

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ,  
Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова

На правах рукописи

Рахмонов Илхом Рауфович

ОСОБЕННОСТИ ФАЗОВОЙ ДИНАМИКИ И  
РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ  
ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДОВ

01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель-  
доктор физ.мат. наук  
Шукринов Юрий Маджнунович

Дубна 2014

*Посвящается моей дочери, моим родителям и моей супруге.*

## Оглавление

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>3</b>
<b>ГЛАВА 1. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР</b>	<b>11</b>
1.1 Внутренний эффект Джозефсона и его основные свойства .	11
1.2 Теоретические модели внутренних джозефсоновских переходов	12
1.2.1 Модели с емкостной связью . . . . .	12
1.2.2 Модели с емкостной и индуктивной связью . . . . .	15
1.3 Система джозефсоновских переходов с LC-шунтированием .	18
<b>ГЛАВА 2. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ССJJ И ССJJ+DC МОДЕЛЕЙ И РОЛЬ ДИФФУЗИОННОГО ТОКА В ФОР- МИРОВАНИИ ВОЛЬТ-АМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИ- КИ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДОВ</b>	<b>19</b>
2.1 Численное моделирование фазовой динамики системы корот- ких связанных джозефсоновских переходов в рамках ССJJ и ССJJ+DC модели . . . . .	19
2.2 Вольт-амперная характеристика в ССJJ и ССJJ+DC моделях	22
2.3 Область вольт-амперной характеристики вблизи критиче- ского тока . . . . .	23
2.3.1 Динамика токов в ССJJ модели . . . . .	24
2.3.2 Динамика токов в ССJJ+DC модели . . . . .	26
2.4 Область параметрического резонанса . . . . .	28
2.5 Область ветвления вольт-амперной характеристики . . . . .	33
2.5.1 Ветвление вольт-амперной характеристики в ССJJ+DC модели . . . . .	34
2.5.2 Ветвление вольт-амперной характеристики в ССJJ модели . . . . .	38
<b>ГЛАВА 3. РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ ДЖО- ЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДОВ, ШУНТИРОВАННОЙ LC ЭЛЕМЕНТАМИ</b>	<b>40</b>
3.1 Система связанных джозефсоновских переходов, шунтиро- ванная LC-контуром . . . . .	40

3.2	Резонансная ветвь на вольт–амперной характеристике системы джозефсоновских переходов, шунтированной LC элементами . . . . .	42
3.3	Двойной резонанс в системе джозефсоновских переходов в области резонансной ветви . . . . .	46
3.4	Система джозефсоновских переходов, шунтированная LC–контуром под действием внешнего электромагнитного излучения . . . . .	50
<b>ГЛАВА 4. ФАЗОВАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ДЛИННЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДОВ С ИНДУКТИВНОЙ И ЕМКОСТНОЙ СВЯЗЬЮ</b>		<b>53</b>
4.1	Численное моделирование фазовой динамики системы длинных джозефсоновских переходов . . . . .	53
4.2	Вольт-амперная характеристика одиночного длинного джозефсоновского перехода и ступеньки нулевого поля . . . . .	55
4.3	Параметрический резонанс в системе длинных джозефсоновских переходов . . . . .	56
4.4	Влияние индуктивной и емкостной связи на вольт-амперную характеристику системы длинных джозефсоновских переходов	62
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>		<b>64</b>
<b>Литература</b>		<b>68</b>

## ВВЕДЕНИЕ

### Актуальность темы

В сильноанизотропных слоистых высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП) сверхпроводящие и диэлектрические слои образуют систему связанных джозефсоновских переходов (ДП), т.е. в этих материалах возникает внутренний эффект Джозефсона [1]. Этот эффект имеет особое значение для определения вольт–амперной характеристики (ВАХ) туннельных структур на основе ВТСП и свойств вихревой решетки в данных материалах [2, 3, 4, 5]. Внутреннее туннелирование определяет транспорт вдоль стека сверхпроводящих слоев и физику вихрей [6]. Моделью для исследования физических свойств внутренних ДП в ВТСП, их нелинейных свойств и различных неравновесных явлений является система связанных ДП [7, 8]. Система джозефсоновских переходов является одним из перспективных объектов сверхпроводящей электроники, интенсивно исследуемым в настоящее время [9, 10, 11, 6]. В частности, широкие возможности для различных применений представляет обнаруженное недавно когерентное электромагнитное излучение в терагерцовой области частот из стека внутренних ДП [12]. Интересным является тот факт, что излучение связано с определенной областью ВАХ, которая соответствует области параметрического резонанса [13, 14]. Приведенные аргументы делают исследования этой области ВАХ весьма актуальными. Численное моделирование вольт-амперных характеристик системы, временных зависимостей заряда в сверхпроводящих слоях и напряжения в ДП позволяет описать ее фазовую динамику и предсказать ряд важных свойств данной системы.

Одним из эффективных способов влияния на свойства системы ДП является ее шунтирование  $LCR$ -контуром (где  $L$ –индуктивность,  $C$ –емкость и  $R$ –сопротивление контура) [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]. В частности, шунтирование приводит к синхронизации осцилляций сверхпроводящего тока в разных ДП. Джозефсоновские переходы вместе с шунтирующими их  $LCR$ -элементами образуют колебательный контур и когда джозефсоновская частота  $\omega_J$  сравнивается с собственной частотой контура  $\omega_{rc}$ , ос-

цилляции в разных ДП подстраиваются под эту частоту. Этот резонанс отражается на ВАХ в виде различных особенностей типа ступеньки [22, 23], горба или провала [24, 25]. В частности, о ступеньках на ВАХ в различных системах ДП с резонансным контуром сообщалось в ряде экспериментальных и теоретических работ [26, 27]. В работе [28] был зарегистрирован пик в интенсивности когерентного электромагнитного излучения из двухмерной системы ДП на основе  $Nb/Al/AlOx/Nb$  при синхронизации осцилляций в разных ДП, обусловленной данным резонансом. Следует отметить, что в рассматриваемых до настоящего времени моделях ДП с шунтированием не учитывался эффект емкостной связи между переходами, возникающей из-за малости толщины сверхпроводящих слоев в ВТСП. Также не исследовались проявления параметрического резонанса на фазовой динамике данной системы и на ее ВАХ.

До настоящего времени параметрический резонанс в системе связанных ДП исследовался лишь в рамках одномерной модели, т.е. рассматривалась система коротких ДП, для которых длина ДП  $L$  меньше джозефсоновской глубины проникновения  $\lambda_J$ . Большинство же экспериментальных результатов связано именно с длинными ДП, в которых  $L > \lambda_J$ . В случае одиночного длинного ДП в отсутствие внешнего магнитного поля на ВАХ наблюдаются ступеньки нулевого поля [29, 30, 31, 32], которые обусловлены наличием флюксонных состояний. В случае системы ДП флюксонные состояния могут возникать в каждом ДП стека. В связи с этим возникает вопрос о возможности сосуществования флюксонных состояний и ППВ.

Диссертация посвящена исследованию ВАХ и резонансных свойств системы джозефсоновских переходов в ВТСП.

## **Основные цели (и задачи) исследования**

Основная цель работы состояла в исследовании фазовой динамики системы джозефсоновских переходов в слоистых сверхпроводниках, их вольт-амперных характеристик и резонансных свойств. Была поставлена задача рассчитать ВАХ системы связанных джозефсоновских переходов в рамках двух моделей с емкостной связью между переходами: ССJJ (модель с емкостной связью) и ССJJ+ДС модели (модель с емкостной связью и диффузионным током) и провести сравнительный анализ результатов в гистерезисной области ВАХ, в области вблизи критического тока, и в обла-

сти параметрического резонанса. Планировались исследования резонансных свойств системы джозефсоновских переходов, шунтированной резонансным (LC) контуром. Предполагалось исследование влияния внешнего электромагнитного излучения на фазовую динамику системы связанных ДП. Особый интерес представляли исследования параметрического резонанса в двухмерной модели, т.е. в системе длинных ДП, где помимо емкостной связи между ДП необходимо также учитывать индуктивную связь.

Разработанные методы применяются в задачах, актуальных для современной физики джозефсоновских явлений, а именно:

- рассчитываются ВАХ системы связанных ДП на основе теоретических моделей с емкостной и индуктивной связью, а также с учетом шунтирования ДП LC элементами. Исследуется воздействие внешнего электромагнитного излучения;
- анализируется динамика сверхпроводящего, квазичастичного, диффузионного тока и тока смещения в системах джозефсоновских переходах;
- исследуются резонансные свойства системы ДП, шунтированной резонансным (LC) контуром, а также под действием внешнего электромагнитного излучения;
- исследуется фазовая динамика системы длинных ДП и обсуждается роль индуктивной и емкостной связи в коллективном поведении системы длинных ДП.

### **Научная новизна и практическая ценность диссертации**

Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Показано, что ССJJ+DC модель, т.е. модель, учитывающая диффузионный ток, приводит к результатам, качественно согласующимся с экспериментальными данными. Предсказан двойной резонанс в системе ДП, шунтированной резонансным (LC) контуром. Показана возможность реализации параметрического резонанса в системе длинных джозефсоновских переходов. Предсказано образование нового коллективного возбуждения в системе длинных джозефсоновских переходов, представляющего собой компо-

зитное состояние продольной плазменной волны и вихревого магнитного поля.

Практическая ценность диссертации состоит в том, что разработанные методы численного моделирования и анализа системы ДП позволяют проводить непосредственное сравнение полученных результатов с экспериментальными данными. Ряд эффектов, которые предсказаны в диссертации, могут быть исследованы экспериментально. Разработанные методы и полученные результаты представляют практический интерес для специалистов, занимающихся исследованием джозефсоновских переходов.

### **Апробация диссертации и публикации**

Результаты работы опубликованы в 3 статьях [33, 34, 35] в журналах, входящих в список ВАК, а также в 9 публикациях [36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44] в других журналах и трудах конференций. Они доложены на следующих симпозиумах и конференциях:

1. 4th International Workshop on Numerical Modelling of High Temperature Superconductors, May 11-14, 2014, Institute of Electrical Engineering, Slovak Academy of Sciences, Bratislava, Slovakia.
2. II Национальная конференция по прикладной сверхпроводимости, 26-28 ноября, 2013, Национальный исследовательский центр “Курчатовский” институт, Москва Россия.
3. International Conference «Mathematical modeling and computational physics» (ММСП 2013), July 8 - 12, 2013, JINR, Dubna, Russia.
4. The 8th International Symposium on Intrinsic Josephson Effects and Plasma Oscillations in High- $T_c$  Superconductors “PLASMA 2012”, June 10 - 13, 2012, Izmir Institute of Technology, Cesme, Izmir, Turkey.
5. International Conference on Theoretical Physics «Dubna-Nano 2012», July 9-14, 2012, JINR, Dubna, Russia.
6. International Conference on Theoretical Physics «Dubna-Nano 2010», July 5-10, 2010, JINR, Dubna, Russia.
7. XVIII научная конференция Объединения молодых ученых и специалистов ОМУС-2014, 24-28 февраля 2014 г., ОИЯИ, Дубна, Россия.



8. XVII научная конференция Объединения молодых ученых и специалистов ОМУС-2013, 8-12 апреля 2013 г., ОИЯИ, Дубна, Россия.
9. XV научная конференция Объединения молодых ученых и специалистов ОМУС-2011, 14-19 февраля 2011 г., ОИЯИ, Дубна, Россия.
10. XIV научная конференция Объединения молодых ученых и специалистов ОМУС-2010, 1-6 февраля 2010 г., ОИЯИ, Дубна, Россия.
11. Программно–консультативный комитет по физике конденсированных сред, 18 июня 2013 г., ОИЯИ, Дубна, Россия.
12. Программно–консультативный комитет по физике конденсированных сред, 28 января 2011 г., ОИЯИ, Дубна, Россия.
13. XI зимняя школа по теоретической физики, 28 января - 3 февраля 2013 г., ОИЯИ, Дубна, Россия.
14. IX зимняя школа по теоретической физики, 30 января - 6 февраля 2011 г., ОИЯИ, Дубна, Россия.

а также представлены на 10 научных семинарах в Дубне, Москве и в Душанбе.

### **Личный вклад автора**

Основные положения и выводы диссертации являются результатом самостоятельных исследований автора. В тех частях, выполненных в соавторстве работ, которые относятся к теме диссертации, автору принадлежат проведенные численные расчеты и их анализ

### **Объем и структура диссертации**

Диссертация состоит из Введения, 4 Глав, Заключения, и списка опубликованных работ, включает 33 рисунка, содержит список цитированной литературы из 69 наименований. Полный объем диссертации составляет 75 страниц.

## Основное содержание работы

Во введении обоснована актуальность исследуемой проблемы, сформулированы цели и задачи диссертационной работы, перечислены полученные в диссертации новые результаты, выносимые на защиту и описана структура диссертации.

В первой главе «Литературный обзор» описаны основные свойства внутренних джозефсоновских переходов в высокотемпературных сверхпроводниках и приведены теоретические модели описывающие фазовую динамику системы джозефсоновских переходов. При проведении теоретического исследования системы джозефсоновских переходов необходим учет, как индуктивной связи [45, 46], которая обусловлена проникновением магнитного поля в сверхпроводящие слои, так и емкостной связи, обусловленной проникновением электрического поля [4, 47, 48]. Обобщенная теория, учитывающая оба типа связи, была предложена М. Мачидой и С. Сакаем в работе [49]. Имеются работы, в которых для описания различных свойств внутренних ДП учитывалось несколько типов связи. В частности, в работе [50] для исследования динамики джозефсоновской вихревой решетки, помимо емкостной и индуктивной связи, также учитывалась связь, обусловленная зарядовым разбалансом в спектре элементарных возбуждений в сверхпроводящих слоях. Индуктивная связь важна при рассмотрении системы длинных переходов, а при описания системы коротких ДП можно ограничиться учетом только емкостной связи.

Во второй главе «Сравнительный анализ ССJJ И ССJJ+DC моделей и роль диффузионного тока в формировании вольт-амперной характеристики системы связанных джозефсоновских переходов» представлены результаты исследования ВАХ системы связанных ДП в рамках ССJJ и ССJJ+DC моделей [33]. Приведены результаты анализа ВАХ системы связанных ДП на основе исследования зависимостей сверхпроводящего, квазичастичного, диффузионного токов и тока смещения, относящихся непосредственно к  $l$ -ому ДП (с учетом определения этих токов) от величины базового тока. Такое рассмотрение позволяет выделить характер поведения соответствующего тока в отдельном ДП. В частности, мы показываем, что полученная в рамках ССJJ+DC модели динамика пе-

реключения из состояния с нулевым напряжением в резистивное состояние объясняет наблюдаемое в эксперименте отсутствие ветвления при  $I = I_c$ , характерное для ССJJ модели. Демонстрируется роль диффузионного тока в формировании вольт-амперной характеристики в трех различных областях: (i) вблизи критического тока, (ii) в области ветвления в гистерезисной части ВАХ, (iii) в области параметрического резонанса. Мы показываем также, что исследование зависимости усредненных по временному домену токов от величины базового тока проливает свет на характер ветвления ВАХ системы связанных ДП.

**В третьей главе «Резонансные свойства системы джозефсоновских переходов шунтированной LC элементами»** представлены результаты исследования резонансных свойств системы джозефсоновских переходов, шунтированной LC-контуром [34] и под воздействием внешнего излучения [38]. Исследования проведены в рамках модели с емкостной связью и диффузионным током (ССJJ+DC модель [13, 48]). Мы показываем возможность реализации двойного резонанса в области gc-ветви, т. е. резонанса колебаний LC-контура, джозефсоновских осцилляций и продольной плазменной волны (ППВ), при котором сверхпроводящие слои в системе оказываются заряженными.

**В четвертой главе «Фазовая динамика системы длинных джозефсоновских переходов с индуктивной и емкостной связью»** представлены результаты исследования фазовой динамики системы длинных ДП в рамках обобщенной модели учитывающей как индуктивную, так и емкостную связь, а также диффузионный ток [35]. Проведено подробное исследование ВАХ и пространственно-временных зависимостей электрического заряда в сверхпроводящих слоях и магнитного поля во всех ДП. Показана возможность возникновения продольной плазменной волны и реализации параметрического резонанса в системе длинных ДП. В области параметрического резонанса, начиная с определенной длины джозефсоновского перехода, наблюдается сосуществование продольной плазменной волны и флюксонных состояний. Это свидетельствует о возникновении нового уникального коллективного возбуждения в системе связанных джозефсоновских переходов, а именно, композитного состояния джозефсоновского

тока, электрического поля и вихревого магнитного поля.

**В Заключение** суммированы основные выводы диссертации даны обоснования важности полученных результатов.

## ГЛАВА 1. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

### 1.1. Внутренний эффект Джозефсона и его основные свойства

В высокотемпературных сверхпроводниках, таких как  $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$ , сверхпроводящие и диэлектрические слои образуют систему связанных джозефсоновских переходов (ДП), в которой наблюдается внутренний эффект Джозефсона [1]. Система связанных джозефсоновских переходов (ДП) является адекватной моделью для описания ряда свойств внутренних ДП в ВТСП, включая различные нелинейные и неравновесные свойства [7, 8].

Система ДП является одним из перспективных объектов сверхпроводящей электроники [6, 9]. Широкие возможности для различных применений представляет когерентное электромагнитное излучение из данной системы в терагерцовой области частот [12]. Однако механизм этого излучения остается неясным до настоящего времени. Ведется интенсивный поиск новых возможностей для увеличения его мощности, которая по последним данным [51] составляет около 600 мкВт на частоте 0.5 ТГц при использовании нескольких последовательно соединенных стеков. Наиболее интенсивное когерентное излучение соответствует области ВАХ, где происходит переключение с верхней ветви на внутренние [9]. В работе [13] показано, что в этой области ВАХ в результате параметрического резонанса джозефсоновские осцилляции возбуждают продольную плазменную волну (ППВ). Резонанс приводит к увеличению амплитуды осцилляций электрического заряда в сверхпроводящих слоях [13, 14]. В этих работах параметрический резонанс в системе связанных ДП исследовался лишь в рамках одномерной модели, т.е. рассматривалась система коротких ДП, для которых длина ДП  $L$  меньше джозефсоновской глубины проникновения  $\lambda_J$ . Большинство же экспериментальных результатов связано именно с длинными ДП, в которых  $L > \lambda_J$ .

В случае одиночного длинного ДП в отсутствии внешнего магнитного поля на ВАХ наблюдаются ступеньки нулевого поля [29, 30, 36], которые обусловлены наличием флюксонных состояний. В случае системы

ДП, флюксонные состояния могут возникать в каждом ДП стека. В связи с этим возникает вопрос о возможности сосуществования флюксонных состояний и ППВ.

## 1.2. Теоретические модели внутренних джозефсоновских переходов

При проведении теоретического исследования системы джозефсоновских переходов необходим учет, как индуктивной связи [45, 46], которая обусловлена проникновением магнитного поля в сверхпроводящие слои, так и емкостной связи, обусловленной проникновением электрического поля [4, 47, 48]. Обобщенная теория, учитывающая оба типа связи, была предложена М. Мачидой и С. Сакаем в работе [49]. Имеются работы, в которых для описания различных свойств внутренних ДП учитывалось несколько типов связи. В частности, в работе [50] для исследования динамики джозефсоновской вихревой решетки, помимо емкостной и индуктивной связи, также учитывалась связь, обусловленная зарядовым разбалансом в спектре элементарных возбуждений в сверхпроводящих слоях. Индуктивная связь важна при рассмотрении системы длинных переходов, а при описании системы коротких ДП можно ограничиться учетом только емкостной связи.

### 1.2.1. Модели с емкостной связью

Фазовая динамика системы коротких ДП описывается ССJJ (от английского *capacitively coupled Josephson junctions*) моделью, учитывающей емкостную связь между ДП [4]. Система  $N + 1$  сверхпроводящих слоев (S-слоев) в анизотропном ВТСП, характеризующихся параметрами порядка  $\Delta_l(t) = |\Delta| \exp(i\theta_l(t))$  с зависящей от времени фазой  $\theta_l(t)$ , образует  $N$  ДП [1]. Схема такого стека ДП представлена на Рис. 1.1. Толщина S-слоев в ВТСП ( $\sim 3 \text{ \AA}$ ) сравнима с дебаевской длиной экранирования электрического заряда  $r_D$ , поэтому в отдельном S-слое нет полной экранировки заряда и электрическое поле, наведенное в отдельном джозефсоновском переходе, проникает в соседние переходы. Электрическая нейтральность S-слоев оказывается динамически нарушенной, и в случае переменного эффекта Джозефсона возникает емкостная связь между переходами [4]. От-

сутствие полного экранирования заряда в S-слое приводит к обобщенному скалярному потенциалу слоя  $\Phi_l$  [52], определяемому через скалярный потенциал  $\phi_l$  и производную фазы сверхпроводящего параметра порядка  $\theta_l$  как  $\Phi_l(t) = \phi_l - \frac{\hbar}{2e} \frac{d\theta_l}{dt}$ . Обобщенный скалярный потенциал связан с величиной плотности заряда  $Q_l$  на S-слое посредством  $Q_l = -\frac{1}{4\pi r_D^2} \Phi_l$  [4, 5]. В равновесном состоянии  $\Phi_l(t) = 0$  и выполняется обычное соотношение Джозефсона  $V_l \equiv \phi_l - \phi_{l-1} = \frac{\hbar}{2e} \frac{d(\theta_l - \theta_{l-1})}{dt} \equiv \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi_l}{dt}$ .

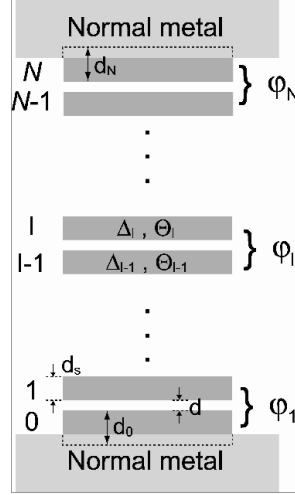


Рис. 1.1. Схема формирования системы внутренних ДП в ВТСП. Сверхпроводящие слои, нумеруемые числами от 0 до  $N$  и характеризующиеся параметром порядка с модулем  $\Delta_l$  и фазой  $\theta_l$ , образуют систему ДП с разностями фаз  $\varphi_l = \theta_l - \theta_{l-1}$ . Толщина S-слоев обозначена как  $d_s$ , а толщина диэлектрического слоя через  $d$ .

Возникновение связи между электрическим зарядом  $l$ -го слоя  $Q_l$  и обобщенным скалярным потенциалом этого слоя  $\Phi_l$  выражает неравновесную природу переменного эффекта Джозефсона в слоистых сверхпроводниках [5]. При этом соотношение Джозефсона обобщается и принимает вид

$$\frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi_l}{dt} = V_l - \alpha(V_{l+1} + V_{l-1} - 2V_l) \quad (1.1)$$

где  $V_l \equiv V_{l,l-1}$  есть напряжение между сверхпроводящими слоями  $l$  и  $l-1$ ,  $\alpha = \epsilon r_D^2 / d_s d_I$  - параметр емкостной связи, а  $\varphi_l \equiv \varphi_{l,l-1} = \theta_l(t) - \theta_{l-1}(t) - \frac{2e}{\hbar} \int_{l-1}^l dz A_z(z, t)$  есть калибровочно-инвариантная разность фаз между слоями  $l$  и  $l-1$ ,  $A_z$  - векторный потенциал в барьере.

В рамках ССJJ модели выражение для полного тока проходящего через систему записывается как сумма тока смещения, сверхпроводящего и квазичастичного тока

$$I = C \frac{dV_l}{dt} + I_c \sin \varphi_l + \frac{V_l}{R} \quad (1.2)$$

Учитывая обобщенное соотношение джозефсона (1.1) и выражение для полного тока (1.2) можно записать систему дифференциальных уравнений второго порядка для разности фаз

$$\frac{d^2 \varphi_l}{dt^2} = I - I_c \sin \varphi_l - \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi_l}{dt} + \alpha (I_c \sin \varphi_{l+1} + I_c \sin \varphi_{l-1} - 2I_c \sin \varphi_l) \quad (1.3)$$

В работе [48] ССJJ модель была обобщена с добавлением диффузионного тока и названа ССJJ+DC (от английского Capacitively coupled Josephson junctions with diffusion current) моделью. Когда через стек связанных ДП проходит внешний электрический ток, сверхпроводящие слои оказываются в неравновесном состоянии из-за инъекции квазичастиц и куперовских пар [5]. Наличие в них нескомпенсированного электрического заряда приводит к необходимости учета дополнительного тока между сверхпроводящими слоями. Этот вклад в квазичастичный ток, обусловленный разностью обобщенных скалярных потенциалов, называют диффузионным током  $I_{dif}^l$  [53, 52]. Можно записать следующие выражения для диффузионного тока

$$I_{dif}^l = \frac{\Phi_l - \Phi_{l-1}}{R} = -\frac{(Q_l - Q_{l-1})}{4\pi r_D^2 R} = -\frac{(Q_l - Q_{l-1})}{2e^2 N(0)R} \quad (1.4)$$

где  $N(0)$  – плотность состояний на уровне Ферми.

С учетом диффузионного тока выражение для полного тока приобретает следующий вид:

$$I = C \frac{dV_l}{dt} + I_c \sin \varphi_l + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi_l}{dt} \quad (1.5)$$

Оно отличается от соответствующего выражения для полного тока в ССJJ модели [4] третьим членом в правой части уравнения (1.5). В ССJJ модели он равен  $V_l/R$ .

Учет диффузионного тока приводит к системе дифференциальных уравнений второго порядка для разности фаз



$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_l}{dt^2} = & I - I_c \sin \varphi_l - \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi_l}{dt} + \alpha(I_c \sin \varphi_{l+1} + I_c \sin \varphi_{l-1} - 2I_c \sin \varphi_l) + \\ & + \frac{\hbar}{2eR} \alpha \left( \frac{d\varphi_{l+1}}{dt} + \frac{d\varphi_{l-1}}{dt} - 2\frac{d\varphi_l}{dt} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Эта система уравнений также была получена в работе [47] с использованием микроскопической теории. Она отличается от случая ССJJ членом  $\frac{\hbar}{2eR} \alpha \left( \frac{d\varphi_{l+1}}{dt} + \frac{d\varphi_{l-1}}{dt} - 2\frac{d\varphi_l}{dt} \right)$ . Но авторы пренебрегают этим членом, считая его пренебрежимо малым.

### 1.2.2. Модели с емкостной и индуктивной связью

Для описания фазовой динамики системы длинных ДП Сакаем, Боудиным и Педерсеном [45] была предложена модель, учитывающая индуктивную связь между ДП. Емкостная связь в предложенной модели не учитывалась. В этой модели рассматривается система  $N + 1$  сверхпроводящих слоев, которые вместе с промежуточными диэлектрическими слоями образуют систему связанных джозефсоновских переходов. Схематический вид системы длинных ДП представлен на Рис.1.2. Ось  $x$  выбрана вдоль длины  $L$  ДП, ось  $y$  вдоль ширины  $W$  ДП и ось  $z$  перпендикулярна слоям. Сверхпроводящие слои с номерами  $l$  и  $l - 1$  образуют  $l$ -й джозефсоновский переход, который описывается калибровочно инвариантной разностью фаз  $\varphi_l = \theta_l - \theta_{l-1} - \frac{2e}{\hbar c} \int_{z_{l-1}}^{z_l} A_z dz$ , где  $\theta_l$  – фаза параметра порядка  $l$ -го сверхпроводящего слоя,  $e$  – электрический заряд электрона,  $\hbar$  – постоянная Планка,  $c$  – скорость света в вакууме и  $A_z$  – векторный потенциал барьера. В рассматриваемом случае предполагается, что ширина ДП меньше джозефсоновской глубины проникновения магнитного поля ( $W \ll \lambda_J$ ).

Плотность поверхностного тока в сверхпроводящем слое определяется выражением [45]

$$j_{x,l} = -\frac{c}{4\pi\lambda_L^2} \left( A_{x,l} - \frac{\hbar c}{2e} \frac{\partial \theta_l}{\partial x} \right), \quad (1.7)$$

где  $\lambda_L$  – лондоновская глубина проникновения. С учетом (1.7) и соотношений  $B_y = -\left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right)$ ,  $\frac{\partial^2 B_{z,l}}{\partial z^2} = \frac{1}{\lambda_L^2} B_{z,l}$ , определяется производная

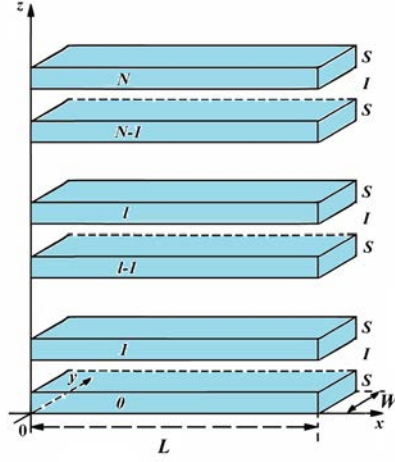


Рис. 1.2. Схема системы длинных ДП.

разности фаз по координате

$$\frac{\hbar c}{2eD_{\mathcal{L}}} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x} = B_l + SB_{l+1} + SB_{l-1}, \quad (1.8)$$

где  $S = s_{\mathcal{L}}/D_{\mathcal{L}}$  – параметр индуктивной связи,  $s_{\mathcal{L}} = -\lambda_L/\sinh(d_s/\lambda_L)$ ,  $D_{\mathcal{L}} = d_I + 2\lambda_L \coth(d_s/\lambda_L)$  – эффективная магнитная толщина. Отметим, что параметр индуктивной связи  $S$  принимает значения в интервале  $0 < |S| < 0.5$ .

В рамках этой модели с учетом индуктивной связи выражение для тока через систему ДП в нормированных величинах записывается в следующем виде

$$I = \frac{\partial V_l}{\partial t} + \sin \varphi_l + \beta V_l - \sum_{n=1}^N \left( \mathcal{L}_{l,n}^{-1} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} \right) \quad (1.9)$$

где  $\mathcal{L}$  – матрица индуктивной связи

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & S & 0 & \dots & & & S \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & S & 1 & S & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S & & & \dots & 0 & S & 1 \end{pmatrix}.$$

В выражении (1.9) время нормировано на плазменную частоту ДП  $\omega_p = \sqrt{8\pi d_I e j_c / (\hbar \epsilon)}$ , напряжение – на  $V_0 = \hbar \omega_p / (2e)$ , координата  $x$  – на джозефсоновскую глубину проникновения  $\lambda_J = \sqrt{\hbar c^2 / (8\pi e j_c D_{\mathcal{L}})}$ , ток –

на критический ток  $j_c$ , магнитное поле  $B$  – на  $B_0 = \hbar c / (2e D_{\mathcal{L}} \lambda_J)$ . Здесь  $\beta = \sigma V_0 / (d_I j_c)$  – параметр диссипации.

Обобщение модели на случай обоих типов связи между ДП было проведено Мачидой и Сакаем [49]. В этой модели плотность заряда в сверхпроводящем слое определяется выражением [49]

$$Q_l = -\frac{\varepsilon}{4\pi\lambda_e^2} \left( \phi_l + \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \theta_l}{\partial t} \right) \quad (1.10)$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость изолирующего слоя,  $\lambda_e$  – дебаевская длина экранирования,  $\phi_l$  – скалярный потенциал  $l$ -го сверхпроводящего слоя и  $t$  – время. Учитывая выражение (1.10), связь между напряженностью электрического поля и векторным потенциалом  $E_z = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z}$ , уравнение Пуассона  $\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{4\pi}{\varepsilon} Q$ , а также формулу  $V = d_I E$ , получаем обобщенное соотношение Джозефсона [49]

$$\frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} = D_c V_l + s_c V_{l+1} + s_c V_{l-1}, \quad (1.11)$$

где  $D_c = 1 + (2\lambda_e/d_I) \coth(d_s/\lambda_e)$  – эффективная электрическая толщина ДП, нормированная на толщину диэлектрического слоя  $d_I$ ,  $s_c = -\lambda_e/[d_I \sinh(d_s/\lambda_e)]$  – параметр емкостной связи,  $V_l$  – напряжение в  $l$ -м ДП,  $d_s$  – толщина сверхпроводящего слоя.

Таким образом, система уравнений для разностей фаз и напряжений во всех ДП стека, которая определяет фазовую динамику системы длинных ДП в рамках модели Сакаи Мачида записывается в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} = D_c V_l + s_c V_{l+1} + s_c V_{l-1} \\ \frac{\partial V_l}{\partial t} = \sum_{n=1}^N \left( \mathcal{L}_{l,n}^{-1} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} \right) - \sin \varphi_l - \beta V_l + I \end{cases} \quad (1.12)$$

В обобщенное соотношение Джозефсона напряжение нормировано на  $V_0$ .

Однако в этой модели не учитывался диффузионный ток [48], важность которого подчеркивалась в ряде работ [54, 55]. Кроме того, исследование ВАХ в рамках обобщенной модели Мачиды и Сакая до настоящего времени не проводилось. Другой принципиальной проблемой, которая также оставалась неисследованной до настоящего времени, является возможность реализации параметрического резонанса и возбуждения продольной

плазменной волны вдоль стека длинных джозефсоновских переходов. Было неясно, какую роль сыграет индуктивная связь: будет ли она способствовать или, наоборот, препятствовать реализации параметрического резонанса.

### 1.3. Система джозефсоновских переходов с LC–шунтированием

Одной из проблем при использовании внутренних ДП в ВТСП в качестве терагерцевого источника электромагнитного излучения является синхронизация всех ДП в стеке, что должно приводить к увеличению мощности излучения. Для решения этой проблемы используется шунтирование системы связанных ДП LC элементами [26, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21].

Джозефсоновские переходы вместе с LC–элементами образуют колебательный контур. Когда частота Джозефсона  $\omega_J$  становится равной собственной частоте контура  $\omega_{rc}$ , колебания в джозефсоновских переходах подстраиваются под эту частоту. Этот резонанс проявляется на ВАХ в виде различных особенностей типа ступенек [22, 23], горба или провала [24, 25]. В частности, ступеньки на ВАХ в различных системах джозефсоновских переходов с резонансным контуром были получены в ряде экспериментальных и теоретических работ [26, 27].

## ГЛАВА 2. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ССJJ И ССJJ+DC МОДЕЛЕЙ И РОЛЬ ДИФФУЗИОННОГО ТОКА В ФОРМИРОВАНИИ ВОЛЬТ-АМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДОВ

В настоящей главе мы приводим результаты анализа ВАХ системы связанных ДП на основе исследования зависимостей сверхпроводящего, квазичастичного, диффузионного токов и тока смещения, относящихся непосредственно к  $l$ -ому ДП (с учетом определения этих токов) от величины базового тока [33, 44, 40]. Такое рассмотрение позволяет выделить характер поведения соответствующего тока в отдельном ДП. В частности, мы показываем, что полученная в рамках ССJJ+DC модели динамика переключения из состояния с нулевым напряжением в резистивное состояние объясняет наблюдаемое в эксперименте отсутствие ветвления при  $I = I_c$ , характерное для ССJJ модели. Демонстрируется роль диффузионного тока в формировании вольт-амперной характеристики в трех различных областях: (i) вблизи критического тока, (ii) в области ветвления в гистерезисной части ВАХ, (iii) в области параметрического резонанса. Мы показываем также, что исследование зависимости усредненных по временному домену токов от величины базового тока проливает свет на характер ветвления ВАХ системы связанных ДП.

### 2.1. Численное моделирование фазовой динамики системы коротких связанных джозефсоновских переходов в рамках ССJJ и ССJJ+DC модели

Нормируя выражения (1.1) и (1.5), мы получим систему безразмерных уравнений для разности фаз и напряжений во всех джозефсоновских переходах стека:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} = V_l - \alpha(V_{l+1} + V_{l-1} - 2V_l) \\ \frac{\partial V_l}{\partial t} = I - \sin \varphi_l - \beta \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $\beta = \hbar\omega_p/(2eRI_c) = 1/\sqrt{\beta_c}$ ,  $\beta_c$  – параметр МакКамбера. В системе (2.1) время нормировано на плазменную частоту  $\omega_p$ , ток  $I$  нормирован на критический ток  $I_c$ , а напряжение нормировано на  $V_0 = \frac{\hbar\omega_p}{2e}$ . Как указывалось выше, в ССJJ модели последний член в правой части второго уравнения равен  $\beta V_l$  что, согласно первому уравнению этой системы, отличается от  $\beta \frac{d\varphi_l}{dt}$  на член  $\alpha\beta(V_{l+1} + V_{l-1} - 2V_l)$ .

Учитывая равенство  $1/I_c R = \beta/V_0$  и обобщенное соотношение Джозефсона (1.1), мы можем записать выражение для диффузионного тока в виде

$$I_{dif}^l = \frac{\beta}{V_0}(\Phi_l - \Phi_{l-1}) = \beta\dot{\varphi}_l - \beta V_l \quad (2.2)$$

или в виде

$$I_{dif}^l = -\alpha\beta(V_{l+1} + V_{l-1} - 2V_l) \quad (2.3)$$

Таким образом, в ССJJ+DC – модели выражение для полного тока через стек складывается из джозефсоновского  $I_s$ , квазичастичного  $I_{qp}$ , диффузионного  $I_{dif}$  токов и тока смещения  $I_{disp}$  :

$$I_s^l = \sin \varphi_l; \quad I_{qp}^l = \beta V_l; \quad I_{disp}^l = \frac{dV_l}{dt}; \quad I_{dif}^l = \beta\left(\frac{d\varphi_l}{dt} - V_l\right) \quad (2.4)$$

Здесь и в дальнейшем мы используем  $t$  для обозначения безразмерного времени. Отметим, что полная ветвистая структура ВАХ системы связанных ДП в модели с зарядовым разбалансом в работе [5] была получена при условии, что величина критического тока имела разброс вдоль стека порядка пяти процентов. Наши же расчеты проводятся при условии, что величина критического тока одинакова во всех переходах стека  $I_c^l = I_c$ .

Для определения ВАХ системы связанных ДП нами решается система уравнений (2.1), используя метод Рунге-Кутты четвертого порядка. При фиксированном значении базового тока  $I$  определяется разность фаз  $\varphi_l(t)$  и напряжение  $V_l$  как функции времени в временном интервале  $(0, T_{max})$ .

Среднее по времени напряжение  $\langle V_l \rangle$  вычисляется посредством

$$\langle V_l \rangle = \frac{1}{T_{max} - T_{min}} \int_{T_{min}}^{T_{max}} V_l dt, \quad (2.5)$$

где  $T_{min}$  и  $T_{max}$  определяют начало и конец временного интервала для усреднения. Полное напряжение стека  $V$  находится как сумма напряжений на всех ДП

$$V = \sum_{l=1}^N \langle V_l \rangle. \quad (2.6)$$

Итак, мы решаем систему динамических уравнений для разности фаз при фиксированном значении тока  $I$  в некотором временном интервале  $(0, T_{max})$  с шагом  $\delta t$ . Часть этого интервала, начиная с определенного значения  $T_{min}$  используется для процедуры усреднения по времени. Затем мы меняем величину тока на шаг  $\delta I$ , и повторяем процедуру для тока  $I + \delta I$  в новом временном интервале  $(T_{max}, 2T_{max})$ . Значения разности фаз и ее производной (или разности фаз и напряжения) для каждого ДП в конце первого временного интервала используется в качестве начальных условий для следующего временного интервала и так далее [33].

В этой главе расчеты проведены при  $T_{max} = 1000$ ,  $\delta t = 0.05$ ,  $\delta I = 0.0001$ , хотя в ряде случаев, когда требовалась более высокая точность, эти параметры менялись. Устойчивость решений проверяется влиянием на ВАХ изменения параметров задачи, в частности, удвоения и уменьшения вдвое шага по времени  $\delta t$ .

В расчетах к базовому току добавлялся шум, генерируемый случайным образом. Для этого использовался генератор случайных чисел. Амплитуда шума нормировалась на величину критического тока  $I_c$ .

Исследования временной зависимости заряда в сверхпроводящих слоях в системе связанных ДП проводятся следующим образом. Используя уравнение Максвелла  $div(\epsilon\epsilon_0 E) = Q$ , мы выражаем плотность заряда  $Q_l$  (в дальнейшем называем ее просто зарядом) на S-слое  $l$  через напряжения  $V_l$  и  $V_{l+1}$  в соседних диэлектрических слоях  $Q_l = Q_0\alpha(V_{l+1} - V_l)$ , где  $Q_0 = \epsilon\epsilon_0 V_0/r_D^2$ . Решение системы динамических уравнений для калибровочно-инвариантной разности фаз между S-слоями дает нам напряжения  $V_l$  как функцию времени на всех ДП в стеке и это позволяет исследовать временную зависимость электрического заряда на каждом S-слое. Полная временная зависимость заряда на слое складывается из изменения во времени на

каждом шаге по току. Интервал времени, в течении которого записывается временная зависимость заряда на слое определяется как  $t + T_{max}|I_0 - I|/\delta I$ , где  $I_0$  является начальным значением тока, с которого регистрируется временная зависимость.

Расчет временной зависимости токов и их усредненных значений проводится аналогичным образом. На основе выражений (2.4) вычисляются токи  $I_s$ ,  $I_{qp}$ ,  $I_{disp}$  и  $I_{dif}$  как функции времени при фиксированном значении базового тока. Усреднение токов по времени проводится аналогично усреднению напряжения (2.5).

## 2.2. Вольт–амперная характеристика в ССJJ и ССJJ+DC моделях

Вначале опишем вкратце основные особенности ВАХ системы связанных ДП в рамках обеих моделей. На Рис. 2.1 приведены однопетлевые ВАХ 9 связанных ДП, полученные как с учетом диффузионного тока (ССJJ+DC модели), так и без него (ССJJ модель) [33]. Нечетное число переходов в стеке приводит к тонкой структуре на ВАХ в области параметрического резонанса, обусловленной несогласованностью длины возникающей при этом продольной плазменной волны и периода структуры вдоль стека [14]. Расчет проведен при  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0.2$  и периодических граничных условиях. При расчетах временной домен составлял  $[0 \div 1000]$  с шагом 0.05; усреднение проводилось в интервале  $[50 \div 1000]$ . При этом шаг по току составлял 0.005, а в интервале базового тока  $[0.2 \div 1.1]$  этот шаг составлял 0.00001. В расчетах к базовому току добавлялся шум с амплитудой  $I_{noise} = 10^{-8}$ .

В ССJJ модели ВАХ демонстрирует ветвление в области (1), тонкую структуру в области параметрического резонанса (2) [14] и интенсивное ветвление в гистерезисной области (3). Величина гистерезиса в ССJJ модели значительно превышает эту характеристику в рамках ССJJ+DC модели, в которой, кроме того, не наблюдается ветвление при  $I > I_c$ . В ССJJ+DC модели в ряде случаев реализуется промежуточное состояние, в котором, как будет показано выше, система находится в течении очень короткого интервала времени. Такое состояние отмечено кружочком на Рис. 2.1.

В ССJJ модели перед переходом с верхней ветви, соответствующей



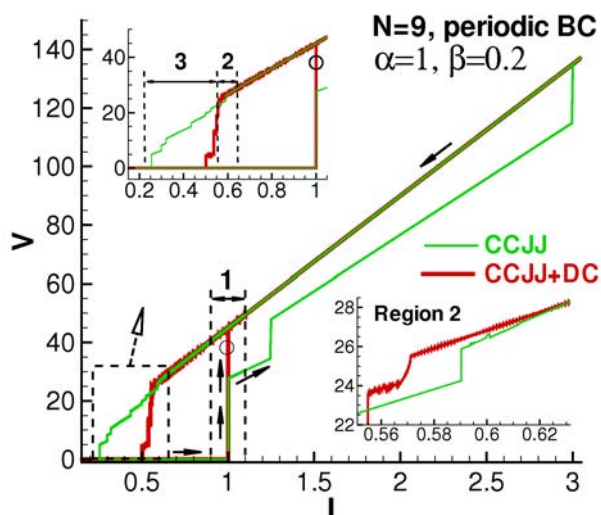


Рис. 2.1. ВАХ стека с 9 связанными ДП, полученные в рамках ССJJ (тонкая линия) и ССJJ+DC (жирная линия) моделей при однократном свипе базового тока от 0 до 5 и обратно. Штриховыми линиями выделены области вблизи критического тока (1), область параметрического резонанса (2), и область ветвления в гистерезисной части ВАХ (3), где проведены детальные исследования временной зависимости всех токов. Увеличенные области параметрического резонанса (2) и ветвления (3) показаны на вставках.

вращательному состоянию всех контактов в стеке, на ветвь с определенным числом контактов в осциллирующем состоянии, на ВАХ наблюдается излом. Подобный излом имеется на ВАХ, рассчитанной в рамках ССJJ модели в работе [56], однако авторы его не отмечают и не обсуждают.

Основной вопрос, который нас интересует, заключается в выяснении причины разного характера ВАХ в двух данных моделях. Естественно, это должно быть связано с диффузионным током, который отсутствует в ССJJ модели.

### 2.3. Область вольт-амперной характеристики вблизи критического тока

Большая часть экспериментальных ВАХ демонстрирует переключение всех ДП во вращательное состояние практически “одновременно”, т.е., при одном и том же значении базового тока [57, 58, 59]. Учет диффузионного тока приводит именно к такого типа ВАХ вблизи  $I_c$  и ниже мы обсудим причину такого поведения [33].

### 2.3.1. Динамика токов в ССJJ модели

Для того, что бы определить роль диффузионного тока в формировании ВАХ системы связанных ДП, рассмотрим вначале фазовую динамику и временные зависимости токов в ССJJ модели, которая его не учитывает.

Как указывалось выше, специфической чертой ССJJ модели является ветвление ВАХ в области  $I > I_c$ : система переходит из состояния с нулевым напряжением (все ДП с осциллирующей фазой (О-состояние)) в состояние с определенным числом ДП в R-состоянии (с вращающейся фазой), соответствующее некоторой ветви ВАХ [60]. Дальнейшее увеличение базового тока  $I$  приводит к возникновению новых ветвей. Такое ветвление может продолжаться до значений  $I$ , значительно превосходящих величину  $I_c$ . Причиной ветвления является наличие связи между ДП, которая обуславливает следующее явление: возникновение напряжения в одном ДП одновременно приводит к распределению напряжений вдоль всего стека. В результате в разных ДП появляется квазичастичный ток  $I_{qp}^l = \beta V_l$  разной величины, который в сумме с сверхпроводящим током  $I_s^l = \sin \varphi_l$  и током смещения  $I_{disp}^l = dV/dt$  приводит к току переключения большему, чем  $I_c$  [5]. Однако в эксперименте, обычно наблюдается переход всех контактов в резистивное состояние практически одновременно [57, 58, 59].

На Рис. 2.1 приведена часть ВАХ, полученной в рамках ССJJ модели, в которой наблюдается переход системы из состояния с нулевым напряжением в состояние с 3-мя ДП в О-состоянии (см. Рис. 2.2). Мы детально исследовали временную зависимость токов через отдельные ДП вблизи критического значения в интервале базового тока  $0.00098 < I < 1.00002$  с очень малым шагом по току  $\delta I = 10^{-5}$ . На Рис. 2.2 представлена часть временной зависимости сверхпроводящего тока во всех девяти ДП стека (здесь и далее по тексту буква J с числом обозначает номер ДП), непосредственно отражающая динамику такого переключения.

Мы видим, что в процессе переключения в первом, третьем и пятом ДП сверхпроводящий ток из постоянного превращается в осциллирующий со средним значением, равным нулю, т. е., данные три ДП переходят в R-состояние. В остальных ДП сверхпроводящий ток демонстрирует затухающие осцилляции с конечным средним значением, указывая, что данные ДП остаются в О-состоянии.

Динамика сверхпроводящего тока, естественно, отражается на квази-

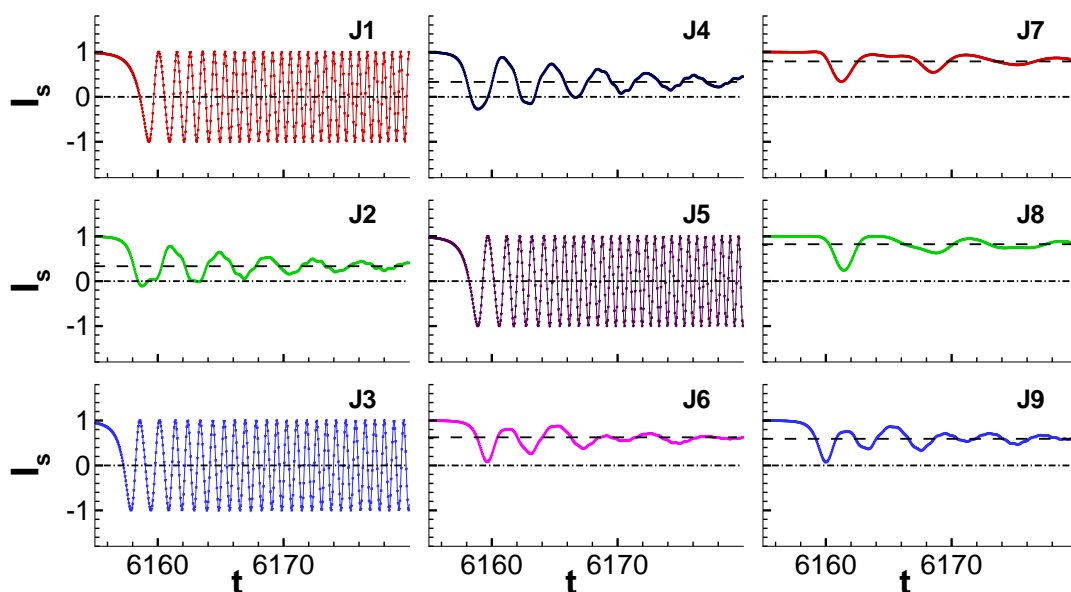


Рис. 2.2. Часть временной зависимости сверхпроводящего тока во всех ДП стека в интервале времени, при котором происходит переход системы в состояние с 3-мя вращающимися ДП (находящимися в  $R$ -состоянии). Ток-овые и временные интервалы на всех рисунках выбраны одинаковыми. J1, J2 и т.д. обозначают номер ДП в данном расчете.

частичном токе и токе смещения. Характерное для этого случая поведение квазичастичного тока для двух ДП в стеке (первого и второго, переходящих в вращательное и осциллирующее состояния, соответственно) приведено на Рис.2.3. Изменение квазичастичного тока коррелирует с изменениями сверхпроводящего тока и тока смещения: во всех ДП возникает квазичастичный ток, отражающий распределения напряжения вдоль стека на зависимости  $I_{qp}(t)$ . Мы видим мелкие осцилляции на выходящей на насыщение зависимости как проявление осцилляций сверхпроводящего тока. Естественно, среднее значения  $I_{qp}$  в  $R$ -состоянии (первый ДП) превышает соответствующее значение в  $O$ -состоянии (второй ДП) после переключения.

Для полноты данных мы приводим на Рис.2.3 временную зависимость  $I_{disp}$  для тех же ДП. Как видно, она также находится в корреляции с временными зависимостями  $I_s$  и  $I_{qp}$ . Ток смещения осциллирует вблизи нуля в  $R$ -состоянии и испытывает всплеск с затухающими осцилляциями в  $O$ -состояниях.

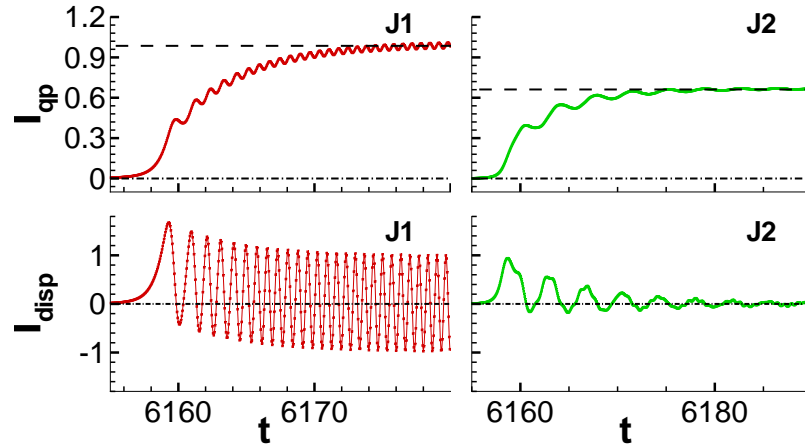


Рис. 2.3. Часть временной зависимости квазичастичного тока и тока смещения в первом и втором ДП стека, рассчитанная в рамках ССJJ модели в области критического тока.

### 2.3.2. Динамика токов в ССJJ+DC модели

Перейдем теперь к обсуждению динамики токов в модели с емкостной связью и диффузионным током. Как мы убедимся ниже, диффузионный ток в системе связанных ДП препятствует ветвлению ВАХ вблизи  $I = I_c$ . Чтобы доказать это утверждение, мы исследовали в рамках ССJJ+DC модели зависимость всех токов от времени в интервале базового тока  $0.00098 < I < 1.00002$ . Часть такой зависимости для диффузионного тока во всех ДП стека с шагом по току  $10^{-5}$  и размером временного домена 2000 представлена на Рис. 2.4, где мы показываем динамику  $I_{dif}$  в момент переключения.

Можно выделить две области на данной зависимости, разделенные пунктирной линией. Левая область соответствует переходу из состояния с нулевым напряжением в промежуточное состояние (отмеченное кружочком на ВАХ на Рис. 2.1). Промежуточное состояние соответствует тому, что один из переходов (в данном расчете это 6-ой ДП), испытав определенные осцилляции всех токов, остался в  $O$ -состоянии. Во всех ДП в данном временном интервале диффузионный ток испытывает всплеск и осцилляции вокруг некоторого среднего значения, отличного от нуля и разного по величине. Правая область соответствует поведению диффузионного тока в состоянии после переключения на верхнюю ветку ВАХ и сопровождается затухающими осцилляциями.

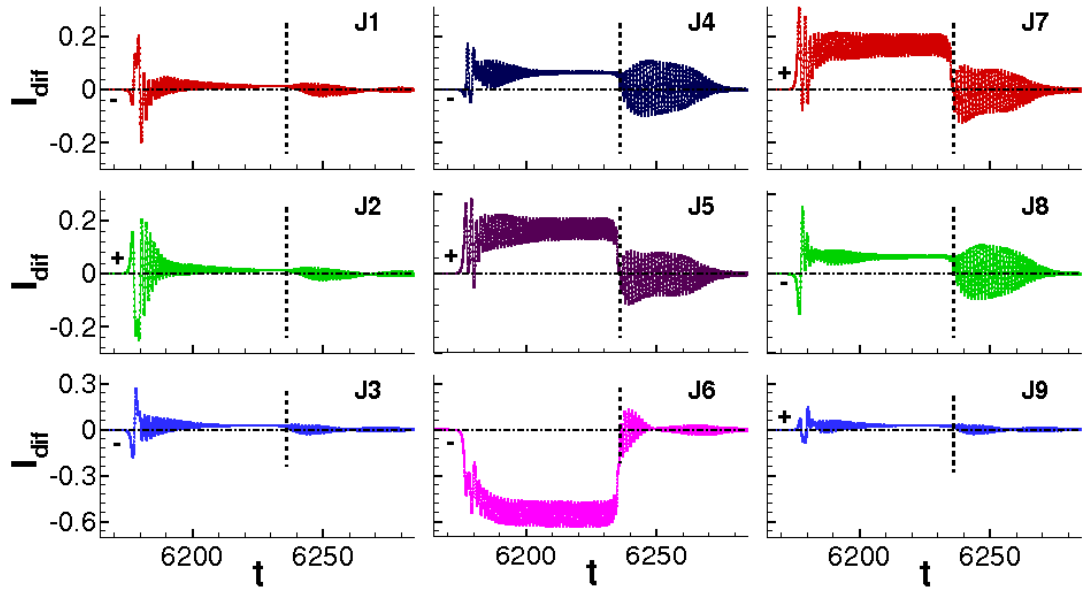


Рис. 2.4. Часть временной зависимости диффузионного тока во всех ДП стека в области критического тока.

Основной особенностью зависимости, представленной на Рис.2.4 является переменный знак диффузионного тока в момент выхода из состояния с нулевым напряжением: на первом ДП минус, на втором - плюс, на третьем - минус, на четвертом - минус, и т.д.. Мы полагаем, что разное направление  $I_{dif}$  в момент выхода из состояния с нулевым напряжением не позволяет системе задерживаться в состояниях, соответствующих другим ветвям ВАХ, и вынуждает систему переходить непосредственно в конечное состояние, соответствующее всем ДП в вращательном состоянии.

Чтобы убедиться в различном характере динамики токов в разных ДП при данном переключении, на Рис.2.5 представлена временная зависимость  $I_{qp}$ ,  $I_{disp}$  и  $I_s$  в первом, втором и шестом ДП стека. Мы видим отличия этих зависимостей для первого и второго ДП от соответствующих зависимостей для шестого ДП. Как и в случае диффузионного тока, для шестого ДП наблюдаются две области на этих зависимостях, тогда как для первого и второго (и остальных) сразу после переключения наблюдается характерный переход в вращательное состояние. Определенное рассогласование этих зависимостей в разных ДП, наблюдающееся сразу после переключения, исчезает через достаточно короткий промежуток времени.

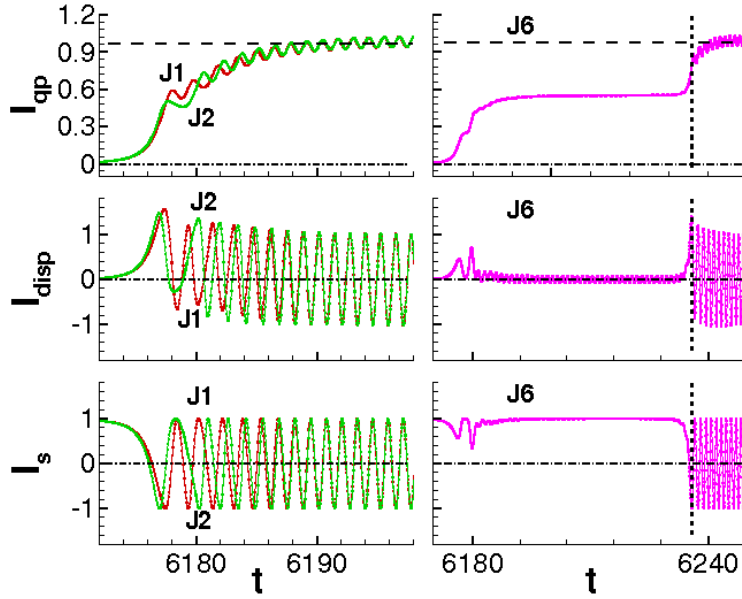


Рис. 2.5. Часть временной зависимости (a,b) квазичастичного тока, (c,d) тока смещения и (e,f) сверхпроводящего тока в первом, втором и шестом ДП стека, рассчитанная в рамках ССJJ+ДС модели в области критического тока.

#### 2.4. Область параметрического резонанса

Перейдем теперь к обсуждению области ВАХ, соответствующей переходу из R-состояния (верхняя ветка, все ДП в вращательном состоянии), в состояние, в котором один или часть ДП оказываются в O-состоянии. В работах [13, 14] было продемонстрировано, что в этой области в системе связанных ДП возникает параметрический резонанс, при котором джозефсоновские осцилляции возбуждают продольную плазменную волну вдоль стека. При этом сверхпроводящие слои оказываются заряженными и зарядовая динамика определяет особенности возникающей здесь тонкой структуры на ВАХ, возникновение которой связано с биениями продольной плазменной волны в дискретной системе сверхпроводящих слоев [14].

На Рис. 2.6 представлена размах осцилляций электрического заряда в сверхпроводящих слоях (L7, L6) в соответствующих точках ВАХ в области параметрического резонанса, рассчитанная в рамках (a) ССJJ+ДС модели и (b) ССJJ модели. Полые стрелки с буквенными обозначениями [14] демонстрируют проявления особенностей тонкой структуры, которые отражаются на ВАХ. Сами же ВАХ показаны жирными линиями. Как видно,

обе модели проявляют параметрический резонанс, хотя тонкая структура в обеих моделях отличается существенным образом.

Наличие заряда в сверхпроводящих слоях приводит к появлению диффузионного тока  $I_{dif}^l = -\frac{(Q_l - Q_{l-1})}{4\pi r_D^2 R}$ . Возникает вопрос: какое влияние оказывает диффузионный ток на поведение системы и ВАХ в этой области?

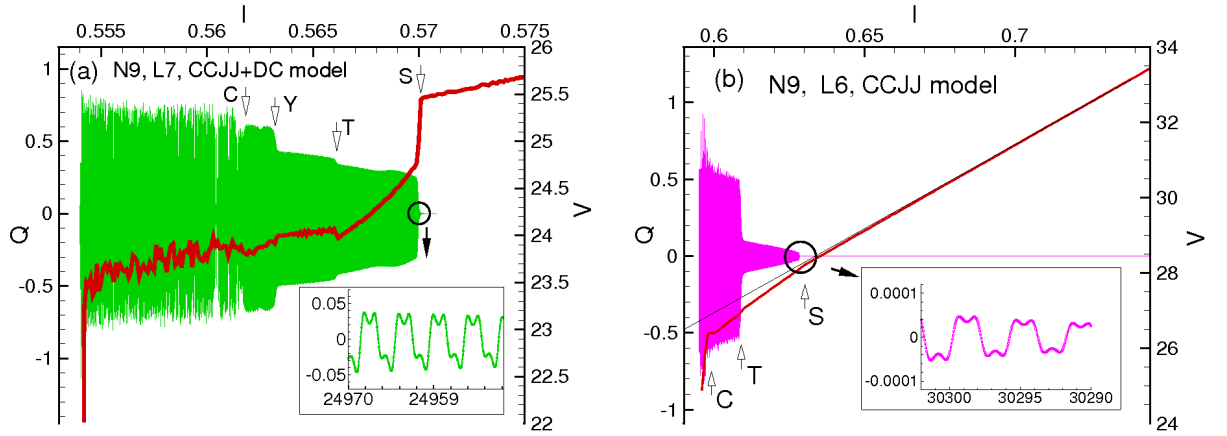


Рис. 2.6. Размах осцилляций электрического заряда в сверхпроводящем слое в соответствующих точках ВАХ в области параметрического резонанса, рассчитанная в рамках (а) ССJJ+DC модели; (б) ССJJ модели. Полые стрелки демонстрируют проявление особенностей тонкой структуры. Вставки демонстрируют характер осцилляций заряда в выделенной кружочком области резонанса.

На Рис. 2.7 представлена зависимость всех рассматриваемых усредненных значений токов, а именно, (а) сверхпроводящего  $I_s^l = \sin \varphi_l$ , (б) квазичастичного  $I_{qp}^l = \beta V_l$ , (с) диффузионного  $I_{dif}^l = \beta \left( \frac{d\varphi_l}{dt} - V_l \right)$  токов и (д) тока смещения  $I_{disp}^l = \frac{dV_l}{dt}$  от величины базового тока через первый ДП стека в области параметрического резонанса, рассчитанная в рамках ССJJ+DC модели. В остальных переходах эта зависимость имеет аналогичный характер. Расчет проведен при тех же значениях параметров, что и результаты, представленные на Рис. 2.1. Наблюдается тонкая структура ВАХ в области параметрического резонанса, связанная с характерным поведением продольной плазменной волны в дискретной системе [14]. Как мы видим, в этой области основной вклад в величину базового тока дает квазичастичный ток, который более чем на порядок превышает сверхпроводя-

щий. Усредненный ток смещения, приведенный на Рис. 2.7(d), существенно меньше сверхпроводящего и квазичастичного по величине, и осциллирует при уменьшении базового тока. Можно заметить проявление особенностей тонкой структуры ВАХ на приведенной зависимости, отмеченные на рисунке стрелочками.

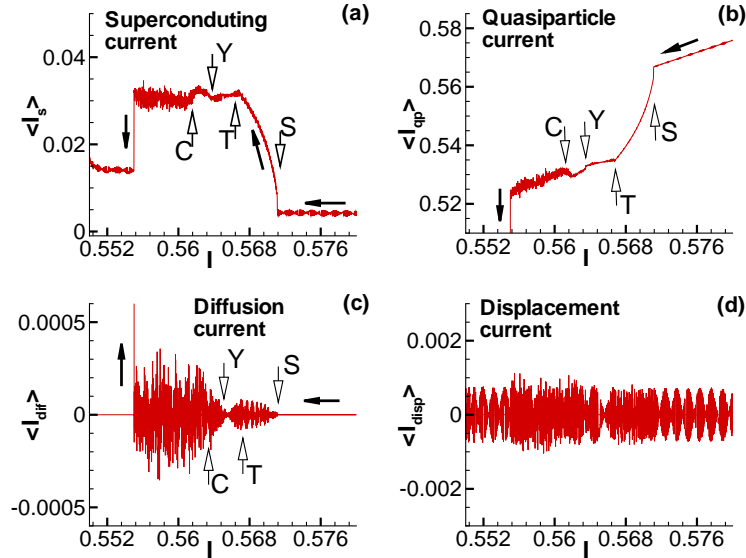


Рис. 2.7. Зависимость усредненных значений (а) сверхпроводящего  $I_s$  (b) квазичастичного  $I_{qp}$ , (с) диффузионного  $I_{dif}$  токов и (d) тока смещения  $I_{disp}$  от величины базового тока через первый ДП стека в области параметрического резонанса, рассчитанная в рамках ССJJ+ДС модели. Закрашенные стрелки указывают направление изменения базового тока, полые стрелки демонстрируют проявление особенностей тонкой структуры.

Диффузионный ток ( см. Рис. 2.7(c)) до начала области параметрического резонанса отсутствует (существует на уровне шума). При подходе к резонансу (при уменьшении полного тока через стек), амплитуда зарядовых осцилляций в сверхпроводящих слоях нарастает и это приводит к появлению диффузионного тока. В резонансной области усредненный диффузионный ток осциллирует, меняя свое направление в данном ДП. Вклад диффузионного тока в базовый ток в этой области достаточно мал по величине. Однако, как мы увидим ниже из сравнения этих результатов с ССJJ моделью, этот вклад качественно меняет тонкую структуру ВАХ в области параметрического резонанса.

На Рис. 2.8 представлена зависимость усредненных (а) сверхпроводящего  $I_s$ , (b) квазичастичного  $I_{qp}$  и (с) тока смещения  $I_{disp}$  от величины



базового тока через первый ДП стека в области параметрического резонанса, рассчитанная в рамках ССJJ модели.

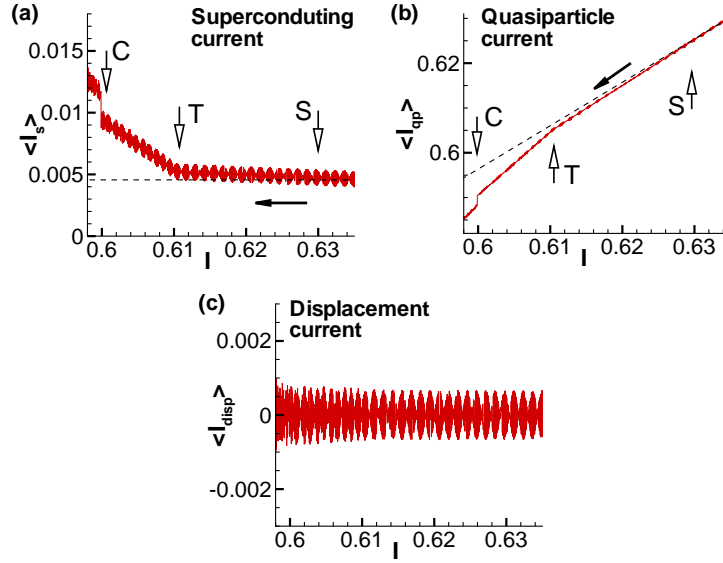


Рис. 2.8. Зависимость усредненных значений (а) сверхпроводящего  $I_s$ , (b) квазичастичного  $I_{qp}$  и (с) тока смещения от величины базового тока в области параметрического резонанса, рассчитанная в рамках ССJJ модели. Стрелки указывают направление изменения базового тока, штриховая линия демонстрирует отклонение кривой  $\langle I_{qp}(I) \rangle$  от линейной зависимости.

Подчеркнем, что наличие параметрического резонанса в системе связанных ДП не есть следствие учета диффузионного тока: он возникает и в ССJJ модели, не учитывающей диффузионный ток. Отсутствие диффузионного тока сказывается на тонкой структуре ВАХ в данной области. В ССJJ+DC модели ширина области тонкой структуры по току составляет около 0.015 единиц, тогда как в ССJJ модели ее величина значительно больше и равна примерно 0.2 единицам базового тока [40]. По-видимому, возникновение электрического заряда на сверхпроводящих слоях и проявление резонанса наблюдалось в работе [9], в которой Рис.2 демонстрирует характерное отклонение на ВАХ в гистерезисной области при переходе с верхней ветки.

Для того, чтобы продемонстрировать реализации параметрического резонанса в ССJJ модели, мы детально исследовали ВАХ и временные зависимости заряда в сверхпроводящих слоях для стека с четным и нечетным числом ДП [40]. На Рис.2.9 а и b, представлены в увеличенном масшта-

бе область параметрического резонанса для стека с 9 ДП. На Рис.2.9 с и d представлены соответствующие области для системы с 10 ДП. ВАХ демонстрирует гистерезис (рис.2.9а) и обладает ветвистой структурой. Перед переходом с верхней ветви, на другую ветвь, на ВАХ наблюдаются характерные изломы. В случае системы с 9 ДП эти изломы наблюдаются при значениях тока (точка В) и (точка Т). При токе (точка J) ВАХ переходит на следующую ветку. А в случае системы с 10 ДП наблюдается лишь один излом при значении тока. Подобный излом имеется на ВАХ, рассчитанной в рамках ССJJ-модели в работе [56], однако авторы этот факт не отмечают и не обсуждают. Мы полагаем, что в рамках ССJJ-модели в системе связанных ДП также возникает параметрический резонанс и возбуждение продольной плазменной волны, как это имеет место в ССJJ+ДС-модели [13, 14].

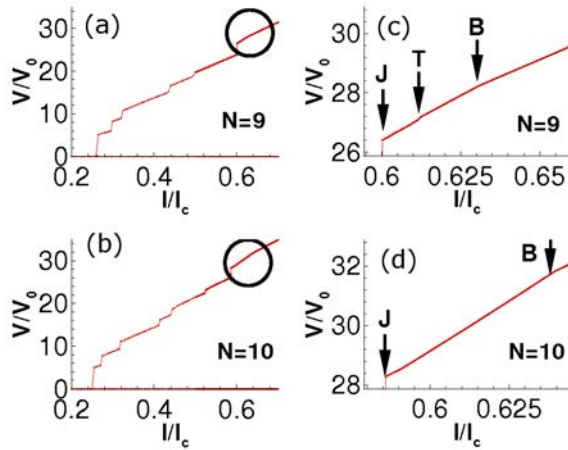


Рис. 2.9. Вольт–амперная характеристика системы с 9 и 10 ДП.

На Рис.2.10 и 2.11 представлены результаты Фурье-анализа временной зависимости заряда на первом сверхпроводящем слое и напряжения на первом ДП системы с 9 и 10 связанных ДП, соответственно [40]. Вдали от точки В, т. е. при  $I = 0.681$ , (см. Рис. 2.10а), во временной зависимости заряда наблюдаются колебания с разными случайными частотами и с амплитудой на уровне шума. При этом Фурье-анализ временной зависимости напряжения (Рис 2.10b) приводит к спектру с одной джозефсоновской частотой. При уменьшении тока, вблизи точки В ( $I = 0.632$ ), на временной зависимости заряда возникают дополнительные частоты  $\omega/2\pi\omega_p = 0.248$  и  $\omega/2\pi\omega_p = 0.748$ , причем амплитуда осцилляций превышает шум. На временной зависимости напряжения, по прежнему имеется только джо-

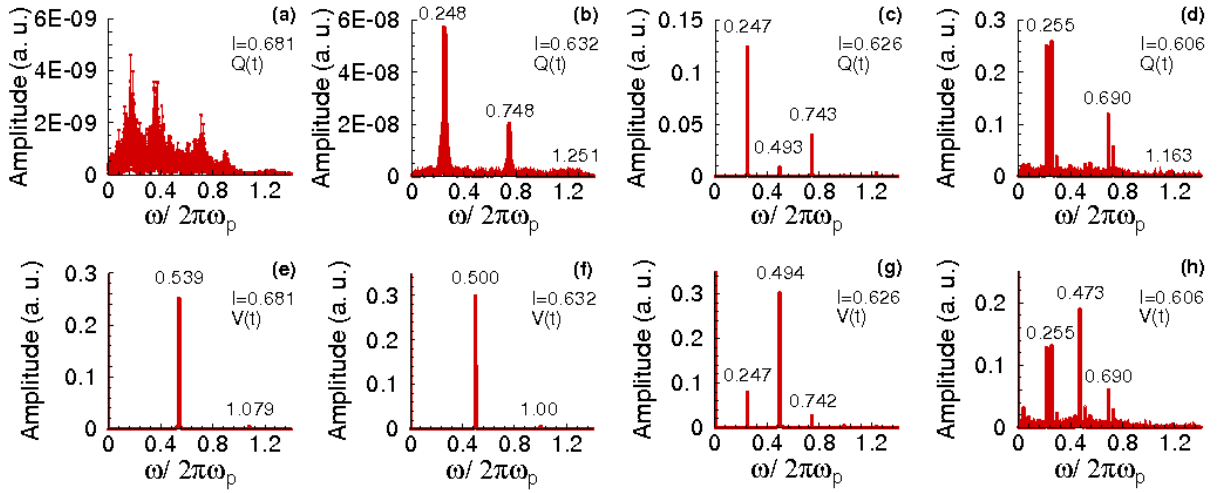


Рис. 2.10. Фурье-анализ временной зависимости заряда на первом слое и напряжения на первом переходе системы с 9 ДП

зефсоновская частота. Новая частота осцилляций заряда  $\omega/2\pi\omega_p = 0.248$  в два раза меньше джозефсоновской частоты. Это условие и экспоненциальный рост заряда на сверхпроводящих слоях дают основание считать, что в системе ДП возникает параметрический резонанс. С этим и связан излом на ВАХ в точке В. Подобная картина наблюдается и в системе с 10 ДП (см. Рис. 2.11). В отличие от ССJJ+DC-модели, в которой для системы с  $N = 10$  на верхней ветви ВАХ не наблюдается никаких изломов [61], а увеличение заряда на сверхпроводящих слоях завершается переходом на другую ветвь, ВАХ в рамках ССJJ – модели демонстрирует излом. Однако в случае четного числа переходов в системе, Фурье-анализ демонстрирует отсутствие сателлитов вблизи основных частот, наблюдаемых при на Рис. 2.10d и 2.10h.

Таким образом ССJJ модель системы СДП, также как и ССJJ+DC модель демонстрирует наличие параметрического резонанса в системе связанных джозефсоновских переходов. Однако ВАХ и временная зависимость заряда на сверхпроводящих слоях в области точки излома ВАХ имеют существенные отличия.

## 2.5. Область ветвления вольт–амперной характеристики

Теперь опишем третью область ВАХ, отмеченную на Рис. 2.1. Эта область в значительной степени определяет расхождение экспериментальных данных [57] и теоретических оценок тока возврата  $I_r$ , сделанных как

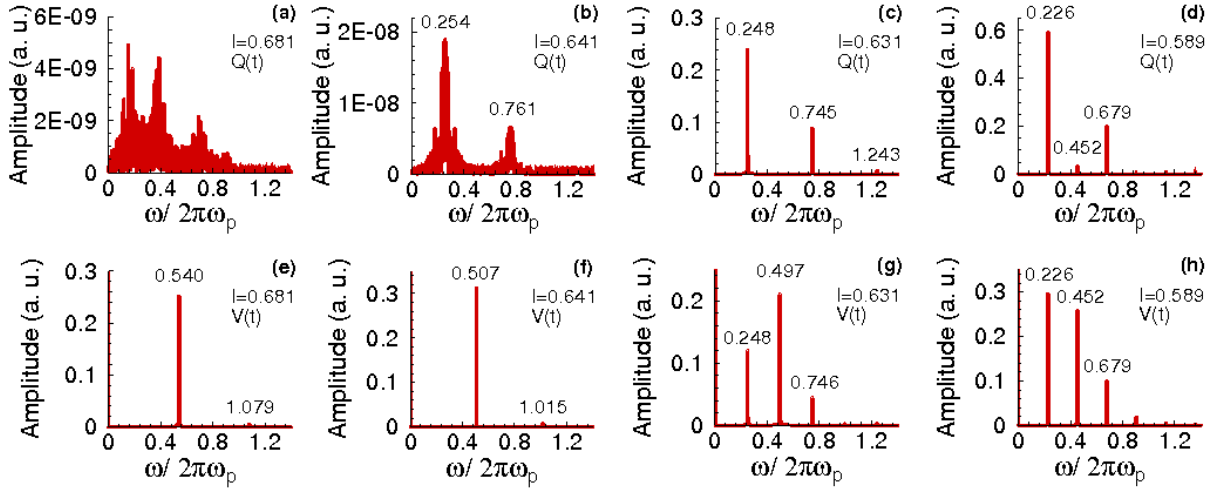


Рис. 2.11. Фурье-анализ временной зависимости заряда на первом слое и напряжения на первом переходе системы с 10 ДП

на основе модели Zарре [62] (не учитывающей связь между переходами), так и ССJJ модели (не учитывающей диффузионный ток). Ниже мы покажем, что учет диффузионного тока является принципиально важным, поскольку он приводит к сокращению области гистерезиса на ВАХ и продемонстрируем эффективность метода усредненных токов для исследования ВАХ связанных ДП.

### 2.5.1. Ветвление вольт-амперной характеристики в ССJJ+DC модели

Вначале мы проанализируем поведение токов в двух произвольно взятых ДП стека, а затем приведем результаты для всех ДП. Зависимость усредненных сверхпроводящего  $I_s$ , квазичастичного  $I_{qp}$ , диффузионного  $I_{dif}$  токов и тока смещения  $I_{disp}$  для первого и девятого ДП от величины полного тока  $I$  через стек, полученная в рамках ССJJ+DC модели, показана на Рис. 2.12.

Мы видим, что в области параметрического резонанса (описанной в предыдущем разделе и отмеченной на Рис.2.12а стрелкой как ВР), сверхпроводящий ток нарастает с уменьшением базового тока в обоих переходах практически одинаковым образом. Далее эта зависимость в рассматриваемых ДП различна: девятый ДП переходит в осциллирующее состояние при  $I = 0.555$ , а первый ДП продолжает оставаться в вращательном состоянии до значения тока возврата данной системы. Квазичастичный ток

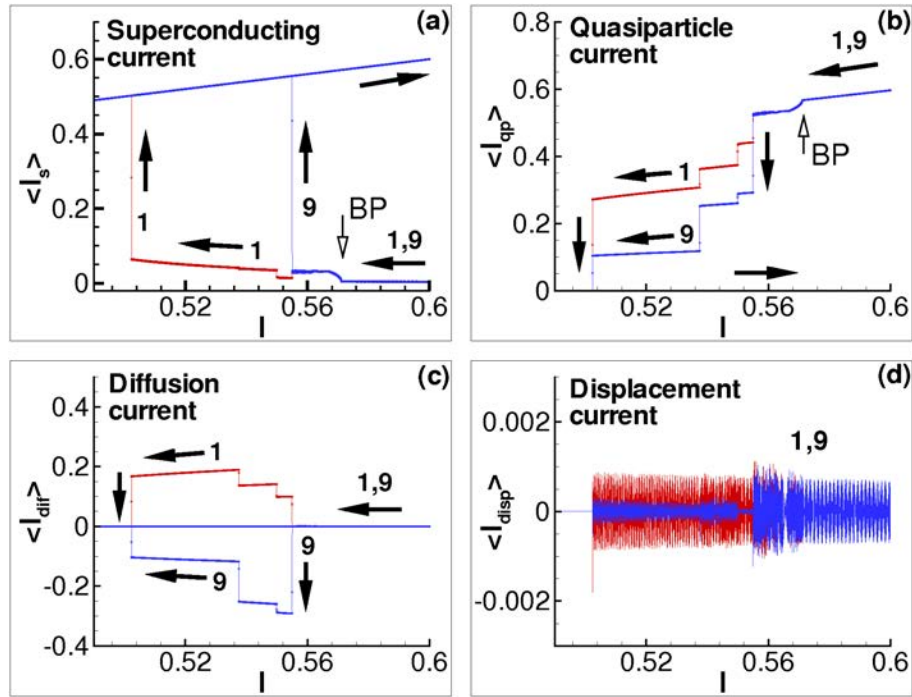


Рис. 2.12. Зависимость усредненных токов от величины базового тока через первый и девятый ДП, рассчитанная в рамках ССJJ+DC модели: (а) сверхпроводящий ток  $I_s$ ; (б) квазичастичный ток  $I_{qp}$ ; (с) диффузионный ток  $I_{dif}$ ; (д) ток смещение  $I_{disp}$ . Стрелки указывают изменение токов в соответствующих ДП.

также ведет себя по разному в обоих ДП. Он уменьшается скачкообразно с уменьшением величины базового тока, отражая уменьшение числа ДП в R-состоянии, однако остается конечным в обоих ДП вплоть до тока возврата. Важное отличие рассматриваемых ДП связано с диффузионным током: в первом контакте он положительный, а в девятом отрицательный. Как мы увидим ниже, разнонаправленность диффузионного тока имеет место и в других соседних ДП. Мы полагаем, что именно это обстоятельство играет определяющую роль в сокращении области гистерезиса! Ток смещения осциллирует с медленно нарастающей амплитудой при уменьшении  $I$  (см. Рис.2.12d), давая вклад в компенсацию осцилляций других токов.

Обсудим теперь ситуацию в целом стеке. На Рис. 2.13 приведена зависимость сверхпроводящего (а) и квазичастичного (б) токов от величины базового тока для всех ДП. На вставках к этим рисункам показано в увеличенном масштабе поведение данных токов в области ветвления.

На зависимости  $\langle I_s \rangle (I)$  после области параметрического резонан-

са наблюдается поэтапное переключение ДП из R-состояний в O-состояния. Таких переключений в исследованном случае 4: они обозначены на рисунке буквами А, В, С, и D. В частности, переключение А соответствует переходу 5-го и 9-го ДП в O-состояние, остальные ДП остаются в R-состоянии. Эти переключения находятся в корреляции с изменениями квазичастичного тока. Квазичастичный ток при переключениях А, В и С не исчезает полностью ни в одном из ДП. Очевидно, при переключении А он минимален в 5-ом и 9-ом ДП. Следует сравнить данную картину переходов с результатами, приведенными в работе [55]. Там были исследованы зависимости составляющих базового тока от его величины и получено, что компонента, соответствующая  $I_{qp}$ , исчезает при разных значениях  $I$  в разных ДП. В нашем же случае квазичастичный ток во всех ДП исчезает лишь при переключении D (при  $I = I_r$ ): *квазичастичный ток во всех ДП отличен от нуля, пока хотя бы один ДП находится в вращательном состоянии.*

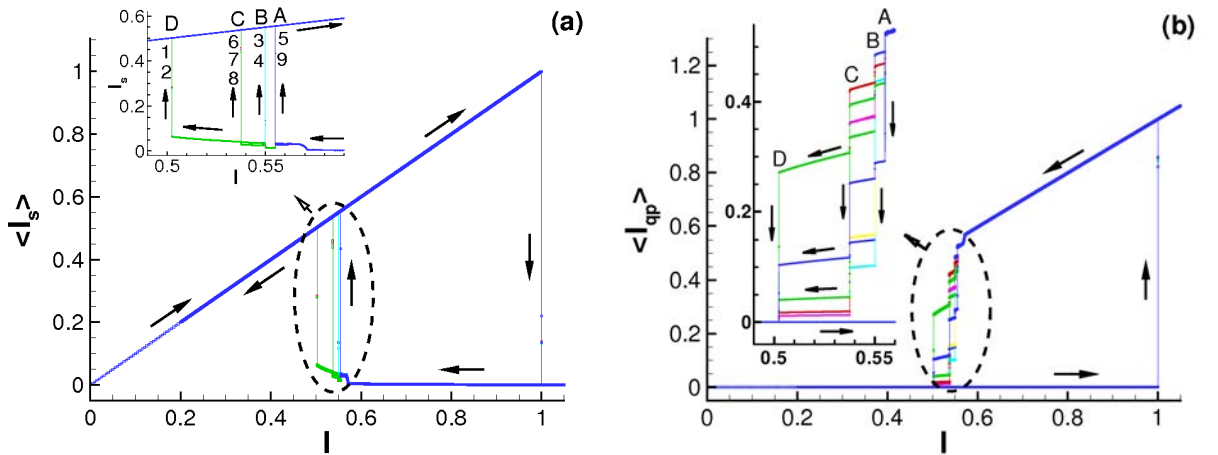


Рис. 2.13. Зависимость сверхпроводящего и квазичастичного токов для всех ДП стека от величины базового тока, полученная в рамках ССJJ+ДС модели.

Наблюдаемые особенности в зависимости усредненных токов от  $I$  и, на ВАХ в целом, связаны с поведением диффузионного тока. Зависимость усредненного диффузионного тока  $\langle I_{dif} \rangle$  от величины базового тока  $I$  для всех ДП стека показана на Рис. 2.14. Расчет проведен при тех же значениях параметров модели, что и результаты, представленные на Рис. 2.1. При уменьшении полного тока через стек, диффузионный ток отсутствует до области параметрического резонанса, где он, как мы указывали выше, осциллирует (см. Рис.2.7с), отражая тонкую структуру ВАХ в этой обла-

сти. Важным моментом, который демонстрирует Рис.2.14, является то, что  $\langle I_{dif} \rangle$  в ряде соседних ДП имеет противоположное направление. Наблюдается следующее характерное поведение: уменьшение величины диффузионного тока вызывает переключение соответствующего ДП в О-состояние. Мы видели на Рис. 2.12с, что когда диффузионный ток в девятом ДП становится отрицательным, то согласно Рис. 2.12а, сверхпроводящий ток резко возрастает и этот ДП переключается в О-состояние. Рис. 2.14 демонстрирует такое поведение также для других ДП стека.

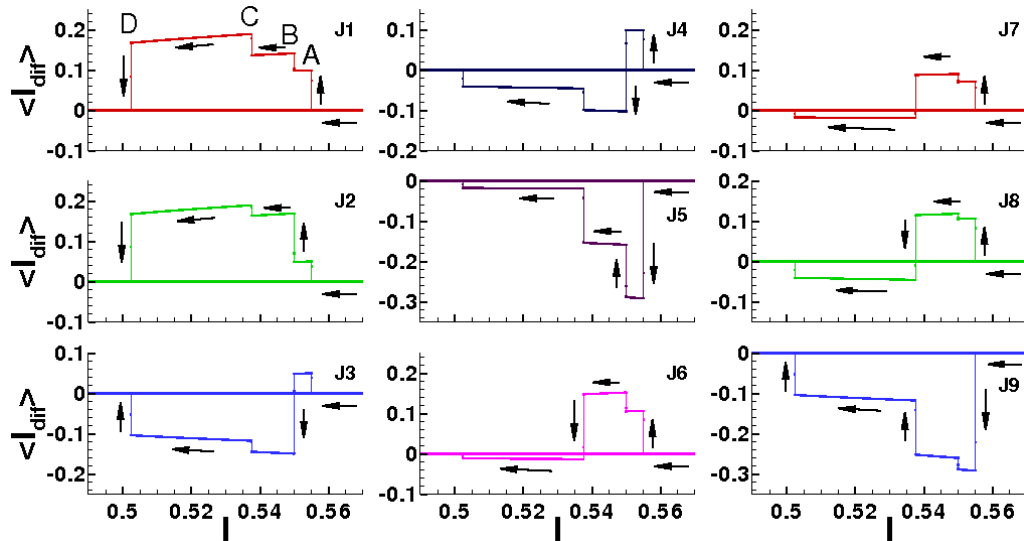


Рис. 2.14. Зависимость диффузионного тока от величины базового тока для всех ДП.

Таким образом, мы приходим к выводу, что диффузионный ток оказывает существенное влияние на ветвление ВАХ в гистерезисной области. В этой области его величина сопоставима с величиной сверхпроводящего и квазичастичного токов. Зависимость  $\langle I_{dif}(I) \rangle$  для всех ДП, также демонстрирует, что диффузионный ток отличен от нуля в каждом ДП во всей области ветвления и исчезает лишь при  $I = I_r$ .

Важной чертой зависимости  $\langle I_{dif}(I) \rangle$  является скачкообразное изменение величины и направления диффузионного тока. Как было отмечено выше для девятого ДП стека, уменьшение диффузионного тока в конкретном ДП приводит к переходу данного ДП в осциллирующее состояние! Убедиться в этой корреляции можно сопоставив Рис.2.14 с Рис.2.13, где представлена зависимость  $\langle I_s(I) \rangle$ . В частности, с уменьшением  $I$ , усредненное значение  $\langle I_{dif} \rangle$  становится отрицательным в 5-м и 9-м ДП.

В соответствии с этим мы видим на Рис.2.13, что при данном значении базового тока 5-й и 9-й ДП переходят в О-состояние. При дальнейшем уменьшении базового тока  $I$  диффузионный ток  $\langle I_{dif} \rangle$  при переключении В становится отрицательным в 3-ем и 4-ом ДП, которые также переходят в О-состояние.

### 2.5.2. Ветвление вольт–амперной характеристики в ССJJ модели

Что бы убедиться в правильности высказанного предположения об определяющей роли диффузионного тока в гистерезисном поведении системы связанных ДП, обсудим ситуацию в ССJJ модели, где этот ток не учитывается. Рассмотрим изменение токов в отдельных ДП при изменении величины полного тока через стек. На Рис. 2.15 представлена зависимость (а) сверхпроводящего  $I_s$  и (б) квазичастичного  $I_{qp}$  токов от величины базового тока в первом и девятом ДП стека.

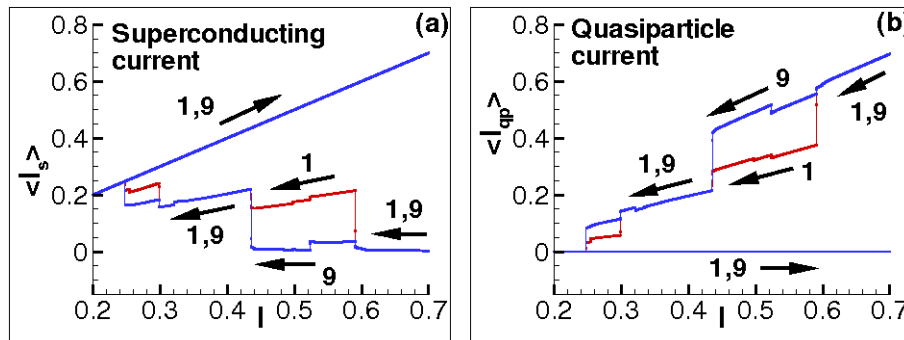


Рис. 2.15. Зависимость сверхпроводящего  $I_s$  (а) и квазичастичного  $I_{qp}$ (б) токов от величины базового тока, полученная в рамках ССJJ модели.

Как мы видим, величина сверхпроводящего тока достигает максимального значения в обоих ДП при одном и том же значении базового тока, а именно при  $I = I_r$ . Однако в ССJJ+DC модели, как было указано выше (см. Рис. 2.13), сверхпроводящий ток в разных ДП отражает их переход в О-состояние при разных значениях базового тока. Учет диффузионного тока приводит к большей, в сравнении с результатом ССJJ модели, величине тока возврата  $I_r$ , что согласуется с экспериментальными результатами, приведенными в работе [57, 58, 59]. Следует также отметить, что переход в осциллирующее состояние не сопровождается полным исчезнове-



нием квазичастичного тока, как это происходит в случае соответствующей компоненты полного тока, включающей вклад соседних ДП [55].

В работе [57] приведены результаты экспериментальных исследований ВАХ и тока возврата в  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_y$  при температуре  $T=77$  К. Ветви на экспериментальной ВАХ стека из 8 внутренних ДП были близки к линейным, наблюдался гистерезис и величина критического тока во всех переходах была практически одинакова. Оценка величины параметра МакКамбера  $\beta_c(77 \text{ К})$  составила примерно  $\approx 560$ . На основе модели Зарре [62, 26], не учитывающей связи между ДП, используя соотношение  $I_r/I_c = 4/(\pi\beta_c^{-1/2})$  при  $\beta_c \gg 1$  было получено, что  $I_r \simeq 13 \mu\text{А}$  (или  $I_r/I_c = 0.054$ ). Эта величина существенно отличается от экспериментального значения  $I_r = 45 \mu\text{А}$  (или  $I_r/I_c = 0.188$ ). Учет диффузионного тока в ССJJ+DC модели существенно уменьшает гистерезис в системе, приводя к росту тока возврата на ВАХ, что соответствует приведенным в работе [57] экспериментальным результатам.

## ГЛАВА 3. РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДОВ, ШУНТИРОВАННОЙ LC ЭЛЕМЕНТАМИ

В настоящей главе мы приводим результаты исследования резонансных свойств системы джозефсоновских переходов шунтированной LC-контуром и под воздействием внешнего излучения [34, 37, 38, 39, 41]. Исследования проведены в рамках модели с емкостной связью и диффузионным током (ССJJ+DC модель [13, 48]). Мы показываем возможность реализации двойного резонанса в области гс-ветви, т. е. резонанса колебаний LC-контура, джозефсоновских осцилляций и продольной плазменной волны (ППВ), при котором сверхпроводящие слои в системе оказываются заряженными.

### 3.1. Система связанных джозефсоновских переходов, шунтируемая LC-контуром

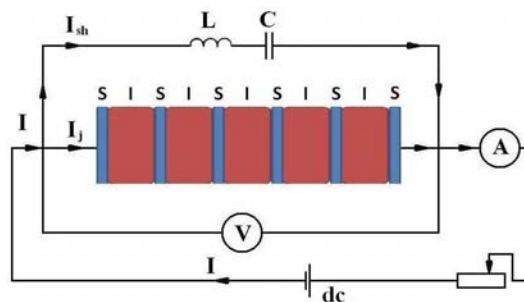


Рис. 3.1. Схема системы джозефсоновских переходов с LC-шунтированием

Электрическая схема рассматриваемой системы ДП с LC-шунтом представлена на Рис.3.1. Сопротивление  $R$  не включено в шунтирующую цепь, чтобы выделить основные эффекты влияния резонансного контура на свойства системы. Полный ток через систему есть сумма токов через систему ДП  $I_j$  и шунтирующие элементы  $I_{sh}$ . В рамках используемой нами

модели ток  $I_j$  определяется выражением

$$I_j = C_j \frac{dV_l}{dt} + I_c \sin \varphi_l + \frac{\hbar}{2eR_j} \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} \quad (3.1)$$

где  $C_j$ ,  $V_l$ ,  $R_j$ ,  $I_c$  и  $\varphi_l$  есть емкость, напряжение, сопротивление, критический ток и калибровочно-инвариантная разность фаз  $l$ -го ДП, соответственно. Ток через шунтирующие элементы  $I_{sh}$  определяется выражением

$$I_{sh} = C \frac{\partial u_c}{\partial t} \quad (3.2)$$

где  $C$  и  $u_c$  есть, соответственно, емкость и напряжение, возникающие на шунтирующем конденсаторе. При параллельном соединении, представленном на Рис.3.1, сумма напряжений на шунтирующих элементах равна сумме напряжений на всех ДП, т. е.

$$LC \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} + u_c = \sum_{i=1}^N V_l \quad (3.3)$$

где  $L$  - шунтирующая индуктивность.

Таким образом, в случае шунтирования системы ДП с LC-контуром, динамика калибровочно-инвариантной разности фаз  $\varphi_l$  в  $l$ -ом ДП определяется следующей системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} = V_l - \alpha(V_{l+1} + V_{l-1} - 2V_l) \\ \frac{\partial V_l}{\partial t} = I - \sin \varphi_l - \beta \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} - C \frac{\partial u_c}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \left( \sum_{l=1}^N V_l - u_c \right) \end{cases} \quad (3.4)$$

где все величины обезразмерены, а именно, базовый ток  $I$  нормирован на критический ток  $I_c$  ДП ; время - на обратную плазменную частоту  $\omega_p^{-1}$  (где плазменная частота  $\omega_p = \sqrt{\frac{2eI_c}{C_j \hbar}}$  и в дальнейшем мы также используем  $t$  для обозначения нормированного времени); напряжения  $V_l$  и  $u_c$  нормированы на  $V_0 = \frac{\hbar \omega_p}{2e}$ ; шунтирующая емкость  $C$ - на емкость ДП  $C_j$ , а шунтирующая индуктивность  $L$  - на  $(C_j \omega_p^2)^{-1}$ . В системе уравнений (3.4) введен также параметр диссипации в джозефсоновском переходе

$\beta = \frac{1}{R_j} \sqrt{\frac{\hbar}{2eI_c C_j}} = \frac{1}{\sqrt{\beta_c}}$ , где  $\beta_c$  - параметр МакКамбера. Подчеркнем, что в дальнейшем мы используем те же буквенные обозначения для нормированных величин, что и для ненормированных.

Если учитывать воздействие внешнего электромагнитного излучения на систему ДП с шунтированной LC-элементами, то второе уравнение системы (3.4) записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = I - \sin \varphi - \beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} - C \frac{\partial u_c}{\partial t} + A \sin \omega t + I_{noise} \quad (3.5)$$

где  $A$  и  $\omega$  амплитуда и частота внешнего электромагнитного излучения и они нормированы критическому току  $I_c$  и плазменной частоте  $\omega_p$ , соответственно.

Система уравнений (3.4) решается численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Решение системы уравнений (3.4) при фиксированном значении внешнего тока  $I$  определяет разность фаз  $\varphi_l(t)$  и напряжение  $V_l(t)$  как функции времени в определенном заданном интервале. Методика расчета ВАХ и временной зависимости электрического заряда соответствует стандартной схеме и изложена в ряде работ [63, 14].

### **3.2. Резонансная ветвь на вольт-амперной характеристике системы джозефсоновских переходов, шунтированной LC элементами**

В наших вычислениях для системы из 10 ДП, если это не указано дополнительно, мы полагали параметр диссипации  $\beta = 0.2$  и параметр связи  $\alpha = 1$  и использовали периодические граничные условия [63]. Отметим, что величина параметра связи не оказывает существенного влияния на качественные результаты, представленные в настоящей работе. Значение  $\alpha = 1$  выбрано для сравнения полученных результатов с опубликованными ранее данными. Итак, мы решаем систему динамических уравнений для разностей фаз и напряжений (3.4) при фиксированном значении тока  $I$  в временном интервале  $(0, T_{max})$  с шагом  $\delta t$ . Часть этого интервала, начиная с значения  $T_{min}$  используется для процедуры усреднения по времени. В наших расчетах мы использовали в основном  $T_{min} = 50$ ,  $T_{max} = 10000$ ,  $\delta t = 0.05$ ,  $\delta I = 0.0001$ , хотя в ряде случаев, когда требовалась более высокая точ-

ность, эти параметры менялись. В частности, для получения результатов, представленных на Рис.3 (а), использовалось  $T_{max} = 20000$ , для Рис.3 (b)-(d) -  $T_{max} = 500$  и  $\delta I = 0.0005$ , а для Рис.4 -  $T_{max} = 300$  и  $\delta I = 0.001$ . Устойчивость решений проверялась влиянием на ВАХ изменения параметров расчета, в частности, удвоения и уменьшения вдвое шага по времени  $\delta t$ . Во всех расчетах к базовому току добавлялся шум с амплитудой  $I_{noise} = 10^{-8}$ , генерируемый случайным образом. Для этого использовался генератор случайных чисел. Амплитуда шума нормировалась на величину критического тока  $I_c$ .

Как упоминалось выше, джозефсоновские переходы вместе с шунтирующими их емкостью  $C$  и индуктивностью  $L$  образуют колебательный контур, собственная частота которого определяется теперь не только этими величинами  $L$  и  $C$ , но и суммарной емкостью всех ДП. Следовательно, общая емкость системы определяется выражением  $\frac{C}{1+NC}$ , а собственная частота контура, нормированная на плазменную частоту, вычисляется по формуле

$$\omega_{rc} = \sqrt{\frac{1+NC}{LC}} \quad (3.6)$$

Как видно из полученной формулы, собственная частота колебаний образованного резонансного контура зависит от числа ДП в системе.

Обсудим вначале изменения на ВАХ системы связанных ДП, которые привносит параллельное соединение системы ДП с данными шунтирующими элементами  $L$  и  $C$ . Однопетлевые (при изменении тока от нуля до выбранного максимального значения и обратно до нуля) ВАХ, рассчитанные для случаев  $N = 1$  и  $N = 10$  на основе системы уравнений (3.4) при  $L = 1$  и  $C = 0.25$  показаны на Рис.3.2(a). ВАХ без учета шунтирования представлены на вставке. Они имеют стандартный вид с гистерезисом и ветвлением в случае  $N = 10$  (см. например, [64, 65]). ВАХ с LC-шунтированием демонстрируют ступеньки тока, отмеченные полыми стрелками.

Положение верхней ступеньки на ВАХ для одного ДП соответствует напряжению  $V = 2.236$ , что совпадает с собственной частотой образованного резонансного контура, рассчитанной при  $N = 1$ ,  $L = 1$  и  $C = 0.25$  по формуле (3.6), и подтверждает, что ступенька на ВАХ возникает в результате резонанса джозефсоновских осцилляций с собственными колебаниями резонансного контура  $\omega_j \approx \omega_{rc}$ . При изменении параметров контура, со-

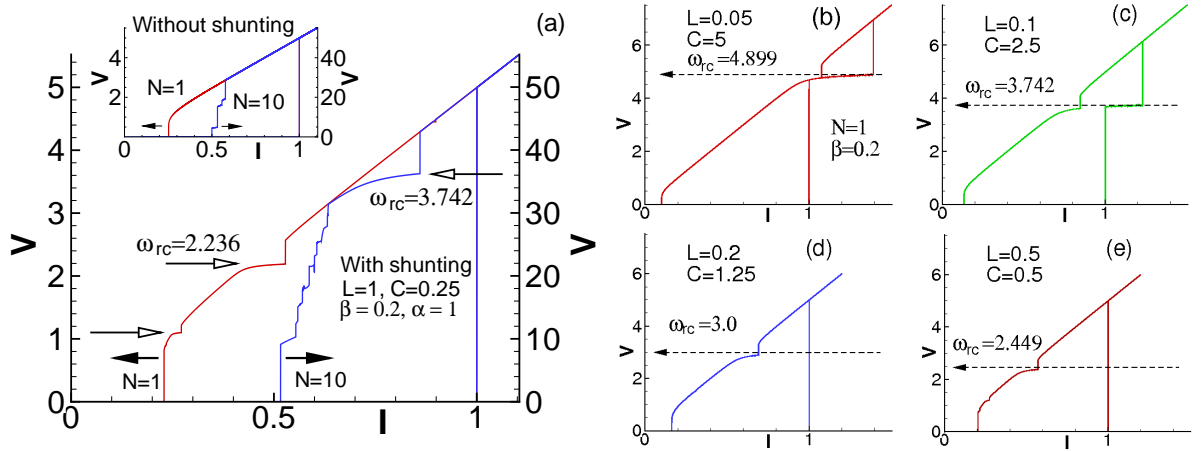


Рис. 3.2. (а) Влияние шунтирования на вольт-амперные характеристики для случаев  $N=1$  и  $N=10$ . На вставка показаны соответствующие ВАХ без шунтирования; (b-e) Демонстрация соответствия положения ступеньки на ВАХ частоте резонансного контура. Уменьшение частоты резонансного контура, определяемой параметрами  $L$  и  $C$ , приводит к смещению ступеньки вниз вдоль оси напряжений. Расчет проведен для одного ДП.

ответствующих уменьшению его собственной частоты, ступенька тока на ВАХ опускается по напряжению. Соответствие положения ступеньки собственной частоте резонансного контура продемонстрировано на Рис.3.2(b-e) для четырех значений частоты.

На ВАХ для системы из 10 ДП, представленной на Рис.3.2(a), ступенька наблюдается при напряжении  $V = 36.24$ , что соответствует джозефсоновской частоте  $\omega_J = V/N = 3.624$ . Расчет по формуле (3.6) дает близкое значение  $\omega_{rc} = 3.742$ . Разница связана с тем, что на самом деле на ВАХ возникает резонансные пики [26]. Изменение направления тока после выхода на ступеньку позволяет убедиться в этом. На Рис.3.3(a) приведены результаты расчета ВАХ для одного ДП с LC-шунтированием, полученные при уменьшении тока в гистерезисной области и последующем изменении его направления после выхода на соответствующую ступеньку тока в интервале  $(0.2 \div 1.2)$ . Мы видим, что ступеньки являются устойчивой стороной резонансного пика и его гармоник на ВАХ. Т.е., изменение направления тока при расчете позволяет восстановить вершину пика, возникающего при резонансе джозефсоновских осцилляций с колебаниями резонансного контура и его гармониками. Неустойчивая сторона основного резонансного пика показана пунктирной линией. В работе [34] устойчивая сторона

резонансного пика была названа “*rc* – ветвью” (от английского “resonance circuit”). На данном рисунке отражены ветви, соответствующие основному резонансу  $\omega_J = \omega_{rc} = 2.236$  и его гармоникам  $\omega_J = 2\omega_{rc} = 4.472$  и  $\omega_J = \omega_{rc}/2 = 1.118$ , полученные в результате такого изменения направления базового тока в каждом случае после прыжка на соответствующую ступеньку. На вставке к данному рисунку демонстрируется также проявление ветви, соответствующей резонансу  $\omega_J = 2\omega_{rc}/5 = 0.894$ .

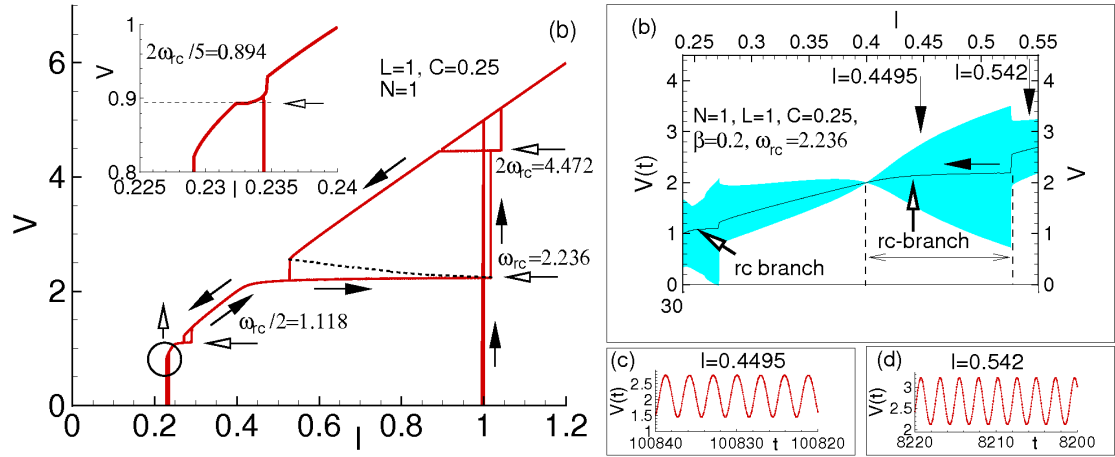


Рис. 3.3. (а) Демонстрация ветвей, соответствующих основному резонансу  $\omega_J = \omega_{rc}$  и трем гармоникам:  $\omega_J = 2\omega_{rc}$ ,  $\omega_J = \omega_{rc}/2$  и  $\omega_J = 2\omega_{rc}/5$ ; (б) Размах осцилляций напряжения в соответствующих точках ВАХ, рассчитанная при уменьшении базового тока.

Рассмотрим теперь, как возникновение ветви отражается на временной зависимости напряжения в ДП. Временная зависимость напряжения вместе с соответствующей частью ВАХ, полученная при уменьшении базового тока, приведена на Рис.3.3(б). Мы видим скачки в амплитуде осцилляций напряжения, соответствующие переходам на *rc*-ветвь и ее гармонику. Полые стрелки указывают их положение вдоль оси напряжений. Область *rc*-ветви вдоль оси базового тока обозначена пунктирными линиями. Обращение амплитуды в ноль, отмеченное также полый стрелкой, определяет край *rc*-ветви. Характер осцилляций напряжения в областях временной зависимости, указанных закрашенными стрелками, и соответствующих значениям тока  $I = 0.4495$  и  $I = 0.542$ , приведен на Рис.3.3(с,д). Он не отличается существенно от характерных джозефсоновских осцилляций в гистерезисной области.

### 3.3. Двойной резонанс в системе джозефсоновских переходов в области резонансной ветви

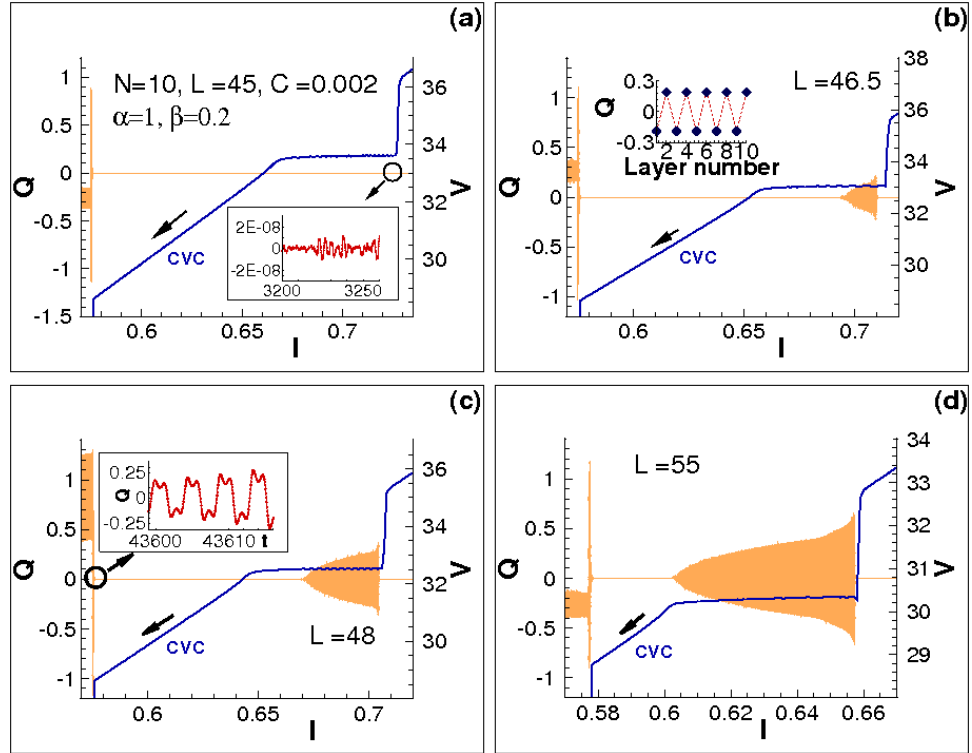


Рис. 3.4. Размах осцилляций заряда в сверхпроводящем слое в соответствующих точках ВАХ в области  $rc$ -ветви и в области переключения на внутренние ветви ВАХ при разных значениях  $L$ : (а)  $L = 45$ ; (б)  $L = 46.5$ ; (с)  $L = 48$ ; (д)  $L = 55$ .

В системе связанных ДП, в отличие от одного перехода, джозефсоновские осцилляции могут возбудить продольную плазменную волну с частотой  $\omega_p(k) = \omega_p \sqrt{1 + 2\alpha(1 - \cos(kd))}$ , где  $d$  - период структуры (сумма толщин сверхпроводящего и диэлектрического слоев) [13, 4, 65]. Как следует из этой формулы, частота продольной плазменной волны, возникающей при параметрическом резонансе ( $\omega_J = 2\omega_{LPW}$ ), определяется величиной плазменной частоты  $\omega_p$  (на обратную величину которой нормировано время), а также величинами параметра связи между ДП и волнового вектора  $k$ . В работах [13, 63] продемонстрировано возбуждение продольной плазменной волны, частота которой качественно описывается данной формулой. Детальные исследования временной зависимости электрического заряда на сверхпроводящих слоях и ее Фурье-анализ, позволяющий найти соответствующие частоты, проведены в работе [14]. Резонанс



джозефсоновских осцилляций с собственными колебаниями резонансного LC-контура также может спровоцировать такое возбуждение продольной плазменной волны. Т.е., в данном случае привести к условию двойного резонанса:  $\omega_J = \omega_{rc} = 2\omega_{LPW}$ , где  $\omega_{LPW}$  - частота продольной плазменной волны. Такая ситуация демонстрируется на Рис.3.4, где приведены размах осцилляций заряда в сверхпроводящем слое в соответствующих точках ВАХ при шунтирующей емкости  $C = 0.002$  и различных значениях шунтирующей индуктивности:  $L = 45$  (а),  $L = 46.5$  (b),  $L = 48$  (с) и  $L = 55$  (d). Случай (а) соответствует частоте контура  $\omega_{rc} = 3.367$ . Мы видим на рисунке характерную  $rc$ -ветвь, соответствующую данной частоте. На вставке демонстрируется, что электрический заряд на сверхпроводящих слоях в области  $rc$ -ветки появляется лишь на уровне шума ( $10^{-8}$ ). Другая картина возникает при значении  $L$ , близком к 46.5 ( $\omega_{rc} = 3.312$ ), что видно на Рис.3.4(b). Сразу после выхода на  $rc$ -ветку сверхпроводящие слои оказываются заряженными. Интервал по току, в котором наблюдается заряд на сверхпроводящих слоях, существенно меньше размера самой  $rc$ -ветви. При дальнейшем уменьшении  $\omega_{rc}$  (увеличение индуктивности, см. Рис.3.4(с)) наблюдается рост амплитуды заряда и увеличение интервала по току, соответствующему области "заряженной"  $rc$ -ветки. На Рис.3.4(d) приведена ВАХ и динамика электрического заряда на сверхпроводящем слое при  $L = 55$ , что соответствует  $\omega_{rc} = 3.045$ . В этом случае сверхпроводящие слои оказываются заряженными во всем интервале базового тока, соответствующего  $rc$ -ветке, от  $I = 0.658$  до значения  $I = 0.6$ .

Рассмотрим теперь, что происходит с временной зависимостью напряжения при уменьшении базового тока после прыжка на  $rc$ -ветвь. Зависимость  $V(t)$  и результат ее Фурье анализа при  $I = 0.72$  (перед переходом на  $rc$ -ветку) приведены на Рис.3.5 (а,b). Мы видим характерные осцилляции напряжения, соответствующие джозефсоновской частоте (пик амплитуды Фурье-компоненты приходится на частоту  $\omega/2\pi\omega_p = 0.57$ , т.е.,  $V = 0.57 * 2\pi * 10 = 35.81$ ). После перехода на  $rc$ -ветку динамика осцилляций напряжения меняется, а именно, возникает дополнительная частота. Соответствующие результаты представлены на Рис.3.5(с,d). Возникновение дополнительной частоты отражает факт появления электрического заряда на сверхпроводящих слоях. Характер осцилляций заряда при  $I = 0.70$  (на  $rc$ -ветке) и результат Фурье-анализа приведены на Рис.3.5(e,f). Зна-

чению  $I = 0.70$  соответствует напряжение  $V = 32.53$  и, соответственно, джозефсоновская частота  $\omega_J = 3.253$ . Наблюдаемый пик  $\omega/2\pi\omega_p = 0.259$  представляет частоту ППВ:  $\omega/\omega_p = 0.259 * 2\pi = 1.627$ , что находится в согласии с условием параметрического резонанса  $\omega_J = 2\omega_{LPW}$ . Распределение заряда вдоль системы ДП, демонстрирующее  $\pi$ -моду продольной плазменной волны с  $\lambda = 2d$ , показано на вставке Рис.3.4(b).

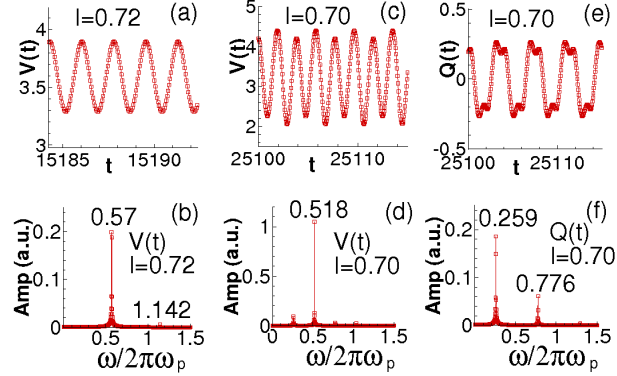


Рис. 3.5. (a, b) Временная зависимость напряжения  $V(t)$  и ее Фурье анализ при  $I = 0.72$  (перед переходом на  $rc$ -ветку), соответствующая Рис.3.4(c) при  $L = 48$ ; (c, d) То же самое при  $I = 0.70$  (после перехода, на  $rc$ -ветке); (e, f) Временная зависимость заряда  $Q(t)$  и ее Фурье анализ при  $I = 0.70$ .

Итак, в условиях резонанса джозефсоновских осцилляций с колебаниями LC-контура ( $\omega_J = \omega_{LC} = 3.253$ ), приводящего к появлению  $rc$ -ветки на ВАХ, происходит также рождение продольной плазменной волны. Этот факт характеризует резонанс джозефсоновских осцилляций с осцилляциями электрического заряда на S-слоях. Дополнительный параметрический резонанс, обусловленный образованным резонансным контуром, мы будем называть контурным параметрическим резонансом ( $rcPR$ ) в отличие от фундаментального параметрического резонанса ( $fPR$ ), наблюдаемого в отсутствии LC-контура. Таким образом, представленные результаты свидетельствуют о том, что в системе связанных ДП с LC-шунтированием возникает двойной резонанс, т. е. резонанс колебаний LC-контура, джозефсоновских осцилляций и осцилляций электрического заряда ППВ.

Как упоминалось выше, наряду с двойным резонансом в системе реализуется  $fPR$  в области переключения на внутренние ветки ВАХ. Для полноты картины на вставке к Рис.3.4(c) показаны осцилляции заряда на S-слое при  $fPR$ . Анализ характера осцилляций заряда при  $fPR$  показыва-

ет, что возникновение  $rcPR$  и двойного резонанса не изменяет условий для появления  $fPR$ . Возникает вопрос, что будет происходить при дальнейшем уменьшении частоты резонансного контура, когда  $rc$ -ветвь приближается по напряжению к точке переключения с верхней ветви ВАХ на внутренние, т.е., при приближении  $rcPR$  к  $fPR$ . Проведенные расчеты показывают, что при определенной частоте резонансного контура исчезает интервал по току (разделяющий  $rcPR$  и  $fPR$ ), в котором сверхпроводящие слои не заряжены. При этом  $fPR$  сохраняется, но переход с верхней ветви ВАХ на внутренние происходит теперь с  $rc$ -ветки.

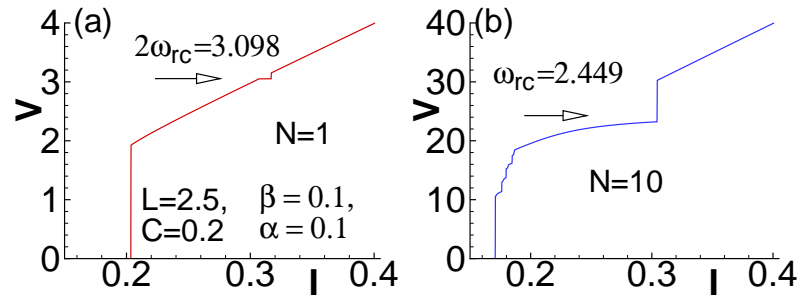


Рис. 3.6. Вольт-амперные характеристики для случаев  $N=1$  и  $N=10$ , рассчитанные при значениях параметров, соответствующих  $BSCCO$ .

Оценим возможность экспериментальной реализации исследованных эффектов при используемых в настоящее время параметрах резонансного контура  $L$  и  $C$ . Для оценки используем типичные значения параметров для  $BSCCO$  и рассчитаем необходимую емкость шунта при заданной величине индуктивности, а именно,  $L = 50pH$ . Рассмотрим образец с линейным размером в плоскости  $Cu - O$  в один микрон, т.е. площадью  $S = 1\mu m^2$ , в котором расстояние между сверхпроводящими слоями составляет  $d_I = 12 * 10^{-10}m$ , с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 25$ , параметром диссипации  $\beta = 0.1$ , параметром емкостной связи между ДП  $\alpha = 0.1$ , и плазменной частотой  $\omega_p = 0.5THz$ . При этих значениях параметров емкость ДП оказывается равной  $C_J = 0.2pF$ , и при реальной индуктивности  $L = 50pH$ , расчет безразмерной индуктивности, входящей в формулу (3.4), приводит к значению  $L = 2.5$ . Следовательно, для наблюдения  $rc$ -ветви на ВАХ при равенстве  $LC = 0.5$ , определяющем ее частоту согласно формуле (3.6), достаточно шунтирующая емкость  $C_{sh} = 0.04pF$ . ВАХ с  $N = 1$  и  $N = 10$  при этих значениях  $L$  и  $C$  приведены на Рис.3.6. Мы видим проявление  $rc$ -ветви на обоих ВАХ: на основной частоте резонанс-

ного контура в случае  $N = 10$ , и на удвоенной частоте в случае  $N = 1$ . Подчеркнем еще раз, что в отличии от результатов, представленных на Рис.3.2(а), данный расчет проводился при параметре диссипации  $\beta = 0.1$  и параметре емкостной связи между ДП  $\alpha = 0.1$ . Наблюдение  $rc$ -ветви в гистерезисной области ВАХ при больших значениях индуктивности приводит к необходимости использования меньших значений шунтирующей емкости, что может оказаться критичным для эксперимента. Некоторый простор в выборе значений  $L$  и  $C$  может обеспечить изменение площади ДП, плазменной частоты, числа ДП в системе, а также выбор слоистого сверхпроводника.

#### 3.4. Система джозефсоновских переходов, шунтированная LC-контуром под действием внешнего электромагнитного излучения

В этом параграфе, представлены результаты исследования воздействия внешнего электромагнитного излучения на свойства контурного параметрического резонанса ( $rcPR$ ) [37, 38, 41].

На Рис.3.7 приведена ВАХ стека с 10 ДП шунтированного LC элементами. ВАХ демонстрирует достаточно большую  $rc$ -ветку при  $V = 32.596$ , а также гармоники и субгармоники. Вставка к рисунку показывает увеличенную часть  $rc$ -ветвь, где наблюдается небольшой наклон. ВАХ того

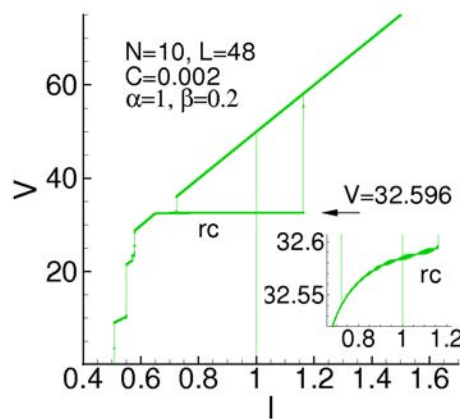


Рис. 3.7. ВАХ стека с 10 ДП шунтированного LC-элементами. На вставке показано увеличенная часть  $rc$ -ветки

же стека с шунтированием под действием внешнего излучения с частотой

$\omega = 3.2596$  и амплитудой  $A = 0.2$  представлена на Рис.3.8. Подобная картина была обнаружена в работе [26] в случае одиночного ДП и была названа “ступенька на ступеньке”.

Облучение уменьшает гистерезис ВАХ, так как мы не видим субгармоники, но вторая гармоника появляется при  $V = 65.110$ . При этом ступенька Шапиро образуется на rc-ветке, которая продемонстрирована на вставке к рисунку.

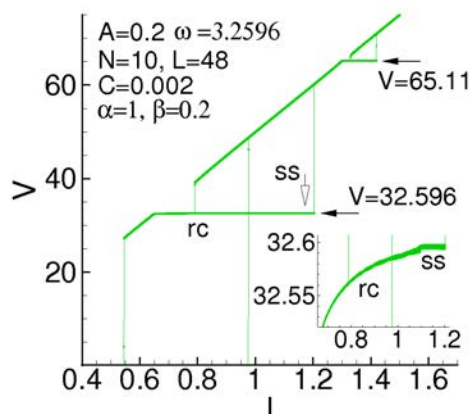


Рис. 3.8. ВАХ стека с 10 ДП шунтированного LC-элементами под воздействием внешнего излучения с частотой  $\omega = 3.2596$  и амплитудой  $A = 0.2$ . На вставке увеличенная часть rc-ветки, которая демонстрирует ступеньку Шапиро.

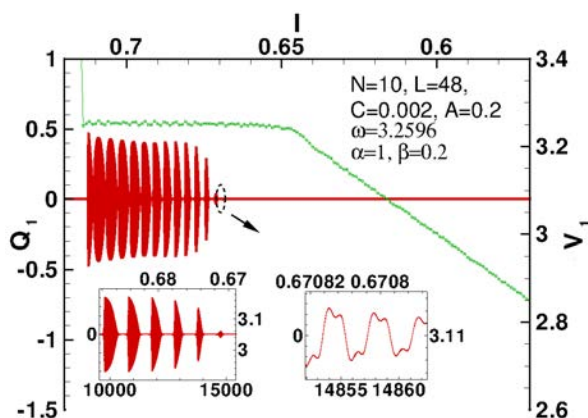


Рис. 3.9. Размах осцилляций заряда в соответствующих точках ВАХ для стека с 10 ДП под воздействием внешнего излучения. На вставке показано увеличенная часть динамики заряда.

Рис.3.9 показывает размах осцилляций заряда в сверхпроводящих слоях в соответствующих точках ВАХ рассчитанную в ходе уменьшения внешнего тока под действием электромагнитного излучения. Вставка к рисунку демонстрирует увеличенную часть динамики заряда. Как видно, на этом рисунке, под действием излучения амплитуда осцилляций заряда в сверхпроводящих слоях модулируется.

Мы предполагаем, что в интервале соответствующему концу гс-ветви выполняется условие для тройного резонанса, когда четыре частоты совпадают: Джозефсоновская, внешнего излучения, резонансного контура и удвоенная частота продольной плазменной волны.

## ГЛАВА 4. ФАЗОВАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ДЛИННЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДОВ С ИНДУКТИВНОЙ И ЕМКОСТНОЙ СВЯЗЬЮ

В настоящей главе в рамках обобщенной модели, учитывающей как индуктивную, так и емкостную связь, а также диффузионный ток, проведено подробное исследование ВАХ и пространственно-временных зависимостей электрического заряда в сверхпроводящих слоях и магнитного поля во всех ДП [35, 36]. Показана возможность возникновения продольной плазменной волны и реализации параметрического резонанса в системе длинных ДП. В области параметрического резонанса, начиная с определенной длины джозефсоновского перехода, наблюдается сосуществование продольной плазменной волны и флюксонных состояний. Это свидетельствует о возникновении нового уникального коллективного возбуждения в системе связанных джозефсоновских переходов, а именно, композитного состояния джозефсоновского тока, электрического поля и вихревого магнитного поля.

### 4.1. Численное моделирование фазовой динамики системы длинных джозефсоновских переходов

Мы обобщили модель предложенную Сакаем и Мачидой с добавлением диффузионного тока. Система уравнений для разностей фаз и напряжений во всех ДП стека, которая определяет фазовую динамику системы длинных ДП записывается в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} = D_c V_l + s_c V_{l+1} + s_c V_{l-1} \\ \frac{\partial V_l}{\partial t} = \sum_{n=1}^N \left( \mathcal{L}_{l,n}^{-1} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} \right) - \sin \varphi_l - \beta \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} + I \end{cases} \quad (4.1)$$

В системе уравнений (4.1) время нормировано на плазменную частоту ДП  $\omega_p = \sqrt{8\pi d_I e j_c / (\hbar \varepsilon)}$ , напряжение – на  $V_0 = \hbar \omega_p / (2e)$ , координата  $x$  –

на джозефсоновскую глубину проникновения  $\lambda_J = \sqrt{\hbar c^2 / (8\pi e j_c D_\xi)}$ , ток – на критический ток  $j_c$ , магнитное поле  $B$  – на  $B_0 = \hbar c / (2e D_\xi \lambda_J)$ . Здесь  $\beta = \sigma V_0 / (d_I j_c)$  – параметр диссипации. Поскольку  $d_s / \lambda_e$  мало, разлагая  $\coth(d_s / \lambda_e)$  и  $\sinh(d_s / \lambda_e)$  в ряд Тейлора, можно написать выражение для эффективной электрической толщины ДП и параметра емкостной связи в виде  $D_c = 1 + 2\lambda_e^2 / (d_I d_s)$  и  $s_c = -\lambda_e^2 / (d_I d_s)$ , соответственно.

Система уравнений (4.1) решается численно с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка. Для вычисления ВАХ, проводится усреднение  $V_l(x, t)$  по координате и времени. На каждом шаге по времени проводится интегрирование напряжения по координате по методу Симпсона и усреднение  $\bar{V}(t) = (1/L) \int_0^L V_l(x, t) dx$ . Напряжение усредняется по времени с использованием формулы  $V = 1 / (T_{max} - T_{min}) \int_{T_{min}}^{T_{max}} \bar{V}(t) dt$ ; при этом используется метод прямоугольников. Величина внутреннего магнитного поля в ДП определяется производной разности фаз по координате

$$\frac{\partial \varphi_l}{\partial x} = B_l + S B_{l+1} + S B_{l-1}. \quad (4.2)$$

В выражении (4.2) магнитное поле  $B$  нормировано на  $B_0 = \hbar c / (2e D_\xi \lambda_J)$ .

Плотность электрического заряда в сверхпроводящих слоях вычисляется как разность напряжений в соседних ДП, т.е.

$$Q_l = Q_0 (V_{l+1} - V_l), \quad (4.3)$$

где  $Q_0 = \varepsilon V_0 / (4\pi d_s d_I)$ .

Для решение системы уравнений (4.1) необходимо дискретизировать производную второго порядка.

Разбив интервал  $0 < x < L$  на сетку с шагом  $\Delta x$ , аппроксимируем производную второго порядка разности фаз по координате в уравнении (4.1) получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi_l^1}{\partial x^2} = \frac{2(\varphi_l^2 - \varphi_l^1)}{\Delta x^2} - \frac{2B_{ext}}{\Delta x}; \quad \frac{\partial^2 \varphi_l^m}{\partial x^2} = \frac{\varphi_l^{m+1} - 2\varphi_l^m + \varphi_l^{m-1}}{\Delta x^2};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_l^M}{\partial x^2} = \frac{2(\varphi_l^{M-1} - \varphi_l^M)}{\Delta x^2} + \frac{2B_{ext}}{\Delta x}$$

где  $B_{ext}$  внешнее магнитное поля и  $\varphi_l^m = \varphi_l(x_m)$  ( $m$  – индекс по  $x$ ,  $1 \leq m \leq M$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_M = L$ ).



## 4.2. Вольт-амперная характеристика одиночного длинного джозефсоновского перехода и ступеньки нулевого поля

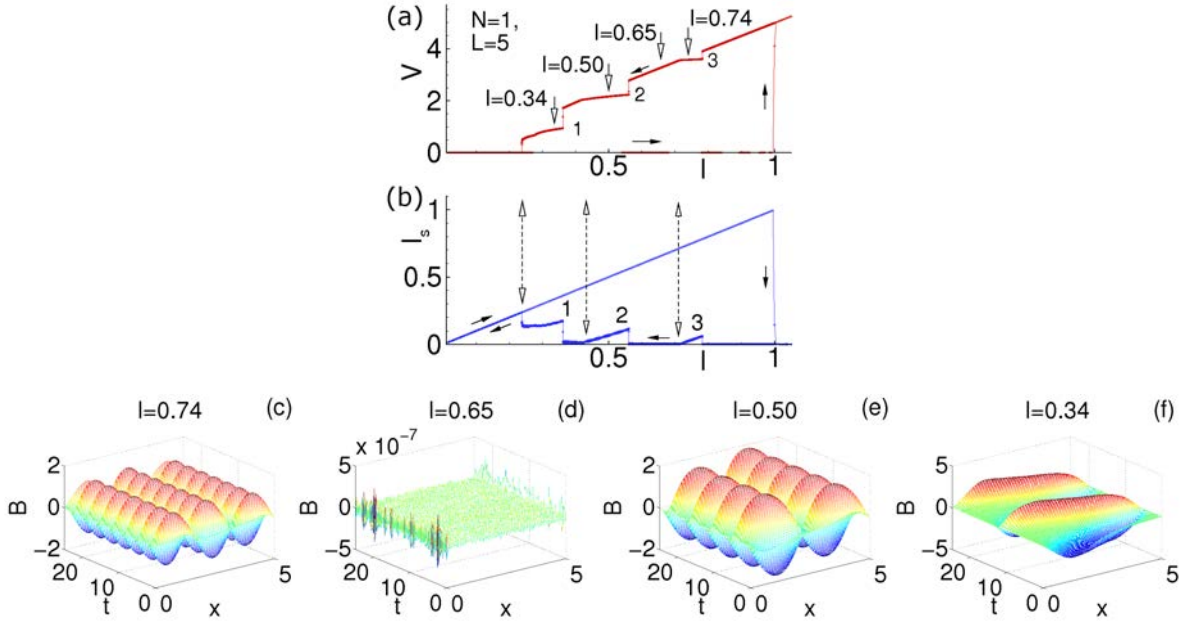


Рис. 4.1. (a) ВАХ ДП длиной  $L = 5$ ; (b) Зависимость среднего значения сверхпроводящего тока  $I_s$  от величины тока  $I$  того же ДП; (c) Пространственно–временная зависимость магнитного поля в ДП, соответствующая различным участкам ВАХ при  $I = 0.74$ ; (d)  $I = 0.65$ ; (e)  $I = 0.50$ ; (f)  $I = 0.34$ .

Для выделения эффектов, обусловленных системой связанных ДП, мы вначале рассмотрим вкратце свойства *одиночного ДП*. На Рис. 4.1(a) приведена однопетлевая ВАХ одиночного ДП длиной  $L = 5$ . Заштрихованными стрелками указано направление изменения тока при одном его цикле изменения от нуля до  $I_{max} = 1.1$  и обратно до нуля. Мы видим, что при уменьшении тока на ВАХ имеется три ступеньки нулевого поля, которые отмечены цифрами 1, 2, 3. Происхождение этих ступенек связано с образованием в ДП флюксонных состояний [31]. Скорость флюксона  $u$  определяется выражением [32]  $u = [1 + (4\beta/\pi I)^2]^{-1/2}$ . Она нормирована на скорость Свихарта  $c_j = \omega_p \lambda_J$ . При выполнении условия  $u = 1$ , периодическое движение флюксона приводит к среднему значению напряжения, выражаемому в виде

$$V_{ZFS} = \frac{2\pi n u}{L} \quad (4.4)$$

и образованию соответствующей ступеньки на ВАХ. Появление  $n$  флюксонов в ДП приводит к возникновению  $n$  ступенек на ВАХ [31, 32, 66, 46]. В рассчитанной нами ВАХ положение ступенек по напряжению хорошо согласуется с теоретическими оценками, проведенными по формуле (4.4).

Возникновение флюксонных состояний, являющихся вихрями сверхпроводящего тока, приводит, естественно, к резкому возрастанию среднего значения сверхпроводящего тока, и соответственно, к резкому падению напряжения перед переходом на ступеньки. На Рис. 4.1(b) двойными стрелками продемонстрировано соответствие зависимости среднего значения сверхпроводящего тока от величины полного тока и ВАХ.

Для непосредственной демонстрации флюксонных состояний нами приведена на Рис.4.1 пространственно–временная зависимость магнитного поля в ДП при значениях полного тока, соответствующих ступенькам на ВАХ. В области третьей ступеньки при  $I = 0.74$  эта зависимость приведена на Рис. 4.1(c). Она демонстрирует образование трехфлюксонного состояния в интервале тока, соответствующего третьей ступеньке на ВАХ. Вне области ступенек, например, при  $I = 0.65$  (Рис. 4.1(d)), магнитное поле в ДП флуктуирует на уровне шума. Двухфлюксонное состояние при  $I = 0.5$ , соответствующее второй ступеньке, показано на Рис.4.1(e). На Рис. 4.1(f) показана пространственно–временная зависимость магнитного поля в области первой ступеньки при  $I = 0.45$ , соответствующая состоянию с одним флюксоном.

### 4.3. Параметрический резонанс в системе длинных джозефсоновских переходов

Расчеты проведены для стека с 10 ДП при  $\beta = 0.2$  и периодических граничных условиях в нулевом внешнем магнитном поле. При расчетах ток увеличивается от минимального значения  $I = 0.01$  до  $I_{max} = 1.1$ , и обратно, уменьшается до нуля. К току добавляется шум с амплитудой  $\delta I = \pm 10^{-8}$ . Шаг по координате равен  $\Delta x = 0.05$ . Временной домен для усреднения составляет 200 с параметром дискретизации  $\Delta t = \Delta x/4$ . Шаг по току равен 0.005, а в интервале  $[0.1 \div 0.95]$  он составляет 0.0001.

Перейдем теперь к исследованию системы ДП с учетом как емкостной, так и индуктивной связи между ДП. На Рис.4.2(a) приведена ВАХ

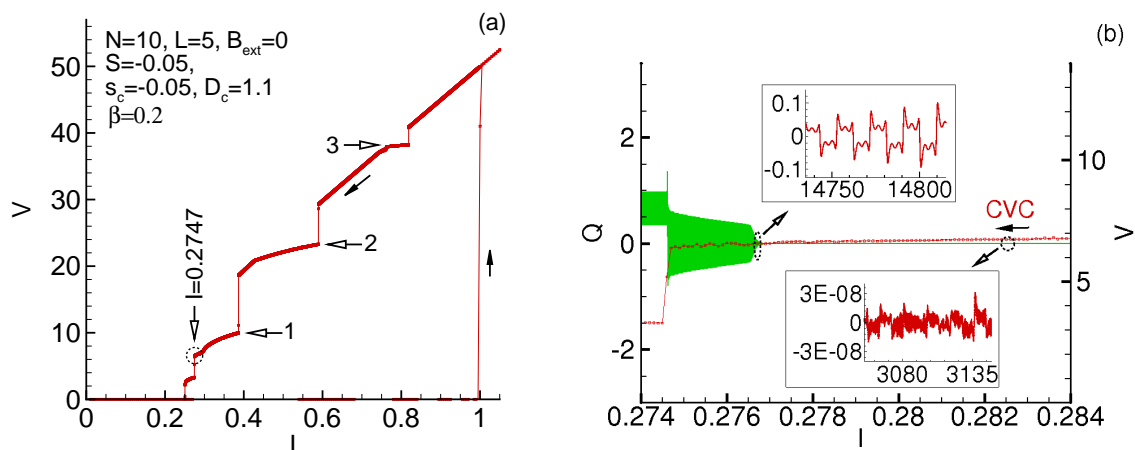


Рис. 4.2. (a) ВАХ системы с десятью ДП длиной  $L = 5$  при  $s_c = -0.05$ ,  $D_c = 1.1$ ,  $S = -0.05$ ; (b) Размах осцилляций электрического заряда, усредненного по координате в первом сверхпроводящем слое, в соответствующих точках ВАХ в области параметрического резонанса при тех же значениях параметров модели. Вставки демонстрируют характер осцилляций заряда.

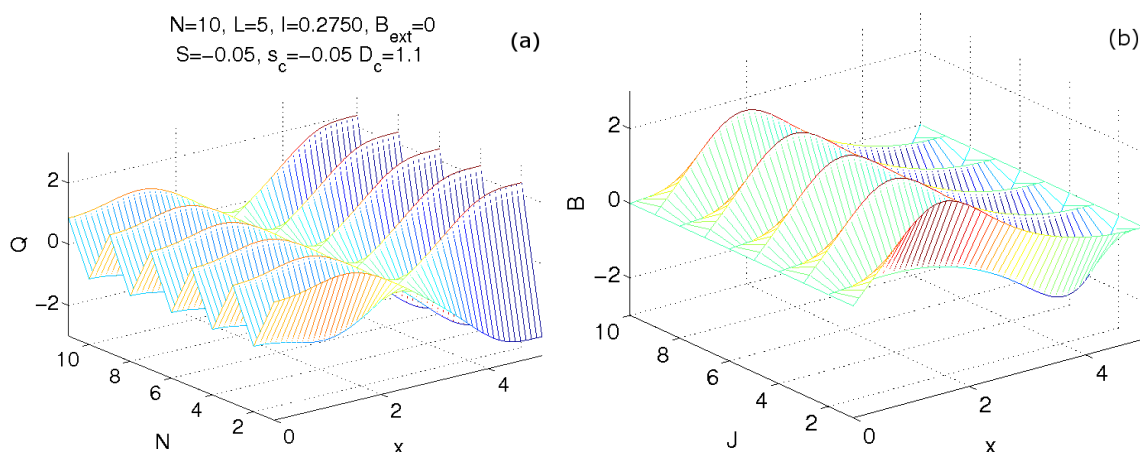


Рис. 4.3. (a) Пространственное распределение электрического заряда в сверхпроводящих слоях ( $N$ –номер слоя) в фиксированный момент времени в области параметрического резонанса при  $I=0.2750$  для стека с 10 ДП при тех же значениях параметров, что и на Рис.2; (b) То же для магнитного поля в ДП стека ( $J$  номер ДП).

десяти ДП длиной  $L = 5$  с параметрами индуктивной связи  $S = -0.05$  и емкостной связи  $D_c = 1.1$ ,  $s_c = -0.05$ . Чтобы проследить детально влияние индуктивной связи, мы выбрали значение параметра  $S = -0.05$ , что соответствует слабой индуктивной связи между ДП.

Как и в случае одиночного ДП, на ВАХ наблюдаются три ступеньки

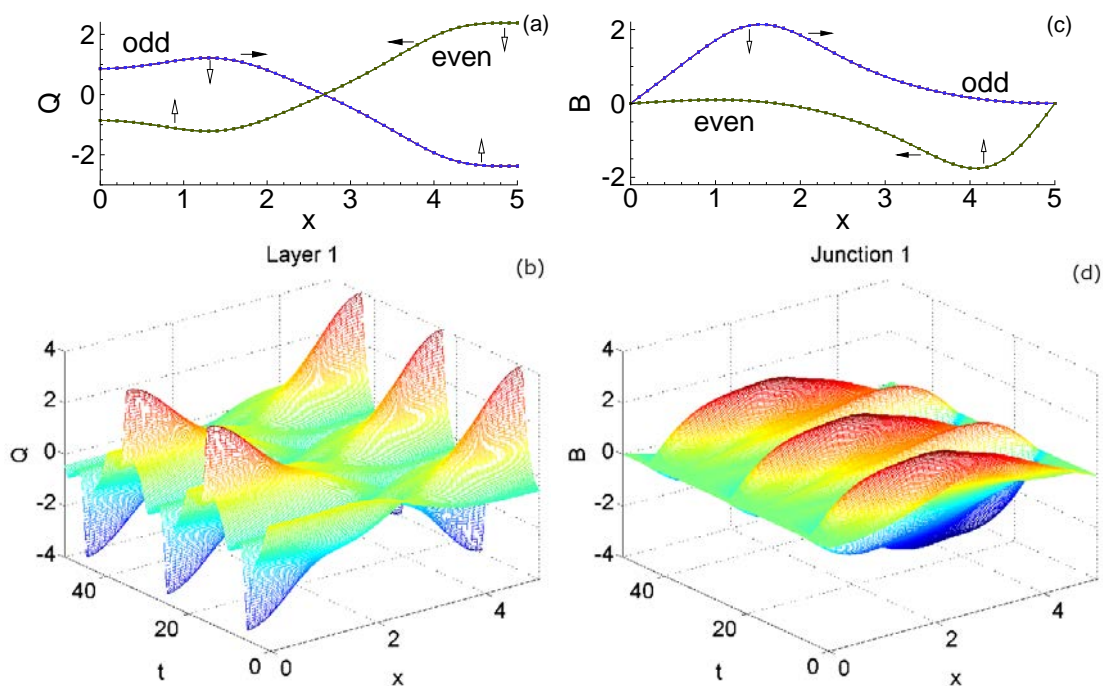


Рис. 4.4. (а) Пространственное распределение электрического заряда в четных и нечетных сверхпроводящих слоях в фиксированный момент времени. Вертикальные стрелки указывают направление изменения заряда, а горизонтальные – направление движения флюксона; (б) Динамика пространственного распределения заряда в первом сверхпроводящем слое; (с) Пространственное распределение магнитного поля в четных и нечетных ДП в фиксированный момент времени. Роль стрелок аналогична (а); (д) Динамика пространственного распределения магнитного поля в первом ДП стека.

нулевого поля. Они указаны горизонтальными полыми стрелками и отмечены числами 1,2,3. Известно [13], что фундаментальный параметрический резонанс в системе коротких ДП соответствует области точки излома на верхней ветви ВАХ (все ДП находятся во вращательном ( $R$ ) состоянии ( $\langle d\varphi/dt \rangle = const$ )), после чего происходит переключение одного или нескольких ДП в осциллирующее ( $O$ ) состояние ( $\langle d\varphi/dt \rangle = 0$ ). Поэтому, в первую очередь, следует проанализировать динамику электрического заряда в сверхпроводящих слоях именно в этой области переключения ДП. Ступеньки нулевого поля принадлежат верхней ветви ВАХ, так как они соответствуют  $R$ -состояниям ДП. Как показывает анализ распределения среднего значения производной по времени от разности фаз в каждом ДП (или вдоль стека), переключение с верхней ветви ВАХ происходит при

$I = 0.2747$ , как это указано вертикальной полрой стрелкой на Рис.4.2(a).

Размах осцилляций заряда усредненного по координате в первом сверхпроводящем слое в соответствующих точках ВАХ приведена на Рис.4.2(b). Как и в случае коротких ДП, при приближении к точке переключения наблюдается рост амплитуды осцилляций электрического заряда в сверхпроводящих слоях. Это указывает на наличие резонанса. Детальный анализ расчетных данных подтверждает, что в этой области реализуется параметрический резонанс  $\omega_J = 2\omega_{LPW}$  и происходит возбуждение ППВ вдоль стека ДП. Верхняя вставка к Рис.4.2(b) демонстрирует характер осцилляций в области параметрического резонанса. Нижняя вставка к Рис.4.2(b) показывает, что вдали от области параметрического резонанса заряд осциллирует на уровне шума. В отличие от случая системы коротких ДП [13], область параметрического резонанса здесь значительно шире по току. Кроме того, параметрический резонанс реализуется при меньшем напряжении  $V_{LPW} = 6.6388$ , т.е., частота возбуждаемой ППВ ниже, чем в случае коротких ДП.

Одним из основных результатов настоящего параграфа является предсказание сосуществования флюксонного состояния и ППВ в стеке ДП. Для демонстрации этого факта нами рассчитаны пространство–временные зависимости заряда в сверхпроводящих слоях и магнитного поля в ДП системы. Распределение заряда вдоль стека и вдоль пространственной координаты  $x$  при значении приложенного тока  $I = 0.2750$  в фиксированный момент времени представлено на Рис.4.3(a). Мы видим наличие вдоль стека ДП ППВ с длиной волны  $\lambda = 2$  ( $\lambda$  нормирована на период решетки  $d = d_I + d_s$ ). Распределение заряда оказывается неоднородным вдоль координаты во всех ДП системы, что связано с возбуждением флюксонных (антифлюксонных) состояний. Этот вывод подтверждает распределение магнитного поля в ДП вдоль стека и вдоль координаты  $x$ , приведенное на Рис.4.3(b) при тех же параметрах модели. Данное распределение демонстрирует наличие флюксона (антифлюксона) в каждом ДП стека.

Рассмотрим более детально динамику ППВ и флюксонных состояний в системе длинных ДП. Рис.4.4(a) демонстрирует одинаковое распределение заряда вдоль координаты  $x$  в фиксированный момент времени во всех четных и нечетных сверхпроводящих слоях, соответственно. Вертикальные стрелки указывают направление изменения значения заряда, а гори-

горизонтальные – направление движения флюксонов. Неоднородность заряда вдоль координаты  $x$  обусловлена возникновением флюксонных состояний в ДП. Рис.4.4(b) иллюстрирует пространственно–временную зависимость заряда в первом сверхпроводящем слое. На этом рисунке хорошо просматривается устойчивая динамика осцилляций заряда. Распределение внутреннего магнитного поля вдоль координаты  $x$  во всех ДП в фиксированный момент времени, демонстрирующее однофлюксонные состояния, приведено на Рис.4.4(c). Здесь также горизонтальные стрелки указывают направление движения флюксонов, а вертикальные – изменение магнитного поля. Поскольку в этой области в системе образуется ППВ с волновым числом  $\pi/d$  ( $\pi$  – мода), флюксонные состояния в соседних (четных и нечетных) ДП оказываются противоположными друг другу. На Рис.4.4(d) представлена пространственно–временная зависимость магнитного поля в первом ДП, демонстрирующая устойчивую динамику флюксонного состояния. В остальных ДП наблюдаются аналогичное поведение. Приведенные результаты подтверждают возможность реализации параметрического резонанса в системе длинных ДП, который возникает в состоянии, соответствующем флюксонной ветви.

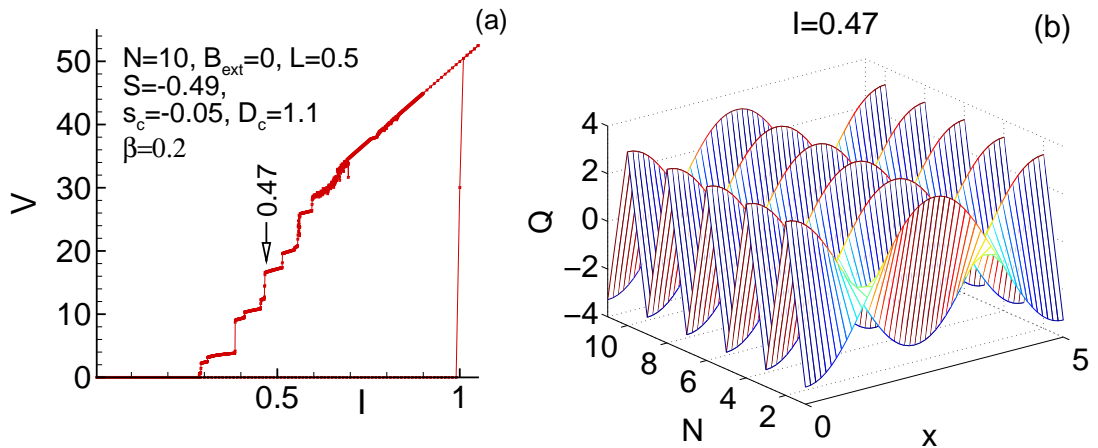


Рис. 4.5. Рис.5. (a) ВАХ системы с десятью ДП длиной  $L = 5$  при  $s_c = -0.05$ ,  $D_c = 1.1$ ,  $S = -0.49$ ; (b) Пространственное распределение электрического заряда в сверхпроводящих слоях при  $I = 0.47$  в фиксированный момент времени в области параметрического резонанса для стека с 10 ДП при тех же значениях параметров, что и в (a).

Обсудим вкратце возможность экспериментальной реализации исследованных эффектов. Для этого рассчитаем ВАХ и пространственное рас-

пределение электрического заряда при величине индуктивной связи, близкой к экспериментальному значению. Экспериментальное значение параметра индуктивной связи в слоистых сверхпроводниках типа BSCCO близко к величине  $S = -0.49$  [67]. Значение параметра емкостной связи в этих материалах также соответствует выбранной нами величине  $s_c = -0.05$  [49]. ВАХ при этих значениях параметров связи приведена на Рис.4.5(а). В отличие от результата, представленного на Рис.4.2(а), в данном случае ВАХ демонстрирует интенсивное ветвление в гистерезисной области. Сильная индуктивная связь приводит к тому, что в разных ДП образуется разное количество флюксонов, что вызывает дополнительное ветвление ВАХ. Отметим, что в отсутствие индуктивной связи ВАХ системы соответствует ВАХ одиночного перехода: во всех ДП образуются одинаковые флюксонные состояния. При слабой индуктивной связи в каждом ДП образуется одинаковое количество флюксонов с разной динамикой, т.е. с противоположной фазой. Анализ среднего значения производной по времени от разности фаз во всех ДП и временной зависимости заряда во всех сверхпроводящих слоях показал, что переключение части ДП из R-состояние в O-состояние происходит при  $I = 0.466$ . Таким образом, ветвление ВАХ при значениях тока через стек ДП  $I > 0.466$  связано с возникновением флюксонных состояний (ступеней нулевого поля), тогда как ветви на ВАХ при  $I < 0.466$  обусловлены как переключениями ДП стека из вращательного состояния в осциллирующее, так и флюксонными состояниями.

Параметрический резонанс и связанный с этим рост амплитуды заряда в сверхпроводящих слоях начинается при  $I = 0.47$ , что указано стрелкой на Рис.4.5(а). Пространственное распределение заряда в фиксированный момент времени, представленное на Рис.4.5(б), демонстрирует наличие ППВ с длиной  $\lambda = 2$  вдоль стека ДП. Неоднородное распределение заряда вдоль координаты  $x$  обусловлено образованием двухфлюксонного (флюксон–антифлюксон) состояния. Таким образом, при значении параметра индуктивной связи, близком к экспериментальному, ситуация не отличается от представленной на Рис.4.3. Приведенные результаты показывают возможность реализации в системе ДП состояния, соответствующего сосуществованию в системе как флюксонов, так и ППВ. Как отмечалось во Введении, сама по себе ППВ представляет собой композитное образование, состоящее из джозефсоновского тока и электрического поля [68]. Мы ви-

дим, что учет длины ДП приводит к возможности возникновения в системе связанных ДП нового коллективного возбуждения, объединяющего свойства джозефсоновского тока, электрического поля и вихревого магнитного поля.

#### 4.4. Влияние индуктивной и емкостной связи на вольт-амперную характеристику системы длинных джозефсоновских переходов

В этом параграфе мы обсуждаем влияние индуктивной и емкостной связи на особенности ВАХ в рамках модели предложенной Мачидой и Сакай [49]. Как отмечалось в первой главе в рамках этой модели система длинных ДП описывается системой уравнением 1.12

Вычисления проводились для  $\beta = 0.2$  и  $V_{ext} = 0$ . Система уравнений (1.12) методом Рунге–Кутты во временном интервале  $[0, 300]$  с шагом по времени  $\Delta t = 0.025$  и по координате  $\Delta x = 4\Delta t$ . В процессе расчета базовый ток увеличивался от  $I = 0.01$  до  $I_{max} = 1.1$  с шагом  $\Delta I = 0.005$  и затем уменьшался обратно до  $I_{min} = 0$ . В интервале  $I = 0.2 \div 1$  шаг по току составлял  $\Delta I = 0.0001$ . К току добавлялся шум с амплитудой  $\delta I = \pm 10^{-8}$ .

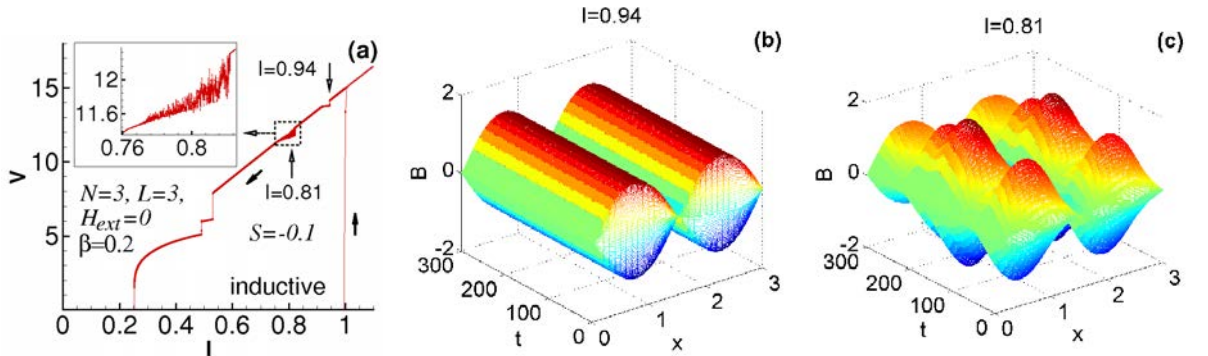


Рис. 4.6. (а) ВАХ стека с  $N = 3$  ДП с учетом индуктивной связи при  $L = 3$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $H_{ext} = 0$ ,  $S = -0.1$ ; (б) Пространственно-временная зависимость магнитного поля  $H(t, x)$  в первом ДП при  $I = 0.9$ ; (с) Тоже самое что на (б) при  $I = 0.81$ .

На Рис.4.6 (а) представлена ВАХ стека с 3 ДП длиной  $L = 3$  с учетом только индуктивной связи с параметром связи  $S = -0.1$ . В интервале базового тока  $0.9164 < I < 0.9443$  образуется дополнительная ступенька нуле-



вого поля, которая не наблюдалась в случае одиночного длинного ДП [36]. Рис.4.6 (b) демонстрирует пространственно–временную зависимость магнитного поля при  $I = 0.94$ , т.е. внутри интервала дополнительной ступеньки нулевого поля. Мы наблюдаем, что в этом интервале образуется двух-флюксонное состояние. В интервале базового тока  $0.77 < I < 0.822$  ВАХ демонстрирует хаотическое поведение, в то время как в случае одиночного перехода подобное поведение ВАХ не наблюдалось. Мы предполагаем, что это связано с хаотическим поведением флюксонов. (см. Рис.4.6 (c)).

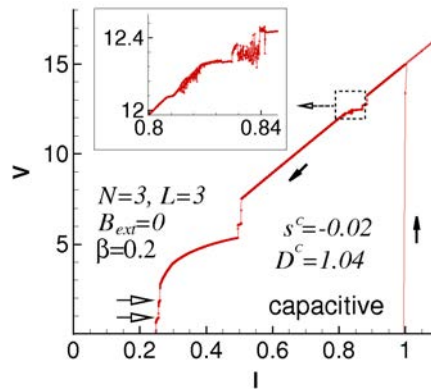


Рис. 4.7. ВАХ стека с  $N = 3$  ДП с учетом емкостной связи при  $L = 3$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $H_{ext} = 0$ ,  $s^C = -0.02$ ,  $D^C = 1.04$ .

На Рис.4.7 показано ВАХ стека с 3 ДП длиной  $L = 3$  с учетом только емкостной связи между ДП с параметром связи  $s^C = -0.02$ ,  $D^C = 1.04$ . В этом случае, как и в случае с индуктивной связью ВАХ демонстрирует хаотическое поведение.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построение модели, обеспечивающей адекватное описание системы связанных ДП в слоистых ВТСП, является одной из актуальных проблем современной физики сверхпроводимости. Экспериментальные исследования приводят к широкому многообразию ВАХ, требующему детального анализа всех наблюдаемых особенностей. Проведенные нами исследования в рамках двух моделей с емкостной связью между ДП (ССJJ и ССJJ+DC) позволили выявить важную роль диффузионного тока в формировании вольт-амперных характеристик системы связанных джозефсоновских переходов. Показано, что учет диффузионного тока в ССJJ+DC модели препятствует ветвлению ВАХ при  $I = I_c$  и приводит к непосредственному переключению системы из состояния с нулевым напряжением в состояние, в котором все ДП находятся в вращательном состоянии, что соответствует верхней ветви ВАХ. Такие переключения обычно и наблюдаются в эксперименте. Продемонстрировано также, что диффузионный ток играет важную роль в области гистерезиса, где он обеспечивает более узкую область ветвления в сравнении с другими моделями и приводит к большей величине тока возврата, что также согласуется с экспериментальными данными. Показано, что использование усредненных по временному домену токов является эффективным методом исследования и позволяет прояснить механизм ветвления ВАХ в гистерезисной области.

Проведенные исследования ставят ряд новых задач. В частности, гипотеза о сокращении области ветвления в гистерезисной части ВАХ при наличии разнонаправленного диффузионного тока в различных ДП стека требует своего обоснования. Особый интерес вызывает разработка механизма перехода (переключения) из сверхпроводящего в резистивное состояние при  $I = I_c$ , связанного с интенсивно исследуемыми в настоящее время эффектом макроскопического квантования в джозефсоновских структурах и квантовыми битами информации.

Нами показана возможность возникновения в системе связанных ДП с  $LC$ -шунтированием дополнительного параметрического резонанса, обу-

словленного образованным резонансным контуром. Возникает двойной резонанс, причем резонанс джозефсоновских осцилляций и колебаний LC-контра служит триггером для возбуждения продольной плазменной волны. При этом фундаментальный параметрический резонанс в области перехода на внутренние ветви ВАХ сохраняется.

Отметим также, что нами приведены результаты исследования резонансных свойств, соответствующих верхней ветке ВАХ, когда все ДП находятся во вращательном (резистивном) состоянии. Определенный интерес вызывают эффекты, соответствующие внутренним ветвям ВАХ, когда одна часть джозефсоновских переходов находится во вращательном, а другая часть - в осциллирующем состоянии. Эти эффекты важны при исследовании когерентного излучения из состояний, соответствующих внутренним ветвям ВАХ, т.к. на них может быть основана перестройка частоты генерируемого электромагнитного излучения.

Проведенные исследования фазовой динамики системы длинных джозефсоновских переходов с индуктивной и емкостной связью, ВАХ и пространственно-временных зависимостей заряда в сверхпроводящих слоях показывают возможность возникновения продольной плазменной волны, а также параметрического резонанса при условии  $\omega_J = 2\omega_{LPW}$ . Важным является тот факт, что увеличение длины джозефсоновских переходов приводит к образованию продольной плазменной волны в интервале тока, соответствующего ступеньке нулевого поля. При этом наблюдается сосуществование продольной плазменной волны и флюксоновых состояний. Этот факт можно интерпретировать как образование нового коллективного возбуждения, представляющего собой композитное состояние продольной плазменной волны и вихревого магнитного поля. Частота продольной плазменной волны меняется в зависимости от положения ступеньки нулевого поля на вольт-амперной характеристике. Эти результаты ставят ряд новых задач для экспериментальных исследований, в частности, обнаружение и исследование особенностей данного коллективного образования, объединяющего свойства джозефсоновского тока, электрического и магнитного полей в системе связанных джозефсоновских переходов. Детальные исследования коллективных возбуждений в слоистых сверхпроводниках будут способствовать решению проблемы синхронизации джозефсоновских осцилляций в разных джозефсоновских переходах стека, а также в разных

стеках на одной подложке из слоистого сверхпроводника, что является основной проблемой увеличения мощности когерентного электромагнитного излучения из стека внутренних джозефсоновских переходов в высокотемпературных сверхпроводниках [69].

Сформулируем в заключение основные положения и результаты диссертации.

- ① Проведено подробное сравнение моделей системы связанных Джозефсоновских переходов без учета и с учетом дополнительного полевого взаимодействия джозефсоновских переходов выражающегося в возникновении диффузионного тока. Показано, что учет диффузионного тока необходим для правильного описания характера и динамики системы связанных джозефсоновских переходов на основе высокотемпературных сверхпроводников. В частности, учет диффузионного тока в системе связанных джозефсоновских переходов приводит к сужению гистерезисной области вольт–амперной характеристики и подавляет ее ветвление вблизи критического тока, что согласуется с экспериментальными данными.
- ② Показана возможность возникновения в системе связанных джозефсоновских переходов с  $LC$ -шунтированием дополнительного параметрического резонанса, обусловленного образованным резонансным контуром. Продемонстрировано возникновение двойного резонанса, при котором резонанс джозефсоновских осцилляций и колебаний  $LC$ -контра служит триггером для возбуждения продольной плазменной волны. При этом фундаментальный параметрический резонанс в области перехода на внутренние ветви вольт–амперной характеристики сохраняется.
- ③ Показана возможность реализации параметрического резонанса в системе длинных джозефсоновских переходов, для которых длина перехода больше джозефсоновской глубины проникновения. В области параметрического резонанса наблюдается сосуществование продольной плазменной волны и флюксонных состояний. Данный факт интерпретируется как образование нового коллективного возбуждения, представляющего собой композитное состояние продольной плазменной волны и вихревого магнитного поля.

## Благодарности

Эта работа была выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №12-02-90901, 13-02-90905, молодежных грантов ОИЯИ №12-302-03, 13-302-08, а также грантов Гейзенберг-Ландау 2012-2013. Выражаю искреннюю благодарность своему научному руководителю Ю.М. Шукринову за помощь и заботу на всех этапах выполнения диссертации, директору физико-технического института им. С.У. Умарова АН РТ Х.Х. Муминову за поддержку и заботу. Хотел бы также выразит искреннюю благодарность и признательность за создание прекрасных условий для работы руководству Объединенного института ядерных исследований и Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, в том числе В.А. Матвееву, Д.В. Каманину, В.В. Воронову, Д.В. Ширкову, А.Т. Филиппову, А.П. Исаеву, А.Б. Арбузову, С.Н. Неделько, руководителям тем и секторов В.А.Осипову, Е.А. Кочетову, Н.М. Плакиде, В.Б.Приезжеву, коллегам и соавторам П. Зайделю, В. Навроцки, А. Плесенику, М. Грайцару, А. Бота, А. Ирие, Е.В. Земляной, И. Сархадову, О. Андреевой, К.В. Куликову, С.Ю. Медведовой, М. Гаафару, Х. Абделхафизу, А.Черному, А.Чижову, О.Г. Исаевой, В. Каткову, Д. Колесникову, В. Абгаряну, а также всему коллективу Лаборатории теоретической физики за теплоту и внимание.

## Литература

1. R. Kleiner, F. Steinmeyer, G. Kunkel and P. Müller / Intrinsic Josephson effects in  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$  single crystals // *Phys. Rev. Lett.* – 1992. – Vol. 68. – pp. 2394–2397.
2. S. O. Katterwe, A. Rydh and V. M. Krasnov / Doping-Induced Change in the Interlayer Transport Mechanism of  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$  near the Superconducting Transition Temperature // *Phys. Rev. Lett.* – 2008. – Vol. 101. – pp. 087003.
3. V. M. Krasnov / Nonlinear Nonequilibrium Quasiparticle Relaxation in Josephson Junctions // *Phys. Rev. Lett.* – 2009. – Vol. 103. – pp. 227002.
4. T. Koyama and M. Tachiki / I-V characteristics of Josephson-coupled layered superconductors with longitudinal plasma excitations // *Phys. Rev. B* – 1996. – Vol. 54. – pp. 16183–16191.
5. D. A. Ryndyk / Collective Dynamics of Intrinsic Josephson Junctions in High- $T_c$  Superconductors // *Phys. Rev. Lett.* – 1998. – Vol. 80. – pp. 3376–3379.
6. A. A. Yurgens / Intrinsic Josephson junctions: recent developments // *Supercond.Sci.Technol.* – 2000. – Vol. 13. – pp. R85-R100.
7. V. M. Krasnov / Terahertz electromagnetic radiation from intrinsic Josephson junctions at zero magnetic field via breather-type self-oscillations // *Phys. Rev. B* – 2011. – Vol. 83. – pp. 174517.
8. Cihan Kurter, Alexander P. Zhuravel, Alexey V. Ustinov and Steven M. Anlage / Microscopic examination of hot spots giving rise to nonlinearity in superconducting resonators // *Phys. Rev. B* – 2011. – Vol. 84. – pp. 104515.
9. T. M. Benseman, A. E. Koshelev, K. E. Gray, W. K. Kwok, U. Welp, K. Kadowaki, M. Tachiki and T. Yamamoto / Tunable terahertz emission from  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$  mesa devices // *Phys. Rev. B* – 2011. – Vol. 84. – pp. 064523.

10. A. E. Koshelev / Stability of dynamic coherent states in intrinsic Josephson-junction stacks near internal cavity resonance // *Phys. Rev. B* – 2010. – Vol. 82. – pp. 174512.
11. J. Pfeiffer, A. A. Abdumalikov, M. Schuster and A. V. Ustinov / Resonances between fluxons and plasma waves in underdamped Josephson transmission lines of stripline geometry // *Phys. Rev. B* – 2008. – Vol. 77. – pp. 024511.
12. L. Ozyuzer, A. E. Koshelev, C. Kurter, N. Gopalsami, Q. Li, M. Tachiki, K. Kadowaki, T. Yamamoto, H. Minami, H. Yamaguchi, T. Tachiki, K. E. Gray, W. K. Kwok and U. Welp / Emission of Coherent THz Radiation from Superconductors // *Science* – 2007. – Vol. 318. – pp. 1291 - 1293.
13. Yu. M. Shukrinov and F. Mahfouzi / Influence of Coupling between Junctions on Breakpoint Current in Intrinsic Josephson Junctions // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – Vol. 98. – pp. 157001.
14. Yu. M. Shukrinov, F. Mahfouzi and M. Suzuki / Structure of the breakpoint region on current-voltage characteristics of intrinsic Josephson junctions // *Phys. Rev. B* – 2008. – Vol. 78. – pp. 134521.
15. P. Hadley and M. R. Beasley / Dynamical states and stability of linear arrays of Josephson junctions // *Appl. Phys. Lett.* – 1987. – Vol. 50. – pp. 621.
16. A. A. Chernikov and G. Schmidt / Conditions for synchronization in Josephson-junction arrays // *Phys. Rev. E* – 1995. – Vol. 52. – pp. 3415–3419.
17. Kurt Wiesenfeld, Pere Colet and Steven H. Strogatz / Synchronization Transitions in a Disordered Josephson Series Array // *Phys. Rev. Lett.* – 1996. – Vol. 76. – pp. 404–407.
18. A. B. Cawthorne, C. B. Whan and C. J. Lobb / Complex dynamics of resistively and inductively shunted Josephson junctions // *J. Appl. Phys.* – 1998. – Vol. 84. – pp. 1126.
19. Giovanni Filatrella, Niels Falsig Pedersen and Kurt Wiesenfeld / High- $Q$  cavity-induced synchronization in oscillator arrays // *Phys. Rev. E* – 2000. – Vol. 61. – pp. 2513–2518.

20. A. N. Grib, P. Seidel and J. Scherbel / Synchronization of overdamped Josephson junctions shunted by a superconducting resonator // *Phys. Rev. B* – 2002. – Vol. 65. – pp. 094508.
21. M. V. Fistul / Macroscopic quantum tunneling in globally coupled series arrays of Josephson junctions // *Phys. Rev. B* – 2007. – Vol. 75. – pp. 014502.
22. Hans Dalsgaard Jensen, Anders Larsen and Mygind Jesper / Chaos in self-pumped resonator coupled Josephson junctions // *Physica B* – 1990. – Vol. 165–166. – pp. 1661-1662.
23. A. Larsen, H. Dalsgaard Jensen and J. Mygind / Self-induced steps in a small Josephson junction strongly coupled to a multimode resonator // *Phys. Rev. B* – 1991. – Vol. 43. – pp. 10179–10190.
24. Masashi Tachiki, Krsto Ivanovic, Kazuo Kadowaki and Tomio Koyama / Emission of terahertz electromagnetic waves from intrinsic Josephson junction arrays embedded in resonance LCR circuits // *Phys. Rev. B* – 2011. – Vol. 83. – pp. 014508.
25. T. G. Zhou, J. Mao, T. S. Liu, Y. Lai and S. L. Yan / Phase Locking and Chaos in a Josephson Junction Array Shunted by a Common Resistance // *Chinese Physics Letters* – 2009. – Vol. 26. – pp. 77401.
26. К. К. Лихарев / Введение в динамику джозефсоновских переходов // – Москва: Наука – 1985. – с. 320.
27. E. Almaas and D. Stroud / Dynamics of a Josephson array in a resonant cavity // *Phys. Rev. B* – 2002. – Vol. 65. – pp. 134502.
28. P. Barbara, A. B. Cawthorne, S. V. Shitov and C. J. Lobb / Stimulated Emission and Amplification in Josephson Junction Arrays // *Phys. Rev. Lett.* – 1999. – Vol. 82. – pp. 1963–1966.
29. H. Kawamoto / Zero Field Steps in Josephson Junctions // *Progress of Theoretical Physics* – 1983. – Vol. 70. – pp. 1171–1182.
30. P. Barbara, R. Monaco and A. V. Ustinov / Model for the fine structure of Josephson tunnel junctions and its comparison with experiments // *J. Appl. Phys.* – 1996. – Vol. 79. – pp. 327.



31. N. F. Pedersen and D. Welner / Comparison between experiment and perturbation theory for solitons in Josephson junctions // *Phys. Rev. B* – 1984. – Vol. 29. – pp. 2551–2557.
32. D. W. McLaughlin and A. C. Scott / Perturbation analysis of fluxon dynamics // *Phys. Rev. A* – 1978. – Vol. 18. – pp. 1652–1680.
33. Ю. М. Шукринов, И. Р. Рахмонов / Диффузионный ток в системе связанных джозефсоновских переходов // *ЖЭТФ* – 2012. – Том 142. – с. 323-337.
34. Ю. М. Шукринов, И. Р. Рахмонов и К. В. Куликов / Двойной резонанс в системе связанных джозефсоновских переходов // *Письма в ЖЭТФ* – 2012. – Том 96. – с. 657-664.
35. И. Р. Рахмонов, Ю. М. Шукринов и А. Ирие / Параметрический резонанс в системе длинных джозефсоновских переходов // *Письма в ЖЭТФ* – 2014. – Том 99. – с. 735–742.
36. I. R. Rahmonov, Yu. M. Shukrinov, E. V. Zemlyanaya, I. Sarhadov and O. Andreeva / Mathematical modeling of intrinsic Josephson junctions with capacitive and inductive couplings // *Journal of Physics: Conf. Ser.* – 2012. – Vol. 393. – pp. 012022.
37. Yu.M. Shukrinov, I. R. Rahmonov, K. V. Kulikov, P. Seidel and E. Il'ichev / Shapiro step on the re-ranch of Josephson junction IV-characteristics// in: *Institute fur Festkorperphysik, Fredrich Shiller Universitat Jena, Annual report* – 2013. – pp.93-94.
38. Yu. Shukrinov, I. Rahmonov, K. Kulikov, P. Seidel and E. Il'ichev / Effect of Radiation and Resonances in Coupled Linear Josephson Junctions Arrays with an LC-Shunt // Abstracts book of ISEC, Cambridge, MA, USA, July 7–11, 2013. – pp. PF15.
39. И.Р. Рахмонов, Ю.М. Шукринов / Резонансные свойства системы связанных джозефсоновских переходов под действием внешнего электромагнитного излучения // Труды XVII науч. конф. ОМУС-2013, Дубна, РФ, 08–12 апреля, 2013. – с. 220–224.

40. И.Р. Рахмонов, Ю.М. Шукринов / Параметрический резонанс в системе связанных джозефсоновских переходов в рамках ССJJ модели // Материалы международной конференции по физике конденсированного состояния, посвященной 85-летию академика А. А. Адхамова, Душанбе, Таджикистан, 17–18 октября, 2013. – с. 71–74.
41. Yu.M. Shukrinov, P. Seidel, E. Il'ichev, W. Nawrocki, M. Grajcar, P.A. Plescenik, I.R. Rahmonov and K. Kulikov / Shapiro steps in the IV-characteristics of coupled Josephson junctions at the double resonance condition// in: *Institute fur Festkorperphysik, Fredrich Shiller Universitat Jena, Annual report – 2012.* – pp.98-99.
42. Yu. Shukrinov, M. Gaafar, I. Rahmonov, K. Kulikov, M. Hamdipour, M. R. Kolahchi, A. Botha, M. Suzuki, E. Hamza, Kh. Hegab, A. Galal, H. Abdelhafiz, K. Elgammal and A. Foda / Current Voltage Characteristics and Resonance Features of Coupled Josephson Junctions // abstracts book of International Symposium «PLASMA 2012», Cesme, Izmir, Turkey, June 10–13, 2012. – pp. 55.
43. И.Р. Рахмонов, Ю.М. Шукринов / Влияние диффузионного тока на вольтамперную характеристику системы связанных джозефсоновских переходов // Труды XV науч. конф. ОМУС-2011, Дубна, РФ, 14 – 19 февраля, 2011. – с. 270–273.
44. Ю.М. Шукринов, И.Р. Рахмонов и М. Ел Демери / Фазовая динамика системы связанных джозефсоновских переходов // Труды XIV науч. конф. ОМУС-2010, Дубна, РФ, 14 – 19 февраля, 2010. – с. 174–177.
45. S. Sakai, P. Bodin and N. F. Pedersen / Fluxons in thin-film superconductor-insulator superlattices // *J. Appl. Phys.* – 1993. – Vol. 73. – pp. 2411-2418.
46. R. Kleiner, T. Gaber and G. Hechtfisher / Stacked long Josephson junctions in zero magnetic field: A numerical study of coupled one-dimensional sine-Gordon equations // *Phys. Rev. B* – 2000. – Vol. 62. – pp. 4086–4095.
47. M. Machida, T. Koyama, A. Tanaka and M. Tachiki / Collective dynamics of Josephson vortices in intrinsic Josephson junctions: exploration of in-phase

- locked superradiant vortex flow states // *Physica C* – 2000. – Vol. 330. – pp. 85-93.
48. Yu. M. Shukrinov and F. Mahfouzi / Influence of coupling parameter on current-voltage characteristics of intrinsic Josephson junctions in high-Tc superconductors // *Physica C* – 2006. – Vol. 434. – pp. 6-12.
49. M. Machida and S. Sakai / Unified theory for magnetic and electric field coupling in multistacked Josephson junctions // *Phys. Rev. B* – 2004. – Vol. 70. – pp. 144520.
50. D. A. Ryndyk, V. I. Pozdnjakova, I. A. Shereshevskii and N. K. Vdovicheva / Dynamics and transformations of the Josephson vortex lattice in layered superconductors // *Phys. Rev. B* – 2001. – Vol. 64. – pp. 052508.
51. U. Welp, K. Kadowaki and R. Kleiner / Superconducting emitters of THz radiation // *Nature Photonics* – 2013. – Vol. 7. – pp. 702–710.
52. S. N. Artemenko and A. G. Kobelkov / Intrinsic Josephson Effect and Violation of the Josephson Relation in Layered Superconductors // *Phys. Rev. Lett.* – 1997. – Vol. 78. – pp. 3551–3554.
53. J. Keller and D. A. Ryndyk / Static charge-imbalance effects in intrinsic Josephson systems // *Phys. Rev. B* – 2005. – Vol. 71. – pp. 054507.
54. A. Irie, Yu. M. Shukrinov and G. Oya / Experimental observation of the longitudinal plasma excitation in intrinsic Josephson junctions // *Journal of Physics: Conf. Ser.* – 2008. – Vol. 129. – pp. 012029.
55. Ю. М. Шукринов, И. Р. Рахмонов / Влияние диффузионного тока на гистерезисное поведение в системе связанных джозефсоновских переходов // *Письма в ЖЭТФ* – 2010. – Том 92. – с. 364–368.
56. M. Machida, T. Koyama and M. Tachiki / Dynamical Breaking of Charge Neutrality in Intrinsic Josephson Junctions: Common Origin for Microwave Resonant Absorptions and Multiple-Branch Structures in the  $I-V$  Characteristics // *Phys. Rev. Lett.* – 1999. – Vol. 83. – pp. 4618–4621.
57. A. Irie, Yu. M. Shukrinov and G. Oya / Experimental manifestation of the breakpoint region in the current-voltage characteristics of intrinsic Josephson junctions // *Appl. Phys. Lett.* – 2008. – Vol. 93. – pp. 152510.

58. H. B. Wang, P. H. Wu and T. Yamashita / Terahertz Responses of Intrinsic Josephson Junctions in High  $T_C$  Superconductors // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – Vol. 87. – pp. 107002.
59. K. Okanoue and K. Hamasaki / Temperature dependence of the return current in  $Bi_2Sr_2CaCu_2O_x$  stacks fabricated by self-planarizing process // *Appl. Phys. Lett.* – 2005. – Vol. 87. – pp. 252506.
60. H. Matsumoto, S. Sakamoto, F. Wajima, T. Koyama and M. Machida / Simulation of  $I - V$  hysteresis branches in an intrinsic stack of Josephson junctions in high- $T_c$  superconductors // *Phys. Rev. B* – 1999. – Vol. 60. – pp. 3666–3672.
61. Yu. M. Shukrinov and M. Hamdipour / Charge creation and nucleation of longitudinal plasma wave in the stack of IJJ // *arXiv:0912.1449 [cond-mat.supr-con]* – 2010.
62. H. H. Zappe / Minimum current and related topics in Josephson tunnel junction devices // *J. Appl. Phys.* – 1973. – Vol. 44. – pp. 1371-1377.
63. Yu. M. Shukrinov, F. Mahfouzi and N. F. Pedersen / Investigation of the breakpoint region in stacks with a finite number of intrinsic Josephson junctions // *Phys. Rev. B* – 2007. – Vol. 75. – pp. 104508.
64. W. Buckel and R. Kleiner / Superconductivity: Fundamentals and Applications // 2 edition: Wiley-VCH Verlag GmbH &Co, KGaA, – 2004. – pp. 464.
65. Yu. M. Shukrinov and F. Mahfouzi / Branching in current-voltage characteristics of intrinsic Josephson junctions // *Superconductor Science and Technology* – 2007. – Vol. 20. – pp. S38-S42.
66. Shizeng Lin and Xiao Hu / Possible Dynamic States in Inductively Coupled Intrinsic Josephson Junctions of Layered High- $T_c$  Superconductors // *Phys. Rev. Lett.* – 2008. – Vol. 100. – pp. 247006.
67. A. Irie and G. Oya / Effect of thermal fluctuations on Josephson vortex dynamics in intrinsic Josephson junctions // *Supercond. Sci. Technol.* – 2007. – Vol. 20. – pp. S18.

68. M. Tachiki and M. Machida / Current understanding of Josephson plasma theory and experiments in HTSC // *Physica C* – 2000. – Vol. 341–348. – pp. 1493-1498.
69. S. Z. Lin and X. Hu / In-plane dissipation as a possible synchronization mechanism for terahertz radiation from intrinsic Josephson junctions of layered superconductors // *Phys. Rev. B* – 2012. – Vol. 86. – pp. 054506.