\gamma_{\mu}\gamma_5 u + \bar{d}\gamma_{\mu}\gamma_5 d - 2\bar{s}\gamma_{\mu}\gamma_5 s).$$

Используя общие обозначения из раздела 1.1, изовекторный и октетный случаи аномального правила сумм запишутся в виде

$$\int_{4m^2}^{\infty} A_3^{(a)}(s, Q^2; m^2) ds = \frac{1}{2\pi} N_c C^{(a)}, \quad a = 3, 8, \quad (2.1)$$

где

$$A_3(p^2, Q^2; m^2) = \frac{1}{2} I m_{p^2} (F_3(p^2, Q^2; m^2) - F_6(p^2, Q^2; m^2)),$$

m - масса кварка, индекс a обозначает изовекторную ($a = 3$) либо октетную ($a = 8$) компоненту октета аксиальных токов.

Тогда, насыщая левую часть трехточечного коррелятора (1.7) резонансами и выделяя их вклады в аномальное правило сумм (3.8), получим (бесконечную) сумму резонансов с соответствующими квантовыми числами:

$$\pi \sum f_M^a F_{M\gamma} = \int_{4m^2}^{\infty} A_3^{(a)}(s, Q^2; m^2) ds = \frac{1}{2\pi} N_c C^{(a)}. \quad (2.2)$$

Здесь проекции аксиальных токов $J_{5\alpha}^{(a)}$ на одномезонные состояния $M (= \pi^0, \eta, \eta')$

определяют константы связи (распада) f_M^a

$$\langle 0 | J_{\alpha 5}^{(a)}(0) | M(p) \rangle = i p_\alpha f_M^a, \quad (2.3)$$

а формфакторы $F_{M\gamma}$ переходов $\gamma\gamma^* \rightarrow M$ определены матричными элементами

$$\int d^4x e^{ikx} \langle M(p) | T \{ J_\mu(x) J_\nu(0) \} | 0 \rangle = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho q^\sigma F_{M\gamma}. \quad (2.4)$$

Таким образом соотношение (2.2) выражает глобальную дуальность между адронами и кварками.

2.1 Аномальное правило сумм в октетном канале

Рассмотрим подробнее случай восьмой компоненты октета аксиальных токов (октетного тока). По сравнению со случаем изовекторного тока, рассмотренного в предыдущей главе, здесь имеются некоторые особенности.

Во-первых, наинизшие состояния, дающие вклад в этот канал аномального правила сумм - это η и η' мезоны. Эти состояния испытывают значительное смешивание, и, поскольку оба мезона распадаются на два фотона, их обоих нужно учитывать в правиле сумм. Действительно, если η' мезон отнести к континууму, не удастся описать его распад в пределе реальных фотонов ($Q^2 = 0$) и не воспроизводится правильная ширина распада η мезона.

Во-вторых, в этом канале есть вклад s -кварка, и соответственно массовая поправка может оказаться более существенной. Обсуждение кварковых массовых поправок мы отложим до следующей главы, а в этой ограничимся безмассовым случаем. Забегая вперед, отметим, что поправка от массы s -кварка составляет около 10 – 15%, и при современной точности экспериментальных данных для переходных формфакторов η и η' мезонов такое приближение является вполне разумным.

Итак, выделяя в октетном канале аномального правила сумм (2.2) вклады η и η' мезонов, заменяя остальные адронные вклады членом “континуума”

$$\int_{s_0^{(8)}}^{\infty} A_3^{(8)}(s, Q^2),$$

получим:

$$\pi f_\eta^{(8)} F_{\eta\gamma}(Q^2) + \pi f_{\eta'}^{(8)} F_{\eta'\gamma}(Q^2) = \frac{1}{2\pi} N_c C^{(8)} - \int_{s_0^{(8)}}^{\infty} A_3^{(8)}(s, Q^2) ds. \quad (2.5)$$

где $s_0^{(8)}$ - порог континуума в октетном канале, $f_\eta^8, f_{\eta'}^8$ - константы связи мезонов с октетным током, определенные в (3.16).

Однопетлевое безмассовое выражение для спектральной плотности в случае одного аромата q имеет вид [6]:

$$A_3^{(q)}(s, Q^2) = \frac{e_q^2 N_c}{2\pi} \frac{Q^2}{(Q^2 + s)^2}, \quad (2.6)$$

где e_q - электрический заряд кварка в единицах абсолютного заряда электрона. Из (2.2) и (2.6) с учетом того, что октетная спектральная плотность имеет вид

$$A_3^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(A_3^{(u)} + A_3^{(d)} - 2A_3^{(s)}),$$

получим:

$$f_\eta^8 F_{\eta\gamma}(Q^2) + f_{\eta'}^8 F_{\eta'\gamma}(Q^2) = \frac{1}{2\sqrt{6}\pi^2} \frac{s_0^{(8)}}{s_0^{(8)} + Q^2}. \quad (2.7)$$

Отметим еще раз тот факт, что вклад континуума исчезает в случае кирального предела и при $Q^2 = 0$,

$$\int_{s_3}^{\infty} A_3^{(3)}(s, Q^2) ds \propto \frac{Q^2}{Q^2 + s_3} \rightarrow 0, \quad Q^2 \rightarrow 0.$$

Это соответствует с тому, что вклады псевдовекторных и высших псевдоскалярных состояний (кроме η и η') в уравнении (2.5) равны нулю в этом случае: первые не дают вклад, так как они не распадаются на 2γ , в то время как вклады вторых исчезают, поскольку их константы распада закупаются из-за сохранения аксиального тока в киральном пределе (с точностью до электромагнитных поправок),

$$f_M^{(3)} \propto m_\pi^2/m_M^2 \rightarrow 0.$$

В отличие от изовекторного случая, где порог континуума хорошо определяется из правил сумм ИТЭФ, в случае октетного канала нет столь же надежного вычисления. Однако, здесь по-прежнему можем определить $s_0^{(8)}$ из самих аномальных правил сумм, используя асимптотические выражения для переходных формфакторов [71, 72]:

$$Q^2 F_{\eta\gamma}^{as} = 2(C^{(8)} f_\eta^8 + C^{(0)} f_\eta^0) \int_0^1 \frac{\phi^{as}(x)}{x} dx, \quad (2.8)$$

$$Q^2 F_{\eta'\gamma}^{as} = 2(C^{(8)} f_{\eta'}^8 + C^{(0)} f_{\eta'}^0) \int_0^1 \frac{\phi^{as}(x)}{x} dx, \quad (2.9)$$

где асимптотические значения амплитуд распределения η и η' мезонов описывается функцией [58, 75]

$$\phi^{as}(x) = 6x(1-x),$$

а значит ($M = \eta, \eta'$):

$$Q^2 F_{M\gamma}^{as} = 6(C^{(8)} f_M^8 + C^{(0)} f_M^0). \quad (2.10)$$

Таким образом, беря $Q^2 \rightarrow \infty$ предел правил сумм (2.7), получаем выражение для порога континуума в октетном канале:

$$s_0^{(8)} = 4\pi^2((f_\eta^8)^2 + (f_{\eta'}^8)^2 + 2\sqrt{2}[f_\eta^8 f_\eta^0 + f_{\eta'}^8 f_{\eta'}^0]). \quad (2.11)$$

В пределе $Q^2 = 0$ переходные формфакторы выражаются через ширины двух-фотонных распадов мезонов, и таким образом правило сумм (2.7) принимает вид:

$$f_\eta^8 F_{\eta\gamma}(0) + f_{\eta'}^8 F_{\eta'\gamma}(0) = \frac{1}{2\sqrt{6}\pi^2}, \quad (2.12)$$

где

$$F_{M\gamma}(0) = \sqrt{\frac{4\Gamma_{M \rightarrow \gamma\gamma}}{\pi\alpha^2 m_M^3}}.$$

Выражая из (2.12) одну из констант, используя (3.24), уравнение (2.7) позволяет связать переходные формфакторы $F_{\eta\gamma}(Q^2)$ и $F_{\eta'\gamma}(Q^2)$.

2.2 Смешивание

Проблема смешивания в $\eta-\eta'$ системе, обычно в литературе рассматривается в октет-синглетной ($SU(3)$) или кварк-ароматной схеме смешивания (см., например, [73] и ссылки там). В общем, смешивание приводит к тому, что “недиагональные” константы распада $f_\eta^0, f_{\eta'}^8$, определенные в (3.16) имеют ненулевые значения.

В стандартном подходе смешивание означает, что физические состояния представляются в виде линейной комбинации состояний с определенными $SU(3)_f$ квантовыми числами (соответствующими $J_{\alpha 5}^{(8)}$ и $J_{\alpha 5}^{(0)}$ в случае октет-синглетной схемы) или определенным кварковым составом (разделение на легкую составляющую $|\bar{u}u + \bar{d}d\rangle$ и странную $|\bar{s}s\rangle$ в случае кварк-ароматной схемы). Но, поскольку такие состояния (в отличие от физических состояний η, η') не имеют определенной массы, соответствующие константы таких состояний (3.16) плохо определены: определенный импульс p^μ означает определенную массу $m^2 = p_\mu p^\mu$.

Можно избежать эту проблему, если сформулировать смешивание в терминах полей ϕ_i , связанных с физическими состояниями $|i\rangle$ с помощью матричных элементов

$$\langle 0|\phi_i|j\rangle = \delta_{ij}$$

В случае пиона поле определяется из дивергенции изовекторной компоненты аксиального тока с помощью соотношения ЧСАТ (частичного сохранения аксиального тока):

$$\partial_\mu J_{\mu 5}^{(3)} = f_\pi^{(3)} m_\pi^2 \phi_\pi. \quad (2.13)$$

Для описания смешивания η и η' мезонов нужно написать естественное обобщение этого соотношения:

$$\partial_\mu \mathbf{J}_{\mu 5} = \mathbf{F} \mathbf{M} \Phi, \quad (2.14)$$

где мы ввели матричные обозначения

$$\mathbf{J}_{\mu 5} \equiv \begin{pmatrix} J_{\mu 5}^\alpha \\ J_{\mu 5}^\beta \end{pmatrix}, \mathbf{F} \equiv \begin{pmatrix} f_\eta^\alpha & f_{\eta'}^\alpha & f_G^\alpha & \dots \\ f_\eta^\beta & f_{\eta'}^\beta & f_G^\beta & \dots \end{pmatrix}, \Phi \equiv \begin{pmatrix} \phi_\eta \\ \phi_{\eta'} \\ \phi_G \\ \vdots \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} \equiv \text{diag}(m_\eta^2, m_{\eta'}^2, m_G^2, \dots). \quad (2.15)$$

Вектор $\mathbf{J}_{\mu 5}$ в (2.14) состоит из компонент аксиального тока, обладающих определенной $SU(3)$ симметрией, т.н. октет-синглетный базис токов ($\alpha = 8, \beta = 0$), или

компонентов аксиального тока с разделением на легкую и странную кварковую компоненты, т.н. кварк-ароматный базис ($\alpha = q, \beta = s$):

$$J_{\mu 5}^q = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 u + \bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 d), \quad J_{\mu 5}^s = \bar{s}\gamma_\mu\gamma_5 s. \quad (2.16)$$

Элементы матрицы \mathbf{F} являются мезонными константами распада (связи), определенными в (3.16). Вектор Φ физических полей состоит из полей η и η' мезонов (ϕ_η и $\phi_{\eta'}$) и полей более массивных состояний (в принципе, произвольного количества), которые мы обозначили ϕ_G, \dots

Обычно предполагается, что компоненты матрицы \mathbf{F} не являются независимыми, а следуют определенной схеме смешивания.

Определим вначале еще один вектор полей $\tilde{\Phi}$, компоненты которого либо обладают свойствами $SU(3)$ симметрии, либо определенным кварковым составом. Первые две компоненты вектора $\tilde{\Phi}$ обозначим теми же индексами α и β , что и токи соответствующей симметрии ($\alpha = 8, \beta = 0$) или кваркового состава ($\alpha = q, \beta = s$). Связь между Φ и $\tilde{\Phi}$ осуществляется через унитарное (в рассматриваемом нами случае действительных полей - ортогональное) преобразование \mathbf{U}

$$\tilde{\Phi} = \mathbf{U}\Phi, \quad \tilde{\Phi} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_\alpha \\ \tilde{\phi}_\beta \\ \tilde{\phi}_G \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

В терминах полей Ур. (2.14) переписывается следующим образом,

$$\partial_\mu \mathbf{J}_{\mu 5} = \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{M}}\tilde{\Phi}, \quad (2.18)$$

где $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\mathbf{U}$, $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{U}$.

В наших обозначениях то, что мезоны следуют октет-синглетной (кварк-ароматной) схеме смешивания предполагает, что матрица $\tilde{\mathbf{F}}$ имеет (в общем случае - прямоугольную) диагональную форму в соответствующем октет-синглетном (кварк-ароматном) базисе токов:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} f_\alpha & 0 & 0 & \dots \\ 0 & f_\beta & 0 & \dots \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Заметим, что это соотношение можно получить из эффективного лагранжиана \mathcal{L} , содержащего член взаимодействия

$$\Delta\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2} \tilde{\Phi}^T \tilde{\mathbf{M}} \tilde{\Phi} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \tilde{m}_{ij}^2 \tilde{\phi}_i \tilde{\phi}_j$$

. Именно,

$$\partial_\mu J_{\mu 5}^a = f_a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \tilde{\phi}_a} = f_a \sum_k \tilde{m}_{ak}^2 \tilde{\phi}_k, \quad a = \alpha, \beta. \quad (2.20)$$

Также нужно заметить, что из требования того, чтобы матрица \mathbf{FU} имела (прямоугольную) диагональную форму (2.19), немедленно следует, что \mathbf{FF}^T является диагональной матрицей. Таким образом, предположение, что система мезонов следует определенной схеме смешивания, приводит к ограничению на константы распада мезонов следующего вида:

$$f_\eta^\alpha f_\eta^\beta + f_{\eta'}^\alpha f_{\eta'}^\beta + f_G^\alpha f_G^\beta + \dots = 0. \quad (2.21)$$

Здесь сумма берется по всем физическим мезонным состояниям, включенным в вектор Φ .

Ограничиваясь рассмотрением только η и η' мезонов, константы образуют матрицу 2×2 , и октет-синглетный и кварк-ароматный базисы удовлетворяют соответствующим уравнениям “диагональности”:

$$f_\eta^8 f_\eta^0 + f_{\eta'}^8 f_{\eta'}^0 = 0, \quad (2.22)$$

$$f_\eta^q f_\eta^s + f_{\eta'}^q f_{\eta'}^s = 0. \quad (2.23)$$

Например, в случае октет-синглетной схемы смешивания (2.22) матрица констант распада может быть выражена (и обычно выражается) в терминах угла смешивания θ и двух параметров f_8, f_0 , образуя известную одноугловую схему смешивания:

$$\mathbf{F}_{80} = \begin{pmatrix} f_\eta^8 & f_{\eta'}^8 \\ f_\eta^0 & f_{\eta'}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_8 \cos \theta & f_8 \sin \theta \\ -f_0 \sin \theta & f_0 \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Аналогичным образом, если наложить известное кварк-ароматное ограничение на константы распада (2.23), то можно выразить матрицу констант через параметры

смешивания ϕ, f_8, f_0 ,

$$\mathbf{F}_{\text{qs}} = \begin{pmatrix} f_\eta^q & f_{\eta'}^q \\ f_\eta^s & f_{\eta'}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_q \cos \phi & f_q \sin \phi \\ -f_s \sin \phi & f_s \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Нужно подчеркнуть, что в то время, как обе рассмотренные схемы (октет-синглетная и кварк-ароматная) самосогласованы, они несовместимы [10, 73]. Действительно, очевидно, октет-синглетный и кварк-ароматный базисы токов связаны матрицей поворота:

$$\begin{pmatrix} J_{\mu 5}^8 \\ J_{\mu 5}^0 \end{pmatrix} = \mathbf{V}(\alpha) \begin{pmatrix} J_{\mu 5}^q \\ J_{\mu 5}^s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

где $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Тогда, как следует из (2.14), матрицы констант распада $\mathbf{F}_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{F}$ (2.15) в октет-синглетном (2.24) и кварк-ароматном (2.25) базисах связаны так

$$\mathbf{F}_{80} = \mathbf{V}(\alpha) \mathbf{F}_{\text{qs}}, \quad (2.27)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{F}_{80} \mathbf{F}_{80}^T = \mathbf{V}(\alpha) \mathbf{F}_{\text{qs}} \mathbf{F}_{\text{qs}}^T \mathbf{V}(\alpha)^T. \quad (2.28)$$

Видно, что в общем случае константы распада не могут следовать октет-синглетной и кварк-ароматной схемам смешивания *одновременно* (т.к. матрицы $\mathbf{F}_{80} \mathbf{F}_{80}^T$ и $\mathbf{F}_{\text{qs}} \mathbf{F}_{\text{qs}}^T$ не могут быть диагональными одновременно). Согласованность схем смешивания имеет место только при $f_8 = f_0$ ($f_q = f_s$), т.е. в случае $SU(3)_f$ симметрии.

Хотя октет-синглетная схема смешивания и более удобна с точки зрения аномальных правил сумм (и исторически возникла первой), есть аргументы из киральной теории, что эта схема не реализуется, а более подходящей является кварк-ароматная схема смешивания [74, 76] (также см. [73, 77]).

На самом деле то, какая схема на самом деле реализуется в природе в $\eta - \eta'$ системе, могло бы сказать схемно-независимое определение констант из массива данных. Эту задачу мы рассмотрим в следующих разделах.

2.3 Константы распада η, η' мезонов

В разделе 2.1 из аномального правила сумм было получена связь между константами распада и переходными формфакторами η и η' мезонов. В этом разделе используя это соотношение, сделаем численный анализ констант распада разных схем смешивания, описанных в разделе 2.2.

Рассмотрим сначала октет-синглетную схему смешивания. Чтобы определить параметры смешивания этой схемы, применим ограничение схемы смешивания (2.22) и соотношения, следующие из аномального правила сумм, а именно, уравнения (2.7), (3.24), (2.12). В терминах параметров (2.24) ур. (3.24) приводит к выражению для порога континуума:

$$s_0^{(8)} = 4\pi^2 f_8^2. \quad (2.29)$$

На рис. 2.1 представлены области в пространстве параметров f_8, θ , ограниченные:

1) аппроксимацией уравнения (2.7) данными BABAR для переходных формфакторов η, η' [21] методом хи-квадрат; область $\chi^2/d.o.f. < 1$ обозначена синим (темным) цветом;

2) уравнением (2.12) (учтены экспериментальные погрешности ширины распада $\Gamma_{\eta(\eta') \rightarrow 2\gamma}$) — красная (светлая) область.

Пересечение этих областей (обозначено желтым цветом) приводит к оценке на параметры смешивания,

$$f_8 = (0.88 \pm 0.04)f_\pi, \quad \theta = -(14.2 \pm 0.7)^\circ.$$

Чтобы определить константу f_0 (которая не входит в уравнения (2.7), (3.24), (2.12) в случае октет-синглетной схемы смешивания) нужно использовать дополнительное соотношение, содержащее эту константу.

В качестве такого дополнительного соотношения удобно использовать отношение радиационных распадов J/Ψ мезона.

Действительно, в соответствии с [79] радиационные распады $J/\Psi \rightarrow \eta(\eta')\gamma$ определяются в главном приближении непертурбативными глюонными матричны-

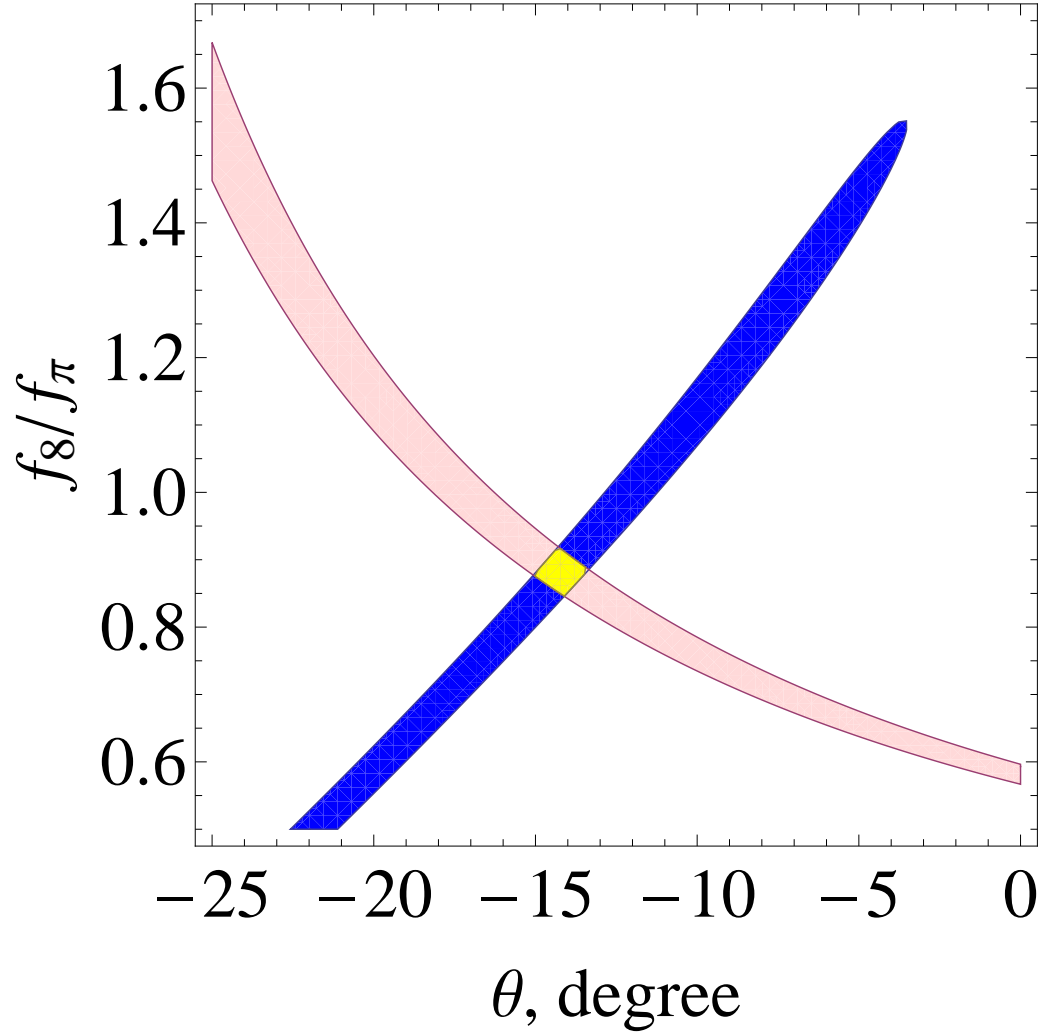


Рис. 2.1: Параметры октет-синглетной схемы смешивания f_8, θ . Область, обозначенная синим (темным) цветом – ограничение ур. (2.7) (область $\chi^2/d.o.f. < 1$), красным (светлым) цветом – ограничение ур. (2.12) (экспериментальные погрешности ширины распада задают область).

ми элементами, и отношение ширин $R_{J/\Psi} \equiv (\Gamma(J/\Psi) \rightarrow \eta'\gamma)/(\Gamma(J/\Psi) \rightarrow \eta\gamma)$ задается следующим выражением:

$$R_{J/\Psi} = \left| \frac{\langle 0 | G\tilde{G} | \eta' \rangle}{\langle 0 | G\tilde{G} | \eta \rangle} \right|^2 \left(\frac{p_{\eta'}}{p_\eta} \right)^3, \quad (2.30)$$

где

$$p_{\eta(\eta')} = \frac{M_{J/\Psi}}{2} \left(1 - \frac{m_{\eta(\eta')}^2}{M_{J/\Psi}^2} \right)$$

. Это отношение имеет удобно использовать благодаря ожидаемой малости пертурбативных и непертурбативных поправок, которые в отношении должны (частично) сократиться.

Матричные элементы глюонных конденсатов входящих в (2.30) легко выразить, если взять матричные элементы дивергенций синглетного (1.1) октетного (1.5) токов между вакуумным и $\eta(\eta')$ состояниями и пренебречь массами u, d кварков и членом электромагнитной аномалии. Действительно, в этом случае из уравнений

$$\partial_\mu J_{\mu 5}^8 = -\frac{2}{\sqrt{6}}(m_s \bar{s} \gamma_5 s), \quad (2.31)$$

$$\partial_\mu J_{\mu 5}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(m_s \bar{s} \gamma_5 s) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{3\alpha_s}{4\pi} G\tilde{G}. \quad (2.32)$$

отношение (2.30) в терминах констант распада (3.16) выражается так [80]:

$$R_{J/\Psi} = \left(\frac{f_{\eta'}^8 + \sqrt{2}f_{\eta'}^0}{f_\eta^8 + \sqrt{2}f_\eta^0} \right)^2 \left(\frac{m_{\eta'}}{m_\eta} \right)^4 \left(\frac{p_{\eta'}}{p_\eta} \right)^3. \quad (2.33)$$

Текущее экспериментальное значение этого отношения известно с хорошей точностью: $R_{J/\Psi} = 4.67 \pm 0.15$ [78].

Используя это отношение для октет-синглетной схемы смешивания, и учитывая уравнения (2.7) и (2.12) можно определить константу связи синглетного тока: $f_0 = (0.81 \pm 0.07)f_\pi$. Таким образом, полный набор констант смешивания синглет-октетной схемы смешивания:

$$\begin{aligned} f_8 &= (0.88 \pm 0.04)f_\pi, \\ f_0 &= (0.81 \pm 0.07)f_\pi, \\ \theta &= -(14.2 \pm 0.7)^\circ. \end{aligned} \quad (2.34)$$

В случае кварк-ароматной схемы смешивания можно провести аналогичный анализ, используя ограничение схемы (2.23), уравнения (3.24), (2.12), (2.33) и аппроксимируя данные BABAR [21] уравнением аномального правила сумм (2.7) (в качестве параметров фитирования - параметры смешивания). Константы распада в кварк-ароматного базиса $f_{\eta,\eta'}^{q,s}$ выражаются в терминах констант октет-синглетного базиса $f_{\eta,\eta'}^{8,0}$ с помощью матрицы поворота (2.27). В терминах параметров смешивания f_q, f_s, ϕ (2.25) уравнения (3.24), (2.33) принимают вид:

$$s_0^{(8)} = (4/3)\pi^2(5f_q^2 - 2f_s^2), \quad (2.35)$$

$$R_{J/\Psi} = (\tan \phi)^2 \left(\frac{m_{\eta'}}{m_\eta} \right)^4 \left(\frac{p_{\eta'}}{p_\eta} \right)^3. \quad (2.36)$$

Уравнение (2.36) позволяет сразу определить параметр ϕ

$$\phi = (38.1 \pm 0.5)^\circ.$$

Тогда два другие параметра f_s, f_q можно определить из уравнений (2.12) и (2.7). Области в пространстве параметров f_q, f_s (нормированные к константе f_π) заданные этими уравнениями изображены на Рис. 2.2. Красная (светлая) полоса обозначает ограничение, накладываемое уравнением (2.12) (учтены экспериментальные погрешности величин $R_{J/\Psi}, \Gamma_{\eta(\eta') \rightarrow 2\gamma}$), а синяя (темная) область обозначает фит уравнения Eq. (2.7) к данным BABAR на уровне $\chi^2/d.o.f. < 1$. Видно, что есть две области пересечения. Мы выберем область, имеющую физический смысл, где $f_q, f_s > f_\pi$. Это пересечение, обозначенное на Рис. 2.2 желтым цветом, определяет параметры кварк-флейворной схемы смешивания и соответствующие пределы для этих параметров следующие:

$$\begin{aligned} f_q &= (1.20 \pm 0.15)f_\pi, \\ f_s &= (1.65 \pm 0.25)f_\pi, \\ \phi &= (38.1 \pm 0.5)^\circ. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Полученные значения параметров смешивания (2.37) находятся в согласии со значениями, полученными в других подходах [73, 81, 82].

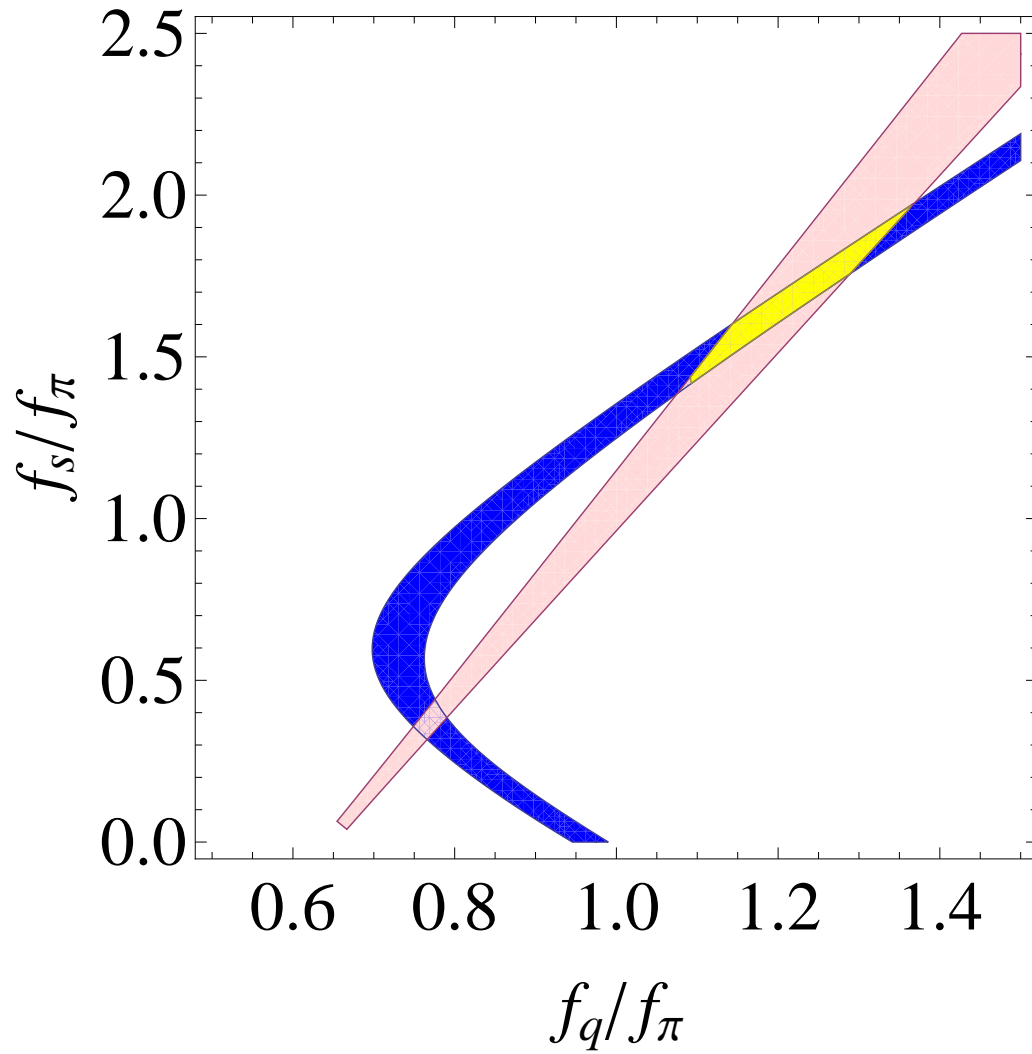


Рис. 2.2: Параметры смешивания f_q, f_s кварк-ароматной схемы. Синяя (темная) область – ограничение уравнения (2.7) ($\chi^2/d.o.f. < 1$), красная (светлая) область – ограничение уравнения (2.12) (с учетом экспериментальных погрешностей).

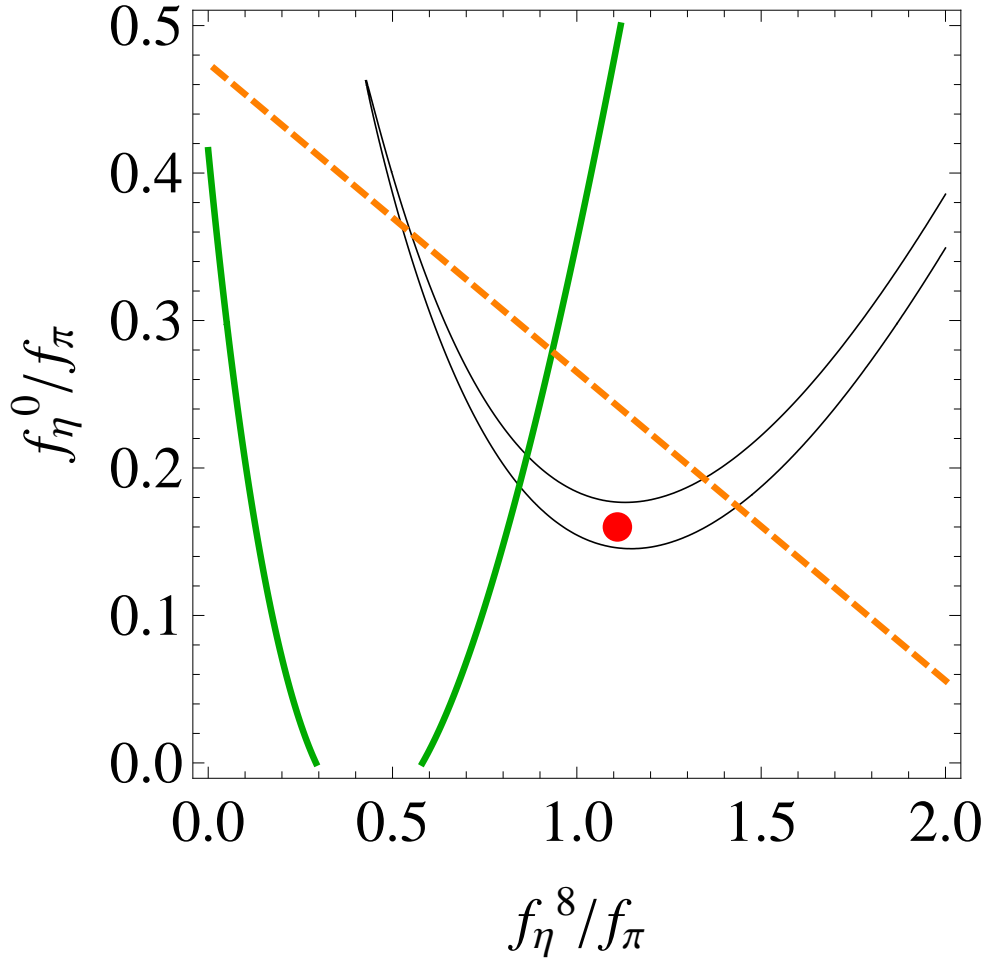


Рис. 2.3: Независимый от схем смешивания численный анализ констант распада. Черная тонкая линия обозначает уровень $\chi^2/d.o.f. = 1$, красная точка — минимум χ^2 . Зеленая непрерывная и оранжевая пунктирная кривые обозначают ограничения октет-синглетной (2.22) и кварк-ароматной (2.23) схем смешивания соответственно.

Интересно также получить *схемно-независимые* ограничения на константы распада. Уравнения (2.12), (2.33) позволяют исключить две из четырех константы распада, входящих в АПС (2.7). Порог континуума $s_0^{(8)}$ можно исключить с помощью уравнения (3.24). На Рис. 2.3 показаны уровни функции $\chi^2/d.o.f.$ уравнения (2.7) в пространстве параметров f_η^8, f_η^0 (использованы данные BABAR [21] в качестве значений $F_{\gamma\eta(\eta')}(Q^2)$ и центральные значения $R_{J/\psi}, \Gamma_{\eta(\eta')\rightarrow 2\gamma}$). Видно, что условию $\chi^2/d.o.f. < 1$ (черная кривая) удовлетворяет довольно широкий диапазон параметров. Тем не менее, минимум функции χ^2 достигается в точке

$$f_\eta^8 = 1.11f_\pi, f_\eta^0 = 0.16f_\pi$$

($\chi^2/d.o.f. = 0.84$, обозначено красной точкой). Тогда из уравнений (2.12), (2.33) можем получить две другие константы:

$$f_{\eta'}^8 = -0.42f_\pi, f_{\eta'}^0 = 1.04f_\pi.$$

Следовательно, полный набор констант, полученный при схемно-независимом анализе констант будет:

$$\begin{pmatrix} f_\eta^8 & f_{\eta'}^8 \\ f_\eta^0 & f_{\eta'}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.11 & -0.42 \\ 0.16 & 1.04 \end{pmatrix} f_\pi. \quad (2.38)$$

Ограничения, налагаемые октет-синглетной (непрерывная зеленая кривая) (2.22) и кварк-ароматной (пунктирная оранжевая кривая) (2.23) схемами смешивания также изображены на Рис. 2.3. Видно, что обе рассмотренные схемы смешивания вполне согласуются со схемно-независимым анализом, основанном на АПС на уровне $\chi^2/d.o.f. < 1$, даже если другие экспериментальные погрешности не учитывать.

Интересно также заметить, что наименьшее значение χ^2 достигается в области, лежащей за пределами обеих кривых, отвечающих рассмотренным схемам смешивания. Это может означать, что в природе не реализуется с достаточной точностью ни октет-синглетная, ни кварк-ароматная схема смешивания. В этом случае базис токов, с которыми связаны “диагональные” константы распада будет отличным от октет-синглетного или u, d - s -кваркового. Здесь важным является дальнейшее улучшение точности экспериментальных данных, которое в конечном итоге позволит с уверенностью решить вопрос о том, какая схема смешивания реализуется на самом деле – к сожалению, текущая точность данных для этого недостаточна.

2.4 Параметры смешивания: сравнение

В этом разделе мы вернемся к аномальному правилу сумм в октетном канале и исследуем, насколько хорошо согласуются с ним различные наборы констант смешивания, в том числе полученные в некоторых других работах.

Параметры смешивания η - η' системы входят во многие процессы с участием этих мезонов. Кроме используемых в диссертации процессов $\gamma\gamma^* \rightarrow P$, $P \rightarrow \gamma\gamma$, связанных с аномальным правилом сумм, эти параметры также входят различные другие процессы, такие как $V \rightarrow P\gamma$ и $P \rightarrow V\gamma$ (V - векторные мезоны). В литературе извлекаются параметры смешивания η - η' и с учетом данных этих распадов. При этом используются различные схемы смешивания.

В качестве характерных примеров рассмотрим, насколько согласуются с аномальным правилом сумм параметры, полученные в известных работах Feldmann, Kroll, Stech [73] и Escrivano, Frere [82].

В работе [73] параметры смешивания извлекались в кварк-ароматной схеме:

$$f_q = 1.07f_\pi, f_s = 1.34f_\pi, \phi = 39.3^\circ. \quad (2.39)$$

В работе [82] анализ был проведен схемно-независимым образом (в этой работе такой подход назывался двухугловой схемой смешивания), полученные параметры $f_8 = 1.51f_\pi$, $f_0 = 1.29f_\pi$, $\theta_8 = -23.8^\circ$, $\theta_0 = -2.4^\circ$ в терминах матрицы констант распада имеют вид:

$$\mathbf{F}^{\text{EF}} = \begin{pmatrix} f_\eta^8 & f_{\eta'}^8 \\ f_\eta^0 & f_{\eta'}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_8 \cos \theta_8 & f_8 \sin \theta_8 \\ -f_0 \sin \theta_0 & f_0 \cos \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.38 & -0.61 \\ 0.05 & 1.29 \end{pmatrix} f_\pi. \quad (2.40)$$

Графики октетной комбинации переходных формфакторов аномального правила сумм (2.7) (умноженной на Q^2) для констант (2.4) и (2.40) представлены на Рис. 2.4 и 2.5. Функции $\chi^2/d.o.f. = 0.73$ в случае параметров (2.4), и $\chi^2/d.o.f. = 11.2$ в случае параметров (2.5).

Таким образом, видно, что аномальное правило сумм является довольно чувствительным к параметрам смешивания (константам распада мезонов), и может быть

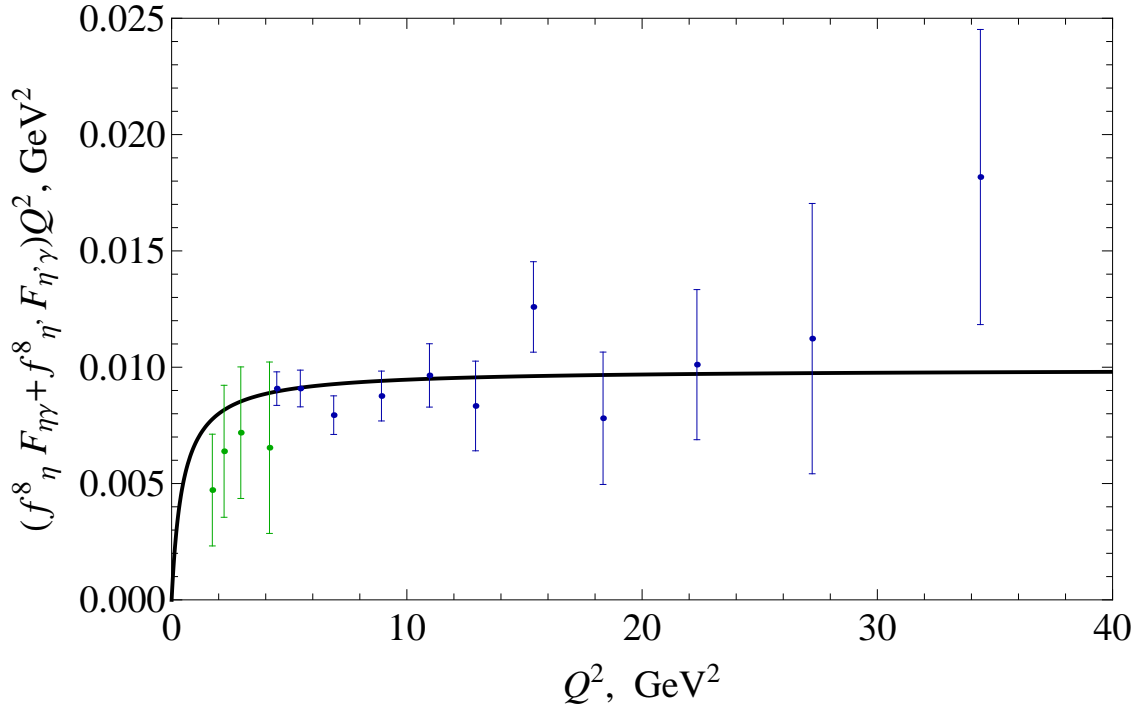


Рис. 2.4: Октетная комбинация переходных формфакторов аномального правила сумм (2.7) (умноженная на Q^2) для констант (2.4). Данные BABAR [21] и CLEO [26].

использовано как надежное ограничение при численном анализе констант распада η и η' мезонов.

Подведем итог предыдущих двух предыдущих разделов, посвященных смешиванию состояний в октетном канале.

Отличающаяся особенностью октетного канала аномального правила сумм является то, что первые два состояния, дающие вклад в это правило сумм проявляют значительное смешивание. В литературе популярны две схемы смешивания, которые используются для определения констант распада η и η' мезонов: октет-синглетная и кварк-ароматная. Мы предложили формулировку описания смешивания, которая не полагается на использование нефизических состояний (с неопределенной массой). Каждая из схем смешивания налагает определенную связь на константы распада. Обе схемы смешивания совместимы только в пределе точного $SU(3)_f$ предела.

Используя данные о переходных формфакторах η , η' мезонов, аномальное правило сумм позволяет извлекать наборы констант распада схем кварк-ароматной, октет-синглетной, а также в схемно-независимо, если использовать дополнительное ограничение – отношение радиационных распадов J/Ψ -мезона (2.33). Показано, что

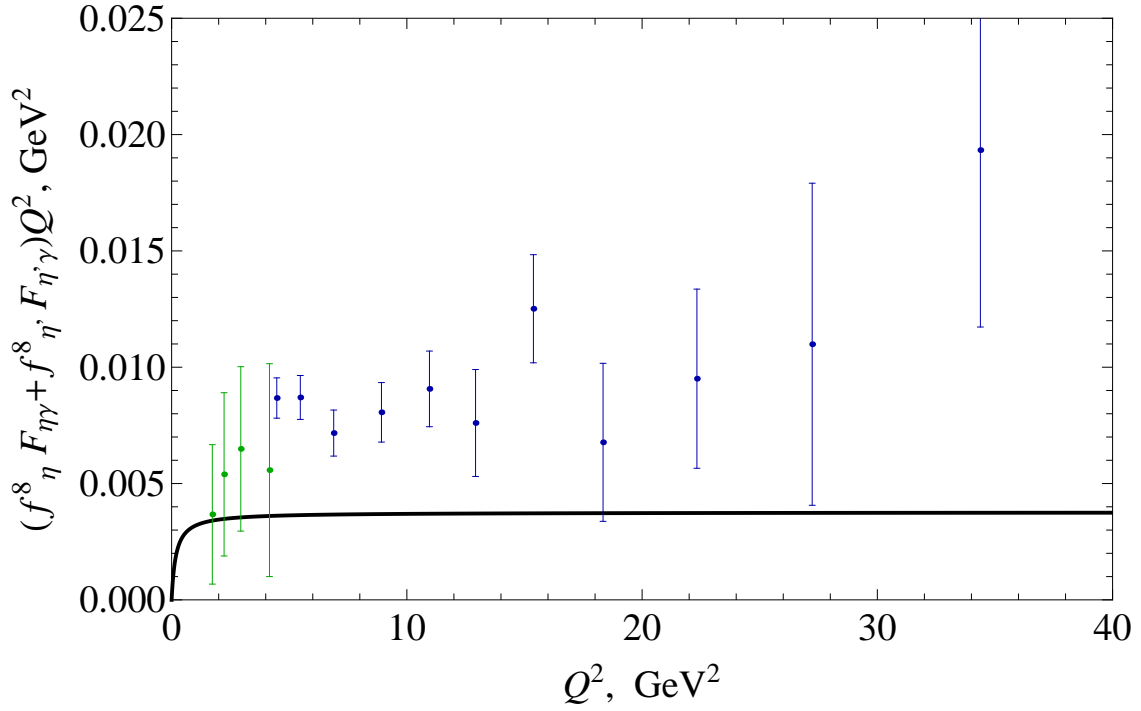


Рис. 2.5: Октетная комбинация переходных формфакторов аномального правила сумм (2.7) (умноженная на Q^2) для констант (2.40). Данные BABAR [21] и CLEO [26].

при нынешней точности данных и октет-синглетная, и кварк-ароматная схемы смешивания допустимы. Будущие более точные экспериментальные данные по переходным формфакторам η, η' мезонов и отношения $R_{J/\psi}$, ожидаемое от коллабораций Belle и BES-III, может определить, какая схема больше подходит для описание смешивания в $\eta - \eta'$ системе.

2.5 Логарифмическая поправка в октетном канале

Естественно предположить, что поправка логарифмического типа, которая исследовалась в изовекторном канале в разделе 1.7, также существует и в октетном канале. Хотя данные BABAR [21] (см. Рис. 2.6) и не проявляют такого уверенного роста величин $Q^2 F_{\eta\gamma}$ и $Q^2 F_{\eta'\gamma}$, как в случае пиона, тем не менее, октетная комбинация переходных формфакторов $Q^2(f_\eta^8 F_{\eta\gamma} + f_{\eta'}^8 F_{\eta'\gamma})$ также имеет слабую тенденцию к росту. Это происходит благодаря тому, что $Q^2 F_{\eta\gamma}$ при $Q^2 > 20 \text{ GeV}^2$ имеет слабую тенденцию к росту, а $Q^2 F_{\eta'\gamma}$ — к падению, при этом константы имеют разные знаки: $f_\eta^8 > 0$, $f_{\eta'}^8 < 0$.

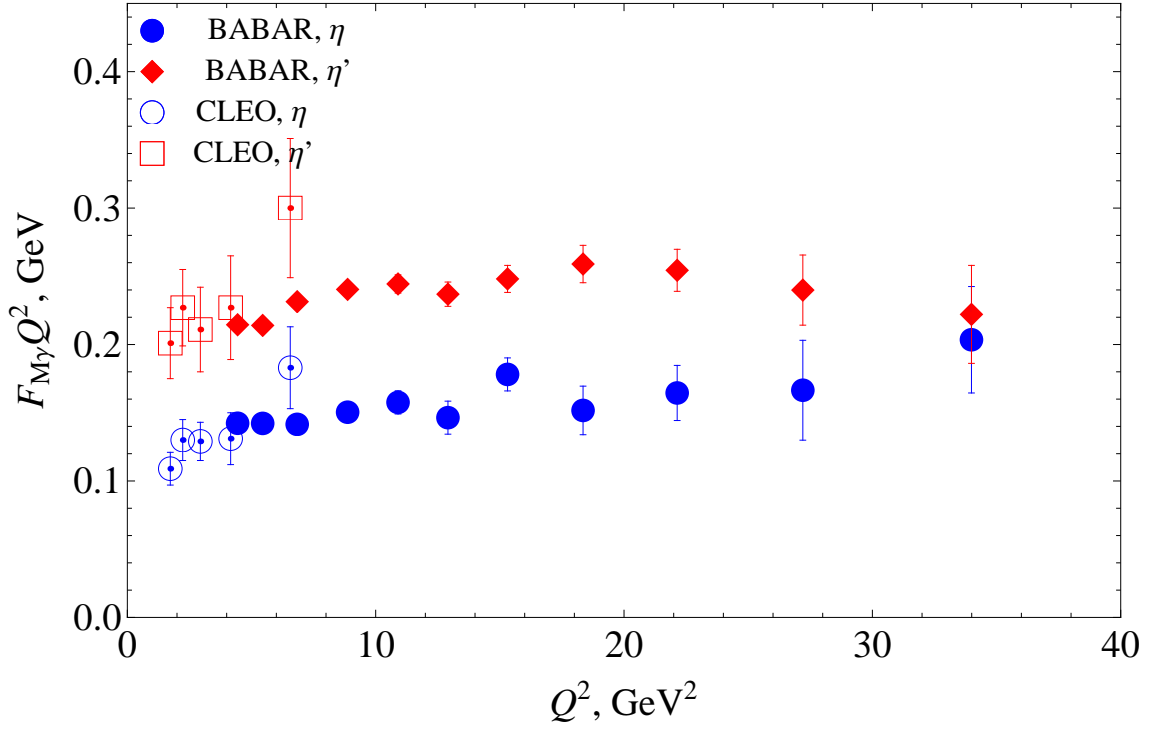


Рис. 2.6: Переходные формфакторы η и η' мезонов (умноженные на Q^2) измеренные в экспериментах BABAR [21] и CLEO [26].

Ожидая, что поправка к спектральной плотности в изовекторном и октетном каналах имеет одно происхождение, предположим, что эта поправка имеет такой же вид как и в случае пиона (1.39),

$$\delta I_8 = - \int_{s_0^{(8)}}^{\infty} \delta A_3^{(8)} ds = \frac{1}{2\sqrt{6}\pi} \frac{\lambda s_0^{(8)} Q^2}{(s_0^{(8)} + Q^2)^2} \left(\ln \frac{Q^2}{s_0^{(8)}} + \sigma \right). \quad (2.41)$$

Эта поправка приводит к дополнительному члену $\delta I_8/\pi$ в правой части уравнения (2.7):

$$f_\eta^8 F_{\eta\gamma}(Q^2) + f_{\eta'}^8 F_{\eta'\gamma}(Q^2) = \frac{1}{2\sqrt{6}\pi^2} \frac{s_0^{(8)}}{s_0^{(8)} + Q^2} + \frac{1}{2\sqrt{6}\pi^2} \frac{\lambda s_0^{(8)} Q^2}{(s_0^{(8)} + Q^2)^2} \left(\ln \frac{Q^2}{s_0^{(8)}} + \sigma \right). \quad (2.42)$$

График правой части уравнения (2.42) (непрерывная кривая) и правой части уравнения (2.7) (пунктирная кривая) в случае разных схем смешивания показаны на Рис. 2.7 (октет-синглетная схема смешивания), Рис. 2.8 (кварк-ароматная схема смешивания), Рис. 2.9 (схемно-независимые константы распада). Параметры поправки

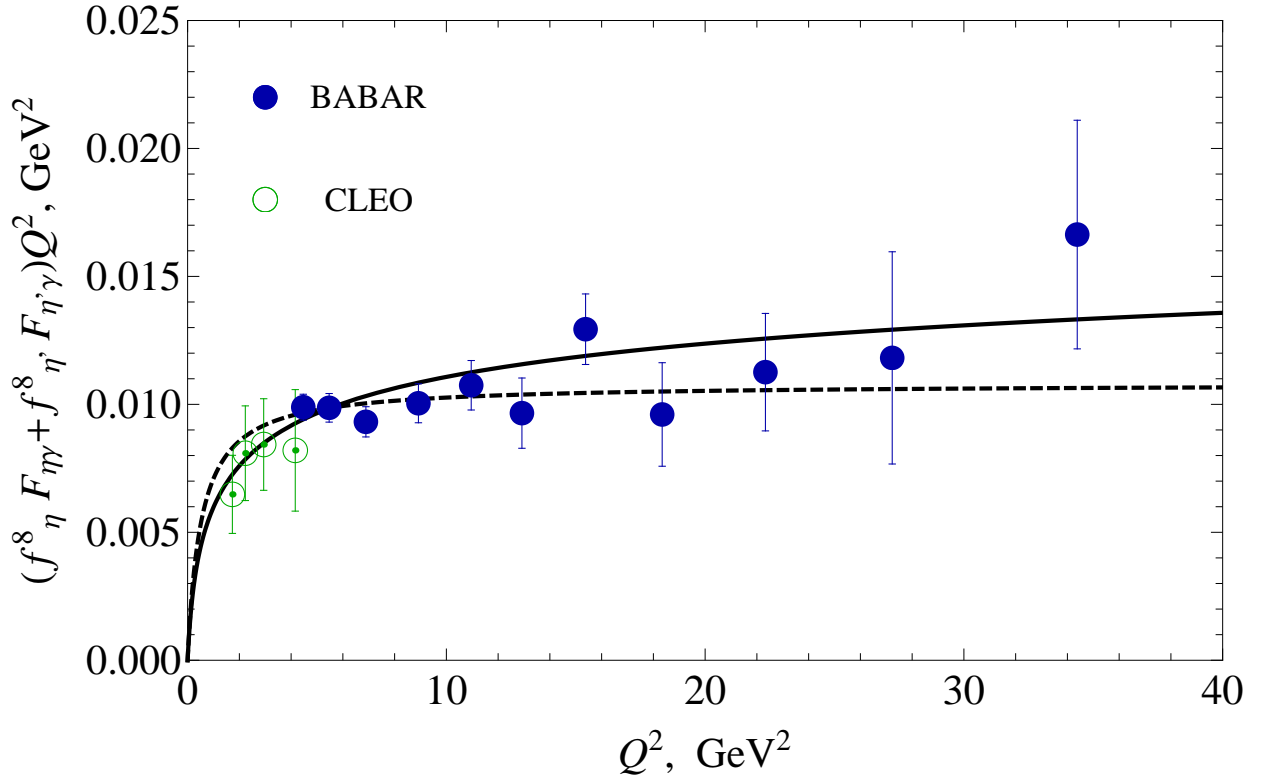


Рис. 2.7: АПС с поправкой ((2.42), непрерывная кривая) и без поправки ((2.7), пунктирная кривая) для параметров синглет-октетной схемы смешивания (2.34) по сравнению с экспериментальными данными (пустые зеленые точки – CLEO [26], заполненные синие точки – BABAR [21]).

$\lambda = 0.14, \sigma = -2.36$ взяты теми же, что и в случае пиона (набор данных II) в разделе 1.7, в качестве констант распада взяты ранее полученные наборы констант (2.34), (2.37) и (2.38) (центральные значения). Левые части уравнений (2.7), (2.42) наносятся на график в виде точек с экспериментальными погрешностями, полученными на основании данных BABAR [21] и CLEO [26] для переходных формфакторов η и η' мезонов.

Видно, что с текущей точностью экспериментальных данных можно допустить существование непертурбативной поправки, аналогичной изовекторному каналу и в рассматриваемом октетном канале аномального правила сумм. При этом, конечно, в октетном канале можно обойтись и без такой поправки.

Подведем некоторые итоги. Точное аномальное правило сумм позволяет получить выражение для линейной комбинации формфакторов η и η' мезонов при про-

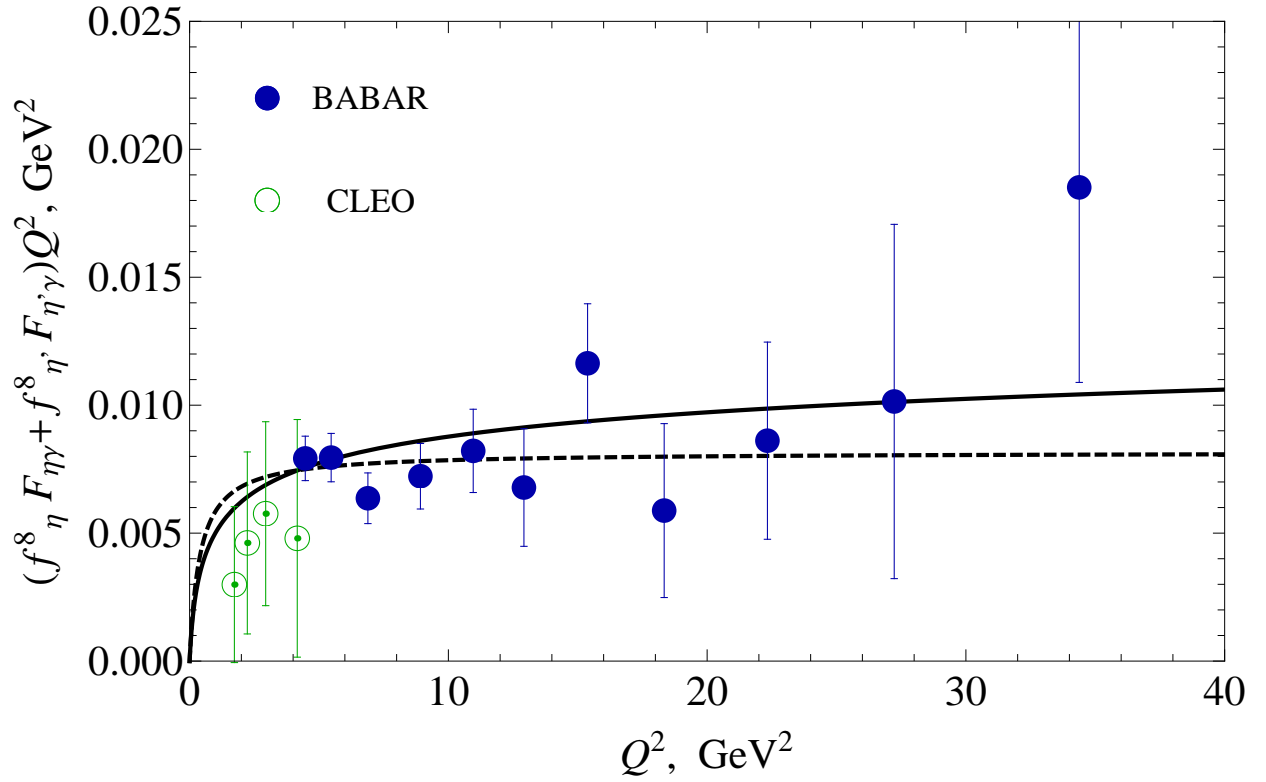


Рис. 2.8: АПС с поправкой ((2.42), непрерывная кривая) и без поправки ((2.7), пунктирная кривая) для параметров кварк-ароматной схемы смешивания (2.37) по сравнению с экспериментальными данными (пустые зеленые точки – CLEO [26], заполненные синие точки – BABAR [21]).

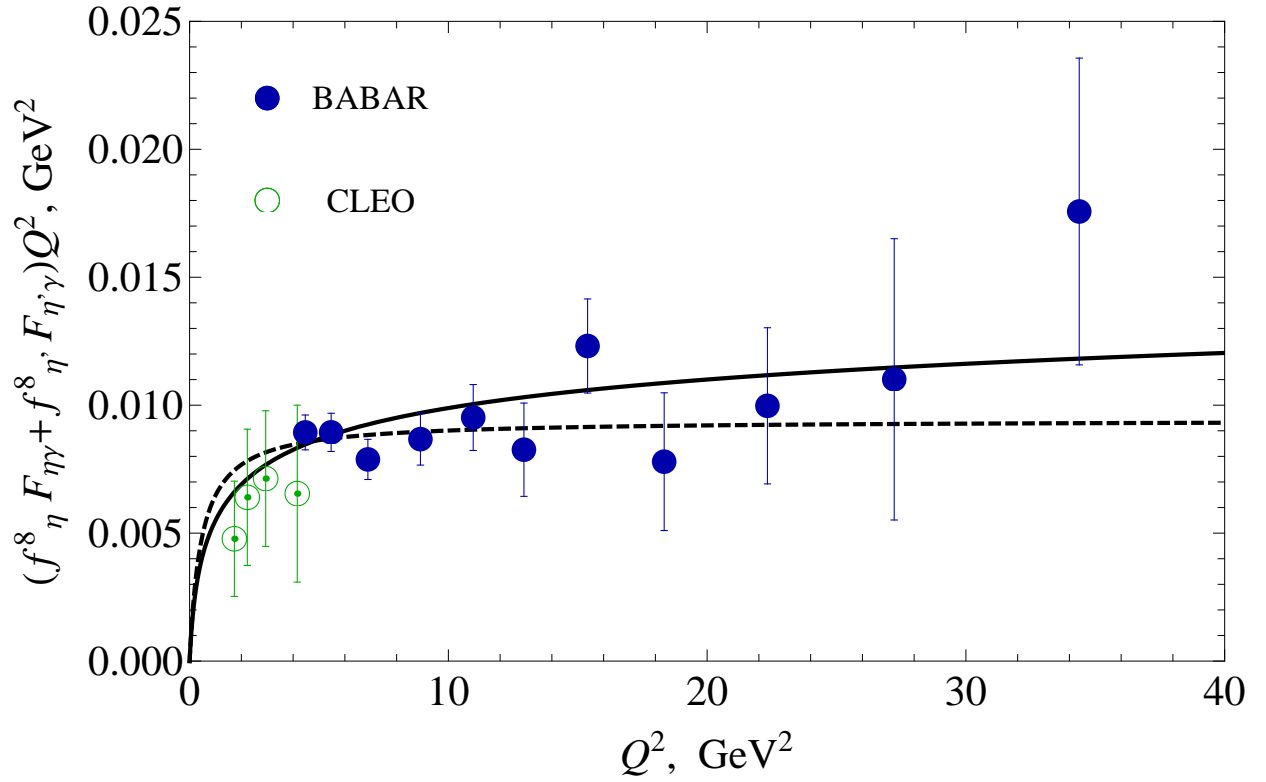


Рис. 2.9: АПС с поправкой ((2.42), непрерывная кривая) и без поправки ((2.7), пунктирная кривая) для констант распада, полученных из схемно-независимого анализа (2.38) по сравнению с экспериментальными данными (пустые зеленые точки – CLEO [26], заполненные синие точки – BABAR [21]).

извольном Q^2 : при $Q^2 = 0$ оно выражает связь ширин распада η и η' мезонов, в то время как при больших Q^2 , на основе КХД факторизации, можно определить интервал дуальности в октетном канале.

Тем не менее, предложенный подход может быть применен, даже если КХД факторизация нарушается непертурбативной поправкой к спектральной плотности. Именно такая поправка необходима, если полагаться на данные BABAR для пиона. Поскольку такая поправка имеет размерность 2, она не может появиться в (локальном) операторном разложении, и, вероятно, возникает из коротких струн или инстантонов.

В случае же октетного канала данные BABAR для переходных формфакторов η и η' мезонов могут быть описаны и без такой поправки. Тем не менее, возможность поправки с текущей точностью экспериментальных данных не исключается, тем более что наблюдается признаки небольшого роста октетной комбинации переходных формфакторов при $Q^2 > 20 \text{ GeV}^2$ (в отличие от самих формфакторов).

Таким образом, мы можем сделать вывод, что поправка к спектральной плотности, впервые предложенная в [8] является универсальной для обоих, изовекторного и октетного каналов. Этот вывод находится в согласии с результатами и выводами работы [19].

2.6 Интервал дуальности в октетном канале

В этом разделе рассмотрим более подробно величину порога континуума (интервала дуальности) полученную в разных подходах: из трехточечного коррелятора и аномальных правил сумм, используемых в этой диссертации и двух-точечного коррелятора аксиальных токов [65].

Как уже было продемонстрировано ранее, аномальное правило сумм в пределе $Q^2 \rightarrow \infty$ и асимптотические выражения переходных формфакторов позволяют определить порог континуума. В случае *изовекторного канала* полученный порог континуума (интервал дуальности пиона) выражается через константу распада пиона

$$s_0^{(3)} = 4\pi^2 f_\pi^2 = 0.67 \text{ GeV}^2. \quad (2.43)$$

и численно находится в неплохом согласии с порогом континуума, полученном из двухточечных правил сумм Шифмана-Вайнштейна-Захарова [64], $s_0^\pi = 0.75 \text{ GeV}^2$.

В октетном же канале аномальное правило сумм и асимптотические выражения для переходных формфакторов приводит к порогу континуума в следующем виде:

$$s_0^{(8)} = 4\pi^2((f_\eta^8)^2 + (f_{\eta'}^8)^2 + 2\sqrt{2}[f_\eta^8 f_\eta^0 + f_{\eta'}^8 f_{\eta'}^0]). \quad (2.44)$$

Для удобства дальнейшего обсуждения, введем векторы констант распада

$$\mathbf{e}_8 = (f_\eta^8, f_{\eta'}^8), \quad \mathbf{e}_0 = (f_\eta^0, f_{\eta'}^0),$$

тогда, используя зарядовые факторы $C^{(8)} = \frac{1}{3\sqrt{6}}$, $C^{(0)} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ можно переписать (2.44) в более компактном виде:

$$s_0^{(8)} = 4\pi^2(\mathbf{e}_8^2 + \frac{C^{(0)}}{C^{(8)}}\mathbf{e}_8 \cdot \mathbf{e}_0). \quad (2.45)$$

Также выражение (2.43) было получено из предела локальной дуальности (параметр Бореля $M \rightarrow \infty$) правил сумм КХД на световом конусе (двухточечного коррелятора) [65].

В октетном канале правила сумм КХД дают похожий на случай пиона результат: префактор $\exp(-m_\eta^2/M^2)$ близок к 1 для всех разумных (не малых) значений M . Пренебрегая возможными вкладами инстантонов и эффектами массы странного кварка, получим:

$$s_8^\eta = 4\pi^2(f_\eta^8)^2. \quad (2.46)$$

Однако, как было уже замечено, модель “ $\eta + \text{continuum}$ ” не может быть применена к случаю трехточечного коррелятора поскольку η' мезон не может быть включен в континуум из-за того, что он распадается на два фотона. Поэтому η' нужно учитывать явно [9], что приводит к модели “ $\eta + \eta' + \text{continuum}$ ”. Применяя ее к двухточечному коррелятору в пределе локальной дуальности, вместо (2.46) получим:

$$s_8^{\eta+\eta'} = 4\pi^2((f_\eta^8)^2 + (f_{\eta'}^8)^2) = 4\pi^2\mathbf{e}_8^2. \quad (2.47)$$

Интересно теперь сравнить интервалы дуальности, полученные из двух- и трех-точечных корреляторов ¹ в этой области. В результате, из сравнения (2.45) и (2.47) видим, что интервалы дуальности совпадают только при условии

$$\mathbf{e}_8 \cdot \mathbf{e}_0 = 0. \quad (2.48)$$

В терминах матрицы констант распада

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_\eta^8 & f_{\eta'}^8 \\ f_\eta^0 & f_{\eta'}^0 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

и матрицы, которую обозначим \mathbf{E}

$$\mathbf{E} \equiv \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_8^2 & \mathbf{e}_8 \cdot \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_8 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_0^2 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

условие (2.48) также можно переписать в виде:

$$\mathbf{E} = \text{diag}(\mathbf{e}_8^2, \mathbf{e}_0^2). \quad (2.51)$$

Легко проверить, что это условие также останется справедливым, если рассмотреть случай смешивания более чем двух состояний. В этом случае векторы $\mathbf{e}_8, \mathbf{e}_0$ будут иметь дополнительные компоненты, а матрица смешивания \mathbf{F} приобретет прямоугольную (а не квадратную) форму. Рассмотрим теперь некоторые частные случаи.

1) Условие (2.48) очевидно выполняется в случае октет-синглетной схемы смешивания (два смешивающихся состояния – η и η'):

$$\mathbf{F} = \text{diag}(f_0, f_8)\mathbf{U}, \quad \mathbf{U}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

. В этом случае интервал дуальности выражается только через октетную “диагональную” константу:

$$s_0^{(8)} = 4\pi^2 f_8^2. \quad (2.53)$$

Для ранее полученного значения $f_8 = 0.88f_\pi$ октет-синглетной схемы (2.34) получим $s_0^{(8)} = 0.52 \text{ GeV}^2$.

¹Напомним, что аномалия связана с пределом $M \rightarrow \infty$ трехточечной корреляционной функции [6].

2) Также условие (2.48) аналогичным образом удовлетворяется в случае октет-сингетной схемы смешивания с произвольным числом смешивающихся состояний; в этом случае, как было указано в разделе 2.2, матрица \mathbf{F} представима в виде произведения (прямоугольной) диагональной и унитарной (ортогональной) матриц.

3) В то же время, существуют схемы смешивания, в которых матрица \mathbf{F} в случае двух смешивающихся состояний может быть параметризована следующим образом [73, 74, 82]

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{\eta}^8 & f_{\eta'}^8 \\ f_{\eta}^0 & f_{\eta'}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_8 & 0 \\ 0 & f_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_8 & \sin \theta_8 \\ -\sin \theta_8 & \cos \theta_8 \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Интервал дуальности (порог континуума) в этих параметрах:

$$s_0^{(8)} = 4\pi^2((f_8)^2 + (f_0)^2 + 2\sqrt{2}f_8f_0(\sin \theta_8 \cos \theta_0 - \cos \theta_8 \sin \theta_0)) \quad (2.55)$$

В этом случае матрица \mathbf{E} диагональна ($\mathbf{e}_8 \cdot \mathbf{e}_0 = 0$) только если $\theta_8 = \theta_0$.

К таким схемам смешивания относится, в частности, кварк-ароматная схема [73]. Действительно, в терминах констант этой схемы матрица констант распада имеет вид

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}(\alpha) \text{diag}(f_q, f_s) \mathbf{U}(\phi),$$

где $\alpha = \arctan(\sqrt{2})$, а ϕ угол смешивания в кварк-ароматной схеме и

$$\mathbf{E} = \mathbf{U} \text{diag}(f_q^2, f_s^2) \mathbf{U}^T$$

может быть диагональной при условии $f_q = f_s$ (восстановления $SU(3)$ симметрии).

Если взять численные значения параметров смешивания кварк-ароматной схемы, полученные в разделе 2.3 (2.37), $f_q = 1.20f_{\pi}$, $f_s = 1.65f_{\pi}$, $\phi = 38.1^\circ$, то получим, что матрица

$$\mathbf{E}^{(q-f)} = \begin{pmatrix} 0.039 & -0.010 \\ -0.010 & 0.032 \end{pmatrix}$$

достаточно близка к диагональной, а недиагональные члены указывают на порядок нарушения $SU(3)_F$ симметрии. Интервал дуальности (порог континуума) при этих параметрах $s_0^{(8)} = 0.39 \text{ GeV}^2$.

Матрица \mathbf{E} в случае параметров схемно-независимого анализа (2.38)

$$\mathbf{E}^{(\text{indep})} = \begin{pmatrix} 0.024 & -0.004 \\ -0.004 & 0.019 \end{pmatrix}$$

указывает на несколько меньшее нарушение $SU(3)_F$ симметрии. Интервал дуальности в этом случае $s_0^{(8)} = 0.46 \text{ GeV}^2$.

В качестве иллюстрации приведем также вид матрицы \mathbf{E} для параметров смешивания, полученных в работах Feldmann, Kroll, Stech [73] $f_q = 1.07f_\pi$, $f_s = 1.34f_\pi$, $\phi = 39.3^\circ$ и Escribano, Frere [82] $f_8 = 1.51f_\pi$, $f_0 = 1.29f_\pi$, $\theta_8 = -23.8^\circ$, $\theta_0 = -2.4^\circ$:

$$\mathbf{E}^{(\text{FKS})} = \begin{pmatrix} 0.027 & -0.005 \\ -0.005 & 0.023 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}^{(\text{EF})} = \begin{pmatrix} 0.039 & -0.012 \\ -0.012 & 0.028 \end{pmatrix}.$$

Соответствующие интервалы дуальности $s_0^{(8)} = 0.48$ и $s_0^{(8)} = 0.18$.

Видно, что интервалы дуальности во всех рассмотренных наборах параметров смешивания довольно близки друг к другу, $s_0^{(8)} \sim 0.4 - 0.5 \text{ GeV}^2$ (за исключением параметров [82], которые, как мы уже видели ранее, плохо согласуются с аномальным правилом сумм). При этом полученные интервалы дуальности оказываются неожиданно малыми: меньше интервала дуальности пиона $\sim 0.7 \text{ GeV}^2$ и существенно меньше наивной оценки – порядка квадрата массы следующего (после η') резонанса $\sim 1.5 - 2.5 \text{ GeV}^2$.

Первое, что нужно отметить – то, что интервал дуальности следует рассматривать как величину, относящуюся к *октетному каналу*, а не *определенному состоянию*. Это означает, что значительно более тяжелые резонансы, “чужие” данному каналу (как η' в случае октетного канала) проявляют себя в интервалах дуальности, относящихся к более легким “своим” резонансам (как η в случае октетного канала). Подчеркнем, что такая ситуация смешивания адронов с существенно отличающимися массами довольно нетипична (обычно состояния с близкими массами смешиваются, как ρ и ω мезоны), и в случае η и η' возникает благодаря аномалии. Действительно, с одной стороны, большая масса η' “генерируется” благодаря глюонной аномалии (связано с известной $U_A(1)$ проблемой, см. [61,62]). С другой стороны, Абелева (электромагнитная) аномалия при $Q^2 = 0$ (и $Q^2 > 0$, как уже было отмечено) указывает на существенное смешивание в η - η' системе.

Малость интервала дуальности в октетном канале также подтверждается анализом коррелятора двух октетных аксиальных токов. Относительно малая константа связи η' мезона и октетного тока $f_{\eta'}^8$ приводит к малому интервалу дуальности (см. ур. (2.47)) в соответствии с описанной картиной. Важно, что интервалы дуальности, вычисленные из двух- и трехточечных корреляторов оказываются близкими друг к другу или даже совпадают при условии выполнения соответствующего ограничения на константы связи (распада) мезонов (2.48).

Эффект малого значения интервала дуальности в октетном канале можно интерпретировать как то, что кварк-адронная дуальность при сильном смешивании проявляется довольно необычным образом в форме “полулокальной” кварк-адронной дуальности (т.е. промежуточной между глобальной и локальной дуальностями) – когда мезон в чужом канале представляется в виде неожиданно малого интервала дуальности, который не связан жестко со своей массой.

Другой вариант интерпретации особенности кварк-адронной дуальности при сильном смешивании заключается в возможности существования непертурбативных поправок, типа той, которая была обсуждена в связи с данными BABAR в случае пионного формфактора в главе 1 или этой главе в разделе 2.5.

Если такая поправка существует в изовекторном канале, в октетном канале ее также было бы естественно ожидать. Заметим, что низшие состояния и в изовекторном (π^0) и октетном каналах (η) – это Голдстоуновские бозоны, которые, если полагаться на данные BABAR, должны иметь “плоскую” амплитуду распределения ([31,32]), которая приводит к нарушению КХД факторизации.

Также на существование поправок в случае смешивающихся состояний указывает еще один аргумент: смешивание требует механизма КХД, отвечающего за его возникновение. Эти поправки могут быть представлены некоторыми вкладками, возникающими не из операторного разложения – возможно из коротких струн [69] или инстантонов.

В качестве дополнения, сравним октетную комбинацию переходных формфакторов η и η' , полученную из аномального правила сумм (2.7) с октетной комбинацией, полученной с использованием интерполяционных формул для переходных формфакторов, предложенных в работе [83]. Используя выражения для $F_{M\gamma}$ из [83], соот-

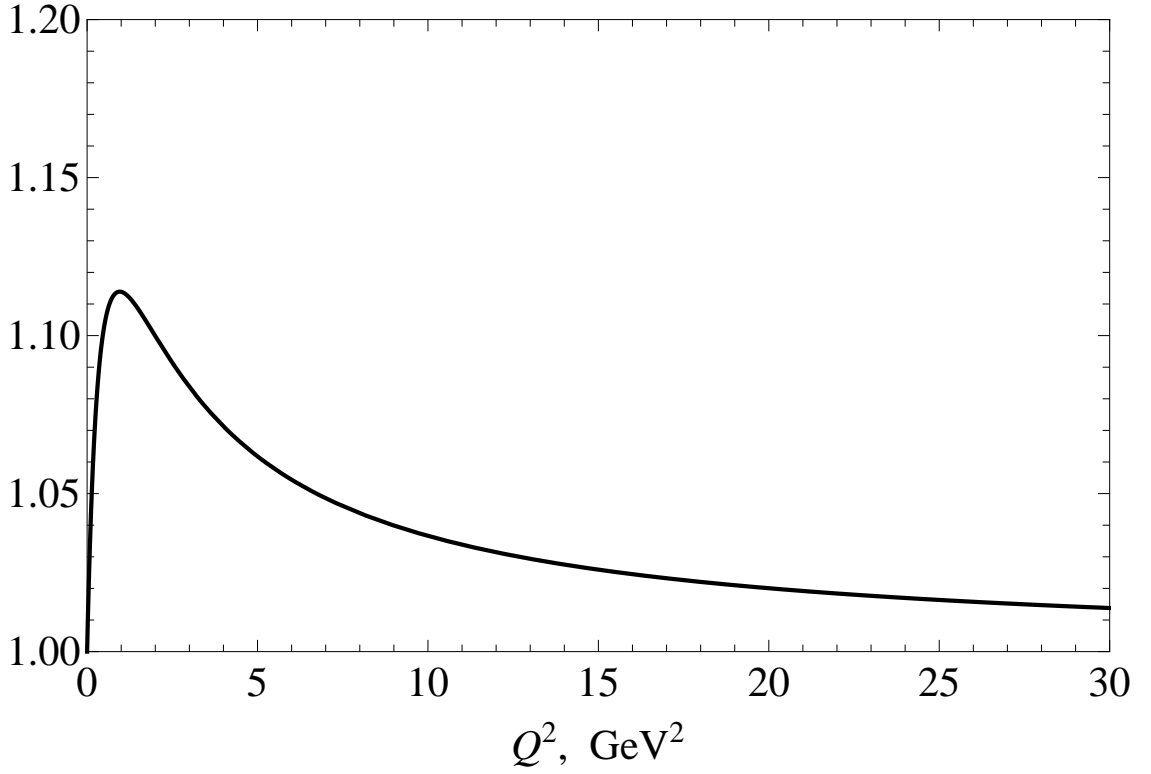


Рис. 2.10: Отношение "интерполяционных" и "аномальных" октетных комбинаций переходных формфакторов: отношение правой части уравнения (2.56) к правой части уравнения (2.7).

ветствующая комбинация переходных формфакторов в наших обозначениях будет выглядеть так:

$$f_\eta^8 F_{\eta\gamma}(Q^2) + f_{\eta'}^8 F_{\eta'\gamma}(Q^2) = \frac{1}{3\sqrt{6}} \left(\frac{10f_q^2}{Q^2 + 4\pi^2 f_q^2} - \frac{4f_s^2}{Q^2 + 4\pi^2 f_s^2} \right), \quad (2.56)$$

где

$$f_q^2 = 2(f_\eta^0)^2 + 2(f_{\eta'}^0)^2 - (f_\eta^8)^2 - (f_{\eta'}^8)^2, \quad (2.57)$$

$$f_s^2 = 2(f_\eta^8)^2 + 2(f_{\eta'}^8)^2 - (f_\eta^0)^2 - (f_{\eta'}^0)^2. \quad (2.58)$$

Легко проверить, что (2.56) и (2.7) (с подставленным $s_0^{(8)}$ из (3.24)) совпадают при $f_q = f_s$. В противном случае они совпадают только в пределах $Q^2 = 0$ и $Q^2 \rightarrow \infty$. Используя константы смешивания из [83] $f_q = 1.07f_\pi$, $f_s = 1.34f_\pi$, приведем график отношения октетных комбинаций формфакторов η, η' (2.56) к (2.7), см. Рис. 2.10. Видно, что максимальное различие $\sim 10\%$ достигается при $Q^2 \sim 1 \text{ GeV}^2$.

Расхождение имеет следующее происхождение. Интервал дуальности в уравнении, основанном на аномалии (2.7) соответствует октетному каналу. С другой стороны, легко видеть, что уравнение (2.56) соответствует кварк-адронной дуальности примененной для “легких” и “странных” каналов. В то же время, применение аномального правила сумм для этих каналов требует учитывать дополнительные вклады из-за глюонной аномалии, которые отсутствуют при выводе (2.7).

Итак, в качестве выводов этого раздела, можно заключить, что на ситуацию с малым интервалом дуальности можно смотреть с двух точек зрения. Можно относить интервал дуальности к каналам, а не самим частицам, дающим вклад в канал. Также, чтобы сохранить “консервативные” значения (следующие из обычного представления об интервале дуальности) нужно предположить существование поправки к спектральной плотности, не входящей в операторное разложение.

Глава 3

Переходные формфакторы η и η'

МЕЗОНОВ

В предыдущей главе было подробно исследовано аномальное правило сумм октетного канала, которое выражает линейную комбинацию формфакторов η и η' через константы распада. В этой главе, используя дополнительную связь между формфакторами, получим отдельные выражения для переходных формфакторов η и η' мезонов. Также будет распространено применение аномальных правил сумм во времени-подобную область, где будет найдена связь с моделью векторной доминантности. В качестве заключительного раздела главы рассмотрим вопрос учета масс кварков в аномальном правиле сумм.

3.1 Переходные формфакторы η и η' мезонов

В разделе 2.2 мы предложили подход к смешиванию, не опирающийся на введение нефизических состояний, не имеющих определенной массы. В то же время, в литературе встречается использование гипотезы (например в работах [21, 83]), которая полагает, что переходный формфактор нефизического состояния, составленного из легких кварков

$$|q\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{u}u\rangle + |\bar{d}d\rangle)$$

связан с пионным формфактором следующим образом:

$$F_{q\gamma}(Q^2) = \frac{5}{3}F_{\pi\gamma}(Q^2), \quad (3.1)$$

где численный фактор возникает из-за зарядов кварков:

$$(e_u^2 + e_d^2)/(e_u^2 - e_d^2) = 5/3$$

Предполагая, что состояния $|q\rangle$ и $|s\rangle \equiv |\bar{s}s\rangle$ выражаются через физические состояния $|\eta\rangle, |\eta'\rangle$ с помощью кварк-ароматной схемы смешивания,¹

$$|q\rangle = \cos\phi|\eta\rangle + \sin\phi|\eta'\rangle, \quad (3.2)$$

$$|s\rangle = -\sin\phi|\eta\rangle + \sin\phi|\eta'\rangle. \quad (3.3)$$

можно связать соответствующие формфакторы:

$$\frac{5}{3}F_{\pi\gamma} = F_{\eta\gamma} \cos\phi + F_{\eta'\gamma} \sin\phi. \quad (3.4)$$

Сейчас можем включить эту гипотезу в наш подход, основанный на аномальном правиле сумм. Решая систему уравнений (2.7), (3.4) с использованием уравнений (1.30), (2.27) можно выразить переходные формфакторы η, η' в терминах констант кварк-ароматной схемы смешивания f_q, f_s, ϕ :

$$F_{\eta\gamma}(Q^2) = \frac{5}{12\pi^2 f_s f_\pi} \frac{s_0^{(3)}(\sqrt{2}f_s \cos\phi - f_q \sin\phi)}{s_0^{(3)} + Q^2} + \frac{1}{4\pi^2 f_s} \frac{s_0^{(8)} \sin\phi}{s_0^{(8)} + Q^2}, \quad (3.5)$$

$$F_{\eta'\gamma}(Q^2) = \frac{5}{12\pi^2 f_s f_\pi} \frac{s_0^{(3)}(\sqrt{2}f_s \sin\phi + f_q \cos\phi)}{s_0^{(3)} + Q^2} - \frac{1}{4\pi^2 f_s} \frac{s_0^{(8)} \cos\phi}{s_0^{(8)} + Q^2}, \quad (3.6)$$

где

$$s_0^{(3)} = 4\pi^2 f_\pi^2, \quad s_0^{(8)} = (4/3)\pi^2(5f_q^2 - 2f_s^2). \quad (3.7)$$

Полученные выражения описывают переходные формфакторы мезонов при произвольных Q^2 только в терминах констант распада мезонов (константы распада η, η' мезонов выражены через параметры смешивания).

¹Заметим, что в описанном в разделе 2.2 подходе подобное соотношение существует только для полей (ур. (2.17)).

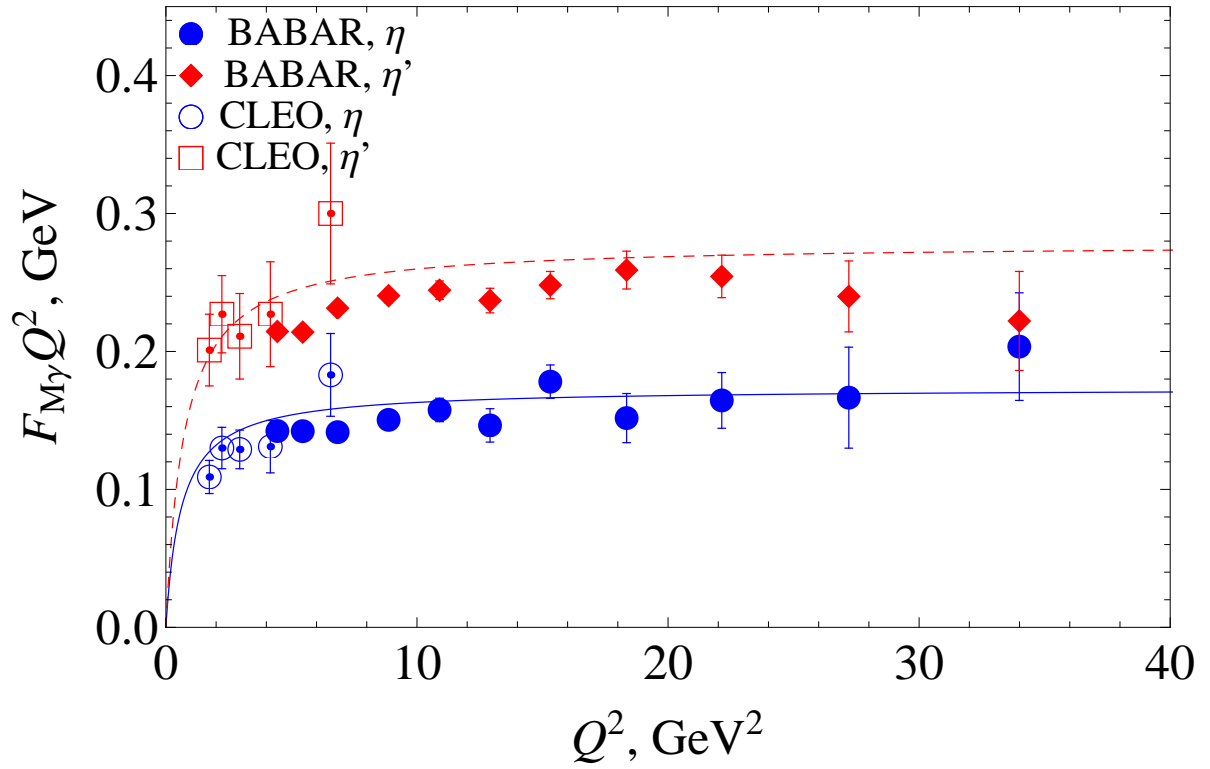


Рис. 3.1: Переходные формфакторы η (синяя непрерывная линия, уравнение (3.36)), и η' (красная пунктирная линия, уравнение (3.37)) мезонов (умноженные на Q^2) и данные экспериментов BABAR [21] и CLEO [26].

Графики уравнений (3.36), (3.37) с параметрами, полученными в нашем анализе (2.37) $f_q = 1.20f_\pi$, $f_s = 1.65f_\pi$, $\phi = 38.1^\circ$ сравниваются с экспериментальными данными на Рис. 3.1. Видно, что имеется хорошее согласие. Если в качестве параметров смешивания взять значения из работы [73], также получим хорошее согласие с экспериментом.

Такое хорошее согласие с экспериментом может указывать на то, что эффект сильной (глюонной) аномалии для состояния $\frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{u}u + \bar{d}d\rangle$ небольшой и сильная аномалия возникает главным образом в канале состояния $\bar{s}s$.

3.2 Аномальное правило сумм во времени-подобной области

До этого момента мы рассматривали аномальное правило сумм и связанные с ним переходные формфакторы мезонов в пространственно-подобной области по переданному импульсу ($q^2 < 0$). Этот и следующий раздел посвятим исследованию аномального правила сумм и его приложений во времени-подобной области ($q^2 > 0$) [17].

Ранее были получены и использованы аномальные правила сумм в случае пространственно-подобных значений импульса фотона $-Q^2 = q^2 < 0$ (второй фотон – на массовой поверхности):

$$\int_0^\infty A_3^{(a)}(s, q^2; m_i^2) ds = \frac{1}{2\pi} N_c C^{(a)}, \quad a = 3, 8. \quad (3.8)$$

Поскольку аномальные правила сумм (3.8) не зависят от q^2 , они остаются справедливыми также в случае времени-подобной области ($q^2 > 0$). Явный способ обосновать аналитическое продолжение правил сумм можно с помощью аналитического продолжения $A_3(s, q^2)$. Предполагая, что спектральная плотность A_3 убывает достаточно быстро при $|q^2| \rightarrow \infty$ и является аналитичной в области $q^2 \in (0, +\infty)$, ее можно выразить в виде дисперсионного интеграла без вычитаний,

$$A_3^{(a)}(s, q^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dy \frac{\rho^{(a)}(s, y)}{y - q^2 + i\epsilon}, \quad (3.9)$$

где $\rho^{(a)}(s, q^2) = 2Im_{q^2} A_3^{(a)}(s, q^2)$. Следовательно, аномальные правила сумм (3.8) во времени-подобной области по q^2 задаются двойным дисперсионным интегралом:

$$\int_0^\infty ds \int_0^\infty dy \frac{\rho^{(a)}(s, y)}{y - q^2 + i\epsilon} = N_c C^{(a)}, \quad a = 3, 8. \quad (3.10)$$

Заметим, что здесь в общем случае нельзя менять порядок интегрирования. Выписывая действительную и мнимую части этих правил сумм, получим:

$$p.v. \int_0^\infty ds \int_0^\infty dy \frac{\rho^{(a)}(s, y)}{y - q^2} = N_c C^{(a)}, \quad (3.11)$$

$$\int_0^\infty ds \rho^{(a)}(s, q^2) = 0, \quad a = 3, 8. \quad (3.12)$$

Можно явно проверить, что эти правила сумм удовлетворяются в случае однопетлевого безмассового приближения спектральной плотности. Напомним, что для определенного аромата i ($i = u, d, s$), она имеет вид [6]:

$$A_3^{(i)} = -\frac{e_i^2 N_c q^2}{2\pi(s - q^2)^2}, \quad (3.13)$$

что приводит к двойной спектральной плотности

$$\rho^{(i)}(s, y) = e_i^2 N_c y \delta'(s - y). \quad (3.14)$$

Напомним, что поправки $\mathcal{O}(\alpha_s)$ к однопетлевому выражению к спектральной плотности (3.13) отсутствуют [55].

Теперь, обосновав справедливость аномальных правил сумм во времени-подобной области, исследуем их приложения. Особый интерес для нас будет представлять область малых q^2 , поскольку эта область недостижима для исследования средствами пертурбативной КХД, в то время как экспериментально эту область можно исследовать посредством распада Далитца.

3.2.1 Переходный формфактор пиона во времени-подобной области и модель векторной доминантности

Рассмотрим сначала изовекторный канал аномального правила сумм, т.е. $J_{\alpha 5}^{(3)}$. Следуя случаю пространственно-подобной области, насытим левую часть трехточечного коррелятора (1.7) резонансами в аксиальном канале, выделяя первый (пионный)

вклад и заменяя вклады высших резонансов интегралом от спектральной плотности. Тогда аномальное правило сумм во времени-подобной области (3.11) приводит к следующему выражению:

$$\pi f_\pi \text{Re} F_{\pi\gamma}(q^2) + \int_{s_0^{(3)}}^{\infty} A_3^{(3)}(s, q^2) ds = \frac{1}{2\pi} N_c C^{(3)}, \quad (3.15)$$

где, как обычно, $s_0^{(3)}$ – интервал дуальности пиона в изовекторном канале, а определения констант распада f_M^a и переходных формфакторов $F_{M\gamma}$ прежние:

$$\langle 0 | J_{\alpha 5}^{(a)}(0) | M(p) \rangle = i p_\alpha f_M^a, \quad (3.16)$$

$$\int d^4x e^{ikx} \langle M(p) | T \{ J_\mu(x) J_\nu(0) \} | 0 \rangle = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho q^\sigma F_{M\gamma}. \quad (3.17)$$

Интеграл A_3 в уравнении (3.32) берется по области $s > s_0^{(3)}$, а поскольку ожидаемые непертурбативные поправки к A_3 в этой области достаточно малы, то достаточно использовать однопетлевое выражение.

Далее, т.к. в изовекторном канале

$$A_3^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_3^{(u)} - A_3^{(d)}),$$

то из (3.13) получим переходный формфактор (действительную часть) во времени-подобной области

$$\text{Re} F_{\pi\gamma}(q^2) = \frac{N_c C^{(3)}}{2\pi^2 f_\pi} \left[p.v. \int_0^{s_0^{(3)}} ds \int_0^\infty dy \frac{\rho^{(a)}(s, y)}{y - q^2} \right] = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2 f_\pi} \frac{s_3}{s_3 - q^2}. \quad (3.18)$$

В качестве $s_0^{(3)}$ используем ранее полученное из пространственно-подобной асимптотики $-q^2 \rightarrow \infty$ значение $s_0^{(3)} = 4\pi^2 f_\pi^2 \simeq 0.67 \text{ GeV}^2$ [8].

Из (3.18) видно, что времени-подобный формфактор пиона имеет полюс при $q^2 = s_0^{(3)}$, который близок к квадрату массы ρ мезона $m_\rho^2 \simeq 0.59 \text{ GeV}^2$. Подчеркнем, что в нашем подходе $m_\rho^2 = m_\omega^2 = s_0^{(3)}$, что можно заметить из разложения одного из электромагнитных токов в (1.7) на изовекторную и изоскалярную составляющие, при условии, что интервалы дуальности пиона универсальны.

Таким образом, мы получили связь между аксиальной аномалией (дополненной глобальной кварк-адронной дуальностью) и моделью векторной доминантности [63] в простейшем виде – когда только ρ (и ω) мезоны дают вклад.²

Действительно, можно увидеть, что вклады более массивных векторных резонансов ($m_V^2 > s_0^{(3)}$) подавляются из-за специфической формы двойной спектральной плотности (3.14). Как только выделяется вклад пиона в октетный канал, фотон автоматически насыщается только ρ -мезоном, что согласуется с моделью векторной доминантности. Таким образом, локализованная форма аномальной двойной спектральной плотности (3.14) обеспечивает основу для модели векторной доминантности. Следует отметить, что выбор в A_1 мезона вместо пиона приводит к совершенно другой форме модели векторной доминантности для соответствующего формфактора. Подчеркнем, что возможность выбора возбужденных резонансов глубоко связана с точностью аномального правила сумм, что существенно отличается от стандартного метода правил сумм КХД.

Отметим, что из (3.12) можно также получить мнимую часть пионного формфактора

$$ImF_{\pi\gamma} = \frac{N_c C^a}{2\pi f_\pi} \delta(q^2 - s_0^{(3)})$$

, что соответствует нулевой ширине ρ -мезона. Если учесть возможные (малые) пертурбативные и непертурбативные поправки и/или использовать более сложные модели континуума в октетном канале, т.е., заменить ступенчатую функцию некоторой регуляризованной (сглаженной) функцией, то это приведет к конечной (вместо нулевой) ширине распада ρ мезона в векторном канале. Тем не менее, эта замена имеет большое значение для $ImF_{\pi\gamma}$ и $ReF_{\pi\gamma}$ только возле полюса. Поэтому, т.к. мы интересуемся переходным формфактором далеко от полюса, можно пренебречь мнимой частью переходного формфактора. Таким образом, в дальнейшем мы предполагаем $ReF_{M\gamma} = F_{M\gamma}$.

Отметим, что связь дисперсионных соотношений для пионного переходного формфактора и моделью векторной доминантности изучались и ранее (см., например, [87]), но, насколько нам известно, без связи с аксиальной аномалией.

²Доминирование вкладов состояний с низшими массами было также отмечено в голографическом подходе [?] а также подходе, основанном на аппроксимациях Паде [46, 86]

Несложно заметить, что полученное выражение для переходного формфактора пиона во времени-подобной области $q^2 > 0$ (3.18) естественным образом переходит в выражение переходного формфактора пиона в пространственно-подобной области $q^2 < 0$, которое было изучено в первой главе. Таким образом, уравнение. (3.18) (или 1.31) дает универсальное описание пионного переходного формфактора при произвольных q^2 .

График пионного формфактора, нормированного на значение при $q^2 = 0$, $R_\pi \equiv F_{\pi\gamma}(q^2)/F_{\pi\gamma}(0)$, показан на рис. 3.2.

Определим безразмерные параметры наклона и кривизны этой величины (для некоторого мезона M) в точке $q^2 = 0$:

$$a_M = m_M^2 \frac{\partial R_M}{\partial q^2} \Big|_{q^2=0}, \quad (3.19)$$

$$b_M = \frac{m_M^4}{2} \frac{\partial^2 R_M}{\partial (q^2)^2} \Big|_{q^2=0}. \quad (3.20)$$

В нашем случае эти величины

$$a_\pi = \frac{m_\pi^2}{s_0^{(3)}} = 0.027, \quad (3.21)$$

$$b_\pi = \frac{m_\pi^4}{(s_0^{(3)})^2} = 0.73 \cdot 10^{-3}, \quad (3.22)$$

находятся в согласии с экспериментальными данными во времени-подобной [88–90] и пространственно-подобной [25, 26] областях.

Полученный результат также находится в согласии с результатами, полученными в киральной теории возмущений и подходах, основанных на различных модификациях модели векторной доминантности [37, 39, 44, 46, 87, 91, 92].

Наши выводы о справедливости формулы Бродского-Лепажэ применимы также для процессов типа $Z^0 \rightarrow \pi^0 \gamma$, некоторое время назад широко обсуждавшихся [93, 94]. Подчеркнем, что наше утверждение ([11], Sec. II A) о неточности ЧСАТ при больших q^2 применимо и в этом случае.

Также представляется интересным рассмотреть аналитическое продолжение непертурбативной поправки к спектральной плотности, предложенной в главе 1. Улучшение экспериментальных данных во времени-подобной области внесло бы вклад в разрешение противоречия между данными BELLE и BABAR.

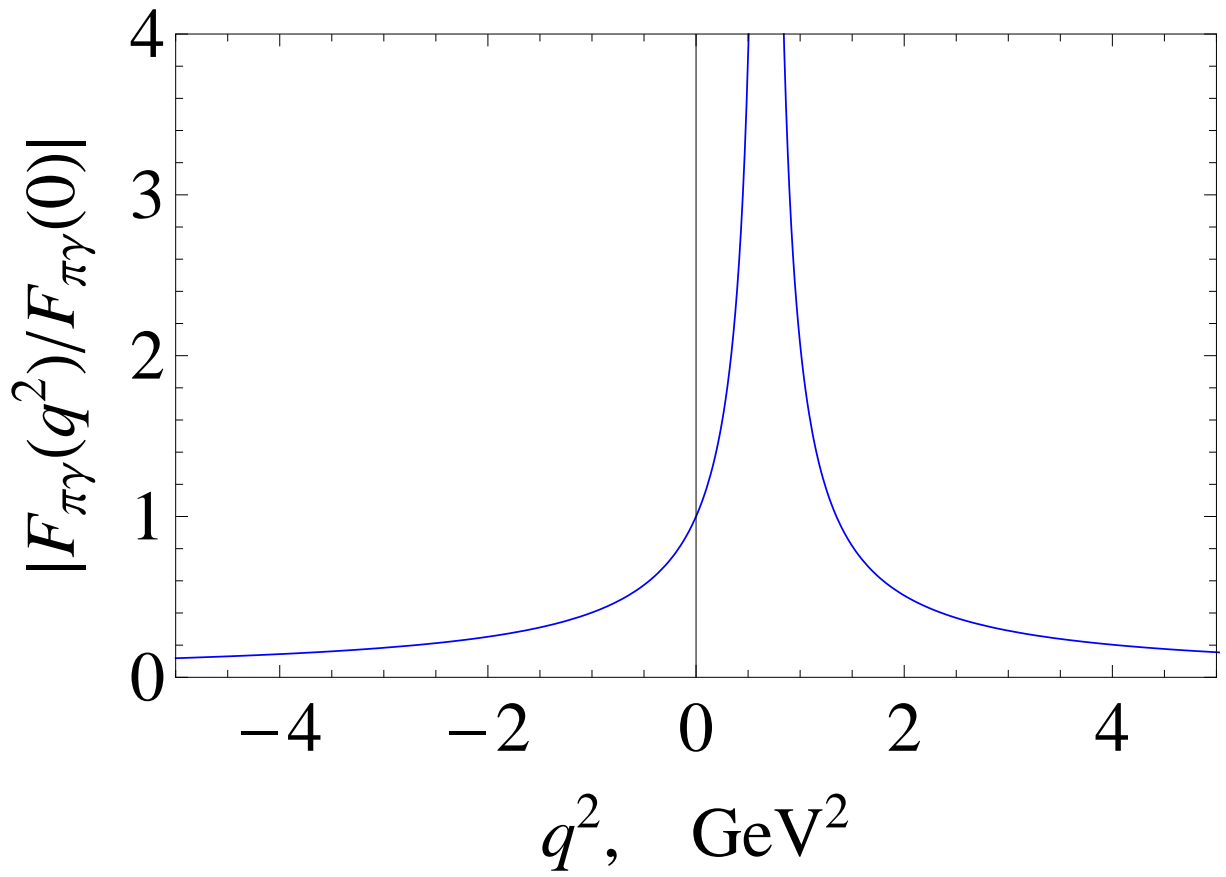


Рис. 3.2: Переходный формфактор пиона.

3.2.2 η и η' мезоны во времени-подобной области

Рассмотрим теперь октетный канал ($J_{\alpha 5}^{(8)}$) аномального правила сумм. Так же, как и в случае пространственно-подобной области, нужно учесть вклады η и η' мезонов.

Тогда, применяя однопетлевое выражение для спектральной плотности (3.13),

$$A_3^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(A_3^{(u)} + A_3^{(d)} - 2A_3^{(s)})$$

, из аномального правила сумм в пространственно-подобной области получим

$$f_\eta^8 F_{\eta\gamma}(q^2) + f_{\eta'}^8 F_{\eta'\gamma}(q^2) = \frac{1}{2\sqrt{6}\pi^2} \frac{s_0^{(8)}}{s_0^{(8)} - q^2}. \quad (3.23)$$

Интервал дуальности октетного канала, определенный из предела $-q^2 \rightarrow \infty$ уравнения (3.23) и пространственно-подобных асимптотик переходных формфакторов η , η' :

$$s_0^{(8)} = 4\pi^2((f_\eta^8)^2 + (f_{\eta'}^8)^2 + 2\sqrt{2}[f_\eta^8 f_\eta^0 + f_{\eta'}^8 f_{\eta'}^0]). \quad (3.24)$$

Уравнения (3.23), (3.24) выражают октетную комбинацию переходных формфакторов η и η' в терминах констант распада f_M^a . Уравнение (3.23) теперь может быть использовано при произвольных (времени- и пространственно-подобных) q^2 .

В целях численного анализа, используем два набора констант распада, полученных в кварк-ароматной схеме смешивания:

I) Константы распада, полученные в разделе 2.3 в кварк-ароматной схеме смешивания:

$$(f_\eta^8, f_{\eta'}^8, f_\eta^0, f_{\eta'}^0) = (1.38, -0.63, 0.18, 1.35)f_\pi$$

(выражены из констант смешивания $f_q = 1.20f_\pi$, $f_s = 1.65f_\pi$, $\phi = 38.1^\circ$)

II) Константы распада, полученные в работе [73]:

$$(f_\eta^8, f_{\eta'}^8, f_\eta^0, f_{\eta'}^0) = (1.17, -0.46, 0.19, 1.15)f_\pi$$

(выражены из констант смешивания $f_q = 1.07f_\pi$, $f_s = 1.34f_\pi$, $\phi = 39.3^\circ$).

Интервал дуальности (3.24) в терминах параметров кварк-ароматной схемы смешивания:

$$s_0^{(8)} = (4/3)\pi^2(5f_q^2 - 2f_s^2)$$

. Численно $s_0^{(8)}$ для констант распада наборов I и II составляет 0.39 GeV^2 и 0.48 GeV^2 соответственно. Эти цифры, как и в случае изовекторной канала, близки (с точностью 10-20%) к массе ρ мезона в квадрате.

Источником погрешности может быть эффект массы странного кварка, возможные вклады прямых инстантонов и других непертурбативных эффектов, которые проявляются в октетном канале.

Таким образом, аргумент, связанный с моделью векторной доминантности предоставляет дополнительное (к обсуждаемым ранее в разделе 2.6) объяснение, почему интервал дуальности $s_0^{(8)}$ настолько мал. Действительно, сходство интервалов дуальности в изовекторном и октетном каналах и соответствующих положений полюсов во времени-подобных областях требуется для самосогласованности объяснения модели векторной доминантности, основанного на аномалии.

В то же время, численное значение интервала дуальности в октетном канале определяется хуже, чем в изовекторном канале из-за неопределенности в константах распада, полученных из разных анализов. Но поскольку аномальное правило сумм может быть надежно использовано при q^2 , достаточно удаленных от полюсного значения, это несоответствие не очень важно.

Из рис. 3.3 область применимости формулы (3.23) можно оценить как $q^2 \lesssim 0.3 \text{ GeV}^2$ и $q^2 \gtrsim 2 \text{ GeV}^2$. Полоса обозначает область между линиями, соответствующими рассматриваемым наборам констант распада.

Перейдем теперь к выражениям для переходных формфакторов. Как и в разделе 3.1, используя дополнительное соотношение для формфактора состояния

$$|n\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{u}u\rangle + |\bar{d}d\rangle)$$

и используя уравнения (3.23), (3.24) and (3.18), получим выражения для переходных формфакторов η и η' :

$$F_{\eta\gamma}(q^2) = \frac{5}{12\pi^2 f_s f_\pi} \frac{s_3(\sqrt{2}f_s \cos \phi - f_q \sin \phi)}{s_3 - q^2} + \frac{1}{4\pi^2 f_s} \frac{s_8 \sin \phi}{s_8 - q^2}, \quad (3.25)$$

$$F_{\eta'\gamma}(q^2) = \frac{5}{12\pi^2 f_s f_\pi} \frac{s_3(\sqrt{2}f_s \sin \phi + f_q \cos \phi)}{s_3 - q^2} - \frac{1}{4\pi^2 f_s} \frac{s_8 \cos \phi}{s_8 - q^2}, \quad (3.26)$$

На Рис. 3.4 изображен график переходного формфактора η мезона (3.36) (нормированного на значение при $q^2 = 0$) в области $q^2 \in (-0.25, 0.25) \text{ GeV}^2$. Непрерывная

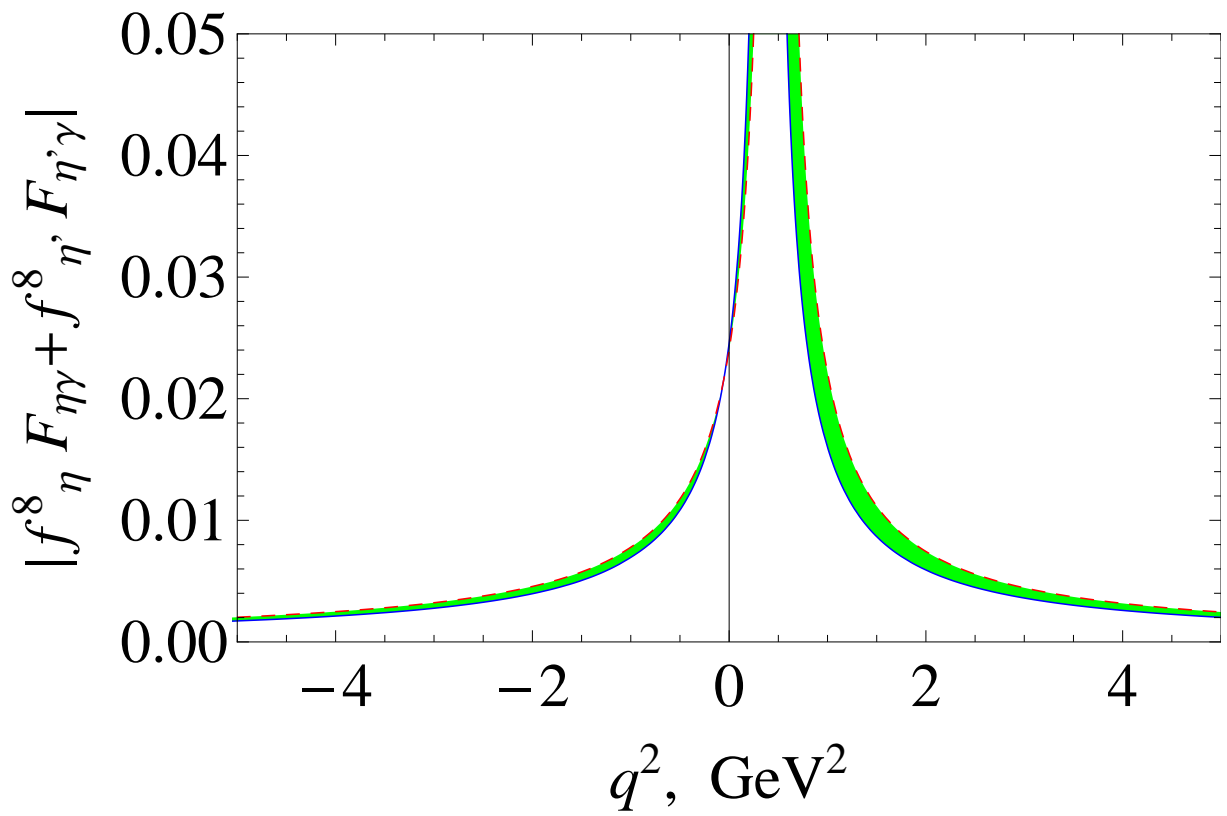


Рис. 3.3: Октетная комбинация переходных формфакторов η и η' мезонов (3.23).

синяя линия и красная пунктирная линия соответствуют наборам параметров I и II соответственно, зеленая полоса обозначает область между этими линиями. Данные коллаборации A2 (детектор Crystal Ball/TAPS, МAMI) [95] изображены красными точками с погрешностями. Оба набора констант распада (I и II) описываются с величиной $\chi^2/24 = 0.11$. Таким образом, экспериментальные данные описываются хорошо.

Параметры наклона и кривизны кривых в точке $q^2 = 0$ для наборов констант I и II:

$$a_\eta = 0.54, \quad b_\eta = 0.31 \quad (I) \quad (3.27)$$

$$a_\eta = 0.51, \quad b_\eta = 0.27 \quad (II). \quad (3.28)$$

Эти числа близки к полученным в работах [86, 96], из киральной теории возмущений [97] и интерполяций времени-подобных [98] и пространственно-подобных [25, 26] экспериментальных данных.

Также данные коллаборации NA60 [98], которые были получены в области $q^2 \in (0.06, 0.21) \text{ GeV}^2$ (на графике не изображены) также хорошо описываются кривой (3.37). Нужно отметить, что результат NA60, полученный для времени-подобного переходного формфактора $\omega - \pi^0$ (измеренного в процессе $\omega \rightarrow \mu^+ \mu^- \pi^0$), в котором было обнаружено расхождение с моделью векторной доминантности, связан с процессом с участием двух виртуальных фотонов. Такого рода процессы находятся за пределами темы диссертации и здесь не рассматриваются.

На Рис. 3.5 приведен график уравнения (3.37) для переходного формфактора η' (нормирован на $F_{\eta'\gamma}(0)$) в области по $q^2 \in (-0.25, 0.25) \text{ GeV}^2$. Синяя непрерывная и красная пунктирная линии соответствуют наборам параметров I и II соответственно. Зеленая полоса обозначает область между кривыми. Параметры наклона и кривизны линии в точке $q^2 = 0$ для наборов констант распада I и II:

$$a_\eta = 1.06, \quad b_\eta = 0.76 \quad (I) \quad (3.29)$$

$$a_\eta = 1.16, \quad b_\eta = 1.19 \quad (II). \quad (3.30)$$

В работе [86] параметры имеют несколько большие значения $a_{\eta'} = 1.37(18)$, $b_{\eta'} = 1.94(67)$.

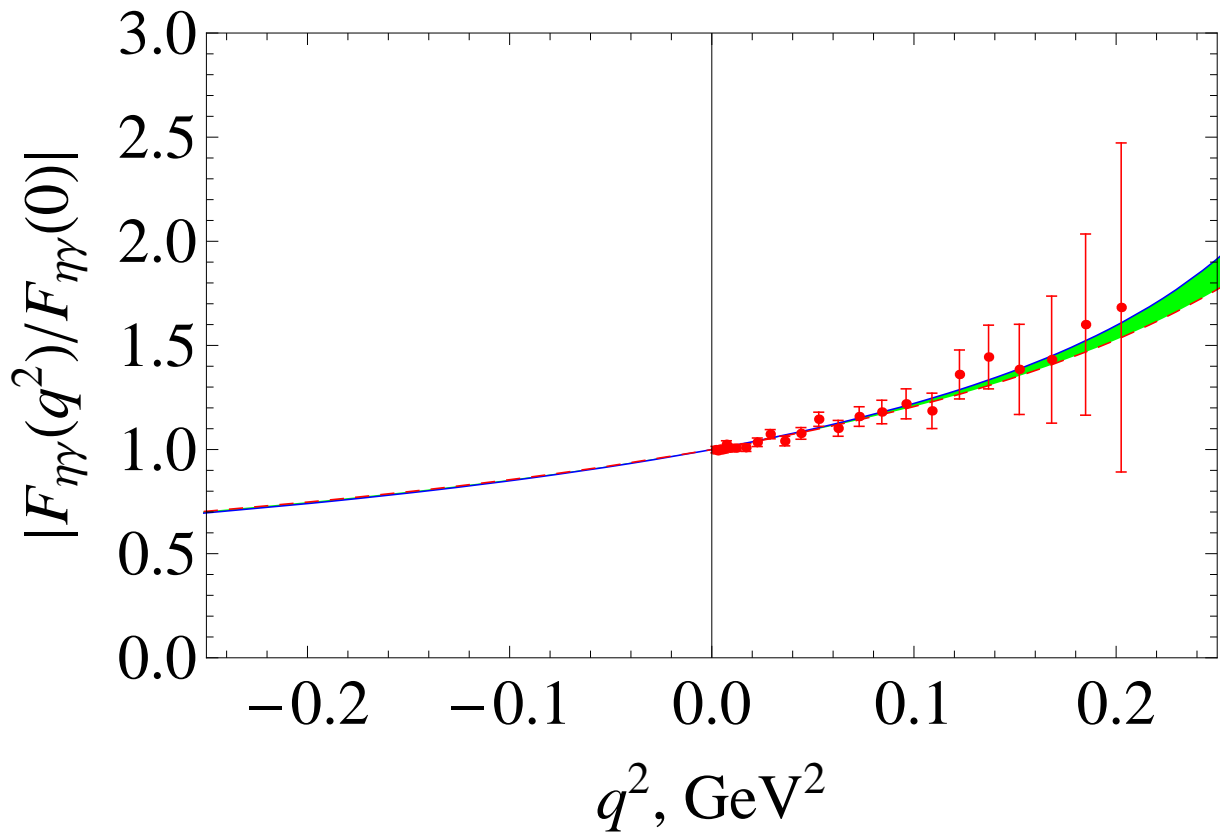


Рис. 3.4: Переходный формфактор η мезона (3.36) и данные коллаборации A2 [95].

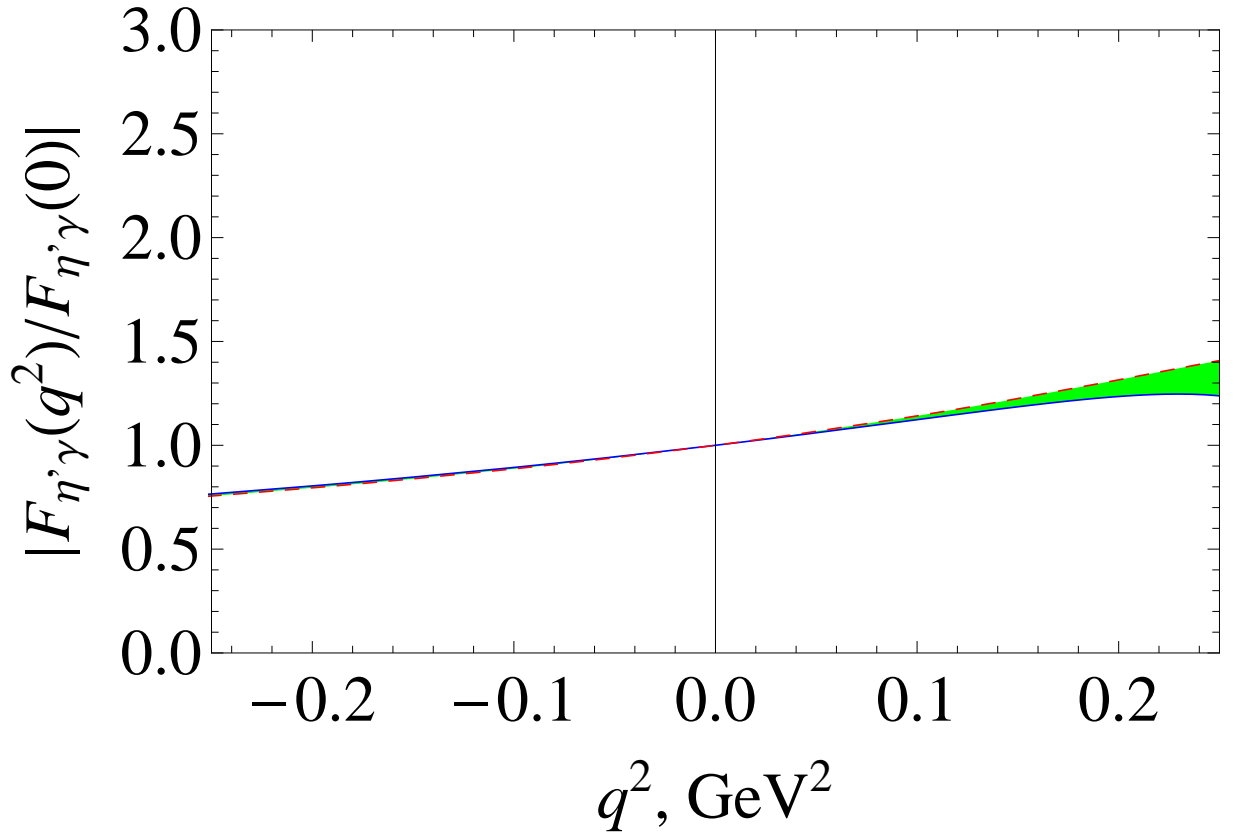


Рис. 3.5: Переходный формфактор η' мезона (3.37).

Подводя итоги этого раздела, можно сказать, что основываясь на дисперсионной форме аксиальной аномалии, мы обосновали применимость модели векторной доминантности для переходных формфакторов с одним реальным и одним виртуальным фотоном.

Используя аналитическое продолжение правил сумм во времени-подобную область, получены переходные формфакторы π^0 , η и η' мезонов в этой области и проведено сопоставление с имеющимися экспериментальными данными.

3.3 Массовая поправка

Ранее при анализе формфакторов мы использовали приближение безмассовых кварков: в качестве спектральной плотности использовали выражение (2.6). В этом разделе проанализируем возникающие поправки при учете масс кварков.

Спектральная плотность в однопетлевом приближении с учетом массы кварка

для определенного аромата q имеет вид [6]

$$A_3^{(q)}(s, Q^2) = \frac{e_q^2 N_c}{2\pi} \frac{\Theta(s - 4m_q^2)}{(Q^2 + s)^2} \left(Q^2 R^{(q)} + 2m_q^2 \ln \frac{1 + R^{(q)}}{1 - R^{(q)}} \right), \quad (3.31)$$

где

$$R^{(q)} = \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{s}},$$

m_q – масса кварка, e_q – электрический заряд кварка в единицах абсолютного заряда электрона, $N_c = 3$ – число цветов.

Используя описанную ранее процедуру выделения пионного вклада в **изовекторном канале** аномального правила сумм

$$\pi f_\pi F_{\pi\gamma}(Q^2) + \int_{s_0^{(3)}}^{\infty} A_3^{(3)}(s, Q^2) ds = \frac{1}{2\pi} N_c C^{(3)}, \quad (3.32)$$

из (3.31) с учетом того, что в изовекторном канале спектральная плотность имеет вид

$$A_3^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_3^{(u)} - A_3^{(d)}),$$

получим путем интегрирования формфактор пиона с учетом массовой поправки ($m_u = m_d = m$):

$$F_{\pi\gamma}(Q^2; m^2) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2 f_\pi} \frac{s_0^{(3)}}{s_0^{(3)} + Q^2} \left[1 - \frac{2m^2}{s_0^{(3)}} \left(\frac{2}{R_3 + 1} + \ln \frac{1 + R_3}{1 - R_3} \right) \right], \quad (3.33)$$

где

$$R_3 = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s_0^{(3)}}}$$

.

Массовая поправка представлена вторым членом в квадратных скобках (3.33). Численно эта поправка оказывается пренебрежимо малой: $\sim 0.15\%$ от главного члена ($m = 5$ MeV). Таким образом, в случае пиона использование кирального предела обосновано.

В связи с данными BABAR возникает вопрос: могла ли такая поправка помочь описать эти данные, если бы по каким-то причинам в (3.33) была не токовая масса, а некоторая эффективная? Ответ – нет, поскольку такая поправка только ухудшила бы описание из-за отрицательного знака поправки.

В случае **октетного канала** аномального правила сумм массовая поправка уже более существенна по сравнению с пионным случаем вследствие вклада странного кварка. Следуя разделу 2.1, выделив вклады η и η' мезонов, учитывая, что в спектральная плотность в этом случае имеет вид $A_3^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(A_3^{(u)} + A_3^{(d)} - 2A_3^{(s)})$, пренебрегая вкладом легких кварков и оставляя вклад только странного кварка, после интегрирования из уравнения (2.5) получим

$$f_\eta^8 F_{\eta\gamma}(Q^2) + f_{\eta'}^8 F_{\eta'\gamma}(Q^2) = \frac{1}{2\sqrt{6}\pi^2} \frac{s_0^{(8)}}{s_0^{(8)} + Q^2} \left[1 + \frac{4m_s^2}{3s_0^{(8)}} \left(\frac{2}{R_8^{(s)} + 1} + \ln \frac{1 + R_8^{(s)}}{1 - R_8^{(s)}} \right) \right], \quad (3.34)$$

где $R_8^{(s)} = \sqrt{1 - 4m_s^2/s_0^{(8)}}$.

Отметим, что массовый член (с обратным знаком) в уравнении (3.34) соответствует высшим псевдоскалярным вкладам в пределе $Q^2 = 0$, поэтому, можно сделать вывод, что их суммарный вклад в этом пределе отрицательный.

Чтобы перейти к численным оценкам, используем (3.24) в качестве порога континуума, в качестве массы странного кварка возьмем $m_s = 95$ MeV (в точке $Q = 2$ GeV), которое заморозим при $Q < 1$ GeV. В качестве констант распада возьмем полученные ранее константы октет-синглетной (2.34), кварк-октетной (2.37) схем смешивания, схемно-независимый набор констант (2.38) а также набор констант из работы [73]. Соответствующие графики октетной комбинации без поправок (непрерывная черная кривая) и с массовой поправкой (3.34) (пунктирная красная кривая) изображены на Рис. 3.6 (октет-синглетная схема), Рис. 3.7 (кварк-ароматная схема), Рис. 3.8 (схемно-независимые константы), Рис. 3.9 ([73]: $f_q = 1.07f_\pi$, $f_s = 1.34f_\pi$, $\phi = 39.3^\circ$).

Итак, сравнивая графики октетной комбинации переходных формфакторов η и η' мезонов с массовой поправкой и без нее (пунктирная красная и непрерывная черная линии), видно, что хотя вклад поправки, учитывающий массу странного кварка и не является пренебрежимо малым ($\sim 15\%$ от главного члена в максимуме), тем не менее, оба графика удовлетворительно описывают данные для всех рассмотренных здесь наборов констант распада мезонов в пределах экспериментальных погрешностей (которые довольно большие по сравнению с изовекторным случаем). Можно сделать вывод, что безмассовый случай вполне применим и в случае октетного канала. Конечно, дальнейшее улучшение точности данных приведет к необходимости

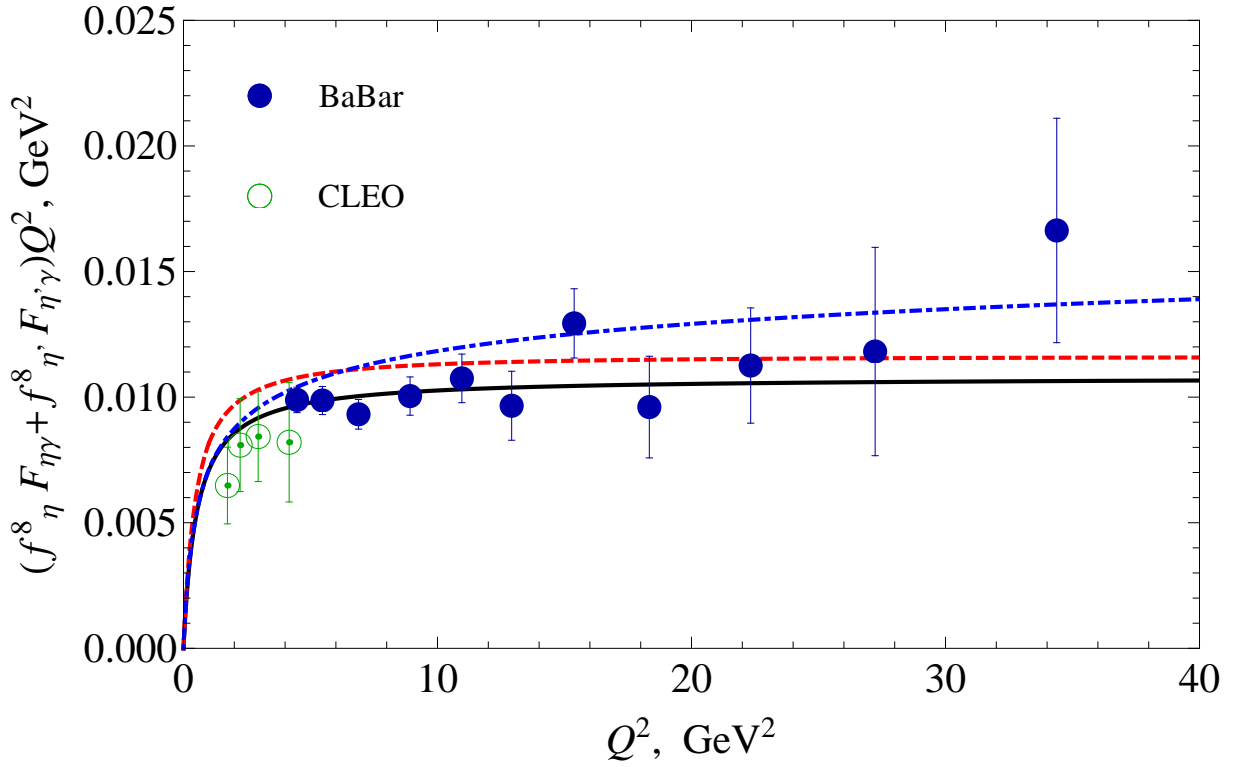


Рис. 3.6: Сравнение результатов аномального правила сумм в октетном канале (уравнения (3.34), (3.35)) и экспериментальных данных в случае **октет-синглетных** параметров смешивания (2.34). Непрерывная черная линия – предел $m_s = 0$ (2.7); пунктирная красная линия – ур. (3.34); пунктирно-точечная синяя линия – ур. (3.35).

учета такой поправки.

Следует отметить, что член массовой поправки (второй член в квадратных скобках) не может обеспечить роста типа $\log Q^2$, как этого требуют данные BABAR в случае пиона, хотя знак поправки в случае октетного канала действительно увеличивает (в отличие от пионного случая) октетную комбинацию формфакторов. Т.е. источником роста октетной комбинации переходных формфакторов должна быть, как ранее уже обсуждалось, другая (непертурбативная) поправка (третий член в квадратных скобках).

Если уравнение (3.34) дополнить ранее рассмотренной поправкой логарифмического типа (2.42), то получим следующее правило сумм

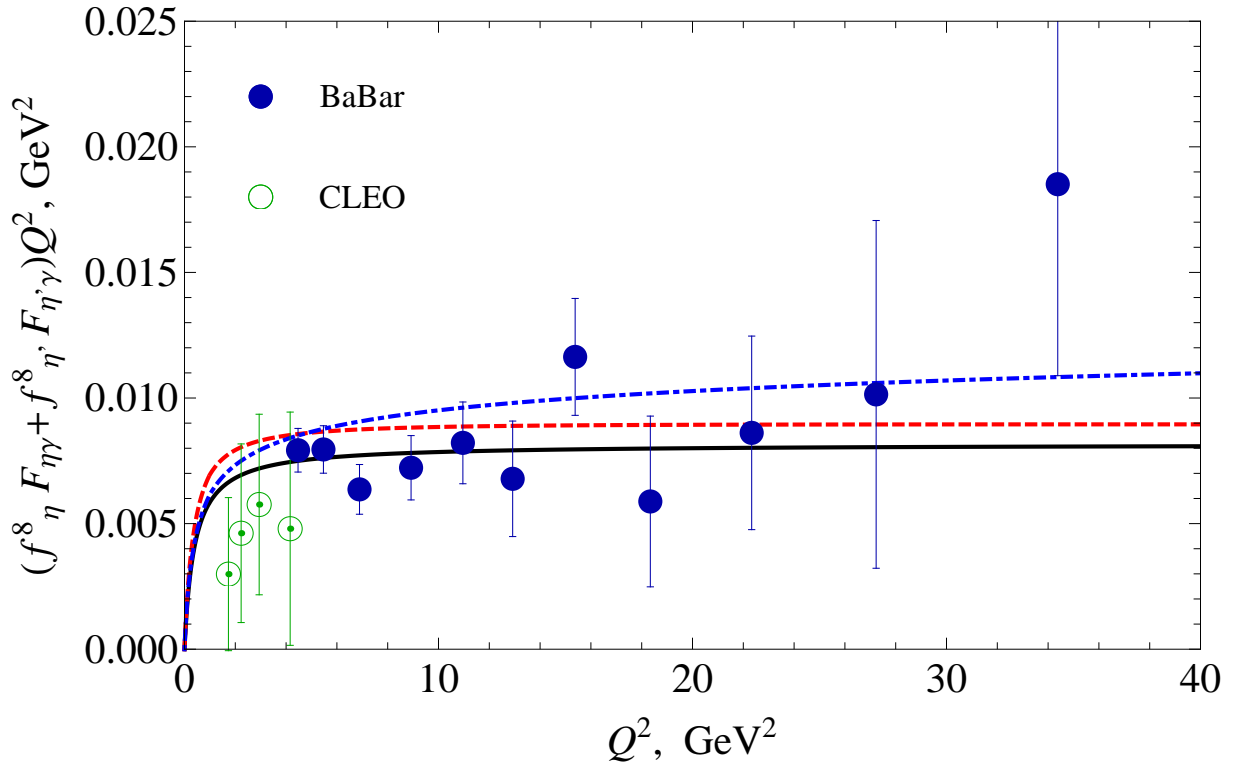


Рис. 3.7: Сравнение результатов аномального правила сумм в октетном канале (уравнения (3.34), (3.35)) и экспериментальных данных в случае **кварк-ароматных** параметров смешивания (2.37). Непрерывная черная линия – предел $m_s = 0$ (2.7); пунктирная красная линия – ур. (3.34); пунктирно-точечная синяя линия – ур. (3.35).

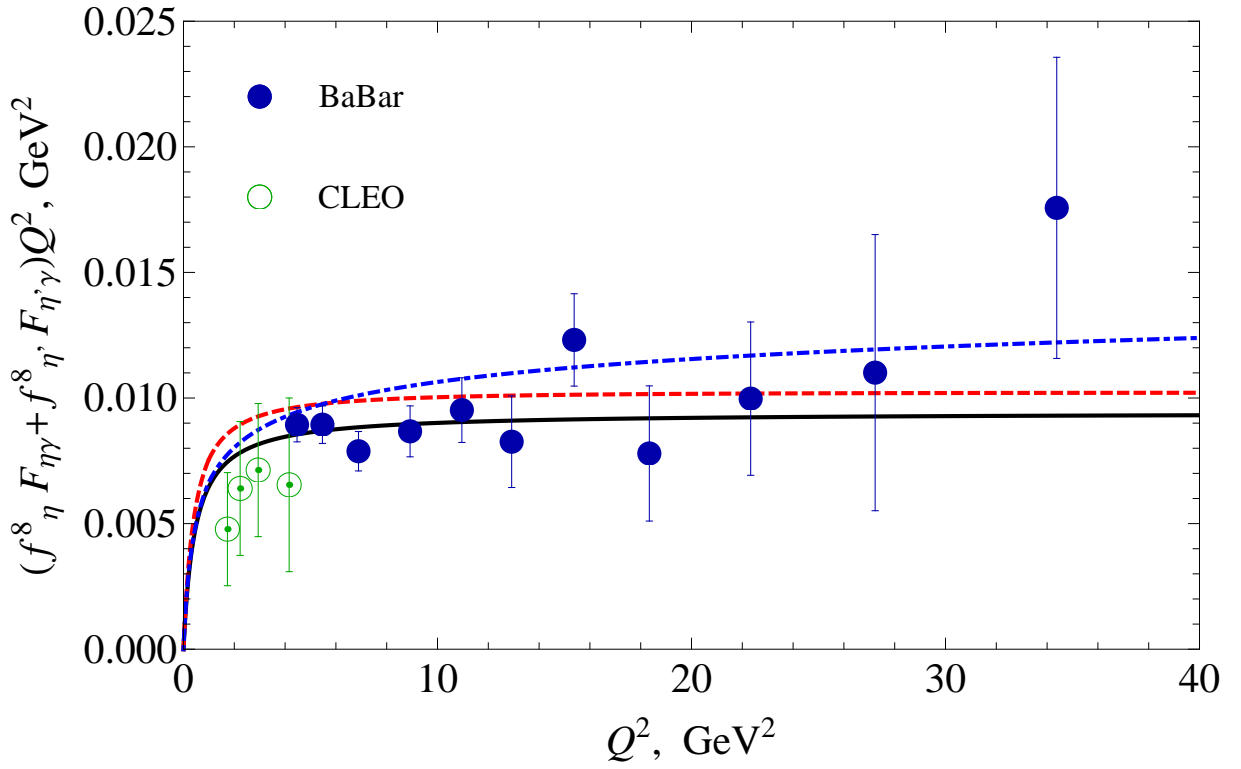


Рис. 3.8: Сравнение результатов аномального правила сумм в октетном канале (уравнения (3.34), (3.35)) и экспериментальных данных в случае **схемно-независимого** анализа констант распада (2.38). Непрерывная черная линия – предел $m_s = 0$ (2.7); пунктирная красная линия – ур. (3.34); пунктирно-точечная синяя линия – ур. (3.35).

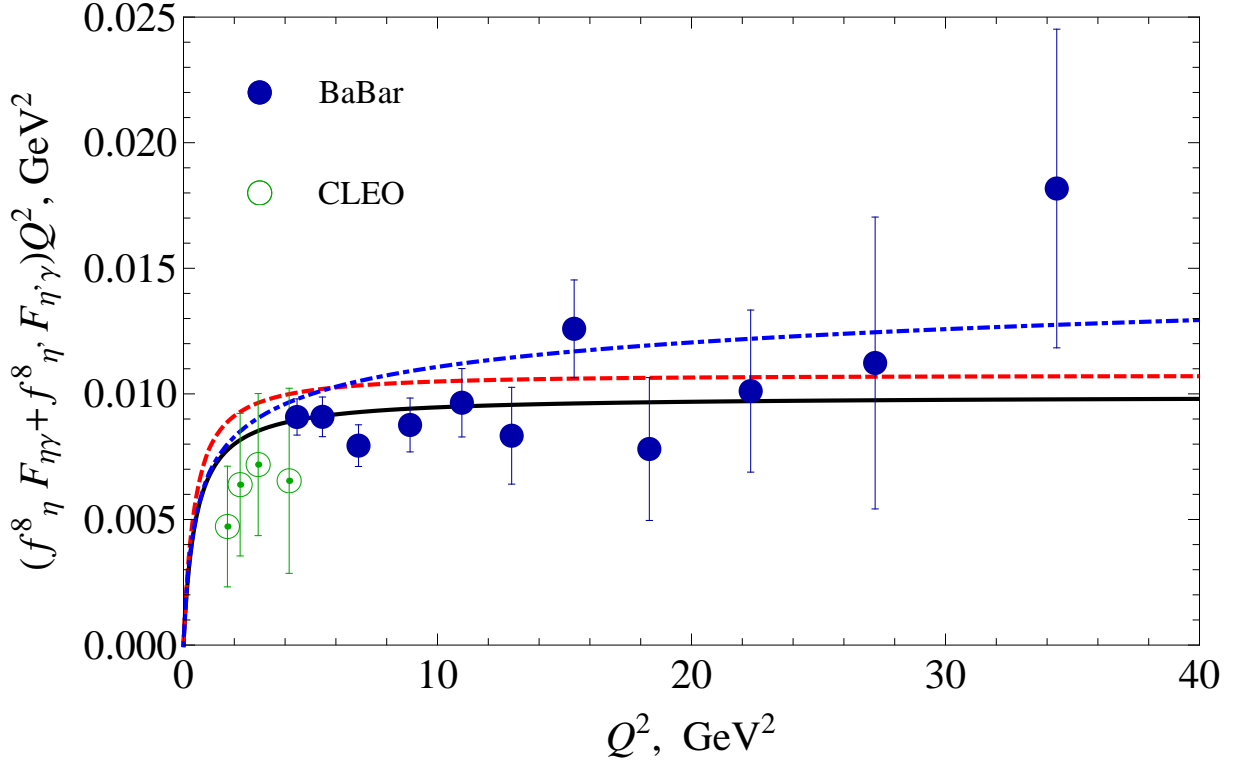


Рис. 3.9: Сравнение результатов аномального правила сумм в октетном канале (уравнения (3.34), (3.35)) и экспериментальных данных в случае параметров смешивания работы [73]: $f_q = 1.07f_\pi$, $f_s = 1.34f_\pi$, $\phi = 39.3^\circ$. Непрерывная черная линия – предел $m_s = 0$ (2.7); пунктирная красная линия – ур. (3.34); пунктирно-точечная синяя линия – ур. (3.35).

$$\begin{aligned}
& f_\eta^8 F_{\eta\gamma}(Q^2) + f_{\eta'}^8 F_{\eta'\gamma}(Q^2) = \\
& = \frac{1}{2\sqrt{6}\pi^2} \frac{s_0^{(8)}}{s_0^{(8)} + Q^2} \left[1 + \frac{4m_s^2}{3s_0^{(8)}} \left(\frac{2}{R_8^{(s)} + 1} + \ln \frac{1 + R_8^{(s)}}{1 - R_8^{(s)}} \right) + \frac{\lambda Q^2}{s_0^{(8)} + Q^2} \left(\ln \frac{Q^2}{s_0^{(8)}} + \sigma \right) \right]. \quad (3.35)
\end{aligned}$$

В качестве параметров логарифмической поправки возьмем полученные ранее для пионного переходного формфактора (комбинированные данные CELLO+CLEO+BABAR+Belle) параметры $\lambda = 0.12$, $\sigma = -2.50$.

Графики октетной комбинации с массовой и логарифмической поправками (3.35) обозначены пунктирно-точечной синей кривой на Рис. 3.6 (октет-синглетная схема), Рис. 3.7 (кварк-ароматная схема), Рис. 3.8 (схемно-независимые константы), Рис. 3.9 ([73]: $f_q = 1.07f_\pi$, $f_s = 1.34f_\pi$, $\phi = 39.3^\circ$).

Наш предыдущий вывод об этой поправке остается также справедливым и при учете массы странного кварка: в октетном канале аномального правила сумм есть место для такой (непертурбативной, размерности 2) поправки, хотя и нет такого сильного указания, как в случае изовекторного канала при учете данных BABAR.

Наконец, приведем графики для отдельных выражений для переходных η и η' мезонов с учетом рассмотренной массовой поправки. В этом случае уравнения (3.36) и (3.37) модифицируются следующим образом:

$$F_{\eta\gamma}(Q^2) = \frac{5}{12\pi^2 f_s f_\pi} \frac{s_0^{(3)} (\sqrt{2} f_s \cos \phi - f_q \sin \phi)}{s_0^{(3)} + Q^2} + \frac{1}{4\pi^2 f_s} \frac{s_0^{(8)} \sin \phi}{s_0^{(8)} + Q^2} (1 + K_8), \quad (3.36)$$

$$F_{\eta'\gamma}(Q^2) = \frac{5}{12\pi^2 f_s f_\pi} \frac{s_0^{(3)} (\sqrt{2} f_s \sin \phi + f_q \cos \phi)}{s_0^{(3)} + Q^2} - \frac{1}{4\pi^2 f_s} \frac{s_0^{(8)} \cos \phi}{s_0^{(8)} + Q^2} (1 + K_8), \quad (3.37)$$

где мы обозначили вклад от массы странного кварка

$$K_8 = \frac{4m_s^2}{3s_0^{(8)}} \left(\frac{2}{R_8^{(s)} + 1} + \ln \frac{1 + R_8^{(s)}}{1 - R_8^{(s)}} \right), \quad R_8^{(s)} = \sqrt{1 - 4m_s^2/s_0^{(8)}}. \quad (3.38)$$

График переходных формфакторов с учетом массовой поправки (пунктирные линии) по сравнению со случаем без учета поправки приведен на Рис. 3.10. Можно подтвердить вывод, что учет массовой поправки не влияет существенно на результат: хотя такая поправка в октетном канале и не является пренебрежимо малой, тем не менее, безмассовое приближение является хорошим при текущей точности экспериментальных данных.

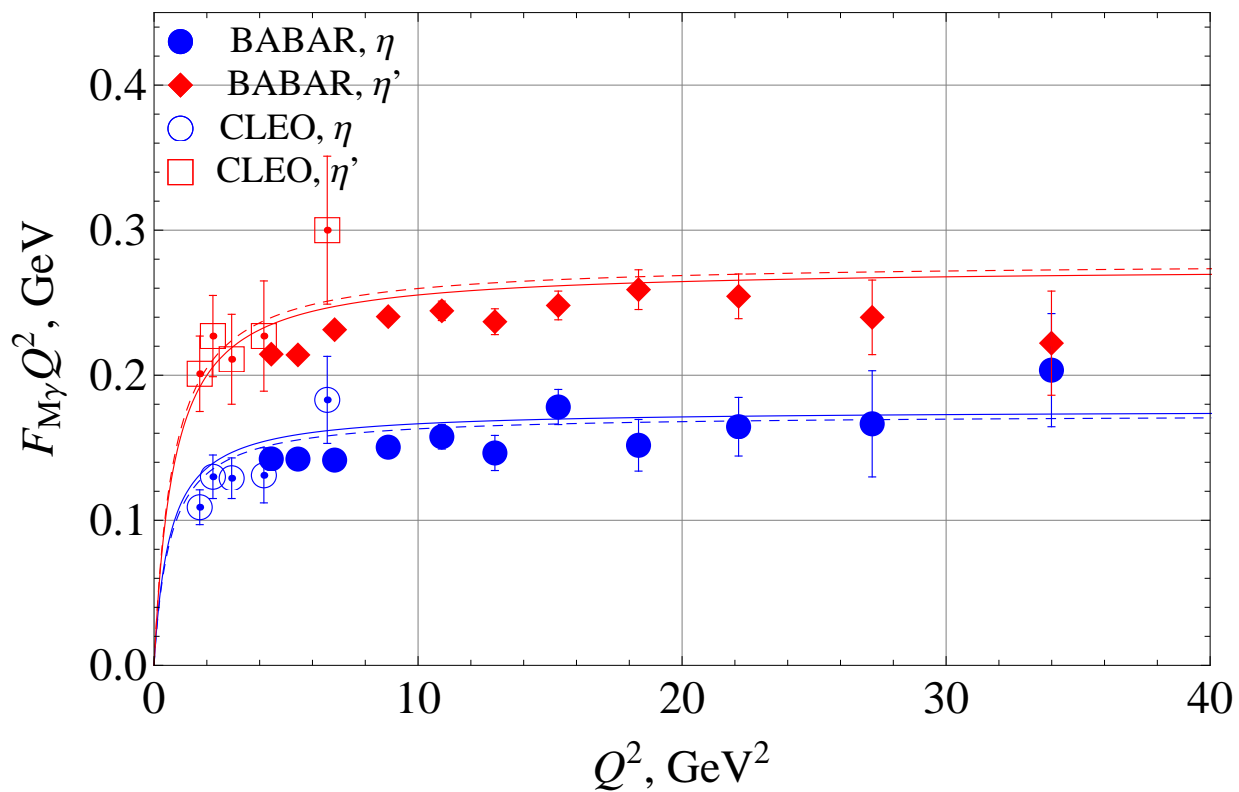


Рис. 3.10: Переходные формфакторы η и η' мезонов (умноженные на Q^2). Без массовой поправки: синяя непрерывная линия, уравнение (3.36) и красная непрерывная линия, уравнение (3.37) соответственно. С массовой поправкой: синяя пунктирная линия, уравнение (3.36) и красная пунктирная линия. Данные экспериментов BABAR [21] и CLEO [26].

Заключение

Подведем итоги исследования, проведенного в диссертации.

Аномальные правила сумм — следствие дисперсионного представления аксиальной аномалии — являются удобным инструментом для исследования ряда адронных процессов, в частности, процессов фоторождения мезонов с участием виртуальных фотонов, как $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0(\eta, \eta')$. Важной особенностью аномальных правил сумм является их точность (как соотношения в целом), благодаря чему можно исследовать поправки к отдельным адронным вкладам. Еще одной особенностью аномальных правил сумм является независимость от гипотезы КХД факторизации, являющейся важной составляющей пертурбативных вычислений КХД, но тем не менее, подвергнутой сомнению в случае переходного формфактора пиона данными коллаборации BABAR в области $Q^2 = 10 - 35 \text{ GeV}^2$.

Использование аномального правила сумм и кварк-адронной дуальности в случае изовекторной компоненты аксиального тока привело к соотношению, известному как интерполяционная формула Бродского-Лепажя. Оно было предложено Бродским и Лепажем в качестве интерполяции между двумя известными асимптотиками - в точке $Q^2 = 0$ (задается аксиальной аномалией) и в точке $Q^2 \rightarrow \infty$ (вычисляется из пертурбативной КХД). Теперь, с помощью аномального правила сумм, это соотношение доказано при произвольных Q^2 .

Также, исходя из аномального правила сумм, в силу его независимости от гипотезы факторизации, была предложена поправка к спектральной плотности, позволяющая объяснить данные BABAR. Такая поправка, если опираться на данные BABAR, должна иметь размерность 2 и соответственно присходить не из операторного разложения: в качестве возможного источника могут быть короткие струны. Конечно, нужно отметить, что если не учитывать данные BABAR, то необходимо-

сти в такой поправке нет, хотя и в этом случае место для такой поправки имеется. Это подтверждается Таблицей 1.1.

Поиск обсуждаемой поправки может быть выполнен также с помощью вычислений на решетках, которые уже выявили некоторые указания на вакуумные конденсаты, не входящие в операторное разложение (см., например, [84] и ссылки там). В нашем случае можно изучать трехточечную VVA корреляционную функцию на решетке в виде, подобном рассмотренном в работе [85]. Чтобы “почувствовать” обсуждаемую поправку, следует рассматривать умеренно большие передачи импульса в одном из векторных каналов.

Поправки к VVA коррелятору можно также изучать, аналитически обобщая подход, используемый в [69], на случай трехточечной корреляционной функции.

В обобщении нашего подхода на η и η' мезоны данные BABAR могут быть описаны без такой поправки. Тем не менее, возможность поправки, подобно обсуждаемой в случае пиона, не исключается при настоящих экспериментальных данных и с учетом небольшого роста октетной комбинации переходных формфакторов η и η' .

С теоретической точки зрения кажется естественным, что наличие поправки в изовекторном канале должно указывать на наличие подобной поправки и в октетном канале. Это согласуется с выводами в работе [19].

Особую роль в октетном канале играет смешивание. В диссертации мы формулируем смешивание в терминах мезонных полей. Популярные в литературе схемы смешивания удобно выражать в виде уравнений связи на константы распада, (2.22) в случае октет-синглетной и (2.23) в случае кварк-ароматной схемы смешивания. Используя дополнительное ограничение, заданное отношением ширины радиационных распадов, были получены оценки параметров смешивания. Было показано, что в пределах нынешней точности данных и октет-синглетная и кварк-ароматная схемы смешивания допустимы. Улучшение точности данных, в частности, ожидаемых данных коллабораций BELLE и BES-III может решить вопрос о том, какая из схем лучше описывает природу смешивания в системе η и η' мезонов.

Аналитическое продолжение аномальных правил сумм во времени-подобную область приводит к естественному возникновению полюса в области массы ρ мезона

и таким образом приводит к связи с моделью доминантности векторных мезонов.

Учет масс кварков в аномальном правиле сумм представляется важной задачей, в особенности в октетном канале, где есть вклад странного кварка. Однако наши оценки показывают, что даже в октетном канале использование кирального предела при современной точности данных представляется вполне обоснованным.

На защиту выдвигаются следующие результаты:

- Исходя из точного непертурбативного аномального правила сумм получена формула для переходного формфактора пиона. Она справедлива даже при нарушении КХД факторизации за счет поправки, выходящей за рамки операторного разложения. Проведен анализ современных экспериментальных данных показывающий, что они не исключают наличие такой поправки, хотя и не указывают однозначно на её существование. В случае, когда КХД факторизация выполняется, полученная формула обосновывает интерполяционную формулу Бродского-Лепаж.
- Метод кварк-адронной дуальности распространен на случай сильного смешивания адронных состояний. Получен критерий для выбора схемы смешивания псевдоскалярных состояний, следующий из совпадения интервалов дуальности в двухточечных и трёхточечных корреляторах.
- Из аномального правила сумм в октетном канале получена связь между переходными формфакторами и константами распадов η и η' мезонов. Проведен анализ экспериментальных данных, позволяющий извлечь константы распадов в различных схемах смешивания. Установлено, что современная точность экспериментальных данных допускает наличие непертурбативной поправки того же порядка, что и в случае пиона.

Литература

- [1] J. S. Bell, R. Jackiw, “A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$ in the sigma model,” *Nuovo Cim.* **A60**, 47-61 (1969).
- [2] S. L. Adler, “Axial vector vertex in spinor electrodynamics,” *Phys. Rev.* **177**, 2426-2438 (1969).
- [3] A. D. Dolgov, V. I. Zakharov, “On Conservation of the axial current in massless electrodynamics,” *Nucl. Phys.* **B27**, 525-540 (1971).
- [4] B. L. Ioffe, “Axial anomaly: The Modern status,” *Int. J. Mod. Phys. A* **21**, 6249 (2006).
- [5] J. Horejsi, “On Dispersive Derivation Of Triangle Anomaly,” *Phys. Rev.* **D32**, 1029 (1985).
- [6] J. Horejsi, O. Teryaev, “Dispersive approach to the axial anomaly, the t’Hooft’s principle and QCD sum rules,” *Z. Phys.* **C65**, 691-696 (1995).
- [7] O. L. Veretin, O. V. Teryaev, “Axial anomaly at the arbitrary external momenta,” *Phys. Atom. Nucl.* **58**, 2150-2155 (1995).
- [8] Y. N. Klopot, A. G. Oganesian and O. V. Teryaev, “Axial anomaly as a collective effect of meson spectrum,” *Physics Letters B* **695**, 130-135 (2011).
- [9] Y. N. Klopot, A. G. Oganesian and O. V. Teryaev, “Axial anomaly and mixing: from real to highly virtual photons,” *Physical Review D* **84**, 051901 (2011), 5 pages.

- [10] Y. Klopot, A. Oganesian and O. Teryaev, “Quark-hadron duality, axial anomaly and mixing,”
JETP Letters **94**, 729-733 (2011).
- [11] Y. Klopot, A. Oganesian and O. Teryaev, “Transition Form Factors and Mixing of Pseudoscalar Mesons from Anomaly Sum Rule,”
Physical Review D **87**, 036013 (2013), 12 pages.
- [12] Y. Klopot, A. Oganesian and O. Teryaev, “Anomaly, mixing and transition form factors of pseudoscalar mesons,”
Nuclear Physics B - Proceedings Supplements **219-220**, 141-144 (2011).
- [13] Y. N. Klopot, A. G. Oganesian and O. V. Teryaev, “Axial anomaly, quark-hadron duality and transition form factors,” Physics of Particles and Nuclei Letters **9**, 769-771 (2012).
- [14] Y. Klopot, A. Oganesian and O. Teryaev, “Axial Anomaly and Light Cone Distributions,” Acta Physica Polonica Supplements **6**, 145-150 (2013).
- [15] Y. Klopot, A. Oganesian and O. Teryaev, “Nonperturbative QCD and Transition Form Factors,”
Proceedings of Science, Baldin **-ISHEPP-XXI**, 036 (2012), 8 pages.
- [16] Y. Klopot, A. Oganesian and O. Teryaev, “Transition form factors of π^0 , η and η' mesons: What can be learned from anomaly sum rule?,”
Nuclear Physics B - Proceedings Supplements **245**, 255-258 (2013).
- [17] Y. Klopot, A. Oganesian and O. Teryaev, “Axial anomaly and vector meson dominance model,” arXiv:1312.1226 [hep-ph].
- [18] D. Melikhov and B. Stech, “On the $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi(\eta, \eta')$ transition form factors,” Phys. Rev. D **85**, 051901 (2012).
- [19] D. Melikhov and B. Stech, “Universal behaviour of the $\gamma^*\gamma \rightarrow (\pi^0, \eta, \eta')$ transition form factors,” arXiv:1206.5764 [hep-ph].
- [20] B. Aubert *et al.* [BABAR Collaboration], Phys. Rev. D **80**, 052002 (2009).

- [21] P. del Amo Sanchez *et al.* [BABAR Collaboration], “Measurement of the $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta$ and $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta'$ transition form factors,” *Phys. Rev. D* **84**, 052001 (2011).
- [22] S. Uehara *et al.* [Belle Collaboration], “Measurement of $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$ transition form factor at Belle,” *Phys. Rev. D* **86**, 092007 (2012).
- [23] A. Denig [BaBar Collaboration], “Measurement of the π^0, η, η' transition form factors at *BABAR*,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **234**, 283 (2013).
- [24] G. P. Lepage and S. J. Brodsky, “Exclusive Processes in Perturbative Quantum Chromodynamics,” *Phys. Rev.* **D22**, 2157 (1980).
- [25] H. J. Behrend *et al.* [CELLO Collaboration], “A Measurement of the π^0 , η and η' electromagnetic form-factors,” *Z. Phys. C* **49**, 401 (1991).
- [26] J. Gronberg *et al.* [CLEO Collaboration], “Measurements of the meson - photon transition form-factors of light pseudoscalar mesons at large momentum transfer,” *Phys. Rev. D* **57**, 33 (1998).
- [27] A. Khodjamirian, “Hadronic Form Factors: Combining QCD Calculations with Analyticity,” *Int. J. Mod. Phys. A* **25**, 513 (2010).
- [28] S. V. Mikhailov and N. G. Stefanis, “Pion transition form factor at the two-loop level vis-a-vis experimental data,” *Mod. Phys. Lett. A* **24**, 2858 (2009).
- A. P. Bakulev, S. V. Mikhailov, A. V. Pimikov and N. G. Stefanis, “Pion-photon transition: The New QCD frontier,” *Phys. Rev. D* **84**, 034014 (2011).
- N. G. Stefanis, A. P. Bakulev, S. V. Mikhailov and A. V. Pimikov, “Can We Understand an Auxetic Pion-Photon Transition Form Factor within QCD?,” *Phys. Rev. D* **87**, 094025 (2013),
- A. P. Bakulev, S. V. Mikhailov, A. V. Pimikov and N. G. Stefanis, “Comparing antithetic trends of data for the pion-photon transition form factor,” *Phys. Rev. D* **86**, 031501 (2012);

- A. P. Bakulev, S. V. Mikhailov, A. V. Pimikov and N. G. Stefanis, “Emphasizing the different trends of the existing data for the $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$ transition form factor,” *Acta Phys. Polon. Supp.* **6**, 137 (2013).
- [29] S. S. Agaev, V. M. Braun, N. Offen and F. A. Porkert, “Light Cone Sum Rules for the π^0 - γ^* - γ Form Factor Revisited,” *Phys. Rev. D* **83**, 054020 (2011)
- [30] P. Kroll, “The form factors for the photon to pseudoscalar meson transitions - an update,” *Eur. Phys. J. C* **71**, 1623 (2011).
- [31] A. V. Radyushkin, “Shape of Pion Distribution Amplitude,” *Phys. Rev. D* **80**, 094009 (2009).
- [32] M. V. Polyakov, “On the Pion Distribution Amplitude Shape,” *JETP Lett.* **90**, 228 (2009).
- [33] X. -G. Wu and T. Huang, “An Implication on the Pion Distribution Amplitude from the Pion-Photon Transition Form Factor with the New BABAR Data,” *Phys. Rev. D* **82**, 034024 (2010).
- X. -G. Wu and T. Huang, “Constraints on the Light Pseudoscalar Meson Distribution Amplitudes from Their Meson-Photon Transition Form Factors,” *Phys. Rev. D* **84**, 074011 (2011).
- [34] S. J. Brodsky, F. -G. Cao and G. F. de Teramond, “Evolved QCD predictions for the meson-photon transition form factors,” *Phys. Rev. D* **84**, 033001 (2011).
- S. J. Brodsky, F. -G. Cao and G. F. de Teramond, “Meson Transition Form Factors in Light-Front Holographic QCD,” *Phys. Rev. D* **84**, 075012 (2011). G. F. de Teramond and S. J. Brodsky, “Hadronic Form Factor Models and Spectroscopy Within the Gauge/Gravity Correspondence,” arXiv:1203.4025 [hep-ph].
- [35] A. Stoffers and I. Zahed, “ $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$ Form Factor from AdS/QCD,” *Phys. Rev. C* **84**, 025202 (2011).
- [36] A. E. Dorokhov, “Rare decay $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ as a Test of Standard Model,” *Phys. Part. Nucl. Lett.* **7**, 229 (2010).

- [37] A. E. Dorokhov and E. A. Kuraev, “Pion transition form factor in the constituent quark model,” Phys. Rev. D **88**, 014038 (2013).
- P. Kotko and M. Praszalowicz, “Photon Distribution Amplitudes in nonlocal chiral quark model,” Phys. Rev. D **81**, 034019 (2010).
- T. N. Pham and X. Y. Pham, “Chiral Anomaly Effects and the BaBar Measurements of the $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$ Transition Form Factor,” Int. J. Mod. Phys. A **26**, 4125 (2011).
- [38] P. Lichard, “Vector meson dominance and the pi^0 transition form factor,” Phys. Rev. D **83**, 037503 (2011).
- [39] E. Ruiz Arriola and W. Broniowski, “Pion transition form factor in the Regge approach and incomplete vector-meson dominance,” Phys. Rev. D **81**, 094021 (2010).
- [40] N. I. Kochelev and V. Vento, “Gluonic components of the pion and the transition form factor $\gamma^* \gamma^* \rightarrow \pi^0$,” Phys. Rev. D **81**, 034009 (2010).
- [41] Y. .M. Bystritskiy, V. V. Bytev, E. A. Kuraev and A. N. Ilyichev, “A model of a transition neutral pion form factor measured in annihilation and scattering channels at high momentum transfer,” Phys. Part. Nucl. Lett. **8**, 73 (2011).
- [42] S. Noguera and V. Vento, “The pion transition form factor and the pion distribution amplitude,” Eur. Phys. J. A **46**, 197 (2010).
- S. Noguera and S. Scopetta, “The eta-photon transition form factor,” Phys. Rev. D **85**, 054004 (2012).
- H. L. L. Roberts, C. D. Roberts, A. Bashir, L. X. Gutierrez-Guerrero and P. C. Tandy, “Abelian anomaly and neutral pion production,” Phys. Rev. C **82**, 065202 (2010).
- Z. -k. Guo and Q. Zhao, “Novel Insights into the $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$ Transition Form Factor,” Eur. Phys. J. C **72**, 1964 (2012).
- [43] W. Lucha and D. Melikhov, “The Puzzle of the $\pi^- \rightarrow \gamma\gamma^*$ transition form factor,” J. Phys. G **39**, 045003 (2012).
- I. Balakireva, W. Lucha and D. Melikhov, “Pion elastic and $(\pi^0, \eta, \eta') \rightarrow \gamma\gamma^*$ transition form factors in a broad range of momentum transfers,” Phys. Rev. D **85**, 036006 (2012).

- I. Balakireva, W. Lucha and D. Melikhov, “Meson-Photon Transition Form Factors,” AIP Conf. Proc. **1492**, 127 (2012).
- [44] H. Czyz, S. Ivashyn, A. Korchin and O. Shekhovtsova, “Two-photon form factors of the π^0 , η and η' mesons in the chiral theory with resonances,” Phys. Rev. D **85**, 094010 (2012).
- [45] S. Dubnicka, A. Z. Dubnickova and A. Liptaj, “Pseudoscalar meson transition form factors,” Prog. Part. Nucl. Phys. **67**, 418 (2012).
- [46] P. Masjuan, “ $\gamma * \gamma \rightarrow \pi^0$ transition form factor at low-energies from a model-independent approach,” Phys. Rev. D **86**, 094021 (2012).
- [47] D. M. Asner, T. Barnes, J. M. Bian, I. I. Bigi, N. Brambilla, I. R. Boyko, V. Bytev and K. T. Chao *et al.*, “Physics at BES-III,” Int. J. Mod. Phys. A **24**, S1 (2009).
M. Unverzagt, “Light meson physics with Crystal Ball/MAMI and at BES-III,” J. Phys. Conf. Ser. **349**, 012015 (2012).
- [48] D. Babusci, H. Czyz, F. Gonnella, S. Ivashyn, M. Mascolo, R. Messi, D. Moricciani and A. Nyffeler *et al.*, “On the possibility to measure the $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ decay width and the $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$ transition form factor with the KLOE-2 experiment,” Eur. Phys. J. C **72**, 1917 (2012)
- [49] M. Amaryan, “Photoproduction and Decay of Light Mesons in CLAS,” PoS CD **12**, 061 (2013).
M. J. Amaryan, M. Bashkanov, M. Benayoun, F. Bergmann, J. Bijnens, L. C. Balkest, H. Clement and G. Colangelo *et al.*, “MesonNet 2013 International Workshop. Mini-proceedings,” arXiv:1308.2575.
- [50] L. Rosenberg, “Electromagnetic interactions of neutrinos,” Phys. Rev. **129**, 2786-2788 (1963).
- [51] V. L. Eletsky, B. L. Ioffe and Y. I. Kogan, “The omega rho pi coupling constant from QCD sum rules,” Phys. Lett. B **122**, 423 (1983).
- [52] A. V. Radyushkin and R. T. Ruskov, “Transition form-factor $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$ and QCD sum rules,” Nucl. Phys. B **481**, 625 (1996).

- [53] S. L. Adler, W. A. Bardeen, “Absence of higher order corrections in the anomalous axial vector divergence equation,” *Phys. Rev.* **182**, 1517-1536 (1969).
- [54] G. 't Hooft in Lectures given at the Cargèse Summer Inst., Aug. 26 - Sept. 8, 1979 “Recent developments in gauge theories” ed. by G. 't Hooft et al., Plenum Press, New York NY (1980).
- [55] F. Jegerlehner, O. V. Tarasov, “Explicit results for the anomalous three point function and non-renormalization theorems,” *Phys. Lett.* **B639**, 299-306 (2006).
- [56] B. L. Ioffe and A. G. Oganesian, “Axial anomaly and the precise value of the $\pi^0 \rightarrow 2 \gamma$ decay width,” *Phys. Lett. B* **647**, 389 (2007).
- [57] S. J. Brodsky, G. P. Lepage, “Large Angle Two Photon Exclusive Channels in Quantum Chromodynamics,” *Phys. Rev.* **D24**, 1808 (1981).
- [58] A. V. Efremov, A. V. Radyushkin, “Factorization and Asymptotical Behavior of Pion Form-Factor in QCD,” *Phys. Lett.* **B94**, 245-250 (1980).
- [59] A. V. Efremov and A. V. Radyushkin, “Asymptotical Behavior of Pion Electromagnetic Form-Factor in QCD,” *Theor. Math. Phys.* **42**, 97 (1980) [*Teor. Mat. Fiz.* **42**, 147 (1980)].
- [60] A. S. Gorsky, “The $\pi^0 \gamma \gamma$ Form-factor at Various Virtualities of the Photons in the Sum Rule Method and in Perturbative QCD. (In Russian),” *Yad. Fiz.* **46**, 938 (1987).
- [61] G. 't Hooft, “How Instantons Solve the U(1) Problem,” *Phys. Rept.* **142**, 357 (1986).
- [62] D. Diakonov and M. I. Eides, “Massless Ghost Pole in Chromodynamics and the Solution of the U(1) Problem,” *Sov. Phys. JETP* **54**, 232 (1981) [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **81**, 434 (1981)].
- [63] J. J. Sakurai, “Theory of strong interactions,” *Annals Phys.* **11**, 1 (1960);
R. P. Feynman, “*Photon-Hadron Interactions*”, Westview Press, 1998.
- [64] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, “QCD and Resonance Physics: Applications,” *Nucl. Phys. B* **147**, 448 (1979).

- [65] A. V. Radyushkin, “Quark - hadron duality and intrinsic transverse momentum,” *Acta Phys. Polon.* **B26**, 2067-2096 (1995).
- [66] E. J. Schreier, “Conformal symmetry and three-point functions,” *Phys. Rev. D* **3**, 980 (1971).
- [67] G. T. Gabadadze and A. L. Kataev, “On connection between coefficient functions for deep inelastic and annihilation processes,” *JETP Lett.* **61**, 448 (1995) [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **61**, 439 (1995)]
- [68] J. Mondejar and K. Melnikov, “The VVA correlator at three loops in perturbative QCD,” arXiv:1210.0812 [hep-ph].
- [69] K. G. Chetyrkin, S. Narison and V. I. Zakharov, “Short distance tachyonic gluon mass and $1 / Q^{*2}$ corrections,” *Nucl. Phys. B* **550**, 353 (1999).
M. N. Chernodub, F. V. Gubarev, M. I. Polikarpov and V. I. Zakharov, “Confinement and short distance physics,” *Phys. Lett. B* **475**, 303 (2000).
- [70] B. V. Geshkenbein and B. L. Ioffe, “The Role Of Instantons In Generation Of Mesonic Mass Spectrum,” *Nucl. Phys. B* **166**, 340 (1980).
- [71] V. V. Anisovich, D. I. Melikhov, V. A. Nikonov, “Photon - meson transition form-factors $\gamma \pi^0$, $\gamma \eta$ and $\gamma \eta'$ at low and moderately high Q^{*2} ,” *Phys. Rev.* **D55**, 2918-2930 (1997).
- [72] T. Feldmann, P. Kroll, “Flavor symmetry breaking and mixing effects in the η γ and η' γ transition form-factors,” *Eur. Phys. J.* **C5**, 327-335 (1998).
- [73] T. Feldmann, P. Kroll and B. Stech, “Mixing and decay constants of pseudoscalar mesons,” *Phys. Rev. D* **58**, 114006 (1998). “Mixing and decay constants of pseudoscalar mesons: The Sequel,” *Phys. Lett. B* **449**, 339 (1999).
- [74] H. Leutwyler, “On the $1/N$ expansion in chiral perturbation theory,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **64**, 223 (1998).

- R. Kaiser and H. Leutwyler, “Pseudoscalar decay constants at large $N(c)$,” In *Adelaide 1998, “Nonperturbative methods in quantum field theory”, [hep-ph/9806336].
- [75] G. P. Lepage, S. J. Brodsky, “Exclusive Processes in Quantum Chromodynamics: Evolution Equations for Hadronic Wave Functions and the Form-Factors of Mesons,” Phys. Lett. **B87**, 359-365 (1979).
- [76] P. Herrera-Siklody, J. I. Latorre, P. Pascual and J. Taron, “Chiral effective Lagrangian in the large $N(c)$ limit: The Nonet case,” Nucl. Phys. B **497**, 345 (1997).
- [77] J. Schechter, A. Subbaraman and H. Weigel, “Effective hadron dynamics: From meson masses to the proton spin puzzle,” Phys. Rev. D **48**, 339 (1993).
- [78] J. Beringer *et al.* [Particle Data Group Collaboration], “Review of Particle Physics (RPP),” Phys. Rev. D **86**, 010001 (2012).
- [79] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, “A Theory of the $J/\psi \rightarrow \eta$ (η') γ Decays,” Nucl. Phys. B **165**, 55 (1980).
- [80] P. Ball, J. M. Frere, M. Tytgat, “Phenomenological evidence for the gluon content of η and η' ,” Phys. Lett. **B365**, 367-376 (1996).
- [81] F. -G. Cao and A. I. Signal, “Two analytical constraints on the η - η' mixing,” Phys. Rev. D **60**, 114012 (1999). [hep-ph/9908481].
- [82] R. Escribano, J. -M. Frere, “Study of the η - η' system in the two mixing angle scheme,” JHEP **0506**, 029 (2005).
- [83] T. Feldmann, P. Kroll, “Interpolation formulas for the η γ and η' γ transition form-factors,” Phys. Rev. **D58**, 057501 (1998).
- [84] B. Blossier, P. .Boucaud, M. Brinet, F. De Soto, Z. Liu, V. Morenas, O. Pene and K. Petrov *et al.*, “Renormalisation of quark propagators from twisted-mass lattice QCD at $N_f=2$,” Phys. Rev. D **83**, 074506 (2011).
- [85] B. Owen, W. Kamleh, D. Leinweber, A. El Bakry and P. Moran, “Light meson transition form factors on the lattice,” PoS LATTICE **2012**, 254 (2012).

- [86] R. Escribano, P. Masjuan and P. Sanchez-Puertas, “ η and η' transition form factors from rational approximants,” [arXiv:1307.2061].
- [87] L. G. Landsberg, “Electromagnetic Decays of Light Mesons,” Phys. Rept. **128**, 301 (1985).
- [88] R. Meijer Drees *et al.* [SINDRUM-I Collaboration], “Measurement of the π^0 electromagnetic transition form-factor,” Phys. Rev. D **45**, 1439 (1992).
- [89] F. Farzanpay, P. Gumplinger, A. Stetz, J. M. Poutissou, I. Blevis, M. Hasinoff, C. J. Virtue and C. E. Waltham *et al.*, “Measurement of the slope of the π^0 electromagnetic form-factor,” Phys. Lett. B **278**, 413 (1992).
- [90] E. Abouzaid *et al.* [KTeV Collaboration], “Determination of the Parity of the Neutral Pion via the Four-Electron Decay,” Phys. Rev. Lett. **100**, 182001 (2008).
- [91] C. Terschlüsen, B. Strandberg, S. Leupold and F. Eichstädt, “Reactions with pions and vector mesons in the sector of odd intrinsic parity,” Eur. Phys. J. A **49**, 116 (2013).
- [92] K. Kampf, M. Knecht and J. Novotny, “The Dalitz decay $\pi^0 \rightarrow e^+ e^- \gamma$ revisited,” Eur. Phys. J. C **46**, 191 (2006).
- [93] N. G. Deshpande, P. B. Pal and F. I. Olness, “Comment on $Z \rightarrow \pi^0 \gamma$ and the Axial Anomaly,” Phys. Lett. B **241**, 119 (1990).
- [94] T. N. Pham and X. -Y. Pham, “Cancellation of Chiral Anomaly Effects in Processes Involving Z^0 , W^\pm , Highly Virtual Photon and Pion,” Phys. Lett. B **247**, 438 (1990).
- [95] P. Aguar-Bartolome *et al.* [A2 Collaboration], “A new determination of the eta transition form factor in the Dalitz decay $\eta \rightarrow e^+ e^- \gamma$ with the Crystal Ball/TAPS detectors at the Mainz Microtron,” Phys. Rev. C **89**, 044608 (2014).
- [96] C. Hanhart, A. Kupsc, U. -G. Meißner, F. Stollenwerk and A. Wirzba, “Dispersive analysis for $\eta \rightarrow \gamma \gamma^*$,” Eur. Phys. J. C **73**, 2668 (2013).
- [97] L. Ametller, J. Bijnens, A. Bramon and F. Cornet, “Transition form-factors in π^0 , eta and eta and eta-prime couplings to gamma gamma,” Phys. Rev. D **45**, 986 (1992).

- [98] R. Arnaldi *et al.* [NA60 Collaboration], “Study of the electromagnetic transition form-factors in $\eta \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma$ and $\omega \rightarrow \mu^+ \mu^- \pi^0$ decays with NA60,” *Phys. Lett. B* **677**, 260 (2009).