

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика
С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

На правах рукописи

Трунин Антон Маратович

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ПРОЦЕССАХ
ПАРНОГО РОЖДЕНИЯ ТЯЖЕЛЫХ АДРОНОВ
ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

01.04.02 — Теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
доктор физико–математических наук
Мартыненко А.П.

Дубна 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1 Парное рождение тяжелых адронов в электрон–позитронной аннигиляции	11
1.1 Парное рождение мезонов h_c и χ_{cJ} в e^+e^- аннигиляции.....	13
1.2 Эффективный релятивистский гамильтониан и волновые функции связанных состояний тяжелых кварков	22
1.3 Сечение процесса $e^+e^- \rightarrow h_c + \chi_{cJ}$ с учетом релятивистских поправок.....	27
1.4 Парное рождение дваждытяжелых дикварков	32
2 Парное рождение чармония на LHC	44
2.1 Амплитуда рождения пары S -волнового чармония в протон–протонном взаимодействии.....	45
2.2 Сечения рождения пар J/ψ и η_c на LHC	53
2.3 Обсуждение результатов.....	55
3 Парное рождение дваждытяжелых дикварков в протон–протонном взаимодействии	62
3.1 Амплитуда подпроцесса $gg \rightarrow D\bar{D}$	62
3.2 Дифференциальные сечения парного рождения дикварков. Нерелятивистский предел сечений	68
3.3 Обсуждение результатов.....	72
Заключение	76
Список литературы	77
Приложения	85
Приложение А Коэффициенты, определяющие амплитуды и сечения парного рождения чармония и дикварков в e^+e^- аннигиляции.....	85
Приложение Б Функции, определяющие сечения парного рождения чармония в pp взаимодействии	94
Приложение В Функции, определяющие сечения парного рождения дваждытяжелых дикварков в pp взаимодействии.....	100

ВВЕДЕНИЕ

Изучение процессов образования тяжелых адронов на современных ускорителях высоких энергий обеспечивает непосредственную проверку существующей теории сильных взаимодействий — квантовой хромодинамики (КХД). Рассмотрение потоков сильновзаимодействующих частиц, образующихся в подобных процессах, дает возможность исследовать вопрос о справедливости основных положений теории и ее следствий, касающихся статических свойств и деталей взаимодействия кварков и глюонов. В последние годы одно из наиболее плодотворных направлений, реализующих указанную проверку, оказалось связано с «ренессансом» физики чармония, что повлекло за собой интенсивный рост как экспериментальной, так и теоретической активности в этой области [1–4]. Наряду с открытием чармониеподобных состояний, не полностью укладывающихся в традиционную интерпретацию связанной пары кварка и антикварка ($c\bar{c}$), существенные успехи достигнуты в измерении сечений рождения дваждытяжелых мезонов, что, в свою очередь, служит мотивирующим фактором для разработки новых методов описания связанных состояний тяжелых кварков.

Механизм образования тяжелого кваркония представляет хорошо известную задачу квантовой теории поля [3, 5–7]. В настоящее время теоретические исследования в указанном направлении базируются, в целом, на основе нерелятивистской квантовой хромодинамики (НРКХД) [8–10], реализующей принципы эффективной теории поля, и кварковых моделей [11]. Тяжелый кварконий характеризуется наличием нескольких хорошо разделенных физических масштабов $(M_Q v^2)^2 \ll (M_Q v)^2 \ll M_Q^2$, причем $M_Q \gg \Lambda_{\text{КХД}}$ и $M_Q v^2 \sim \Lambda_{\text{КХД}}$, где M_Q обозначает массу тяжелого кварка, а v — его относительную скорость в мезоне. Таким образом, в рамках обоих подходов процесс рождения рассматривается в две стадии. В ходе первой стадии образование одной или нескольких кварк–антикварковых пар связано с масштабом коротких расстояний поряд-

ка $1/M_Q$, что дает основания для применения теории возмущений к описанию фундаментальных взаимодействий кварков и глюонов. Вторая стадия включает последующую эволюцию кварков Q и антикварков \bar{Q} в физические состояния чармония, проходящую на масштабах характерного размера мезона $1/(M_Q v)$ и требующую непертурбативного описания. Подобное описание обеспечивается матричными элементами операторов в НРКХД или волновыми функциями связанных состояний в кварковых моделях. Матричные элементы НРКХД принципиально могут быть получены в расчетах на решетках, тогда как на практике они, чаще всего, извлекаются из сравнения предсказаний теории с данными эксперимента. Кроме того, цвето–синглетный класс матричных элементов допускает определение на основе волновых функций в потенциальных моделях [12]. Вычисления в кварковых моделях основываются на том или ином виде оператора взаимодействия составляющих частиц, зачастую включающего большое число феноменологических параметров и свободных постоянных. Неоднозначность выбора данных констант, совместно с многообразием самих моделей и относительной сложностью использования части из них для расчета наблюдаемых величин, составляет недостатки данного подхода. В определенной степени, микроскопическая картина кварк–глюонных взаимодействий, присутствующая в кварковых моделях, заменяется глобальным набором матричных элементов в НРКХД. Оба подхода дополняют друг друга, и отыскание соответствия между параметрами кварковых моделей и НРКХД, в свою очередь, может способствовать прояснению аспектов цветовой динамики кварков и глюонов.

Важность релятивистского рассмотрения рождения чармония, принимающего во внимание относительное движение кварка и антикварка, составляющих мезон, является непосредственным итогом попыток интерпретации экспериментальных данных коллабораций Belle и BaBar [13–15] в рамках лидирующего нерелятивистского порядка НРКХД [16–18]. Теоретические оценки сечения парного рождения мезонов J/ψ и η_c в электрон–позитронной аннигиляции оказались на порядок заниженными по сравнению с данными эксперимента,

что стало отправной точкой для серии исследований, включающих как расчет релятивистских поправок [19–27], так и вычисление вкладов следующего порядка по константе сильного взаимодействия α_s [28, 29], совместная комбинация которых, в конечном итоге, существенно сократила разногласия теории и эксперимента. При этом наряду с подходами кварковых моделей [24, 25] и НРКХД [26, 27], релятивистские эффекты также учитывались в методе светового конуса (РАСК) [19–23], успешно доказавшем свою применимость к расчетам эксклюзивных сечений. Значимый вывод, который следует извлечь из описанной ситуации, состоит в необходимости последовательного учета релятивизма при рассмотрении процессов рождения тяжелого кваркония с целью получения надежных теоретических предсказаний. Таким образом, недавние измерения коллаборацией LHCb сечения $\sigma(pp \rightarrow 2J/\psi + X)$ [30] естественным образом предполагают постановку задачи об описании данной реакции в рамках одного из развитых релятивистских формализмов. Необходимо отметить, что релятивистские эффекты существенны при описании не только парного, но и одиночного рождения тяжелого кваркония [31–33], хотя при этом и не исключены ситуации, когда соответствующие поправки к инклюзивным процессам оказываются пренебрежимо малы [26, 34].

Помимо надежно подтвержденного экспериментальными свидетельствами и хорошо изученного, за исключением экзотических состояний, семейства мезонов со скрытым очарованием, состоящих из тяжелых кварка и антикварка ($c\bar{c}$), кварковая модель также предсказывает существование дваждытяжелых барионов, имеющих в своем составе пару кварков (cc) или антикварков ($\bar{c}\bar{c}$) [35–37]. В 2002 г. коллаборация SELEX сообщила о первом наблюдении подобного состояния Ξ_{cc}^+ в распаде $\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ K^- \pi^+$ [38] и позже подтвердила это наблюдение для распада $\Xi_{cc}^+ \rightarrow p D^+ K^-$ [39]. Тем не менее, объявленные свойства кандидата в Ξ_{cc}^+ , такие как время жизни и доля рождения, оказались в противоречии с теоретическими предсказаниями [40], а последующие исследования коллабораций Belle и BaBar не подтвердили наблюдения SELEX [41, 42]. К на-

стоящему времени, подтвержденные данные об обнаружении дваждытяжелых барионов отсутствуют [43], тогда как их поиски активно ведутся, в том числе, и коллаборацией LHCb [44]. Расчет сечений парного рождения барионов с двумя тяжелыми кварками может представлять интерес как с позиции получения предсказаний для будущих экспериментов, так и с теоретической точки зрения, поскольку применяемые методы являются естественным обобщением подходов к описанию тяжелого кваркония. Действительно, принятая модель подразумевает два этапа формирования дваждытяжелого бариона (Q_1Q_2q): рождение дикваркового ядра (Q_1Q_2), представляющего компактное, сильно связанное, антитриплетное состояние пары кварков, и последующее присоединение легкого кварка q , приводящее к образованию наблюдаемого бариона в конечном состоянии [37, 45]. Очевидно, что первая стадия процесса имеет близкие аналогии с рождением кваркония. Нерелятивистское описание парного рождения дваждытяжелых дикварков проведено в работе [46], где, в частности, были получены оценки на выход дваждытяжелых барионов в e^+e^- аннигиляции и $p\bar{p}$ взаимодействии.

Из вышеизложенного следует, что **актуальность работы** определяется высокой экспериментальной и теоретической активностью в области современной физики тяжелых адронов. Чармоний и другие связанные состояния тяжелых кварков в первом приближении могут рассматриваться как нерелятивистские системы, однако подобное приближение зачастую оказывается недостаточным для получения надежных теоретических предсказаний. Расчет сечений рождения тяжелых адронов в существующих и перспективных экспериментах в общем случае должен вестись в рамках релятивистской теории, позволяющей учитывать относительное движение составляющих кварков и антикварков как в жесткой части процесса рассеяния, так и при формировании связанного состояния.

Целью диссертации является исследование роли релятивистских эффектов в процессах парного рождения чармония в электрон–позитронной анни-

гиляции и протон–протонном взаимодействии, выделение и анализ основных источников релятивистских поправок, получение теоретических предсказаний и интерпретация имеющихся экспериментальных данных, а также обобщение сформулированных методов расчета на случаи рождения дваждытяжелых барионов в рассматриваемых процессах.

Научная новизна и практическая ценность. Основные результаты диссертации являются оригинальными и получены впервые. В квазипотенциальном подходе получены релятивистские амплитуды парного рождения P -волнового чармония в электрон–позитронной аннигиляции и определены соответствующие поправки к сечениям. В рамках релятивистской кварковой модели, основанной на обобщенном КХД потенциале Брейта, дополненном членами конфайнмента с учетом скалярного и векторного обменов, вычислены волновые функции связанных состояний тяжелых кварков, рассчитан спектр масс чармония и дикварков. Впервые рассмотрены релятивистские поправки к амплитудам и сечениям парного рождения дикварков в e^+e^- аннигиляции.

Впервые получены аналитические выражения для релятивистских амплитуд и сечений парного рождения S -волнового чармония и дикварков в протон–протонном взаимодействии. Кроме того, получен первый нерелятивистский результат для парного рождения дикварков в pp взаимодействии. Для каждой из рассмотренных реакций дано описание основных источников релятивистских поправок, указана их роль и вклад в модификацию сечения.

Полученные результаты использованы для интерпретации экспериментальных данных по рождению пары J/ψ мезонов на Большом адронном коллайдере, представленных коллаборацией LHCb. В случае парного рождения P -волнового чармония установлено соответствие с экспериментальными результатами коллаборации Belle, говорящими о малой значимости сигналов от указанных процессов.

Изложенные способы расчета и аналитические результаты могут быть использованы для описания широкого круга процессов парного рождения тяже-

лых адронов в электрон–позитронной аннигиляции и протон–протонном взаимодействии, включая возбужденные состояния чармония, D -волновой чармоний, B_c мезоны и их орбитальные возбуждения, боттомоний и др.

На защиту выдвигаются следующие основные результаты:

1. Построены релятивистские амплитуды парного рождения P -волнового чармония и S -волновых дикварков в электрон–позитронной аннигиляции и определены соответствующие поправки к сечениям. Показано отсутствие противоречий с результатами Belle. Получена оценка на выход пар барионов с двумя тяжелыми кварками при светимостях современных B фабрик.
2. Вычислены релятивистские поправки к сечениям рождения пар J/ψ и η_c на Большом адронном коллайдере. Полученные результаты использованы для интерпретации экспериментальных данных коллаборации LHCb.
3. Получены нерелятивистские сечения парного рождения дваждытяжелых дикварков в протон–протонном взаимодействии и релятивистские поправки к ним. Исследованы различные источники релятивистских поправок и выявлена роль каждого источника в изменении величин сечений.

Все выносимые на защиту результаты получены **лично автором**.

Достоверность полученных результатов определяется использованием строгих математических методов, высокой степенью автоматизации расчетов с применением современных компьютерных систем символьных вычислений, совпадением предельных нерелятивистских аналитических выражений с ранее опубликованными и хорошо известными результатами, полученными в альтернативных подходах, а также согласием с существующими экспериментальными данными.

Апробация работы проводилась на следующих научных конференциях и семинарах:

- XX международное рабочее совещание по физике высоких энергий и квантовой теории поля QFTHEP'2011 (г. Сочи, 2011 г.),
- Сессия–конференция секции ядерной физики ОФН РАН «Физика фундаментальных взаимодействий» (г. Москва, 2011 г.),
- Международная молодежная научная конференция «Математическая физика и ее приложения» (в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно–педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, г. Пятигорск, 2012 г.),
- 5th Helmholtz International Summer School–Workshop “Calculations for Modern and Future Colliders” (г. Дубна, 2012 г.),
- Международная сессия–конференция секции ядерной физики ОФН РАН «Физика фундаментальных взаимодействий» (г. Москва, 2012 г.),
- Helmholtz International Summer School “Physics of Heavy Quarks and Hadrons” (г. Дубна, 2013 г.),
- Международная сессия–конференция секции ядерной физики ОФН РАН (г. Протвино, 2013 г.),
- Семинар «Физика адронов» Лаборатории теоретической физики ОИЯИ (г. Дубна, 31.01.2014 г.).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 7 работ, в том числе 5 в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, определенных Высшей аттестационной комиссией.

Диссертация имеет следующую структуру. Первая глава посвящена парному рождению P -волнового чармония и S -волновых дикварков в электрон–позитронной аннигиляции. Обсуждается закон преобразования квазипотенциальных волновых функций и его влияние на амплитуду процессов. Рассматривается релятивистская кварковая модель для связанных состояний тяжелых

кварков, основанная на КХД-обобщении потенциала Брейта. Получены численные результаты для сечений рождения чармония и оценки на выход пар дваждытяжелых барионов. Во второй главе проводится расчет сечений парного рождения мезонов J/ψ и η_c в протон-протонных столкновениях и релятивистских поправок к ним. В лидирующем порядке по константе сильного взаимодействия построены амплитуды соответствующих процессов глюонного слияния. Обсуждается сравнение результатов с вычислениями в рамках других подходов и экспериментальными данными коллаборации LHCb. Третья глава посвящена рождению пар дикварков (bc) и (cc) в pp взаимодействии. Установлен нерелятивистский предел сечений и вычислены вклады релятивистских поправок, входящих как в амплитуду рождения, так и в волновые функции дикварков. Также во внимание принимаются эффекты, определяемые ненулевой энергией связи рассматриваемых состояний. Проведен анализ роли каждого источника поправок в изменении величины сечения, представлена оценка итоговой погрешности расчета. В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы. Приложения содержат вспомогательные коэффициенты и функции, определяющие релятивистские поправки к описанным процессам парного рождения.

1 Парное рождение тяжелых адронов в электрон–позитронной аннигиляции

В 2002 г. коллаборация Belle опубликовала первые данные по эксклюзивному рождению пары мезонов J/ψ и η_c в электрон–позитронной аннигиляции [13]: $\sigma_{\text{Belle}}[e^+e^- \rightarrow J/\psi + \eta_c] \times \mathcal{B}_{\geq 4} = 33_{-6}^{+7} \pm 9 \text{ фб}$, которые оказались практически на порядок избыточными, по сравнению с теоретическими предсказаниями в 2.5–5.5 фб [16–18], выполненными в лидирующем порядке НРКХД как по константе сильного взаимодействия α_s , так и по скорости тяжелого кварка v . Результат Belle представляет собой нижнюю границу величины сечения, благодаря наличию доли распада состояния η_c на четыре и более заряженных частицы $\mathcal{B}_{\geq 4}$, что давало основания предполагать еще более существенный разрыв между теорией и экспериментом. Уточненное сечение рассматриваемого процесса, опубликованное в 2004 г. [14], составило $\sigma_{\text{Belle}}[e^+e^- \rightarrow J/\psi + \eta_c] \times \mathcal{B}_{>2} = 25.6 \pm 2.8 \pm 3.4 \text{ фб}$, кроме того, годом позже коллаборация BaBar представила результат собственных измерений [15], равный $\sigma_{\text{BaBar}}[e^+e^- \rightarrow J/\psi + \eta_c] \times \mathcal{B}_{>2} = 17.6 \pm 2.8 \pm 2.1 \text{ фб}$. Несмотря на некоторое уменьшение по сравнению с первоначальным результатом, сечение парного рождения чармония не могло быть объяснено имеющимися теоретическими расчетами НРКХД.

Для устранения данного расхождения были предприняты значительные усилия, в целом, заключающиеся в расчете двух основных поправок к результату лидирующего порядка: релятивистских поправок, обусловленных относительным движением составляющих кварков и антикварков в мезонах, и вкладов диаграмм следующего порядка по α_s . Первичная оценка роли релятивистских эффектов, представленная в работе [18], показала их потенциальную значимость: соответствующий фактор роста нерелятивистского сечения составил $K = 2.0_{-1.1}^{+10.9}$, существенная неопределенность в котором обусловлена точностью матричных элементов НРКХД. Применение к рассматриваемой задаче формализма светового конуса с соответствующими волновыми функциями, учи-

тывающими внутреннее движение кварков в мезоне, привело к результатам в 15–30 fb [19–23] в зависимости от выбора параметров, находящимся в согласии с данными Belle и BaBar. Наконец, рост сечения в рамках релятивистской кварковой модели, обусловленный учетом релятивизма в амплитуде рождения и квазипотенциальных волновых функциях чармония, был продемонстрирован в работах [24] и [25] с итоговыми результатами в 7.8 и 22.2 fb .

Вычисления вкладов следующего к лидирующему порядку (NLO) по константе сильного взаимодействия α_s , проведенные в НРКХД [28, 29], определили двукратный рост сечения (фактор $K = 2$), что, однако, оказалось недостаточным для объяснения измерений Belle и BaBar исходя только из значений нерелятивистского сечения лидирующего порядка по α_s : 2.5–5.5 fb [16–18]. Посредством объединения вкладов релятивистских поправок в НРКХД [26], вкладов NLO α_s , а также поправок квантовой электродинамики (КЭД) в работе [27] получен результат $17.6^{+8.1}_{-6.7}$ fb , для которого начальное нерелятивистское КХД сечение составляет около 5.4 fb , КЭД и релятивистские поправки к нему — 1.0 и 2.9 fb , соответственно, вклад NLO α_s равен, с учетом интерференции с КЭД, 6.9 fb . Недавно, также был вычислен вклад релятивистских поправок в следующем к лидирующему порядку по α_s , составивший около 0.7 fb [47], что служит свидетельством в пользу сходимости разложений по α_s и скорости тяжелого кварка v , составляющих основу подхода НРКХД [3, 9, 10]. Таким образом, расчеты в квазипотенциальном методе и формализме светового конуса приобретают согласие с экспериментом уже с учетом только релятивистских эффектов, тогда как в случае НРКХД требуются дополнительные вклады NLO α_s . Объяснение может заключаться в том факте, что волновые функции светового конуса, также как и квазипотенциальные волновые функции, уже содержат часть поправок по α_s , которые должны быть соответствующим образом исключены в случае прямого вычисления вкладов диаграмм следующего порядка в этих подходах [25, 48].

Наряду с рождением S -волновых состояний, в e^+e^- аннигиляции возможно

образование S - и P -волновых, а также полностью P -волновых пар чармония. Сечения процессов $e^+e^- \rightarrow J/\psi + \chi_{cJ}$ и соответствующие поправки к ним нашли достаточное отражение в литературе [18, 49–52], тогда как рождение P -волновых пар h_c и χ_{cJ} , $J = 0, 1, 2$, долгое время оставалось вычисленным лишь в лидирующем порядке НРКХД [18]. Расчет релятивистских поправок к указанному процессу в квазипотенциальном подходе представлен в работах [53, 54].

1.1 Парное рождение мезонов h_c и χ_{cJ} в e^+e^- аннигиляции

Рождение пары P -волнового чармония $h_c + \chi_{cJ}$, $J = 0, 1, 2$, в электрон-позитронной аннигиляции, рассматриваемое в рамках цвето-синглетной модели, как и в случае произвольных дваждытяжелых мезонов происходит в две стадии [24, 54]. На первом этапе, описываемом на основе пертурбативной квантовой хромодинамики, один из тяжелых кварков (c или \bar{c}), предварительно образовавшихся после перехода виртуального фотона γ^* в кварк-антикварковую пару ($c\bar{c}$), испускает глюон высокой энергии порядка $E_{\text{ЦМ}} = \sqrt{s}$, который в свою очередь рождает вторую ($c\bar{c}$) пару. В ходе второй, явно непертурбативной стадии происходит образование связанных состояний: с определенной вероятностью кварк-антикварковые пары могут объединиться в мезоны h_c и χ_{cJ} . Диаграммы лидирующего порядка по константе сильного взаимодействия α_s , описывающие рассматриваемый процесс, представлены на Рисунке 1, где пунктирная линия соответствует глюону.

В квазипотенциальном подходе к релятивистской кварковой модели [24, 55], инвариантная амплитуда перехода имеет вид свертки пертурбативной амплитуды образования четырех тяжелых кварков и антикварков $\mathcal{T}(p_1, p_2; q_1, q_2)$, спроектированной на положительные энергетические состояния, и квазипотенциальных волновых функций образовавшихся мезонов $\Psi^{h_c}(p, P)$ и $\Psi^{\chi_{cJ}}(q, Q)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[e^+e^- \rightarrow h_c + \chi_{cJ}](p_-, p_+; P, Q) &= \frac{8\pi\alpha}{3s} \bar{v}(p_+) \gamma^\beta u(p_-) \times \\ &\times \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \bar{\Psi}^{h_c}(p, P) \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \bar{\Psi}^{\chi_{cJ}}(q, Q) \mathcal{T}_\beta(p_1, p_2; q_1, q_2), \end{aligned} \quad (1.1)$$

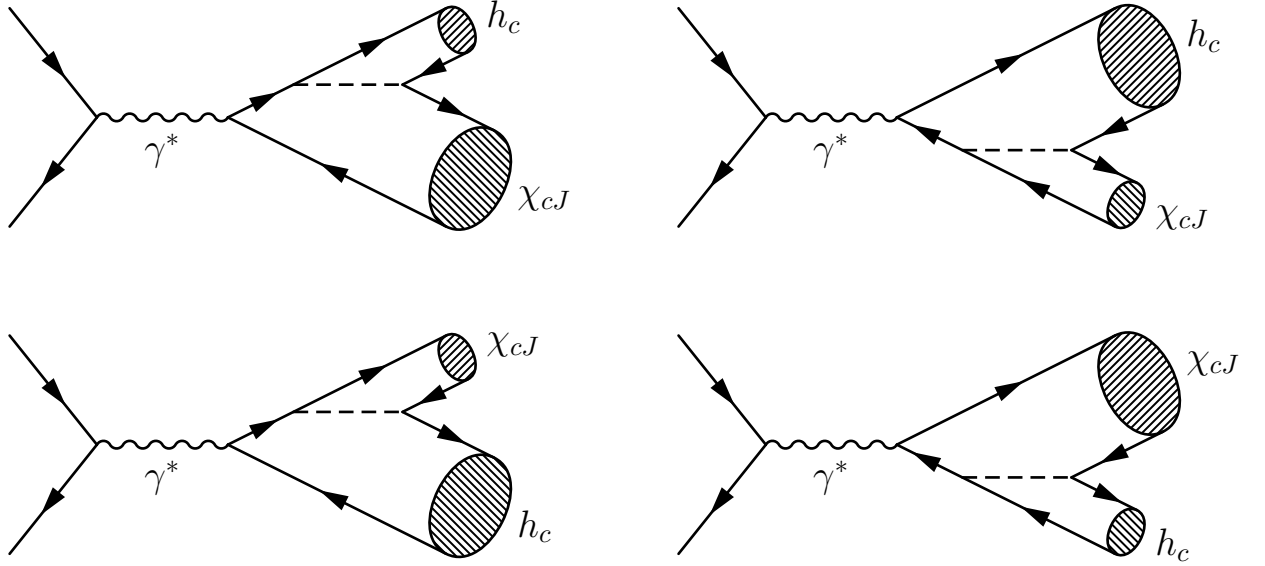


Рисунок 1 — Диаграммы рождения пары h_c и χ_{cJ}
в лидирующем порядке по α_s

где p_- и p_+ — четырехимпульсы электрона и позитрона, $s = (p_- + p_+)^2 = E_{\text{ЦМ}}^2$; p_1, p_2 — четырехимпульсы кварка c и антикварка \bar{c} , образующих мезон h_c , q_2 и q_1 — соответствующие четырехимпульсы для пары $(c\bar{c})$, составляющей χ_{cJ} . Полный $P(Q)$ и относительный $p(q)$ четырехимпульсы составляющих кварков связаны следующими соотношениями:

$$p_{1,2} = \frac{1}{2}P \pm p, \quad (pP) = 0; \quad q_{1,2} = \frac{1}{2}Q \pm q, \quad (qQ) = 0, \quad (1.2)$$

где относительные импульсы $p = L_P(0, \mathbf{p})$ и $q = L_Q(0, \mathbf{q})$ определяются с помощью преобразований Лорентца четырехвекторов $(0, \mathbf{p})$ и $(0, \mathbf{q})$ к системам отсчета, движущимся с полными импульсами P и Q . Интегрирование в (1.1) ведется по относительным 3-импульсам кварков и антикварков в мезонах.

Первая из диаграмм Рисунка 1 приводит к следующему вкладу в амплитуду:

$$\mathcal{T}_{1,\beta} = \frac{16\pi\alpha_s}{3} \bar{u}_1(p_1) \gamma^\mu \frac{\hat{l} - \hat{q}_1 + m}{(l - q_1)^2 - m^2} \gamma_\beta v_1(q_1) \bar{u}_2(q_2) \gamma^\nu v_2(p_2) D_{\mu\nu}(k_2), \quad (1.3)$$

$l = p_+ + p_-$ — четырехимпульс фотона, $k_{1,2} = p_{1,2} + q_{1,2}$ — четырехимпульс глюона, $D_{\mu\nu}$ — глюонный пропагатор; $\alpha_s = \alpha_s(4m^2)$ — константа связи КХД, m — масса c -кварка. Обозначение \hat{l} означает свертку компонент четырехвектора с матрицами Дирака: $\hat{l} = l_\alpha \gamma^\alpha = l \cdot \gamma$. В (1.3) уже включен цветовой множитель

$\frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{il}\frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{jk}T_{ij}^aT_{kl}^a = \frac{4}{3}$, возникающий при суммировании цвето-синглетных волновых функций мезонов с цветовой частью диаграмм. Аналогичным образом записываются вклады от оставшихся трех диаграмм:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{2,\beta} &= \frac{16\pi\alpha_s}{3}\bar{u}(p_1)\gamma_\beta\frac{\hat{p}_1 - \hat{l} + m}{(l-p_1)^2 - m^2}\gamma^\mu v_1(q_1)\bar{u}_2(q_2)\gamma^\nu v_2(p_2)D_{\mu\nu}(k_2), \\ \mathcal{T}_{3,\beta} &= \frac{16\pi\alpha_s}{3}\bar{u}_2(q_2)\gamma^\mu\frac{\hat{l} - \hat{p}_2 + m}{(l-p_2)^2 - m^2}\gamma_\beta v_2(p_2)\bar{u}_1(p_1)\gamma^\nu v_1(q_1)D_{\mu\nu}(k_1), \\ \mathcal{T}_{4,\beta} &= \frac{16\pi\alpha_s}{3}u_2(q_2)\gamma_\beta\frac{\hat{q}_1 - \hat{l} + m}{(l-q_2)^2 - m^2}\gamma^\mu v_2(p_2)\bar{u}_1(p_1)\gamma^\nu v_1(q_1)D_{\mu\nu}(k_1).\end{aligned}\quad (1.4)$$

Квазипотенциальные волновые функции мезонов $\Psi^{h_c}(p, P)$ и $\Psi^{\chi_{cJ}}(q, Q)$, входящие в (1.1), могут быть вычислены в системе центра масс с учетом релятивистских поправок $\mathcal{O}(\mathbf{p}^2)$ и $\mathcal{O}(\mathbf{q}^2)$. Затем, выражения для данных функций должны быть преобразованы к системам отсчета, движущимся с полными импульсами P и Q мезонов h_c и χ_{cJ} . Явный вид подобного преобразования был установлен как в подходе Бете–Солпитера в [56], так и для квазипотенциального метода [57]. В квазипотенциальном подходе искомые соотношения имеют вид:

$$\Psi_P^{\rho\omega}(\mathbf{p}) = D_1^{\frac{1}{2},\rho\alpha}(R_{p'_1}^{LP})D_2^{\frac{1}{2},\omega\beta}(R_{p'_2}^{LP})\Psi_{0,\alpha\beta}(\mathbf{p}),\quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_P^{\lambda\sigma}(\mathbf{p}) &= \bar{\Psi}_{0,\varepsilon\tau}(\mathbf{p})\bar{D}_1^{\frac{1}{2},\varepsilon\lambda}(R_{p'_1}^{LP})\bar{D}_2^{\frac{1}{2},\tau\sigma}(R_{p'_2}^{LP}), \\ p'_{1,2} &= (\epsilon(\mathbf{p}), \pm\mathbf{p}), \\ \epsilon(\mathbf{p}) &= \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}.\end{aligned}\quad (1.6)$$

Здесь $R_{p'_{1,2}}^{LP}$ — вращение Вигнера, определяемое для преобразования Лорентца Λ и четырехвектора K как

$$R_K^\Lambda = L_{\Lambda K}^{-1}\Lambda L_K,\quad (1.7)$$

где L_K — лорентцовский буст, $L_K(M_K, \mathbf{0}) = (E_K, \mathbf{K}) = (\sqrt{M_K^2 + \mathbf{K}^2}, \mathbf{K})$. Матрицы поворота $D^{\frac{1}{2}}(R_{p'_{1,2}}^{LP})$ имеют следующее определение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D_{1,2}^{\frac{1}{2}}(R_{p'_{1,2}}^{LP}) = S^{-1}(p_{1,2})S(P)S(p),\quad (1.8)$$

где матрица S определяет трансформационные свойства биспинора,

$$S(K) = \sqrt{\frac{E_K + M_K}{2M_K}} \left(1 + \frac{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{K}}{E_K + M_K} \right).\quad (1.9)$$

Для матриц (1.8) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=-s}^s u^\sigma(\Lambda K) D_{\sigma\lambda}^s(R_K^\Lambda) &= S(\Lambda) u_\lambda(K), \\ \sum_{\sigma=-s}^s \bar{D}_{\lambda\sigma}^s(R_K^\Lambda) \bar{u}^\sigma(\Lambda K) &= \bar{u}_\lambda(K) S^{-1}(\Lambda). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Выражения (1.10), вместе с (1.5) и явным видом закона для преобразования биспиноров

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(p'_1) &= \bar{u}_1(\mathbf{p}) = \bar{u}_1(0) \frac{\hat{p}'_1 + m}{\sqrt{2\epsilon(\mathbf{p})(\epsilon(\mathbf{p}) + m)}}, \\ v_2(p'_2) &= v_2(-\mathbf{p}) = \frac{\hat{p}'_2 - m}{\sqrt{2\epsilon(\mathbf{p})(\epsilon(\mathbf{p}) + m)}} v_2(0) \end{aligned} \quad (1.11)$$

позволяют записать свертку волновых функций чармония и амплитуды (1.3) следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{\lambda\sigma}^{h_c} \bar{\Psi}_{\delta\kappa}^{\chi_{cJ}} \mathcal{T}_{1,\beta}^{\lambda\sigma,\delta\kappa} &= \frac{16\pi\alpha_s}{3} \bar{\Psi}_{0,\varepsilon\tau}^{h_c} \bar{\Psi}_{0,\rho\omega}^{\chi_{cJ}} \bar{D}_{1,P}^{\frac{1}{2},\varepsilon\lambda} \bar{D}_{2,P}^{\frac{1}{2},\tau\sigma} \bar{D}_{1,Q}^{\frac{1}{2},\rho\delta} \bar{D}_{2,Q}^{\frac{1}{2},\omega\kappa} \times \\ &\times \bar{u}_{1,\lambda}(p_1) \gamma^\mu \frac{\hat{l} - \hat{q}_1 + m}{(l - q_1)^2 - m^2} \gamma_\beta v_{1,\delta}(q_1) \bar{u}_{2,\kappa}(q_2) \gamma^\nu v_{2,\sigma}(p_2) D_{\mu\nu}(k_2) = \\ &= \frac{16\pi\alpha_s}{3} \bar{\Psi}_{0,\varepsilon\tau}^{h_c} \bar{\Psi}_{0,\rho\omega}^{\chi_{cJ}} \bar{u}_1^\varepsilon(p'_1) S_P^{-1} \gamma^\mu \frac{\hat{l} - \hat{q}_1 + m}{(l - q_1)^2 - m^2} \gamma_\beta \times \\ &\times S_Q v_1^\omega(q'_1) \bar{u}_2^\rho(q'_2) S_Q^{-1} \gamma^\nu S_P v_2^\tau(p'_2) D_{\mu\nu}(k_2) = \\ &= \frac{16\pi\alpha_s}{3} \frac{\bar{\Psi}_0^{h_c}}{n_{\mathbf{p}}} \frac{\bar{\Psi}_0^{\chi_{cJ}}}{n_{\mathbf{q}}} \bar{u}_1(0) (\hat{p}'_1 + m) S_P^{-1} \gamma^\mu \frac{\hat{l} - \hat{q}_1 + m}{(l - q_1)^2 - m^2} \gamma_\beta S_Q (\hat{q}'_1 - m) \times \\ &\times v_1(0) \bar{u}_2(0) (\hat{q}'_2 + m) S_Q^{-1} \gamma^\nu S_P (\hat{p}'_2 - m) v_2(0) D_{\mu\nu}(k_2) = \\ &= \frac{2\pi\alpha_s}{3} \frac{\bar{\Psi}_0^{h_c}}{n_{\mathbf{p}}} \frac{\bar{\Psi}_0^{\chi_{cJ}}}{n_{\mathbf{q}}} \text{Tr} \left\{ S_P (\hat{p}'_2 - m) \gamma_5 (1 + \gamma_0) (\hat{p}'_1 + m) S_P^{-1} \times \right. \\ &\left. \times \gamma^\mu \frac{\hat{l} - \hat{q}_1 + m}{(l - q_1)^2 - m^2} \gamma_\beta S_Q (\hat{q}'_1 - m) \hat{\epsilon}_{\chi_{cJ}}^* (S_z) (1 + \gamma_0) (\hat{q}'_2 + m) S_Q^{-1} \gamma^\nu \right\} D_{\mu\nu}(k_2), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где для краткости обозначено $D_{(1,2),P}^{\frac{1}{2}} = D_{1,2}^{\frac{1}{2}}(R_{p'_{1,2}}^{LP})$, $D_{(1,2),Q}^{\frac{1}{2}} = D_{1,2}^{\frac{1}{2}}(R_{q'_{1,2}}^{LQ})$, $S_P = S(P)$, $n_{\mathbf{p}} = 2\epsilon(\mathbf{p})(\epsilon(\mathbf{p}) + m)$.

При получении (1.12) были введены проекционные операторы $\Pi^{h_c, \chi_{cJ}}$ пар $(c\bar{c})$ на спиновые состояния мезонов h_c и χ_{cJ} , соответственно:

$$\begin{aligned}\Pi^{h_c} &= [v_2(0)\bar{u}_1(0)] = \gamma_5 \frac{1 + \gamma_0}{2\sqrt{2}}, \\ \Pi^{\chi_{cJ}} &= [v_1(0)\bar{u}_2(0)] = \epsilon_{\chi_{cJ}}^*(S_z) \frac{1 + \gamma_0}{2\sqrt{2}},\end{aligned}\tag{1.13}$$

$\epsilon_{\chi_{cJ}}(S_z)$ — вектор поляризации.

С использованием явного вида для преобразований Лорентца величин, входящих в (1.12):

$$\begin{aligned}S_{P,Q}\epsilon S_{P,Q}^{-1} &= \epsilon_{P,Q} = L_{P,Q}(0, \boldsymbol{\epsilon}) = \left(\mathbf{v}_{1,2}\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon} + \frac{(\mathbf{v}_{1,2}\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{v}_{1,2}}{1 + v_{1,2}^0} \right), \\ S\gamma_5 S^{-1} &= \gamma_5, \quad S_{P,Q}(1 + \gamma_0)S_{P,Q}^{-1} = 1 + \hat{\mathbf{v}}_{1,2}, \\ S_{P,Q}(\hat{p}'_1 + m)S_{P,Q}^{-1} &= 2m \left(\frac{\hat{v}_{1,2} + 1}{2} + \hat{v}_{1,2} \frac{\mathbf{p}^2}{2m(\epsilon(\mathbf{p}) + m)} + \frac{\hat{p}}{2m} \right), \\ S_{P,Q}(\hat{p}'_2 - m)S_{P,Q}^{-1} &= 2m \left(\frac{\hat{v}_{1,2} - 1}{2} + \hat{v}_{1,2} \frac{\mathbf{p}^2}{2m(\epsilon(\mathbf{p}) + m)} - \frac{\hat{p}}{2m} \right), \\ p &= L_P(0, \mathbf{p}) = \left(\mathbf{p}\mathbf{v}_1, \mathbf{p} + \frac{(\mathbf{p}\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1}{1 + v_1^0} \right), \\ v_1 &= P/M_{h_c}, \quad v_2 = Q/M_{\chi_{cJ}},\end{aligned}\tag{1.14}$$

вклад в амплитуду (1.1) от рассматриваемой диаграммы принимает окончательный вид

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1(p_-, p_+; P, Q) &= \frac{32\pi^2 \alpha \alpha_s \sqrt{M_{h_c} M_{\chi_{cJ}}}}{9s} \bar{v}(p_+) \gamma^\beta u(p_-) \times \\ &\times \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\bar{\Psi}_0^{h_c}(\mathbf{p})}{\left[\frac{\epsilon(\mathbf{p})}{m} \frac{\epsilon(\mathbf{p}) + m}{2m} \right]} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{\bar{\Psi}_0^{\chi_{cJ}}(\mathbf{q})}{\left[\frac{\epsilon(\mathbf{q})}{m} \frac{\epsilon(\mathbf{q}) + m}{2m} \right]} \times \\ &\times \text{Tr} \left\{ \left(\frac{\hat{v}_1 - 1}{2} + \hat{v}_1 \frac{\mathbf{p}^2}{2m(\epsilon(\mathbf{p}) + m)} - \frac{\hat{p}}{2m} \right) \gamma_5 (\hat{v}_1 + 1) \times \right. \\ &\times \left(\frac{\hat{v}_1 + 1}{2} + \hat{v}_1 \frac{\mathbf{p}^2}{2m(\epsilon(\mathbf{p}) + m)} + \frac{\hat{p}}{2m} \right) \gamma^\mu D_{\mu\nu}(k_2) \frac{\hat{l} - \hat{q}_1 + m}{(l - q_1)^2 - m^2} \gamma_\beta \times \\ &\times \left(\frac{\hat{v}_2 - 1}{2} + \hat{v}_2 \frac{\mathbf{q}^2}{2m(\epsilon(\mathbf{q}) + m)} + \frac{\hat{q}}{2m} \right) \hat{\epsilon}_Q^*(S_z) (\hat{v}_2 + 1) \times \\ &\left. \times \left(\frac{\hat{v}_2 + 1}{2} + \hat{v}_2 \frac{\mathbf{q}^2}{2m(\epsilon(\mathbf{q}) + m)} - \frac{\hat{q}}{2m} \right) \gamma^\nu \right\},\end{aligned}\tag{1.15}$$

где явно выписаны нормировочные факторы $\sqrt{2M_{h_c}}$ и $\sqrt{2M_{\chi_{cJ}}}$ волновых функций в квазипотенциальном подходе. Аналогичные выражения могут быть получены для вкладов остальных трех диаграмм (1.4).

Амплитуда рождения пары $h_c + \chi_{cJ}$, $J = 0, 1, 2$, в e^+e^- аннигиляции допускает представление в следующем виде [54]:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(p_-, p_+; P, Q) &= \frac{32\pi^2 \alpha \alpha_s \sqrt{M_{h_c} M_{\chi_{cJ}}}}{9s} \bar{v}(p_+) \gamma^\beta u(p_-) \times \\ &\times \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \text{Tr} \{ \bar{\Psi}_{P,p} \Gamma_1^{\beta\omega} \bar{\Psi}_{Q,q} \gamma_\omega + \bar{\Psi}_{Q,q} \Gamma_2^{\beta\omega} \bar{\Psi}_{P,p} \gamma_\omega \}, \\ \Gamma_1^{\beta\omega} &= D_\mu^\omega(p_2 + q_2) \left[\gamma^\beta \frac{m - \hat{l} + \hat{p}_1}{(l - p_1)^2 - m^2} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{m + \hat{l} - \hat{q}_1}{(l - q_1)^2 - m^2} \gamma^\beta \right], \\ \Gamma_2^{\beta\omega} &= D_\mu^\omega(p_1 + q_1) \left[\gamma^\beta \frac{m - \hat{l} + \hat{q}_2}{(l - q_2)^2 - m^2} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{m + \hat{l} - \hat{p}_2}{(l - p_2)^2 - m^2} \gamma^\beta \right]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

В (1.16) введены определения квазипотенциальных волновых функций:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{P,p} &= \frac{\bar{\Psi}_{h_c}^0(\mathbf{p})}{\left[\frac{\epsilon(\mathbf{p})}{m} \frac{\epsilon(\mathbf{p})+m}{2m} \right]} \left[\frac{\hat{v}_1 - 1}{2} + \hat{v}_1 \frac{\mathbf{p}^2}{2m(\epsilon(\mathbf{p}) + m)} - \frac{\hat{p}}{2m} \right] \times \\ &\times \gamma_5 (1 + \hat{v}_1) \left[\frac{\hat{v}_1 + 1}{2} + \hat{v}_1 \frac{\mathbf{p}^2}{2m(\epsilon(\mathbf{p}) + m)} + \frac{\hat{p}}{2m} \right], \\ \bar{\Psi}_{Q,q} &= \frac{\bar{\Psi}_{\chi_{cJ}}^0(\mathbf{q})}{\left[\frac{\epsilon(\mathbf{q})}{m} \frac{\epsilon(\mathbf{q})+m}{2m} \right]} \left[\frac{\hat{v}_2 - 1}{2} + \hat{v}_2 \frac{\mathbf{q}^2}{2m(\epsilon(\mathbf{q}) + m)} + \frac{\hat{q}}{2m} \right] \times \\ &\times \hat{\epsilon}_Q^*(S_z) (1 + \hat{v}_2) \left[\frac{\hat{v}_2 + 1}{2} + \hat{v}_2 \frac{\mathbf{q}^2}{2m(\epsilon(\mathbf{q}) + m)} - \frac{\hat{q}}{2m} \right], \end{aligned} \quad (1.17)$$

которые содержат результат (1.5) и последующих преобразований, а также включают в себя проекционные операторы (1.13). Выражения (1.16), (1.17) также получены в работах [24, 25, 52] при расчете сечений рождения S -волнового чармония. Таким образом, определения (1.17) не являются специфическими для рассматриваемой задачи и удобны при работе с амплитудами процессов рождения тяжелых мезонов в рамках квазипотенциального подхода. Вершинные функции Γ_i содержат пропагатор глюона, который в дальнейшем будет рассматриваться в Фейнмановской калибровке $D_{\mu\nu}^F(k) = -ig^{\mu\nu}/k^2$.

Подынтегральное выражение для амплитуды (1.16) явным образом зависит от относительных импульсов p и q кварков и антикварков в мезонах, причем

данная зависимость, заключенная в функциях Γ_i , является точной. Для того чтобы выделить релятивистские поправки к амплитуде и произвести угловое интегрирование, необходимо разложить пропагаторы кварков и глюонов в (1.16) по степеням относительного импульса:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_{1,2}^2} &= \frac{1}{z} \left(1 \mp \left[\frac{lp + lq}{z} \right] + \left[-\frac{(p+q)^2}{z} + \frac{(lp+lq)^2}{z^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. \pm \left[2\frac{(lp+lq)(p+q)^2}{z^2} - \frac{(lp+lq)^3}{z^3} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{(p+q)^4}{z^2} - 3\frac{(p+q)^2(lp+lq)^2}{z^3} + \frac{(lp+lq)^4}{z^4} \right] + \dots \right), \\
\frac{1}{(l-p_{1,2})^2 - m^2} &= \frac{1}{w_1} \left(1 \pm \left[2\frac{lp}{w_1} \right] + \left[-\frac{p^2}{w_1} + \frac{4(lp)^2}{w_1^2} \right] \pm \right. \\
&\quad \left. \pm \left[-4\frac{(lp)p^2}{w_1^2} + 8\frac{(lp)^3}{w_1^3} \right] + \left[\frac{p^4}{w_1^2} - 12\frac{(lp)^2 p^2}{w_1^3} + 16\frac{(lp)^4}{w_1^4} \right] + \dots \right), \\
\frac{1}{(l-q_{1,2})^2 - m^2} &= \frac{1}{w_2} \left(1 \pm \left[2\frac{lq}{w_2} \right] + \left[-\frac{q^2}{w_2} + 4\frac{(lq)^2}{w_2^2} \right] \pm \right. \\
&\quad \left. \pm \left[-4\frac{(lq)q^2}{w_2^2} + 8\frac{(lq)^3}{w_2^3} \right] + \left[\frac{q^4}{w_2^2} - 12\frac{(lq)^2 q^2}{w_2^3} + 16\frac{(lq)^4}{w_2^4} \right] + \dots \right), \\
z &= \frac{s}{4},
\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{s}{2} + \frac{1}{4} (2M_{\chi_{cJ}}^2 - M_{h_c}^2 - 4m^2) \approx \frac{s}{2}, \\
w_2 &= \frac{s}{2} + \frac{1}{4} (2M_{h_c}^2 - M_{\chi_{cJ}}^2 - 4m^2) \approx \frac{s}{2}.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Параметры разложений (1.18) могут быть приближенно оценены как p/\sqrt{s} и q/\sqrt{s} , что позволяет считать их малыми параметрами при большой величине энергии в системе центра масс. В случае P -волнового чармония при разложении амплитуды (1.16) достаточно ограничиться слагаемые третьего абсолютного порядка отдельно по p и q , что соответствует учету релятивистских поправок во втором относительном порядке. Нормировочные факторы в волновых функциях (1.17), содержащие энергии кварков $\epsilon(\mathbf{p})$ и $\epsilon(\mathbf{q})$, не раскладываются, благодаря чему достигается сходимость итоговых интегралов.

Угловое интегрирование по переменным импульса может быть проведено с использованием соотношений для P -волнового чармония:

$$\int q_\alpha \Psi_0^{\chi_{cJ}}(\mathbf{q}) \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} = -\frac{i}{\sqrt{6}\pi} \varepsilon_\alpha \int_0^\infty q^3 R_{\chi_{cJ}}(q) dq, \quad (1.20)$$

$$\int q_\alpha q_\beta q_\mu \Psi_0^{\chi_{cJ}}(\mathbf{q}) \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} = \frac{i}{5\sqrt{6}\pi} (\varepsilon_\mu P_{\alpha\beta} + \varepsilon_\alpha P_{\beta\mu} + \varepsilon_\beta P_{\alpha\mu}) \int_0^\infty q^5 R_{\chi_{cJ}}(q) dq,$$

где $R_{\chi_{cJ}}(q)$ — радиальная волновая функция в импульсном представлении, $\varepsilon(L_z)$ — орбитальный вектор поляризации, $P^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - v_{1,2}^\alpha v_{1,2}^\beta$ для h_c и χ_{cJ} , соответственно.

Для получения заданного P -волнового состояния конечного мезона χ_{cJ} , $J = 0, 1, 2$, амплитуду (1.16) необходимо просуммировать, после подстановки разложений (1.18) и проведения углового интегрирования (1.20), по значениям проекций спинового S_z и орбитального L_z моментов с соответствующими коэффициентами Клебша–Гордана $\langle 1, L_z; 1, S_z | J, J_z \rangle$ [58]:

$$\sum_{S_z, L_z} \langle 1, L_z; 1, S_z | J, J_z \rangle \varepsilon_{Q_\alpha}^*(L_z) \varepsilon_{Q_\beta}^*(S_z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} (g_{\alpha\beta} - v_{2\alpha} v_{2\beta}), & J = 0, \\ \frac{i}{\sqrt{2}} e_{\alpha\beta\sigma}{}^\rho v_2^\sigma \varepsilon_\rho^*(J_z), & J = 1, \\ \varepsilon_{\alpha\beta}(J_z), & J = 2, \end{cases} \quad (1.21)$$

$e_{\alpha\beta\mu\nu}$ — полностью антисимметричный тензор; $\varepsilon_\alpha(J_z)$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}(J_z)$ — вектор и, соответственно, тензор полного углового момента связанного состояния.

После взятия оператора следа в (1.16) с использованием системы символьных вычислений FORM [59], амплитуда рождения пары h_c и χ_{cJ} в электрон–позитронной аннигиляции допускает следующее представление:

$$\mathcal{M}[e^+ e^- \rightarrow h_c + \chi_{cJ}](p_-, p_+, P, Q) = \frac{32 \alpha \alpha_s r^6}{135 M_0^6 \kappa^2 u^{\frac{5}{2}} (1-u)^{\frac{5}{2}}} \bar{v}(p_+) \gamma^\beta u(p_-) \times$$

$$\times \int_0^\infty p^3 R_{h_c}(p) \frac{\epsilon(p) + m}{2\epsilon(p)} dp \int_0^\infty [\mathcal{K}_\beta(p, q)] q^3 R_{\chi_{cJ}}(q) \frac{\epsilon(q) + m}{2\epsilon(q)} dq, \quad (1.22)$$

где введены обозначения $M_0 = M_{h_c} + M_{\chi_{cJ}}$, $\kappa = m/M_0$, $u = M_{\chi_{cJ}}/M_0$, $r^2 = M_0^2/s$.

Функции K_β в (1.22) описывают тензорную структуру амплитуды [54]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_\beta[h_c + \chi_{c0}] &= \frac{128}{\sqrt{3}} u(1-u) A_1 e_{\alpha\lambda\mu\beta} v_1^\alpha v_2^\lambda \varepsilon_{h_c}^{*\mu}, \\
\mathcal{K}_\beta[h_c + \chi_{c1}] &= \frac{128i}{\sqrt{2}} \kappa \left[B_1 (v_1 \varepsilon_{\chi_{c1}}^*) \varepsilon_{h_c\beta}^* + B_2 (v_2 \varepsilon_{h_c}^*) \varepsilon_{\chi_{c1}\beta}^* + B_3 (v_1 \varepsilon_{\chi_{c1}}^*) \times \right. \\
&\times (v_2 \varepsilon_{h_c}^*) v_{1\beta} + B_4 (\varepsilon_{h_c}^* \varepsilon_{\chi_{c1}}^*) v_{1\beta} + B_5 (v_1 \varepsilon_{\chi_{c1}}^*) (v_2 \varepsilon_{h_c}^*) v_{2\beta} + B_6 (\varepsilon_{h_c}^* \varepsilon_{\chi_{c1}}^*) v_{2\beta}, \\
\mathcal{K}_\beta[h_c + \chi_{c2}] &= -u(1-u) \left[C_1 e_{\alpha\mu\beta\nu} \varepsilon_{\chi_{c2}}^{*\delta\nu} v_{1\delta} v_2^\alpha \varepsilon_{h_c}^{*\mu} + \right. \\
&+ \left(C_2 \varepsilon_{\chi_{c2}\beta}^{*\rho} + C_3 \varepsilon_{\chi_{c2}}^{*\delta\rho} v_{1\beta} v_{1\delta} + C_4 \varepsilon_{\chi_{c2}}^{*\delta\rho} v_{2\beta} v_{1\delta} \right) e_{\alpha\mu\nu\rho} v_1^\alpha v_2^\mu \varepsilon_{h_c}^{*\nu} + \\
&+ C_5 \varepsilon_{\chi_{c2}}^{*\delta\rho} v_{1\delta} v_{1\rho} e_{\alpha\mu\nu\beta} v_1^\alpha v_2^\mu \varepsilon_{h_c}^{*\nu} + \left(C_6 \varepsilon_{h_c\delta}^* + C_7 (v_2 \varepsilon_{h_c}^*) v_{1\delta} \right) \varepsilon_{\chi_{c2}}^{*\delta\rho} e_{\alpha\mu\beta\rho} v_1^\alpha v_2^\mu + \\
&\left. + C_8 \varepsilon_{\chi_{c2}}^{*\delta\rho} v_{1\delta} e_{\alpha\mu\beta\rho} v_1^\alpha \varepsilon_{h_c}^{*\mu} \right]. \tag{1.23}
\end{aligned}$$

Коэффициенты A_i , B_i , C_i , входящие в (1.23), являются функциями относительных импульсов кварков, масс участвующих частиц и энергии взаимодействия, $A_i = A_i(p, q; \kappa, u, r)$. Для них получены полные аналитические выражения, которые в силу громоздкости не могут быть приведены здесь. Зависимость данных величин от энергии, выраженная через параметр r , вычисленная при подстановке в общие выражения значений u и κ , соответствующих используемой модели и экспериментальным данным [60], представлена в приложении А. При этом зависимость амплитуды от относительных импульсов может быть полностью описана набором функций $c_{ij}(p, q)$:

$$\begin{aligned}
c_{ij}(p, q) &= \left(\frac{m - \epsilon(p)}{m + \epsilon(p)} \right)^i \left(\frac{m - \epsilon(q)}{m + \epsilon(q)} \right)^j, \\
i &= 0 \dots 2, \quad j = 0 \dots 2,
\end{aligned} \tag{1.24}$$

отвечающих учету релятивистских слагаемых до второго относительного порядка включительно.

1.2 Эффективный релятивистский гамильтониан и волновые функции связанных состояний тяжелых кварков

Итоговое выражение для амплитуды (1.22) имеет вид интеграла от волновых функций чармония $R_{h_c}(p)$ и $R_{\chi_{cJ}}(q)$, описывающих образование связанного состояния из пары кварк–антикварка ($c\bar{c}$). В простейшем случае данные волновые функции могут быть определены из нерелятивистского уравнения Шредингера с потенциалом Корнелла, состоящим из кулоновской части и линейного запирающего потенциала [11, 61]. Тем не менее, последовательный подход к вычислению релятивистских эффектов требует учета релятивистских поправок к потенциалу взаимодействия кварка и антикварка, также включающих спин–орбитальное и спин–спиновое взаимодействия, ответственные за расщепление спектра масс чармония. Кроме того, во внимание должен быть принят релятивистский характер зависимости энергии кварков, составляющих связанное состояние, от относительного импульса. Указанные требования могут быть избыточно реализованы при использовании квазипотенциального уравнения [62] шредингеровского вида [63, 64] и выборе соответствующего квазипотенциала, что дает возможность для полностью непertурбативного рассмотрения релятивистских эффектов. Так, в работе [65] был получен квазипотенциал взаимодействия кварка и антикварка, учитывающий эффекты отдачи и однопетлевые радиационные поправки, впоследствии успешно использовавшийся для описания свойств тяжелых мезонов и барионов [66–69], а также для расчета сечения процесса $e^+e^- \rightarrow J/\psi + \eta_c$ [25].

Альтернативный подход к учету релятивистских поправок в $R_{h_c}(p)$ и $R_{\chi_{cJ}}(q)$ состоит в использовании упрощенной потенциальной модели, основанной на эффективном релятивистском гамильтониане, что приводит к результатам, в определенной мере воссоздающим исходные квазипотенциальные волновые функции [52]. При этом член кинетической энергии изначально берется в релятивистской форме и дополнительно рационализуется, а новые эффективные

параметры, возникшие вследствие принятых упрощений, настраиваются в соответствии с экспериментальными данными. Такой подход показал свою применимость при расчете сечений различных процессов парного рождения тяжелого кваркония [52–54, 70–72]. В частности, в работах [54, 70] был принят следующий вид эффективного релятивистского гамильтониана:

$$\begin{aligned}
H &= H_0 + \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3, \\
H_0 &= 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - 2m - \frac{C_F \tilde{\alpha}_s}{r} + Ar + B, \\
\Delta U_1(r) &= -\frac{C_F \alpha_s^2}{4\pi r} [2\beta_0 \ln(\mu r) + a_1 + 2\gamma_E \beta_0], \\
a_1 &= \frac{31}{3} - \frac{10}{9} n_f, \quad \beta_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f, \\
\Delta U_2(r) &= -\frac{C_F \alpha_s}{2m^2 r} \left[\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{p})\mathbf{p}}{r^2} \right] + \frac{\pi C_F \alpha_s}{m^2} \delta(\mathbf{r}) + \frac{3C_F \alpha_s}{2m^2 r^3} (\mathbf{S}\mathbf{L}) - \\
&\quad - \frac{C_F \alpha_s}{2m^2} \left[\frac{\mathbf{S}^2}{r^3} - 3\frac{(\mathbf{S}\mathbf{r})^2}{r^5} - \frac{4\pi}{3} (2\mathbf{S}^2 - 3)\delta(\mathbf{r}) \right] - \frac{C_A C_F \alpha_s^2}{2mr^2}, \\
\Delta U_3(r) &= f_V \left[\frac{A}{2m^2 r} \left(1 + \frac{8}{3} \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \right) + \frac{3A}{2m^2 r} \mathbf{L}\mathbf{S} + \frac{A}{3m^2 r} \left(\frac{3}{r^2} (\mathbf{S}_1 \mathbf{r})(\mathbf{S}_2 \mathbf{r}) - \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \right) \right] - \\
&\quad - (1 - f_V) \frac{A}{2m^2 r} \mathbf{L}\mathbf{S},
\end{aligned} \tag{1.25}$$

где $\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$, $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$, n_f — число ароматов, $C_A = 3$ и $C_F = 4/3$ — цветовые факторы группы $SU(3)$, γ_E — постоянная Эйлера. Слагаемое ΔU_1 в (1.25) соответствует поправке следующего порядка к кулоновскому члену в H_0 , тогда как ΔU_2 представляет собой КХД-обобщение хорошо известного в квантовой электродинамике потенциала Брейта [73–76]. Слагаемое ΔU_3 изначально введено для описания расщепления уровней P -волнового чармония и представляет вклад скалярного и векторного обменов в потенциал конфайнмента [77]. Доля векторного обмена f_V была выбрана равной $f_V = 0.7$, что обеспечивает оптимальное согласие с экспериментом. Масса c -кварка в модели составляет $m = m_c = 1.55 \text{ ГэВ}$. Для константы сильного взаимодействия в кулоновском члене в H_0 принимается трехпетлевой результат [78]:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_s(\mu) &= \frac{4\pi}{\beta_0\mathcal{L}} - \frac{4\pi b_1\mathcal{L}}{(\beta_0\mathcal{L})^2} + \frac{4\pi}{(\beta_0\mathcal{L})^3} [b_1^2(\ln^2\mathcal{L} - \ln\mathcal{L} - 1) + b_2], \\ \mathcal{L} &= \ln(\mu^2/\Lambda^2), \quad b_1 = \frac{64}{9}, \quad b_2 = \frac{3863}{54},\end{aligned}\tag{1.26}$$

тогда как в остальных слагаемых (1.25) используется однопетлевое приближение. Характерный масштаб передачи импульса в чармонии составляет величину порядка массы c -кварка, потому для точки перенормировки принимается $\mu = m = 1.55 \text{ ГэВ}$, что вместе с выбором $\Lambda = 0.168 \text{ ГэВ}$ приводит к значению $\alpha_s = 0.314$ для чармония. Параметры линейного потенциала $A = 0.18 \text{ ГэВ}^2$ и $B = -0.16 \text{ ГэВ}$ имеют типичные значения для кварковых моделей [66]. Рационализация оператора кинетической энергии в H_0 проводится в следующем виде:

$$\begin{aligned}2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - 2m &= 2\frac{\mathbf{p}^2 + m^2}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} - 2m \approx \frac{\mathbf{p}^2}{\frac{E}{2}} + \frac{2m^2}{E} - 2m = \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2\tilde{\mu}} + \frac{m^2}{\tilde{m}} - 2m,\end{aligned}\tag{1.27}$$

$$\tilde{m} = \frac{E}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{p}_{eff}^2 + m^2}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\tilde{m} \cdot \tilde{m}}{\tilde{m} + \tilde{m}} = \frac{\tilde{m}}{2},\tag{1.28}$$

что вводит в рассмотрение новый параметр модели \mathbf{p}_{eff}^2 , отвечающий эффективному учету релятивистских эффектов в кинетическом члене. Его значение выбирается равным $\mathbf{p}_{eff}^2 = 0.5 \text{ ГэВ}^2$ и $\mathbf{p}_{eff}^2 = 0.54 \text{ ГэВ}^2$ для S и P -волнового чармония, соответственно. Слагаемые, содержащие δ -функцию в (1.25) должны быть опущены для P -волновых состояний, тогда как для S -волнового чармония принимается аппроксимация $\delta(\mathbf{r}) \approx b^3/(\pi^{\frac{3}{2}})e^{-b^2r^2}$, $b = 1.5 \text{ ГэВ}$.

Сравнение спектра масс, полученного в рассматриваемой модели (1.25), с экспериментальными данными [60] представлено в Таблице 1. Численные результаты для S и P -волнового чармония демонстрируют ошибку менее 1%.

В нерелятивистском пределе гамильтониан (1.25) принимает вид

$$H_0^{\text{NR}} = 2 \times \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{C_F\alpha_s}{r} + Ar + B.\tag{1.29}$$

Таблица 1 — Основные параметры потенциальной модели чармония и сравнение численного спектра масс с экспериментальным

Мезон ($c\bar{c}$)	$n^{2S+1}L_J$	J^{PC}	f_V	$b,$ $\Gamma_{\Delta B}$	$\mathbf{p}_{eff}^2,$ $\Gamma_{\Delta B^2}$	$M^{num},$ $\Gamma_{\Delta B}$	M^{exp} [60], $\Gamma_{\Delta B}$
J/ψ	1^3S_1	1^{--}	0.7	1.5	0.5	3.072	3.097
η_c	1^1S_0	0^{-+}	0.7	1.5	0.5	2.988	2.984
χ_{c0}	1^3P_0	0^{++}	0.7	—	0.54	3.418	3.415
χ_{c1}	1^3P_1	1^{++}	0.7	—	0.54	3.493	3.511
χ_{c2}	1^3P_2	2^{++}	0.7	—	0.54	3.557	3.556
h_c	1^1P_1	1^{+-}	0.7	—	0.54	3.499	3.525

Сравнение результатов, полученных с помощью (1.29) и полного гамильтониана (1.25) позволяет определить характер изменений, вносимых рассматриваемыми релятивистскими эффектами в форму волновой функции.

Потенциальная модель, аналогичная (1.25), может быть построена и для связанных состояний тяжелых кварк–кварка или антикварк–антикварка: дваждытяжелых дикварков, представляющих интерес благодаря возможности получения предсказаний для сечений рождения дваждытяжелых барионов [37, 45]. Соответствующий эффективный гамильтониан, записанный в общем случае частиц разных масс, может быть представлен как [37, 74, 76, 80, 81]

$$\begin{aligned}
H &= H_0 + \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3, \\
H_0 &= \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_2^2} - m_1 - m_2 - \frac{2\tilde{\alpha}_s}{3r} + \frac{1}{2}Ar + \frac{1}{2}B, \\
\Delta U_1(r) &= -\frac{\alpha_s^2}{6\pi r} [2\beta_0 \ln(\mu r) + a_1 + 2\gamma_E \beta_0], \\
\Delta U_2(r) &= -\frac{\alpha_s}{3m_1 m_2 r} \left[\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{p})\mathbf{p}}{r^2} \right] + \frac{1}{3}\pi\alpha_s \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \delta(\mathbf{r}) + \\
&+ \frac{2\alpha_s}{3r^3} \left(\frac{1}{2m_1^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) (\mathbf{S}_1 \mathbf{L}) + \frac{2\alpha_s}{3r^3} \left(\frac{1}{2m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) (\mathbf{S}_2 \mathbf{L}) - \\
&- \frac{\alpha_s}{3m_1 m_2} \left[\frac{\mathbf{S}^2}{r^3} - 3\frac{(\mathbf{S}\mathbf{r})^2}{r^5} - \frac{4\pi}{3}(2\mathbf{S}^2 - 3)\delta(\mathbf{r}) \right] - \frac{(m_1 + m_2)\alpha_s^2}{2m_1 m_2 r^2},
\end{aligned}$$

Таблица 2 — Основные параметры потенциальной модели дикварков и сравнение численного спектра масс с другими подходами

Дикварк, $n^{2S+1}L_J$	f_V	$b,$ $\Gamma\partial B$	$\mathbf{p}_{eff}^2,$ $\Gamma\partial B^2$	$M^{num},$ $\Gamma\partial B$	M [36], $\Gamma\partial B$	M [83], $\Gamma\partial B$	M [84], $\Gamma\partial B$
$SD_{bc}, 1^1S_0$	0.9	1.5	0.32	6.517	6.48	6.558	6.519
$AVD_{bc}, 1^3S_1$	0.9	1.5	0.32	6.526	6.48	6.562	6.526
$AVD_{cc}, 1^3S_1$	0.9	1.5	0.26	3.224	3.16	3.238	3.226

$$\begin{aligned}
\Delta U_3(r) = & f_V \left[\frac{A}{8r} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) + \frac{2A}{3m_1m_2r} \mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 + \frac{A}{6m_1m_2r} \left(\frac{3}{r^2} (\mathbf{S}_1\mathbf{r})(\mathbf{S}_2\mathbf{r}) - \mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 \right) + \right. \\
& + \frac{A}{2r} \left(\frac{1}{4m_1^2} + \frac{1}{4m_2^2} + \frac{1}{m_1m_2} \right) \mathbf{L}\mathbf{S} + \frac{A}{8r} \left(\frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2} \right) \mathbf{L}(\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2) \left. \right] - \\
& - (1 - f_V) \left[\frac{A}{8r} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \mathbf{L}\mathbf{S} + \frac{A}{8r} \left(\frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2} \right) \mathbf{L}(\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2) \right].
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Массы b и c -кварков в рассматриваемой модели составляют $m_b = 4.88 \Gamma\partial B$ и $m_c = 1.55 \Gamma\partial B$, что приводит к значению $\alpha_s(\mu) = 0.265$ для дикварков, $\mu = 2m_1m_2/(m_1 + m_2)$. Остальные параметры модели аналогичны таковым для чармония за исключением доли векторного обмена, которая для дикварков принимается равной $f_V = 0.9$ и параметра \mathbf{p}_{eff}^2 , составляющего 0.32 и 0.26 $\Gamma\partial B^2$ для (bc) и (cc) дикварков, соответственно. Дикварки являются цветными объектами и не могут наблюдаться в свободном состоянии, поэтому сравнение численного спектра масс [82] проводится с результатами, полученными в других подходах [36, 83, 84], и приведено в таблице 2.

В нерелятивистском случае (1.30) сводится к выражению

$$H_0^{\text{NR}} = 2 \times \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{2\alpha_s}{3r} + \frac{1}{2}Ar + \frac{1}{2}B. \tag{1.31}$$

1.3 Сечение процесса $e^+e^- \rightarrow h_c + \chi_{cJ}$ с учетом релятивистских поправок

Сечение рождения пары мезонов h_c и χ_{cJ} , $J = 0, 1, 2$, в e^+e^- аннигиляции, соответствующее амплитуде (1.22), имеет следующий вид [54]:

$$\begin{aligned} \sigma[e^+e^- \rightarrow h_c + \chi_{cJ}] &= \frac{8\pi r^6 \alpha^2 \alpha_s^2}{81s M_0^{10} \kappa^4 u^{11} (1-u)^{11}} \sqrt{1-r^2} \sqrt{1-(2u-1)^2 r^2} \times \\ &\times f^{(J)}(\kappa, u; r) |\tilde{R}'_{h_c}(0)|^2 |\tilde{R}'_{\chi_{cJ}}(0)|^2 \sum_{i=0}^7 \omega_i F_i(\kappa, u; r), \quad (1.32) \\ f^{(0)} &= u^4(1-u)^2, \quad f^{(1)} = \kappa^2/r^2, \quad f^{(2)} = 1/16. \end{aligned}$$

Релятивистский параметр $\tilde{R}'(0)$ определяется как

$$\tilde{R}'(0) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\epsilon(p) + m}{2\epsilon(p)} R(p) p^3 dp \quad (1.33)$$

и представляет собой обобщение первой производной радиальной волновой функции в начале координат $R'(0) = 1/3 \sqrt{2/\pi} \int R(p) p^3 dp$, которая входит в нерелятивистское выражение для сечения. Непертурбативные параметры ω_i выражаются через интегралы от релятивистской волновой функции чармония:

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^\infty \frac{\epsilon(p) + m}{2\epsilon(p)} R(p) p^3 dp, \quad J_n = \int_0^m p^3 R(p) \frac{\epsilon(p) + m}{2\epsilon(p)} \left(\frac{m - \epsilon(p)}{m + \epsilon(p)} \right)^n dp, \\ \omega_0 &= 1, \quad \omega_1 = \frac{J_1(h_c)}{J_0(h_c)}, \quad \omega_2 = \frac{J_2(h_c)}{J_0(h_c)}, \quad \omega_3 = \omega_1^2, \\ \omega_4 &= \frac{J_1(\chi_{cJ})}{J_0(\chi_{cJ})}, \quad \omega_5 = \frac{J_2(\chi_{cJ})}{J_0(\chi_{cJ})}, \quad \omega_6 = \omega_4^2, \quad \omega_7 = \omega_1 \omega_4. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Численные выражения для функций F_i из (1.32), соответствующие массе c -кварка $m = 1.55 \text{ ГэВ}$ и экспериментально наблюдаемым массам мезонов, приведены в приложении А.

Сечение (1.32) содержит два вида релятивистских поправок. Поправки первого типа соответствуют учету ненулевого относительного импульса кварков и антикварков в амплитуде рождения (1.22) и проявляются в виде суммы по функциям F_i , $i = 0, \dots, 7$. Функция F_0 представляет вклад из амплитуды лидирующего порядка, тогда как остальные функции $F_{i>0}$ соответствуют вкладам

относительного порядка p^2 и q^2 , выделенным в результате разложений (1.18), а также учитываемым посредством закона преобразования волновых функций (1.17). Второй вид релятивистских эффектов связан с изменением формы волновых функций чармония $R(p)$ вследствие учета релятивистских поправок в операторе взаимодействия кварка и антикварка в связанном состоянии (1.25). Данные поправки содержатся в определении непертурбативных параметров $\tilde{R}'(0)$ и ω_i . Нахождение волновых функций чармония осуществляется посредством численного решения уравнения Шредингера с эффективным релятивистским гамильтонианом (1.25) с помощью модифицированной версии программы *schroed32* [85]. Далее, полученные волновые функции используются для расчета интегралов и определения параметров (1.33), (1.34), численные значения которых приведены в Таблице 3. Отметим, что определения (1.34) релятивистских интегралов $I_{1,2}$ содержат обрезание на величине массы тяжелого кварка $\Lambda = m$. Данные интегралы являются полностью сходящимися благодаря сохранению точного вида релятивистского нормировочного множителя в (1.17), однако рассматриваемая потенциальная модель не может обеспечить надлежащей точности определения волновой функции в регионе $p \gtrsim m$. При этом подынтегральные выражения $I_{1,2}$ содержат дополнительные факторы роста p^2 и p^4 , которые, таким образом, могут привести к существенным погрешностям в случае включения рассматриваемого региона импульсов в область интегрирования. Наконец, дополнительный вид релятивистских поправок, учитываемых в (1.32), связан с эффектами связанности и определяется ненулевыми значениями энергии связи $W = M - 2m \neq 0$, так что $\kappa \neq 1/4$, $u \neq 1/2$.

В нерелятивистском пределе нулевого относительного импульса и нулевой энергии связи в сумме из правой части (1.32) сохраняется только слагаемое $F_0(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; r)$, и сечения (1.32) переходят в соответствующие нерелятивистские выражения, полученные в рамках НРКХД в лидирующем порядке по скорости тяжелого кварка [18]:

Таблица 3 — Значения непертурбативных параметров P -волнового чармония, входящих в сечения (1.32)

Мезон ($c\bar{c}$)	$n^{2S+1}L_J$	J^{PC}	$M^{exp},$ $\Gamma\Delta B$	$R'(0),$ $\Gamma\Delta B^{5/2}$	$\tilde{R}'(0),$ $\Gamma\Delta B^{5/2}$	$\omega_{1,4}$	$\omega_{2,5}$
χ_{c0}	1^3P_0	0^{++}	3.415	0.26	0.33	-0.039	0.0041
χ_{c1}	1^3P_1	1^{++}	3.511	0.26	0.20	-0.052	0.0051
χ_{c2}	1^3P_2	2^{++}	3.556	0.26	0.13	-0.067	0.0062
h_c	1^1P_1	1^{+-}	3.525	0.26	0.17	-0.058	0.0056

$$\begin{aligned}
\sigma^{\text{NR}}[e^+e^- \rightarrow h_c + \chi_{c0}] &= \frac{\pi\alpha^2\alpha_s^2}{162 m^{12}} |R'(0)|^4 r^8 (1-r^2)^{\frac{3}{2}} (6-r^2)^2, \\
\sigma^{\text{NR}}[e^+e^- \rightarrow h_c + \chi_{c1}] &= \frac{\pi\alpha^2\alpha_s^2}{54 m^{12}} |R'(0)|^4 r^6 (1-r^2)^{\frac{3}{2}} (3+13r^2(2-r^2)^2), \quad (1.35) \\
\sigma^{\text{NR}}[e^+e^- \rightarrow h_c + \chi_{c2}] &= \frac{\pi\alpha^2\alpha_s^2}{324 m^{12}} |R'(0)|^4 r^8 (1-r^2)^{\frac{3}{2}} (7r^4 + 3(4-5r^2)^2).
\end{aligned}$$

Численные результаты для сечения рождения пары мезонов h_c и χ_{cJ} в e^+e^- аннигиляции (1.32), соответствующие энергии $\sqrt{s} = 10.6 \text{ ГэВ}$ экспериментов Belle и BABAR [14, 15], представлены в Таблице 4. Нерелятивистское значение параметра $R'(0)$ может быть получено путем решения уравнения Шредингера с потенциалом (1.29) и составляет $R'(0) = 0.26 \text{ ГэВ}^{5/2}$. Нерелятивистские значения сечения (1.35), рассчитанные в соответствии с данным параметром, приведены в третьем столбце Таблицы 4. Различие полученных нерелятивистских результатов с предсказаниями работы [18], представленными во втором столбце, объясняется отличиями в параметрах двух подходов, таких как константа α_s , масса c -кварка m , а также величина матричного элемента НРКХД $\langle O_1 \rangle_{\chi_{cJ}}$, связанного с $R'(0)$. Для мезонов h_c и χ_{c1} , χ_{c2} в [18] используется оценка $R'(0) \approx 0.27 \text{ ГэВ}^{5/2}$, близкая к полученному нерелятивистскому значению, тогда как для χ_{c2} применяется меньшая величина $R'(0) \approx 0.19 \text{ ГэВ}^{5/2}$. В свою очередь, рассматриваемая модель (1.29) также предсказывает уменьшение данного параметра до значения $\tilde{R}'(0) = 0.13 \text{ ГэВ}^{5/2}$ за счет влияния релятивистских эффектов на форму волновой функции (Таблица 3). В последнем столбце

Таблица 4 — Релятивистские и нерелятивистские сечения процесса $e^+e^- \rightarrow h_c + \chi_{cJ}$ при энергии $\sqrt{s} = 10.6 \text{ ГэВ}$

Пара	$\sigma^{\text{НРКХД}}$ [18], фб	σ^{NR} (1.35), фб	σ (1.32), фб
$h_c + \chi_{c0}$	0.053 ± 0.019	0.135	0.076 ± 0.038
$h_c + \chi_{c1}$	0.258 ± 0.064	0.601	0.096 ± 0.048
$h_c + \chi_{c2}$	0.017 ± 0.002	0.035	0.0024 ± 0.0013

Таблицы 4 представлены результаты расчета сечения по релятивистской формуле (1.32) с использованием наблюдаемых масс мезонов.

Полученные результаты показывают, что релятивистские эффекты значимым образом понижают сечения рождения пары P -волнового чармония. Основная роль принадлежит влиянию изменения формы волновой функции на параметры $\tilde{R}'(0)_{h_c}$ и $\tilde{R}'(0)_{\chi_{cJ}}$, каждый из которых входит в выражение для сечения (1.32) в квадрате. Частица h_c , для которой падение $R'(0)$ составляет около 30%, входит в каждую из рассматриваемых пар, что обуславливает более чем двукратное снижение сечения. Как следует из таблицы 3, релятивистские эффекты приводят к росту величины $\tilde{R}'(0)_{\chi_{c0}}$, которого, однако, оказывается недостаточно для компенсации уменьшения $\tilde{R}'(0)_{h_c}$, в результате чего сечение $\sigma[h_c + \chi_{c0}]$ падает на 30%. В случае остальных пар, аналогичное падение происходит в 4 и 10 раз, соответственно. Релятивистские эффекты, связанные с разложением амплитуды, составляют -10% , $+10\%$ и $+80\%$ для трех пар мезонов, однако даже существенный их вклад в сечение $\sigma[h_c + \chi_{c2}]$ не может полностью скомпенсировать падение за счет волновой функции. Наконец, вклады от эффектов связанности также оказываются отрицательными и уменьшают сечения на 30%, в 2.5 и 4 раза, что приводит к окончательным результатам, представленным в последнем столбце Таблицы 4. Таким образом, совокупность рассматриваемых поправок приводит к существенному падению сечений $\sigma[e^+e^- \rightarrow h_c + \chi_{cJ}]$, $J = 0, 1, 2$. Невысокие величины полученных сечений вполне согласуются с тем фактом, что ни одна из рассматриваемых реакций по

настоящее время не была измерена экспериментально. При этом нерелятивистское предсказание даже для наименее подавленного процесса $e^+e^- \rightarrow h_c + \chi_{c1}$ составляет всего 0.6 фб , что более чем на порядок меньше измеренных сечений рождения пар $J/\psi + \eta_c$ и $J/\psi + \chi_{c0}$ [14, 15]. Малая значимость сигналов, отвечающих P -волновой паре, отмечена и в последующих исследованиях Belle [86].

Основная ошибка проведенного расчета сечения (1.32) может быть отнесена к неопределенности в форме волновой функции, которая существенным образом определяет конечный результат посредством множителя $|\tilde{R}'_{h_c}(0)|^2 |\tilde{R}'_{\chi_{cJ}}(0)|^2$. В случае ошибки в определении волновой функции не более 10%, погрешность итогового результата может достигать 40%, что означает высокую чувствительность сечения к величине параметра $\tilde{R}'(0)$. Приведенная оценка для погрешности волновой функции является несколько приближенной, однако она может быть косвенно обоснована высокой точностью определения спектра масс, который показывает хорошее согласие с экспериментальными данными уже после включения поправок второго порядка в потенциал (Таблица 1). Второй вид ошибок связан с использованием разложений пропагаторов (1.18) в амплитуде процесса и может быть оценен на основе характерной величины скорости тяжелого кварка в чармонии $\langle v^2 \rangle = 0.3$. Таким образом, неопределенности, связанные с последующими членами разложения, полагаются равными в 30% от полученного результата. Отметим, что при выводе релятивистских поправок к амплитуде не применялось разложений по отношению относительного импульса к массе тяжелого кварка p/m , тогда как параметры использованных разложений (1.18) имеют порядок p/\sqrt{s} и являются малыми величинами. Наконец, существует неопределенность, связанная с введением обрезания $\Lambda = m$ при определении релятивистских интегралов (1.34), которую можно также оценить в 30% от их вклада в сечение. Данные вклады малы для пар с χ_{c0} и χ_{c1} , так что указанная погрешность становится существенной только в случае $h_c + \chi_{c2}$ и составляет 25%. Суммируя названные вклады, можно получить ошибку в 50% (55% для χ_{c2}), явным образом представленную в последнем столбце Таблицы 2.

1.4 Парное рождение дваждытяжелых дикварков

Достигнутые на B фабриках светимости в $\mathcal{L} = 10^{34} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ делают возможной постановку вопроса об изучении дваждытяжелых барионов $\Xi_{QQ'}$, $\Omega_{QQ'}$ в данных экспериментах. При этом в области вблизи порога образования дваждытяжелых барионов в e^+e^- аннигиляции может оказаться существенным вклад в сечение процессов парного рождения [37]. Данные процессы впервые были изучены в рамках нерелятивистского формализма в работе [46] на основе дикварковой модели, где, в частности, была получена оценка на выход дваждытяжелых барионов (ccq) в 10^3 событий в год для B фабрик рассматриваемой светимости. Из результатов [46] следует, что сечение парного рождения дваждытяжелых барионов составляет около 10% от соответствующей величины для случая одиночного рождения.

Оценки для сечений рождения дваждытяжелых барионов могут быть получены на основе расчета сечений рождения дваждытяжелых дикварков: компактных пар кварк–кварка или антикварк–антикварка в антисимметричном цветовом состоянии, которые после своего образования могут с высокой вероятностью присоединить легкий кварк и адронизоваться в наблюдаемые барионы [37, 45, 87–96]. Характерный радиус дикварка существенно меньше масштаба длины непертурбативных КХД взаимодействий, $r \ll \Lambda_{\text{КХД}}^{-1}$, таким образом, при взаимодействии с легким кварком дикварк проявляет себя идентично антикварку в мезоне. Расчет сечений парного рождения дикварков в [46] проводился в нерелятивистском приближении по скорости тяжелого кварка, релятивистские поправки к которому, как известно для случая парного рождения чармония [18–27, 51–54, 97, 98], могут составлять существенную величину. В настоящем разделе приводится вычисление релятивистских поправок к рассматриваемому процессу в рамках квазипотенциального подхода [79].

Диаграммы лидирующего порядка по константе сильного взаимодействия α_s , описывающие парное рождение дикварков D_{bc} и $\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$ в e^+e^- аннигиляции,

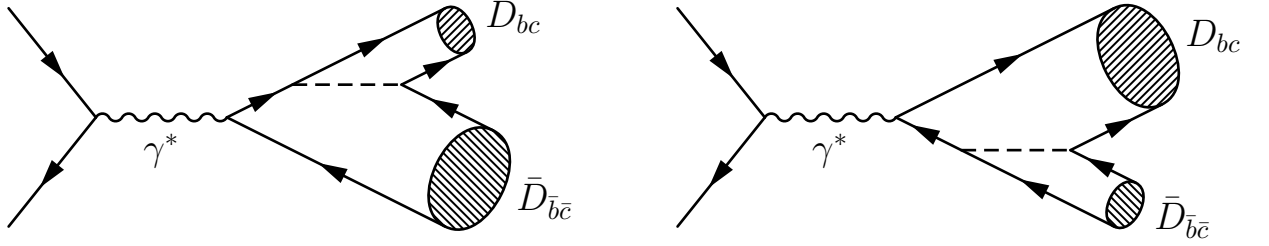


Рисунок 2 — Диаграммы рождения пары дикварков
в лидирующем порядке по α_s

представлены на Рисунке 2, где штриховая линия соответствует глюону. Две оставшиеся диаграммы могут быть получены перестановкой ароматов кварков в вершинах. Процесс рождения пары дикварков происходит в две стадии. На первом этапе, описываемом в рамках пертурбативной КХД, виртуальные глюон и фотон на Рисунке 2 приводят к образованию пары тяжелых кварков (bc) и пары тяжелых антикварков ($\bar{b}\bar{c}$) с четырехимпульсами:

$$\begin{aligned}
 p_{1,2} &= \eta_{1,2}P \pm p, & (pP) &= 0; & q_{1,2} &= \rho_{1,2}Q \pm q, & (qQ) &= 0, \\
 \eta_{1,2} &= \frac{M_{D_{bc}}^2 \pm m_c^2 \mp m_b^2}{2M_{D_{bc}}^2}, & \rho_{1,2} &= \frac{M_{\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}}^2 \pm m_c^2 \mp m_b^2}{2M_{\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}}^2},
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

где P и Q — полные четырехимпульсы дикварков D_{bc} и $\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$, а $p = L_P(0, \mathbf{p})$ и $q = L_Q(0, \mathbf{q})$ — относительные четырехимпульсы кварков и антикварков, определяемые преобразованием Лоренца четырехвекторов $(0, \mathbf{p})$ и $(0, \mathbf{q})$ к системам отсчета движущихся дикварков. Четырехимпульсы $p_{1,2}$ тяжелых кварков c, b и $q_{1,2}$ тяжелых антикварков \bar{c}, \bar{b} не находятся на массовой оболочке: $p_{1,2}^2 = \eta_{1,2}^2 P^2 - \mathbf{p}^2 = \eta_{1,2}^2 M_{D_{bc}}^2 - \mathbf{p}^2 \neq m_{c,b}^2$, $q_{1,2}^2 = \rho_{1,2}^2 Q^2 - \mathbf{q}^2 = \rho_{1,2}^2 M_{\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}}^2 - \mathbf{q}^2 \neq m_{c,b}^2$. Таким образом, выражения (1.36) описывают симметричный сход тяжелых кварков и антикварков с массовой поверхности.

Вторая стадия рассматриваемого процесса является полностью непертурбативной и заключается в образовании тяжелых дикварков из пар кварк–кварк и антикварк–антикварк, для описания которого используются соответствующие квазипотенциальные волновые функции.

В общем случае, амплитуда рассматриваемого процесса представляет сверт-

ку пертурбативной амплитуды рождения пар кварков и антикварков и квазипотенциальных волновых функций дикварков $\Psi_{D_{bc}}$, $\Psi_{\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}}$, аналогично соотношению (1.1). В лидирующем порядке по α_s , амплитуда может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}[e^+e^- \rightarrow D_{bc} + \bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}](p_-, p_+; P, Q) &= -\frac{8\pi^2\alpha}{3s} \sqrt{M_{D_{bc}} M_{\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}}} \bar{v}(p_+) \gamma_\beta u(p_-) \delta^{ij} \times \\
&\times \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{\bar{\Psi}_{D_{bc}}^0(\mathbf{p})}{\sqrt{\frac{\epsilon_c(p)}{m_c} \frac{(\epsilon_c(p)+m_c)}{2m_c} \frac{\epsilon_b(p)}{m_b} \frac{(\epsilon_b(p)+m_b)}{2m_b}}} \frac{\bar{\Psi}_{\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}}^0(\mathbf{q})}{\sqrt{\frac{\epsilon_c(q)}{m_c} \frac{(\epsilon_c(q)+m_c)}{2m_c} \frac{\epsilon_b(q)}{m_b} \frac{(\epsilon_b(q)+m_b)}{2m_b}}} \times \\
&\quad \times \text{Tr}\{\mathcal{T}_{12}^\beta + \kappa \mathcal{T}_{34}^\beta\}, \\
\mathcal{T}_{12}^\beta(p, q; c, b) &= \mathcal{Q}_c \alpha_b \left[\frac{\hat{v}_1 - 1}{2} + \hat{v}_1 \frac{\mathbf{p}^2}{2m_b(\epsilon_b(p) + m_b)} - \frac{\hat{p}}{2m_b} \right] \Sigma_{S,AV}^1(1 + \hat{v}_1) \times \\
&\quad \times \left[\frac{\hat{v}_1 + 1}{2} + \hat{v}_1 \frac{\mathbf{p}^2}{2m_c(\epsilon_c(p) + m_c)} + \frac{\hat{p}}{2m_c} \right] \left[\gamma^\beta \frac{\hat{p}_1 - \hat{l} + m_c}{(l - p_1)^2 - m_c^2} \gamma_\mu + \right. \\
&\quad \left. + \gamma_\mu \frac{\hat{l} - \hat{q}_1 + m_c}{(l - q_1)^2 - m_c^2} \gamma^\beta \right] D^{\mu\nu}(k_2) \left[\frac{\hat{v}_2 - 1}{2} + \hat{v}_2 \frac{\mathbf{q}^2}{2m_c(\epsilon_c(q) + m_c)} + \frac{\hat{q}}{2m_c} \right] \times \\
&\quad \times \Sigma_{S,AV}^2(1 + \hat{v}_2) \left[\frac{\hat{v}_2 + 1}{2} + \hat{v}_2 \frac{\mathbf{q}^2}{2m_b(\epsilon_b(q) + m_b)} - \frac{\hat{q}}{2m_b} \right] \gamma_\nu, \\
\mathcal{T}_{34}^\beta(p, q; c, b) &= \mathcal{T}_{12}^\beta(-p, -q; b, c),
\end{aligned} \tag{1.37}$$

где $\mathcal{Q}_{c,b}$ — заряд кварков; $\alpha_{c,b} = \alpha_s \left(\frac{m_{c,b}^2}{M^2 s^2} \right)$, $M = m_c + m_b$; $\epsilon_{c,b}(p) = \sqrt{m_{c,b}^2 + \mathbf{p}^2}$; $D^{\mu\nu}(k)$ — глюонный пропагатор, $k_{1,2} = p_{1,2} + q_{1,2}$, $l = p_- + p_+ = P + Q$. Проекционные операторы $\Sigma_{S,AV}^{1,2}$ в (1.37) выбираются равными γ_5 и $\hat{\epsilon}_{P,Q}$ в случае скалярного (S) и аксиально-векторного (AV) дикварка, $\epsilon_{P,Q}$ — вектор поляризации. Константа κ равна $+1$ в случае рождения $S - S$ или $AV - AV$ пар дикварков, и $\kappa = -1$ для случая пары $S - AV$. В амплитуде (1.37) учтен общий множитель, происходящий в результате суммирования антисимметричных цветовых компонент дикварков с цветовой частью амплитуды $\frac{1}{\sqrt{2}} e_{ic_1c_2} \frac{1}{\sqrt{2}} e_{jc_3c_4} T_{c_1c_3}^a T_{c_2c_4}^a = -\frac{2}{3} \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Релятивистские факторы, возникающие вследствие закона преобразования волновых функций дикварков $\Psi_{D_{bc}}^0(\mathbf{p})$ и $\Psi_{\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}}^0(\mathbf{q})$ из системы покоя к системам отсчета, движущимся с четырехимпульсами P и Q (1.5), в явном виде включены в амплитуду (1.37).

Квазипотенциальные волновые функции и подинтегральное выражение амплитуды (1.37) не содержат в своем определении δ -функций $\delta(\mathbf{p}^2 - \eta_{1,2}^2 M_{D_{bc}}^2 + m_{c,b}^2)$ или $\delta(\mathbf{q}^2 - \rho_{1,2}^2 M_{\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}}^2 + m_{c,b}^2)$. Роль δ -функции принадлежит более сложным факторам, а также, волновым функциям в системе покоя дикварков $\Psi_{D_{bc}}^0(\mathbf{p})$ и $\Psi_{\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}}^0(\mathbf{q})$. Таким образом, в выражении (1.37) не предполагается замен $\epsilon_1(\mathbf{p}) + \epsilon_2(\mathbf{p}) = M_{D_{bc}}$ или $\epsilon_1(\mathbf{q}) + \epsilon_2(\mathbf{q}) = M_{\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}}$ и проводится интегрирование по относительным импульсам кварков и антикварков в системе покоя \mathbf{p} и \mathbf{q} . Амплитуда (1.37) содержит спиновые проекционные операторы, точные во всех порядках разложения по $|\mathbf{p}|/m$ [24]. Ранее, подобные спиновые проекторы были получены в [99, 100], где они выражены через относительные импульсы тяжелых кварков $p_{1,2}$, лежащие на массовой поверхности. Отметим, что в рамках квазипотенциального подхода присутствие функций $\delta(pP)$ и $\delta(qQ)$ позволяет провести интегрирование по относительным энергиям p_0 и q_0 при записи амплитуды рождения в виде свертки пертурбативной амплитуды с двумя волновыми функциями Бете–Солпитера для дикварков. В системе покоя связанного состояния налагается условие $p_0 = 0$, которое позволяет исключить параметр относительной энергии из волновых функций Бете–Солпитера. Волновые функции Бете–Солпитера в общем случае удовлетворяют сложному двухчастичному уравнению, не имеющему известных решений. Кроме того, с ними связаны такие известные проблемы, как отсутствие традиционной квантовомеханической вероятностной интерпретации, сложности в трактовке параметра относительного времени (энергии) и практическое отсутствие возможности сформулировать граничные условия, исходя из каких-либо физических предположений [55, 101]. Для устранения данных недостатков был предложен подход ковариантной одновременной формулировки квантовой теории поля, или трехмерный квазипотенциальный подход [62]. В настоящей работе приближения к квазипотенциальным волновым функциям строятся на основе численного решения уравнения Шредингера с эффективным гамильтонианом (1.30). При этом проекция амплитуды $\mathcal{T}(p_1, p_2; q_1, q_2)$ в (1.1) или (1.37) на положительные энергетические

состояния, как того требует используемый формализм, производится посредством биспиноров Дирака (волновых функций свободных кварков). В таком случае, можно следующим образом сформулировать физическую интерпретацию амплитуды парного рождения: пары кварков и антикварков, рожденные в e^+e^- аннигиляции вне массовой оболочки, в ходе нетривиального процесса сперва переходят на массовую оболочку (свободные биспиноры Дирака), а затем формируют связанные состояния. В спиновых проекторах в общем случае $\mathbf{p}^2 \neq \eta_{1,2}^2 M_{D_{bc}}^2 - m_{c,b}^2$, точно также как и в подынтегральном выражении амплитуды (1.37) или в вершинных функциях $\Gamma_{1,2}$ (1.16). Таким образом, не имеет смысла говорить о том, находятся ли кварки на массовой оболочке или вне ее в проекционных операторах, входящих в состав амплитуды (1.37) или общих определений волновых функций (1.17), поскольку данные структуры должны рассматриваться как форм-факторы перехода тяжелых кварков из свободных состояний в связанные состояния.

При записи амплитуды (1.37) использовались спиновые волновые функции векторных и скалярных дикварков:

$$\begin{aligned} u_i(0)u_j(0) &= \left[\frac{1 + \gamma_0}{2\sqrt{2}} \hat{\varepsilon}_{AV}(\gamma_5) C \right]_{ij}, \\ v_i(0)v_j(0) &= \left[\frac{1 - \gamma_0}{2\sqrt{2}} \hat{\varepsilon}_{AV}(\gamma_5) C \right]_{ij}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

где C — матрица зарядового сопряжения, а вектор поляризации аксиально-векторного дикварка ε_{AV} берется в системе покоя мезона. Поскольку цветовые части волновых функций дикварков с идентичными кварками (cc) или (bb) являются антисимметричными, и пары кварк-кварк или антикварк-антикварк рассматриваются в основном S -волновом состоянии, то спиновые волновые функции должны быть симметричными. Таким образом, пары (cc) или (bb) могут образовать только аксиально-векторный дикварк со спином $S = 1$.

Для того чтобы выделить релятивистские поправки к амплитуде (1.37), обратные знаменатели кварковых и глюонных пропагаторов, последний из кото-

рых берется в Фейнмановской калибровке $D_{\mu\nu}^F(k) = -ig_{\mu\nu}/k^2$, должны быть разложены по степеням отношения относительных импульсов p и q к энергии в системе центра масс \sqrt{s} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(l - q_{1,2})^2 - m_{c,b}^2} &= \frac{1}{r_{b,cS}} \left[1 - \tilde{W}_{AV} \frac{(2r_{c,b} - 1)}{r_{b,c}} - \frac{(q^2 \mp 2lq)}{r_{b,cS}} + \dots \right], \\ \frac{1}{(l - p_{1,2})^2 - m_{c,b}^2} &= \frac{1}{r_{b,cS}} \left[1 - \tilde{W}_S \frac{(2r_{c,b} - 1)}{r_{b,c}} - \frac{(p^2 \mp 2lp)}{r_{b,cS}} + \dots \right], \\ \frac{1}{k_{1,2}^2} &= \frac{1}{r_{b,cS}^2} \left[1 - \frac{(1 - 2r_{b,c})}{r_{b,c}} (\tilde{W}_S + \tilde{W}_{AV}) \pm \frac{2(pQ + qP)}{r_{b,cS}} + \dots \right], \end{aligned} \quad (1.39)$$

где $r_{c,b} = m_{c,b}/M = m_{c,b}/(m_c + m_b)$. В (1.39) также проведено разложение по энергиям связи $W_{S,AV} = M_{S,AV} - m_b - m_c$ скалярных и аксиально-векторных дикварков, $\tilde{W}_{S,AV} = W_{S,AV}/M$. После подстановки (1.39) в (1.37), в итоговой амплитуде необходимо сохранить слагаемые вплоть до второго относительного порядка включительно по импульсам кварков и антикварков p и q . Затем, угловое интегрирование может быть проведено с помощью следующих соотношений для S -волновых функций:

$$\begin{aligned} \int \frac{\Psi_0^S(\mathbf{p})}{\sqrt{\frac{\epsilon_c(p)}{m_c} \frac{\epsilon_c(p)+m_c}{2m_c} \frac{\epsilon_b(p)}{m_b} \frac{\epsilon_b(p)+m_b}{2m_b}}} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_0^\infty \frac{p^2 R_S(p)}{\sqrt{\frac{\epsilon_c(p)}{m_c} \frac{\epsilon_c(p)+m_c}{2m_c} \frac{\epsilon_b(p)}{m_b} \frac{\epsilon_b(p)+m_b}{2m_b}}} dp, \\ \int \frac{p_\mu p_\nu \Psi_0^S(\mathbf{p})}{\sqrt{\frac{\epsilon_c(p)}{m_c} \frac{\epsilon_c(p)+m_c}{2m_c} \frac{\epsilon_b(p)}{m_b} \frac{\epsilon_b(p)+m_b}{2m_b}}} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} &= -\frac{g_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu}{3\sqrt{2}\pi} \int_0^\infty \frac{p^4 R_S(p)}{\sqrt{\frac{\epsilon_c(p)}{m_c} \frac{\epsilon_c(p)+m_c}{2m_c} \frac{\epsilon_b(p)}{m_b} \frac{\epsilon_b(p)+m_b}{2m_b}}} dp, \end{aligned} \quad (1.40)$$

где $R(p)$ — радиальная волновая функция в импульсном представлении, а вектор v принимает значения $v_1 = P/M_{D_{bc}}$ и $v_2 = Q/M_{\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}}$ для дикварков D_{bc} и $\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$, соответственно.

В конечном итоге, амплитуда (1.37) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[e^+e^- \rightarrow SD_{bc} + S\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}] &= -\frac{16\pi\alpha}{9s^6} \frac{M^3}{r_c^2 r_b^2 M_S^4} (v_2 - v_1)^\beta \bar{v}(p_+) \gamma_\beta u(p_-) \delta_{ij} [\tilde{R}_S(0)]^2 \times \\ &\times \left[\frac{Q_c \alpha_b}{r_b^3} F_{1,S} + \frac{Q_b \alpha_c}{r_c^3} F_{2,S} \right], \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[e^+e^- \rightarrow SD_{bc} + AV\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}] = & -\frac{16\pi\alpha}{9r_c^2r_b^2s^6} \frac{M^5}{M_S^2M_{AV}^2} \varepsilon_{\beta\alpha\sigma\lambda} \varepsilon_Q^\alpha v_1^\sigma v_2^\lambda \bar{v}(p_+) \gamma_\beta u(p_-) \times \\ & \times \delta_{ij} [\tilde{R}_S(0)\tilde{R}_{AV}(0)] \left[\frac{Q_c\alpha_b}{r_b^3} F_{1,SAV} - \frac{Q_b\alpha_c}{r_c^3} F_{2,SAV} \right], \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[e^+e^- \rightarrow AVD_{bc} + AV\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}] = & -\frac{16\pi\alpha}{9s^6} \frac{M^4}{r_c^2r_b^2M_{AV}^3} \bar{v}(p_+) \gamma_\beta u(p_-) \delta_{ij} [\tilde{R}_{AV}(0)]^2 \times \\ & \times \left[F_{1,AV}(v_2 - v_1)^\beta (\varepsilon_P \varepsilon_Q) + F_{2,AV}(v_2 - v_1)^\beta (v_2 \varepsilon_P)(v_1 \varepsilon_Q) + \right. \\ & \left. + F_{3,AV}[(v_1 \varepsilon_Q) \varepsilon_P^\beta - (v_2 \varepsilon_P) \varepsilon_Q^\beta] \right], \end{aligned} \quad (1.43)$$

где индексы S и AV характеризуют величины, относящиеся, соответственно, к скалярному и аксиально-векторному дикваркам. Коэффициенты $F_{i,S}$, $F_{i,SAV}$ и $F_{i,AV}$ включают вклад лидирующего порядка по скорости тяжелого кварка и релятивистские поправки к нему, которые могут быть описаны посредством вспомогательных функций

$$C_{ij}(p) = \left(\frac{\epsilon_c(p) - m_c}{\epsilon_c(p) + m_c} \right)^i \left(\frac{\epsilon_b(p) - m_b}{\epsilon_b(p) + m_b} \right)^j, \quad (1.44)$$

сумма индексов в определении которых не превышает двух, $i + j \leq 2$. Аналитические выражения для функций F из (1.41)–(1.43) приведены в приложении А.

Полные сечения, вычисленные на основе амплитуд (1.41)–(1.43), представляются в следующей форме:

$$\begin{aligned} \sigma[e^+e^- \rightarrow SD_{bc} + S\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}] = & \frac{16\pi\alpha^2}{81s^{11}} \frac{M^6}{r_c^4r_b^4M_S^{10}} |\tilde{R}_S(0)|^4 \left(1 - \frac{4M_S^2}{s} \right)^{3/2} \times \\ & \times \left[\frac{Q_c\alpha_b}{r_b^3} F_{1,S} + \frac{Q_b\alpha_c}{r_c^3} F_{2,S} \right]^2, \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned} \sigma[e^+e^- \rightarrow SD_{bc} + AV\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}] = & \frac{8\pi\alpha^2}{81r_c^4r_b^4s^{10}} \frac{M^{10}}{M_S^6M_{AV}^6} |\tilde{R}_S(0)|^2 |\tilde{R}_{AV}(0)|^2 \times \\ & \times \left[\left(1 - \frac{(M_S + M_{AV})^2}{s} \right) \left(1 - \frac{(M_S - M_{AV})^2}{s} \right) \right]^{3/2} \left[\frac{Q_c\alpha_b}{r_b^3} F_{1,SAV} - \frac{Q_b\alpha_c}{r_c^3} F_{2,SAV} \right]^2, \end{aligned} \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} \sigma[e^+e^- \rightarrow AV D_{bc} + AV \bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}] &= \frac{2\pi\alpha^2}{81s^{11}} \frac{M^8}{r_c^4 r_b^4 M_{AV}^8} |\tilde{R}_{AV}(0)|^4 \left(1 - \frac{4M_{AV}^2}{s}\right)^{3/2} (3F_A - F_B), \\ F_A &= F_{1,AV}^2(12 - 4\eta + \eta^2) + F_{1,AV}F_{2,AV}(8\eta - 6\eta^2 + \eta^3) + F_{1,AV}F_{3,AV}(4\eta - 2\eta^2) + \\ &\quad + F_{2,AV}^2(4\eta^2 - 2\eta^3 + \frac{1}{4}\eta^4) + F_{2,AV}F_{3,AV}(4\eta^2 - \eta^3) + F_{3,AV}^2(2\eta + \eta^2), \\ F_B &= F_A - 4\eta F_{3,AV}^2, \quad \eta = s/M_{AV}^2. \end{aligned} \tag{1.47}$$

В случае рождения дикварков (cc) и ($\bar{c}\bar{c}$), состоящих из идентичных кварков или антикварков, в соответствующих выражениях (1.41)–(1.43) и (1.45)–(1.47) необходимо осуществить замены $\mathcal{Q}_b \rightarrow \mathcal{Q}_c$, $m_b \rightarrow m_c$. Кроме того, в амплитудах должен быть учтен дополнительный множитель $1/4$ ($1/16$ в сечении), обеспечивающий согласие с принципом исключения Паули [46, 79].

Параметр $\tilde{R}(0)$ для скалярных и аксиально-векторных дикварков имеет следующее определение:

$$\tilde{R}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{(\epsilon_c(p) + m_c)(\epsilon_b(p) + m_b)}{2\epsilon_c(p) 2\epsilon_b(p)}} R(p) p^2 dp \tag{1.48}$$

и представляет релятивистское обобщение нуля волновой функции в начале координат $R(0) = \sqrt{2/\pi} \int R(p) p^2 dp$, который должен использоваться в нерелятивистском пределе выражений (1.45)–(1.47). Посредством коэффициентов F_i в сечения (1.45)–(1.47) входит также ряд непертурбативных параметров ω_{nk} , определяемых с помощью волновых интегралов от функций C_{nk} (1.44):

$$\begin{aligned} I_{nk} &= \int_0^{m_c} p^2 R(p) \sqrt{\frac{(\epsilon_c(p) + m_c)(\epsilon_b(p) + m_b)}{2\epsilon_c(p) 2\epsilon_b(p)}} \left(\frac{\epsilon_c(p) - m_c}{\epsilon_c(p) + m_c}\right)^n \left(\frac{\epsilon_b(p) - m_b}{\epsilon_b(p) + m_b}\right)^k dp, \\ \omega_{nk} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{I_{nk}}{\tilde{R}(0)}, \quad 0 < n + k \leq 2. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Численные значения данных параметров, полученные в рамках модели с эффективным релятивистским гамильтонианом (1.30), представлены в Таблице 5. Все интегралы (1.49) являются полностью сходящимися, благодаря сохранению точных релятивистских нормировочных факторов, содержащих энергии кварков.

Таблица 5 — Значения непертурбативных параметров дваждытяжелых дикварков, входящих в сечения (1.45)–(1.47)

Дикварк	$M^{num},$ $\Gamma\mathfrak{B}$	$R(0),$ $\Gamma\mathfrak{B}^{3/2}$	$\tilde{R}(0),$ $\Gamma\mathfrak{B}^{3/2}$	ω_{10}	ω_{01}	ω_{11}	ω_{02}	ω_{20}
SD_{bc}	6.517	0.67	0.50	0.0383	0.0045	0.00039	0.00005	0.00314
AVD_{bc}	6.526	0.67	0.48	0.0384	0.0045	0.00038	0.00005	0.00308
AVD_{cc}	3.224	0.53	0.38	0.0323		0.0023		

Тем не менее, определения (1.49) включают обрезание при высоких импульсах $\Lambda = m_c$, связанное с недостаточной точностью отыскания волновой функции в данном регионе.

В нерелятивистском пределе нулевого относительного импульса все параметры ω_{nk} (1.49), которые входят в сечения (1.45)–(1.47) посредством коэффициентов $F_{i,S}$, $F_{i,SAV}$ и $F_{i,AV}$, обращаются в нуль, а массы дикварков берутся равными суммам масс составляющих кварков или антикварков $M = m_c + m_b$. В таком случае сечения (1.45)–(1.47) переходят в соответствующие выражения, полученные в работе [46] в лидирующем порядке по скорости тяжелого кварка, за исключением сечения рождения пары аксиально–векторных дикварков, которое имеет дополнительный множитель $1/8$, опущенный в [46]. Значения нуля волновой функции, полученные в рассматриваемой модели с нерелятивистским гамильтонианом (1.31), составляют $R(0) = 0.67 \Gamma\mathfrak{B}^{3/2}$ и $R(0) = 0.53 \Gamma\mathfrak{B}^{3/2}$ для (bc) и (cc) дикварков, соответственно, что хорошо согласуется с оценками $R(0) = 0.73 \Gamma\mathfrak{B}^{3/2}$ и $R(0) = 0.53 \Gamma\mathfrak{B}^{3/2}$ из [36].

Результаты численного расчета сечений (1.45)–(1.47) парного рождения дваждытяжелых дикварков в e^+e^- аннигиляции представлены в Таблице 6 при соответствующих значениях энергии в системе центра масс \sqrt{s} . С целью демонстрации роли различных типов рассматриваемых поправок, в Таблице 6 приведены также промежуточные результаты, отвечающие той или иной стадии учета релятивистских эффектов. Так, в третьем столбце приводится изначально-

но нерелятивистский результат, соответствующий выбору параметров $\omega_{nk} = 0$, $M = m_c + m_b$ и использованию параметра $R(0)$. В четвертом столбце Таблицы 6 в сечение включены релятивистские поправки к волновой функции, заключающиеся в замене $R(0)$ на $\tilde{R}(0)$ и существенно понижающие сечение. Согласно Таблице 5 соответствующее изменение в величине $R(0)$ составляет около 30%, что приводит к падению сечения практически в 4 раза. Далее, в пятом столбце Таблице 6, отражено влияние поправок порядка p^2 и q^2 из амплитуды, учитываемых посредством использования полных выражений для коэффициентов $F_{i,S}$, $F_{i,SAV}$ и $F_{i,AV}$ в (1.45)–(1.47) с релятивистскими значениями параметров ω_{nk} . Соответствующий вклад в сечение отвечает пертурбативной природе данных поправок и составляет около 40% для всех сечений, представленных в Таблице 6, за исключением случая рождения пары скалярных дикварков, для которого эта поправка составляет 150%. Последний столбец включает все рассматриваемые релятивистские поправки и представляет окончательный ответ. Для его получения, наряду с релятивистскими поправками к амплитуде и волновым функциям, рассматриваются также эффекты связанности, обусловленные ненулевыми энергиями связи скалярных и аксиально–векторных дикварков $W_{S,AV} = M_{S,AV} - m_c - m_b \neq 0$. При этом используются численные значения масс дикварков, представленные в Таблицах 2 и 5. Данный вид поправок также вносит отрицательный вклад в сечение в размере 10–30%. В совокупности, рассматриваемые поправки понижают нерелятивистское сечение практически в четыре раза, за исключением случая рождения пары скалярных дикварков, падение для которого составляет около 50%, благодаря значимому положительному вкладу релятивистских поправок к амплитуде. Для оценки итоговой погрешности могут быть применены рассуждения, аналогичные изложенным в конце раздела 1.3. Так, неопределенности, отвечающие релятивистским поправкам к волновым функциям и амплитуде, полагаются равными 30 и 40%, соответственно. Погрешность, связанная с обрезанием интегралов (1.49) на $\Lambda = m_c$, оценивается в 30% от их вклада в сечение и составляет 50% для пары $S - S$

Таблица 6 — Сечения процесса $e^+e^- \rightarrow \mathcal{D} + \bar{\mathcal{D}}$ с учетом различных источников релятивистских поправок

Пара	\sqrt{s} , $ГэВ$	σ^{NR} , $\phiб$	$\sigma^{\text{NR+WF}}$, $\phiб$	$\sigma^{\text{NR+WF+amp}}$, $\phiб$	σ (1.45)–(1.47), $\phiб$
$SD_{bc} + S\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$	15.0	0.0011	0.0003	0.0008	0.0006 ± 0.0004
$SD_{bc} + AV\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$	16.0	0.080	0.022	0.030	0.023 ± 0.012
$AVD_{bc} + AV\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$	16.0	0.204	0.051	0.068	0.050 ± 0.026
$AVD_{cc} + AV\bar{D}_{\bar{c}\bar{c}}$	7.6	0.422	0.112	0.155	0.111 ± 0.057
$AVD_{cc} + AV\bar{D}_{\bar{c}\bar{c}}$	10.6	0.078	0.021	0.029	0.026 ± 0.013

и 12% для всех остальных состояний. Итоговая погрешность составляет 71% для случая рождения пары скалярных дикварков и 51% в других случаях, что явным образом отражено в последнем столбце Таблицы 6.

Построение сечений (1.45)–(1.47) в зависимости от энергии в системе центра масс \sqrt{s} проведено на Рисунке 3. Из построений следует, что в случае рождения пары скалярных дикварков существует небольшой интервал энергий $16 \lesssim \sqrt{s} \lesssim 18$ $ГэВ$, в котором совокупность рассматриваемых поправок приводит к росту сечения, тогда как в случае остальных пар релятивистский результат всегда меньше нерелятивистского.

Полученные результаты могут быть использованы для оценки полных сечений рождения дваждытяжелых барионов в e^+e^- аннигиляции, поскольку вероятность присоединения легкого кварка к дикварку и последующей адронизации в барион близка к единице [45]. При этом вероятности образования барионов с различными легкими кварками относятся как $u : d : s \simeq 1 : 1 : 0.3$ [102, 103]. Таким образом, в случае рождения (cc) дикварка возможно образование барионов Ξ_{cc}^{++} и Ξ_{cc}^+ , с вероятностью в 43% для каждого, а также Ω_{cc}^+ с вероятностью 14%, тогда как рождение триждытяжелых барионов сильно подавлено. Наконец, в случае дикварков со спином $S = 1$ возможно образование барионов с различным значением полного углового момента $J = 1/2$ и $J = 3/2$, однако малые

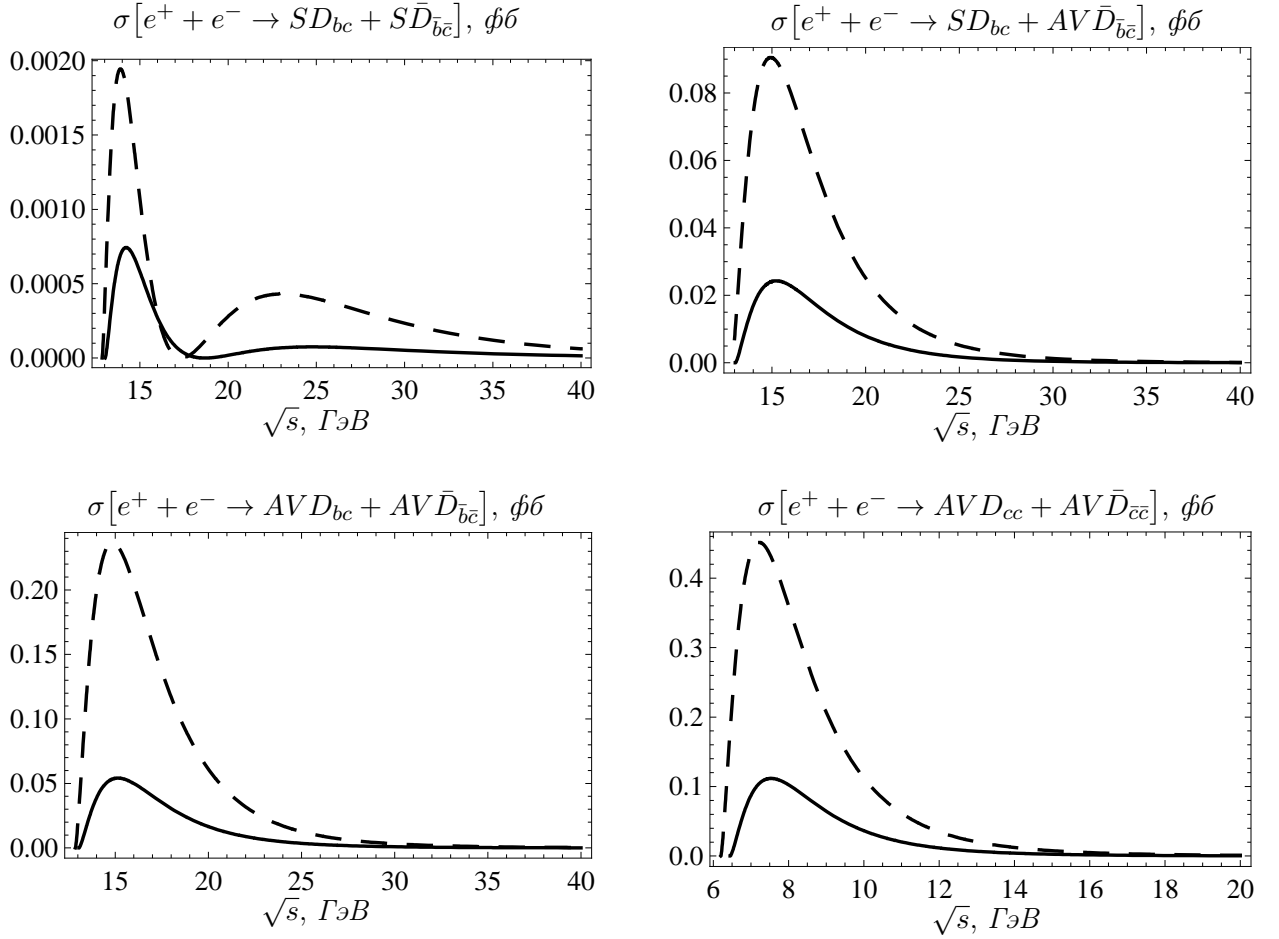


Рисунок 3 — Зависимость релятивистских и нерелятивистских сечений парного рождения дваждытяжелых дикварков от энергии \sqrt{s}

итоговые сечения рождения дикварков не позволяют говорить о возможности надежного распознавания всех рассматриваемых каналов. При светимости B фабрик в $\mathcal{L} = 10^{34} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$, оценка на выход пар дваждытяжелых барионов (ccq) составляет около 30 событий в год, что более чем на порядок меньше значения в 10^3 событий, приведенного в работе [46]. Согласие двух результатов наступает после принятия во внимание различия на множитель $1/8$ между (1.47) и [46], а также установленного фактора релятивистских поправок $K \approx 0.25$ [79].

2 Парное рождение чармония на ЛНС

В начале 2012 г. коллаборация LHCb опубликовала первый результат экспериментального измерения сечения парного рождения чармония J/ψ на Большом адронном коллайдере при энергии $\sqrt{S} = 7 \text{ ТэВ}$ [30]:

$$\sigma_{2 < y_{J/\psi} < 4.5}^{\text{LHCb}} = 5.1 \pm 1.0 \pm 1.1 \text{ нб}, \quad (2.1)$$

полученный на интегральной светимости 37.5 нб^{-1} при условии $2 < y_{J/\psi} < 4.5$ для быстрот каждого из образовавшихся чармониев, но, фактически, без ограничений на величину их поперечного импульса ($P_T < 10 \text{ ГэВ}$). Основной партонный подпроцесс $gg \rightarrow 2J/\psi$, дающий вклад в (2.1), хорошо изучен в рамках лидирующего порядка по α_s и нерелятивистского приближения [104–111]. Так, для полного, проинтегрированного по всем быстротам, сечения в работах [108] и [110] были получены оценки в 22 и 18 нб, соответственно. В рамках подхода k_t -факторизации соответствующее предсказание лежит в интервале 10–27 нб [109]. Для кинематического региона LHCb в работе [110] было получено значение:

$$\sigma_{2 < y_{J/\psi} < 4.5}^{\text{NRQCD}} = 4.1 \pm 1.2 \text{ нб},$$

что находится в хорошем согласии с экспериментом (2.1). Тем не менее, расчеты, выполненные в лидирующем порядке НРКХД как по скорости тяжелого кварка v , так и по константе сильного взаимодействия α_s , не являются полностью свободными от различных теоретических неопределенностей. Как и в случае парного рождения чармония в e^+e^- аннигиляции, существенную роль могут играть релятивистские поправки, связанные с относительным движением кварков и антикварков в мезоне [18–27, 51–54, 97, 98], и вклады следующих порядков по α_s [28, 29, 49, 50]. Вычисления поправок первого типа были проведены в рамках квазипотенциального подхода к релятивистской кварковой модели в [70–72] и с использованием формализма НРКХД в [112]. Расчет поправок NLO α_s осуществлен в недавно опубликованной работе [113]. Эффекты, связанные с отходом от коллинеарного приближения начальных партонов, рассмат-

ривались в подходе k_t -факторизации в [109] и с использованием численного моделирования в [110, 111, 114]. Интересным остается вопрос о возможности выявления вкладов двойного партонного рассеяния (DPS), которые по своей величине сопоставимы с процессом одиночного рассеяния $gg \rightarrow 2J/\psi$ [115–117], однако приводят к несколько отличающимся предсказаниям для кинематических распределений [114, 117, 118]. Наконец, расчеты НРКХД демонстрируют хорошее согласие с экспериментальным результатом LHCb [30], тогда как новые экспериментальные данные, полученные коллаборацией CMS при иных кинематических условиях [119], еще требуют дополнительной интерпретации [113].

2.1 Амплитуда рождения пары S -волнового чармония в протон–протонном взаимодействии

В рамках механизма однопартонного рассеяния, сечение рождение пары S -волнового чармония J/ψ или η_c в протон–протонном взаимодействии допускает представление в виде:

$$d\sigma[pp \rightarrow 2J/\psi(\eta_c) + X] = \sum_{i,j} \int d\sigma[ij \rightarrow 2J/\psi(\eta_c)] f_{i/p}(x_i, \mu) f_{j/p}(x_j, \mu) dx_i dx_j, \quad (2.2)$$

где $f(x, \mu)$ — соответствующие функции распределения, определяющие вероятность нахождения партона заданного типа в протоне, $x_{i,j}$ — партонные доли импульса, μ — шкала факторизации. При энергиях Большого адронного коллайдера $\sqrt{S} = 7$ или 14 ТэВ определяющий вклад в (2.2) принадлежит процессам глюонного слияния $gg \rightarrow 2J/\psi(\eta_c)$ [104, 120, 121], которые и будут рассматриваться в дальнейшем. В коллинеарном приближении и в пренебрежении массой протона, импульсы начальных глюонов приобретают вид $k_{1,2} = x_{1,2} \frac{\sqrt{S}}{2} (1, 0, 0, \pm 1)$ (pp пучок предполагается направленным вдоль оси z).

В квазипотенциальном подходе амплитуда глюонного подпроцесса $gg \rightarrow 2J/\psi(\eta_c)$ может быть представлена в виде свертки пертурбативной амплитуды образования пар кварков и антикварков $\mathcal{T}(p_1, p_2; q_1, q_2)$ и квазипотен-

циальных волновых функций чармония:

$$\mathcal{M}(k_1, k_2, P, Q) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \bar{\Psi}(p, P) \bar{\Psi}(q, Q) \otimes \mathcal{T}(p_1, p_2; q_1, q_2), \quad (2.3)$$

где импульсы $p_{1,2}$ кварка s и антикварка \bar{c} , составляющих первый мезон $J/\psi(\eta_c)$, и соответствующие величины $q_{2,1}$ для второй частицы $J/\psi(\eta_c)$ определяются, аналогично (1.2), как

$$p_{1,2} = \frac{1}{2}P \pm p, \quad (pP) = 0; \quad q_{1,2} = \frac{1}{2}Q \pm q, \quad (qQ) = 0,$$

$p = L_P(0, \mathbf{p})$, $q = L_Q(0, \mathbf{q})$, P и Q — полные импульсы первого и второго мезонов, соответственно. Переменные Мандельстама для глюонного подпроцесса, используемые в дальнейшем при записи сечения, имеют вид:

$$\begin{aligned} s &= (k_1 + k_2)^2 = (P + Q)^2 = x_1 x_2 S, \\ t &= (P - k_1)^2 = (Q - k_2)^2 = M^2 - x_1 \sqrt{S} (P_0 - |\mathbf{P}| \cos \phi), \\ u &= (P - k_2)^2 = (Q - k_1)^2 = M^2 - x_2 \sqrt{S} (P_0 + |\mathbf{P}| \cos \phi), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где M — масса чармония J/ψ или η_c , ϕ — угол между вектором \mathbf{P} и осью z . Поперечный импульс частицы P_T и ее энергия P_0 могут быть представлены как

$$P_T^2 = |\mathbf{P}|^2 \sin^2 \phi = -t - \frac{(M^2 - t)^2}{x_1 x_2 S}, \quad P_0 = \frac{x_1 x_2 \sqrt{S}}{x_1 + x_2} + \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} |\mathbf{P}| \cos \phi. \quad (2.5)$$

Быстроты конечных частиц $y_P = \frac{1}{2} \ln \frac{P_0 + P_{\parallel}}{P_0 - P_{\parallel}}$ и $y_Q = \frac{1}{2} \ln \frac{Q_0 + Q_{\parallel}}{Q_0 - Q_{\parallel}}$ выражаются посредством переменных интегрирования $x_{1,2}$ в (2.2) следующим образом:

$$y_{P,Q} = \frac{1}{2} \ln \frac{x_1}{x_2} \pm \frac{1}{2} \ln \left[\frac{s}{M^2 - t} - 1 \right]. \quad (2.6)$$

В лидирующем порядке по α_s существует 31 диаграмма Фейнмана, описывающая образование пары $J/\psi(\eta_c)$ путем глюонного слияния. Типовые диаграммы из этого набора представлены на Рисунке 4, а оставшиеся диаграммы могут быть получены обращением кварковых линий или перестановкой начальных глюонов. Дополнительный набор из 8 диаграмм, представленный на Рисунке 5, оказывается существенным только для процесса $gg \rightarrow 2\eta_c$, тогда как в случае рождения пары J/ψ вклады диаграмм этого набора взаимно сокращаются.

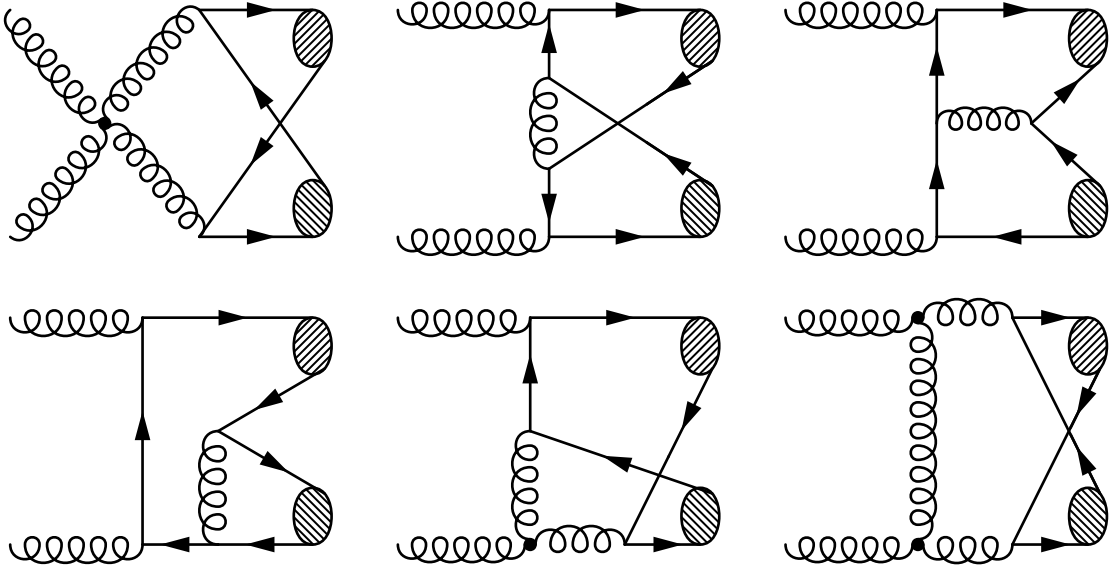


Рисунок 4 — Набор из 31 диаграммы лидирующего порядка для процесса $gg \rightarrow 2J/\psi(\eta_c)$. Оставшиеся диаграммы могут быть получены обращением кварковых линий или перестановкой начальных глюонов

Таким образом, парное рождение η_c описывается в общей сложности 39 диаграммами глюонного слияния. Наконец, еще 5 диаграмм, изображенных на Рисунке 6, приводят к нулевому вкладу за счет цветового фактора для J/ψ и η_c . В настоящем анализе рассматривается только цвето-синглетная модель рождения, поскольку октетные компоненты оказываются существенными лишь в области $P_T \gtrsim 5 \text{ ГэВ}$ [107, 108, 112], вклады из которой в общее сечение малы. Таким образом, цвето-синглетные вклады являются доминирующими как для полного сечения, так и для кинематического региона ЛНСб.

Амплитуда рождения пары J/ψ , вычисленная в калибровке Фейнмана, определяется выражением

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}[gg \rightarrow J/\psi J/\psi](k_1, k_2, P, Q) &= \frac{1}{9} M \pi^2 \alpha_s^2 \delta^{ab} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \text{Tr } \mathfrak{M}, \\
 \mathfrak{M} &= \mathcal{D}_1 \gamma_\beta \bar{\Psi}_{q,Q} \Gamma_1^\beta \bar{\Psi}_{p,P} \hat{\varepsilon}_2 \frac{m - \hat{k}_2 + \hat{p}_1}{(k_2 - p_1)^2 - m^2} + \mathcal{D}_2 \gamma_\beta \bar{\Psi}_{q,Q} \Gamma_2^\beta \bar{\Psi}_{p,P} \hat{\varepsilon}_1 \frac{m - \hat{k}_1 + \hat{p}_1}{(k_1 - p_1)^2 - m^2} + \\
 &+ \mathcal{D}_3 \bar{\Psi}_{q,Q} \Gamma_3^\beta \bar{\Psi}_{p,P} \gamma_\beta + \mathcal{D}_4 \bar{\Psi}_{p,P} \Gamma_4^\beta \bar{\Psi}_{q,Q} \gamma_\beta + \mathcal{D}_1 \bar{\Psi}_{q,Q} \Gamma_5^\beta \bar{\Psi}_{p,P} \gamma_\beta \frac{m + \hat{k}_2 - \hat{q}_1}{(k_2 - q_1)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_2 + \\
 &+ \mathcal{D}_2 \bar{\Psi}_{q,Q} \Gamma_6^\beta \bar{\Psi}_{p,P} \gamma_\beta \frac{m + \hat{k}_1 - \hat{q}_1}{(k_1 - q_1)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_1, \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

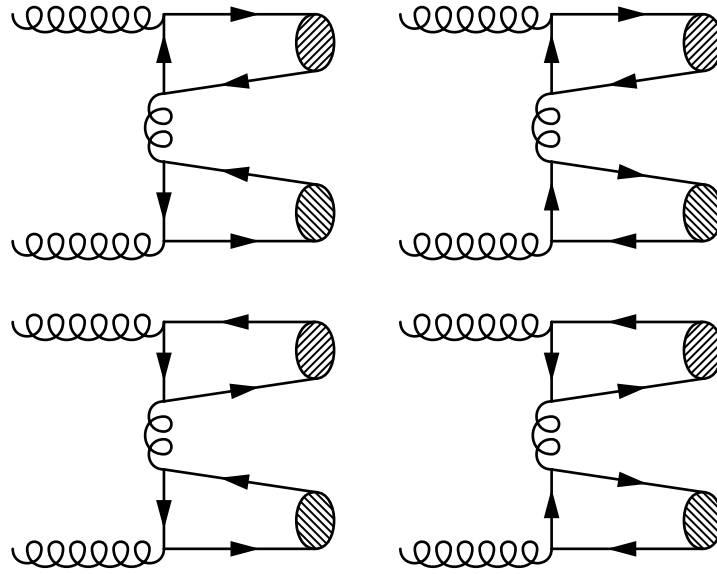


Рисунок 5 — Дополнительный набор из 8 диаграмм лидирующего порядка для процесса $gg \rightarrow 2\eta_c$. Оставшиеся диаграммы могут быть получены перестановкой конечных мезонов. Вклад от диаграмм данного набора взаимно сокращается в случае рождения пары J/ψ

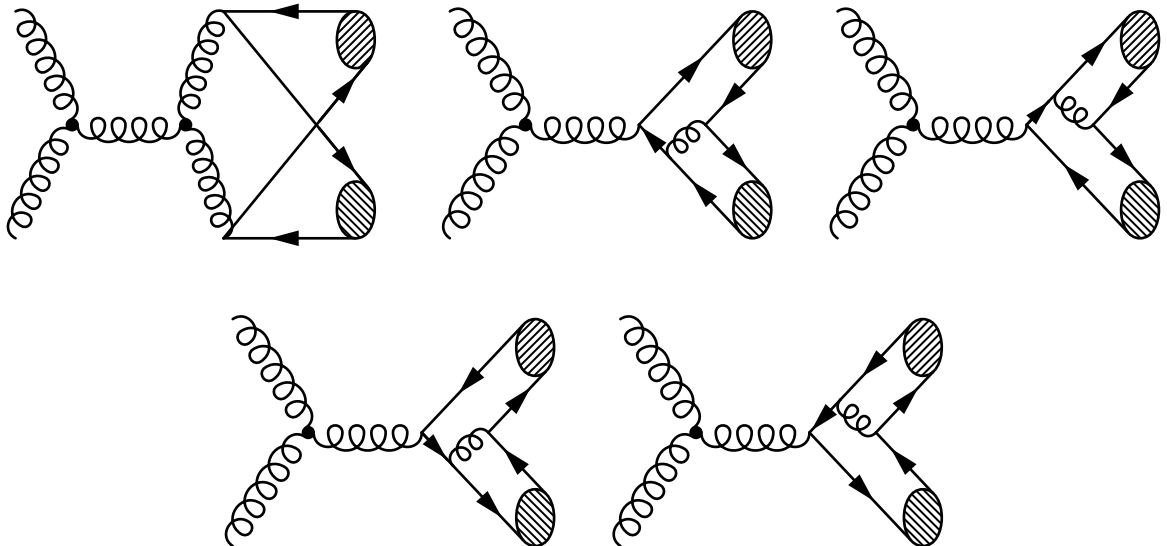


Рисунок 6 — Диаграммы лидирующего порядка по α_s , обращающиеся в нуль при суммировании с цвето-синглетными волновыми функциями J/ψ и η_c

где m — масса c -кварка, $\varepsilon_{1,2}$ — векторы поляризации начальных глюонов, а через \mathcal{D}_i обозначены обратные знаменатели глюонных пропагаторов: $\mathcal{D}_{1,2}^{-1} = (k_2 - p_{1,2} - q_{1,2})^2$, $\mathcal{D}_{3,4}^{-1} = (p_{1,2} + q_{1,2})^2$. Волновые функции $\Psi_{p,P}$ и $\Psi_{q,Q}$ описывают процесс образования конечных мезонов из пар кварка и антикварка ($c\bar{c}$) и связаны с волновыми функциями в системе покоя мезонов соотношениями

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_{p,P} &= \frac{\bar{\Psi}_0^{J/\psi(\eta_c)}(\mathbf{p})}{\left[\frac{\varepsilon(p)}{m} \frac{\varepsilon(p)+m}{2m}\right]} \left[\frac{\hat{v}_1 - 1}{2} + \hat{v}_1 \frac{\mathbf{p}^2}{2m(\varepsilon(p) + m)} - \frac{\hat{p}}{2m} \right] \times \\ &\times \hat{\varepsilon}_P^*(\gamma_5) (1 + \hat{v}_1) \left[\frac{\hat{v}_1 + 1}{2} + \hat{v}_1 \frac{\mathbf{p}^2}{2m(\varepsilon(p) + m)} + \frac{\hat{p}}{2m} \right], \\ \bar{\Psi}_{q,Q} &= \frac{\bar{\Psi}_0^{J/\psi(\eta_c)}(\mathbf{q})}{\left[\frac{\varepsilon(q)}{m} \frac{\varepsilon(q)+m}{2m}\right]} \left[\frac{\hat{v}_2 - 1}{2} + \hat{v}_2 \frac{\mathbf{q}^2}{2m(\varepsilon(q) + m)} + \frac{\hat{q}}{2m} \right] \times \\ &\times \hat{\varepsilon}_Q^*(\gamma_5) (1 + \hat{v}_2) \left[\frac{\hat{v}_2 + 1}{2} + \hat{v}_2 \frac{\mathbf{q}^2}{2m(\varepsilon(q) + m)} - \frac{\hat{q}}{2m} \right],\end{aligned}\tag{2.8}$$

где $v_1 = P/M$, $v_2 = Q/M$, $\varepsilon(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$, $\varepsilon_{P,Q}$ — векторы поляризации J/ψ . Определения (2.8) полностью аналогичны выражениям (1.17), представленным в разделе 1.1 для случая P -волнового чармония, и соответствуют закону преобразования волновых функций (1.5) из системы покоя мезона к системам отсчета, движущимся с полными импульсами P и Q конечных состояний. Нормировочный фактор $\sqrt{2M}$ каждой из волновых функций (2.8) в явном виде включен в амплитуду (2.7). Цветовой фактор δ^{ab} в (2.7) соответствует суммированию диаграмм с цветовой частью волновых функций $\delta_{ij}/\sqrt{3}$, индексы $a, b = 1, \dots, 8$ нумеруют начальные глюоны. Вершинные функции Γ_i в (2.7) определяются диаграммами Рисунка 4 и могут быть представлены как

$$\begin{aligned}\Gamma_1^\beta &= \hat{\varepsilon}_1 \frac{m - \hat{k}_1 + \hat{q}_2}{(k_1 - q_2)^2 - m^2} \gamma^\beta - 8 \gamma^\beta \frac{m + \hat{k}_1 - \hat{p}_2}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_1, \\ \Gamma_2^\beta &= \hat{\varepsilon}_2 \frac{m - \hat{k}_2 + \hat{q}_2}{(k_2 - q_2)^2 - m^2} \gamma^\beta - 8 \gamma^\beta \frac{m + \hat{k}_2 - \hat{p}_2}{(k_2 - p_2)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_2, \\ \Gamma_3^\beta &= \hat{\varepsilon}_1 \frac{m - \hat{k}_1 + \hat{q}_2}{(k_1 - q_2)^2 - m^2} \left[\gamma^\beta \frac{m + \hat{k}_2 - \hat{p}_2}{(k_2 - p_2)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_2 - 8 \hat{\varepsilon}_2 \frac{m - \hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \hat{q}_1}{(p_1 + p_2 + q_1)^2 - m^2} \gamma^\beta \right] + \\ &+ \hat{\varepsilon}_2 \frac{m - \hat{k}_2 + \hat{q}_2}{(k_2 - q_2)^2 - m^2} \left[\gamma^\beta \frac{m + \hat{k}_1 - \hat{p}_2}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_1 - 8 \hat{\varepsilon}_1 \frac{m - \hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \hat{q}_1}{(p_1 + p_2 + q_1)^2 - m^2} \gamma^\beta \right] -\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -8 \gamma^\beta \frac{m + \hat{p}_1 + \hat{q}_1 + \hat{q}_2}{(p_1 + q_1 + q_2)^2 - m^2} \left[\hat{\varepsilon}_2 \frac{m + \hat{k}_1 - \hat{p}_2}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_1 \frac{m + \hat{k}_2 - \hat{p}_2}{(k_2 - p_2)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_2 \right] + \\
& + 18 \gamma_\alpha \left[\mathcal{D}_1 \frac{m - \hat{k}_1 + \hat{q}_2}{(k_1 - q_2)^2 - m^2} \varepsilon_1^\alpha \gamma_\mu \mathfrak{E}_2^{\beta\mu}(p_1 + q_1) - \mathcal{D}_1 \frac{m + \hat{k}_1 - \hat{p}_2}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_1 \mathfrak{E}_2^{\beta\alpha}(p_1 + q_1) + \right. \\
& \left. + \mathcal{D}_2 \frac{m - \hat{k}_2 + \hat{q}_2}{(k_2 - q_2)^2 - m^2} \varepsilon_2^\alpha \gamma_\mu \mathfrak{E}_1^{\beta\mu}(p_1 + q_1) - \mathcal{D}_2 \frac{m + \hat{k}_2 - \hat{p}_2}{(k_2 - p_2)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_2 \mathfrak{E}_1^{\beta\alpha}(p_1 + q_1) \right], \\
\Gamma_4^\beta = & \hat{\varepsilon}_1 \frac{m - \hat{k}_1 + \hat{p}_1}{(k_1 - p_1)^2 - m^2} \left[\gamma^\beta \frac{m + \hat{k}_2 - \hat{q}_1}{(k_2 - q_1)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_2 - 8 \hat{\varepsilon}_2 \frac{m - \hat{p}_2 - \hat{q}_1 - \hat{q}_2}{(p_2 + q_1 + q_2)^2 - m^2} \gamma^\beta \right] + \\
& + \hat{\varepsilon}_2 \frac{m - \hat{k}_2 + \hat{p}_1}{(k_2 - p_1)^2 - m^2} \left[\gamma^\beta \frac{m + \hat{k}_1 - \hat{q}_1}{(k_1 - q_1)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_1 - 8 \hat{\varepsilon}_1 \frac{m - \hat{p}_2 - \hat{q}_1 - \hat{q}_2}{(p_2 + q_1 + q_2)^2 - m^2} \gamma^\beta \right] - \\
& - 8 \gamma^\beta \frac{m + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{q}_2}{(p_1 + p_2 + q_2)^2 - m^2} \left[\hat{\varepsilon}_2 \frac{m + \hat{k}_1 - \hat{q}_1}{(k_1 - q_1)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_1 \frac{m + \hat{k}_2 - \hat{q}_1}{(k_2 - q_1)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_2 \right] + \\
& + 18 \gamma_\alpha \left[\mathcal{D}_2 \frac{m - \hat{k}_1 + \hat{p}_1}{(k_1 - p_1)^2 - m^2} \varepsilon_1^\alpha \gamma_\mu \mathfrak{E}_2^{\beta\mu}(p_2 + q_2) - \mathcal{D}_2 \frac{m + \hat{k}_1 - \hat{q}_1}{(k_1 - q_1)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_1 \mathfrak{E}_2^{\beta\alpha}(p_2 + q_2) + \right. \\
& \left. + \mathcal{D}_1 \frac{m - \hat{k}_2 + \hat{p}_1}{(k_2 - p_1)^2 - m^2} \varepsilon_2^\alpha \gamma_\mu \mathfrak{E}_1^{\beta\mu}(p_2 + q_2) - \mathcal{D}_1 \frac{m + \hat{k}_2 - \hat{q}_1}{(k_2 - q_1)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_2 \mathfrak{E}_1^{\beta\alpha}(p_2 + q_2) \right] + \\
& + 18 \mathcal{D}_3 \gamma_\nu \left[2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 g^{\nu\beta} - \varepsilon_1^\nu \varepsilon_2^\beta - \varepsilon_1^\beta \varepsilon_2^\nu + \mathcal{D}_2 \mathfrak{F}^{\nu\beta}(p_1 + q_1, p_2 + q_2) + \mathcal{D}_1 \mathfrak{F}^{\beta\nu}(p_2 + q_2, p_1 + q_1) \right], \\
\Gamma_5^\beta = & \gamma^\beta \frac{m + \hat{k}_1 - \hat{p}_2}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_1 - 8 \hat{\varepsilon}_1 \frac{m - \hat{k}_1 + \hat{q}_2}{(k_1 - q_2)^2 - m^2} \gamma^\beta, \\
\Gamma_6^\beta = & \gamma^\beta \frac{m + \hat{k}_2 - \hat{p}_2}{(k_2 - p_2)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_2 - 8 \hat{\varepsilon}_2 \frac{m - \hat{k}_2 + \hat{q}_2}{(k_2 - q_2)^2 - m^2} \gamma^\beta, \tag{2.9}
\end{aligned}$$

где также введены вспомогательные тензоры

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_{1,2}^{\alpha\beta}(x) &= \frac{1}{2} (2 x \varepsilon_{1,2} g^{\alpha\beta} - (k_{1,2}^\beta + x^\beta) \varepsilon_{1,2}^\alpha + (2k_{1,2}^\alpha - x^\alpha) \varepsilon_{1,2}^\beta), \\
\mathfrak{F}^{\alpha\beta}(x, y) &= 4(x\varepsilon_1)(y\varepsilon_2)g^{\alpha\beta} + (k_1 + x)(k_2 + y)\varepsilon_1^\alpha \varepsilon_2^\beta + \varepsilon_1 \varepsilon_2 (2k_1^\alpha - x^\alpha)(2k_2^\beta - y^\beta) + \\
& + 2x(\varepsilon_1 \varepsilon_2^\alpha - \varepsilon_2 \varepsilon_1^\alpha)(2k_2^\beta - y^\beta) - 2y(\varepsilon_1 \varepsilon_2^\beta - \varepsilon_2 \varepsilon_1^\beta)(2k_1^\alpha - x^\alpha) - \\
& - x\varepsilon_1(x^\alpha + 4y^\alpha)\varepsilon_2^\beta - y\varepsilon_2(4x^\beta + y^\beta)\varepsilon_1^\alpha. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

В случае рождения пары η_c необходимо учесть дополнительный вклад от диаграмм Рисунка 5:

$$\Delta \mathfrak{M} = \frac{1}{t} \text{Tr} \left[\hat{\varepsilon}_1 \frac{m - \hat{k}_1 + \hat{p}_1}{(k_1 - p_1)^2 - m^2} \gamma^\beta \bar{\Psi}(p, P) + \gamma^\beta \frac{m + \hat{k}_1 - \hat{p}_2}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_1 \bar{\Psi}(p, P) \right] \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \text{Tr} \left[\hat{\varepsilon}_2 \frac{m - \hat{k}_2 + \hat{q}_2}{(k_2 - q_2)^2 - m^2} \gamma^\beta \bar{\Psi}(q, Q) + \gamma^\beta \frac{m + \hat{k}_2 - \hat{q}_1}{(k_2 - q_1)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_2 \bar{\Psi}(q, Q) \right] + \\
& + \frac{1}{2M^2 - s - t} \text{Tr} \left[\hat{\varepsilon}_1 \frac{m - \hat{k}_1 + \hat{q}_2}{(k_1 - q_2)^2 - m^2} \gamma^\beta \bar{\Psi}(q, Q) + \gamma^\beta \frac{m + \hat{k}_1 - \hat{q}_1}{(k_1 - q_1)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_1 \bar{\Psi}(q, Q) \right] \times \\
& \times \text{Tr} \left[\hat{\varepsilon}_2 \frac{m - \hat{k}_2 + \hat{p}_1}{(k_2 - p_1)^2 - m^2} \gamma^\beta \bar{\Psi}(p, P) + \gamma^\beta \frac{m + \hat{k}_2 - \hat{p}_2}{(k_2 - p_2)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_2 \bar{\Psi}(p, P) \right]. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Полное выражение для амплитуды в этом случае имеет вид:

$$\mathcal{M}[gg \rightarrow \eta_c \eta_c](k_1, k_2, P, Q) = \frac{1}{9} M \pi^2 \alpha_s^2 \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} [\text{Tr} \mathfrak{M} + 3\Delta \mathfrak{M}], \quad (2.12)$$

где величина \mathfrak{M} полностью совпадает с соответствующим определением в (2.7).

Выражения для амплитуды (2.7) и вершинных функций (2.9) характеризуются точной зависимостью от относительного импульса кварков и антикварков в мезонах p и q . Для того чтобы выделить вклады второго относительного порядка в подынтегральном выражении для амплитуды, необходимо разложить обратные знаменатели пропагаторов кварков и глюонов в (2.7) и (2.9):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(p_1 + q_1)^2} &= \frac{4}{s} - \frac{16}{s^2} [(p + q)^2 + pQ + qP] + \dots, \\
\frac{1}{(k_2 - q_2)^2 - m^2} &= \frac{2}{t - M^2} - \frac{4}{(t - M^2)^2} [q^2 + 2qk_2] + \dots,
\end{aligned} \quad (2.13)$$

где переменные Мандельстама для глюонного подпроцесса s и t определены в (2.4). В общей сложности, амплитуда (2.7) содержится 16 различных знаменателей, которые разлагаются аналогичным образом. В нерелятивистском пределе данные знаменатели принимают одно из следующих значений: $(t - M^2)/2$, $(M^2 - s - t)/2$, $s/4$ или $s/2$. Таким образом, с помощью ограничений на кинематические переменные

$$4M^2 \leq s, \quad \left| t + \frac{s}{2} - M^2 \right| \leq \frac{s}{2} \sqrt{1 - \frac{4M^2}{s}} \quad (2.14)$$

может быть получена нижняя оценка на величину параметров разложения в (2.13): $2p^2/M^2$ и $2q^2/M^2$, соответствующая наиболее неблагоприятному выбору значений $x_{1,2}$ и t .

После подстановки разложений (2.13) в (2.7), в подынтегральном выражении необходимо сохранить слагаемые отвечающие второму порядку малости по p и q . Далее, угловое интегрирование по переменным импульса проводится с помощью соотношений для S -волнового чармония

$$\int \frac{\Psi_0^S(\mathbf{p})}{\left[\frac{\epsilon(p)}{m} \frac{\epsilon(p)+m}{2m}\right]} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_0^\infty \frac{p^2 R_S(p)}{\left[\frac{\epsilon(p)}{m} \frac{\epsilon(p)+m}{2m}\right]} dp, \quad (2.15)$$

$$\int p_\mu p_\nu \frac{\Psi_0^S(\mathbf{p})}{\left[\frac{\epsilon(p)}{m} \frac{\epsilon(p)+m}{2m}\right]} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = -\frac{1}{3\sqrt{2}\pi} (g_{\mu\nu} - v_{1,2\mu} v_{1,2\nu}) \int_0^\infty \frac{p^4 R_S(p)}{\left[\frac{\epsilon(p)}{m} \frac{\epsilon(p)+m}{2m}\right]} dp,$$

представляющих частный случай (1.40), где $R_S(p)$ — радиальная волновая функция в импульсном представлении. Выбор $v_{1,2}$ в (2.15) соответствует полным импульсам P и Q конечного состояния.

С целью демонстрации описываемых преобразований, рассмотрим результат для вклада первой из диаграмм, изображенных на Рисунке 4, в амплитуду процесса $gg \rightarrow 2J/\psi$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^{ab} = & \frac{32\alpha_s^2 \delta^{ab}}{9m s^4} \int \frac{m + \epsilon(p)}{2\epsilon(p)} R(p) p^2 \int \frac{m + \epsilon(q)}{2\epsilon(q)} R(q) q^2 \left\{ 3s^2 [\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 (s \varepsilon_P^* \cdot \varepsilon_Q^* - \right. \\ & - 2 \varepsilon_P^* \cdot Q \varepsilon_Q^* \cdot P) - 2 \varepsilon_P^* \cdot \varepsilon_Q^* (\varepsilon_1 \cdot P \varepsilon_2 \cdot Q + \varepsilon_1 \cdot Q \varepsilon_2 \cdot P) + 2 \varepsilon_P^* \cdot Q (\varepsilon_1 \cdot P \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_Q^* + \\ & + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_Q^* \varepsilon_2 \cdot P) - \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_P^* \times (s \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_Q^* - 2 \varepsilon_2 \cdot Q \varepsilon_Q^* \cdot P) - \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_P^* (s \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_Q^* - \\ & \left. - 2 \varepsilon_1 \cdot Q \varepsilon_Q^* \cdot P) \right] \left(3(1 - c_p - c_q - c_p^2 - c_q^2) + c_p c_q (67 + 3c_p + 3c_q) + 3c_p^2 c_q^2 \right) - \\ & - 64m^2 s [\varepsilon_P^* \cdot Q (\varepsilon_1 \cdot P \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_Q^* + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_Q^* \varepsilon_2 \cdot P) + \varepsilon_Q^* \cdot P (\varepsilon_1 \cdot Q \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_P^* + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_P^* \varepsilon_2 \cdot Q)] \times \\ & \times \left(3(c_p + c_q) + c_p c_q (194 - 3c_p - 3c_q) \right) + 16m^2 s^2 [\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_P^* \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_Q^* + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_Q^* \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_P^*] \times \\ & \times \left(9(c_p + c_q) + c_p c_q (380 - 9c_p - 9c_q) \right) + 192m^2 s \varepsilon_P^* \cdot \varepsilon_Q^* [\varepsilon_1 \cdot P \varepsilon_2 \cdot Q + \varepsilon_1 \cdot Q \varepsilon_2 \cdot P] \times \\ & \times \left(c_p + c_q + c_p c_q (62 - c_p - c_q) \right) + 16m^2 s \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \left(\varepsilon_P^* \cdot \varepsilon_Q^* \left[32m^2 (3(c_p + c_q) + \right. \right. \\ & \left. \left. + c_p c_q (329 - 3c_p - 3c_q)) - 3s(3 - 2c_p - 2c_q - 3c_p^2 - 3c_q^2) + s c_p c_q (613 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 6c_p + 6c_q) + 9s c_p^2 c_q^2 \right] + 4 \varepsilon_P^* \cdot Q \varepsilon_Q^* \cdot P [3(c_p + c_q) + c_p c_q (202 - 3c_p - 3c_q)] \right) + \\ & \left. + 512m^2 c_p c_q \left(2 \varepsilon_P^* \cdot Q \varepsilon_Q^* \cdot P (\varepsilon_1 \cdot Q \varepsilon_2 \cdot P + \varepsilon_1 \cdot P \varepsilon_2 \cdot Q) - 2m^2 \varepsilon_P^* \cdot \varepsilon_Q^* \times \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[1064m^2 \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot P(125 \varepsilon_2 \cdot Q - 8 \varepsilon_2 \cdot P) + \varepsilon_1 \cdot Q(125 \varepsilon_2 \cdot P - 8 \varepsilon_2 \cdot Q) \right] - \\
& - m^2 \left[266 \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \varepsilon_P^* \cdot Q \varepsilon_Q^* \cdot P + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_P^* (131s \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_Q^* + 2 \varepsilon_Q^* \cdot P(4 \varepsilon_2 \cdot P - 129 \varepsilon_2 \cdot Q)) + \right. \\
& + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_Q^* (131s \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_P^* + 2 \varepsilon_P^* \cdot Q(4 \varepsilon_2 \cdot Q - 129 \varepsilon_2 \cdot P)) + 2 \varepsilon_1 \cdot P(4 \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_P^* \varepsilon_Q^* \cdot P - \\
& \left. - 129 \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_Q^* \varepsilon_P^* \cdot Q) + 2 \varepsilon_1 \cdot Q(4 \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_Q^* \varepsilon_P^* \cdot Q - 129 \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_P^* \varepsilon_Q^* \cdot P) \right] \Bigg\} dp dq, \quad (2.16)
\end{aligned}$$

где введено обозначение $c_p = \frac{m-\epsilon(p)}{m+\epsilon(p)}$. После выделения общих множителей $(\epsilon + m)/2\epsilon$ в интегралах по относительным импульсам p и q , подынтегральное выражение в (2.16) принимает вид степенного разложения по параметрам c_p и c_q , отвечающим поправкам к амплитуде, происходящим из разложений (2.13), а также из точного вида закона преобразования волновых функций (2.8). Наличие четырех различных векторов поляризации, соответствующих глюонам и паре чармония J/ψ , обуславливает сложную структуру выражения (2.16). Аналогичное выражение может быть получено и для полной амплитуды процесса $gg \rightarrow 2J/\psi$. В случае рождения пары η_c тензорная структура амплитуды упрощается и может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}[gg \rightarrow 2\eta_c] = & \mathcal{A}_1(\varepsilon_1 \varepsilon_2) + \mathcal{A}_2(\varepsilon_1 P)(\varepsilon_2 P) + \mathcal{A}_3(\varepsilon_1 Q)(\varepsilon_2 P) + \\
& \mathcal{A}_4(\varepsilon_1 P)(\varepsilon_2 Q) + \mathcal{A}_5(\varepsilon_1 Q)(\varepsilon_2 Q), \quad (2.17)
\end{aligned}$$

где каждый из параметров \mathcal{A}_i представляет интеграл по относительным импульсам, подобный (2.16), от комбинации функций c_p и c_q , суммарная степень которых не превышает 2. Из-за общей громоздкости, полные выражения для амплитуд $\mathcal{M}[gg \rightarrow 2J/\psi(\eta_c)]$ с учетом релятивистских поправок не могут быть приведены здесь в явном виде.

2.2 Сечения рождения пар J/ψ и η_c на ЛНС

Для нахождения дифференциального сечения глюонного подпроцесса необходимо просуммировать квадрат модуля амплитуды по поляризациям конечных частиц (в случае пары J/ψ) и усреднить по поляризациям начальных глюонов, что достигается с помощью следующих соотношений:

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_P^{\mu} \varepsilon_P^{*\nu} = v_1^{\mu} v_1^{\nu} - g^{\mu\nu}, \quad \sum_{\lambda} \varepsilon_Q^{\mu} \varepsilon_Q^{*\nu} = v_2^{\mu} v_2^{\nu} - g^{\mu\nu},$$

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_{1,2}^{\mu} \varepsilon_{1,2}^{*\nu} = \frac{k_1^{\mu} k_2^{\nu} + k_1^{\nu} k_2^{\mu}}{k_1 k_2} - g^{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

Кроме того, необходимо также учесть дополнительный фактор $1/8$, возникающий после суммирования множителя $\delta^{ab} \delta_{ab}$ в сечении и усреднения по начальным глюонам. Отметим, что существует простая связь между параметрами \mathcal{A}_i , введенными в (2.17), и дифференциальным сечением рождения пары η_c :

$$\frac{d\sigma}{dt}[gg \rightarrow 2\eta_c] = \frac{1}{1024 \pi s^4} \left(s^2 \mathcal{A}_1^2 + [s \mathcal{A}_1 + \mathcal{B}_1 (st + (M^2 - t)^2)]^2 \right), \quad (2.19)$$

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5.$$

В общем случае, дифференциальное сечение рассматриваемого глюонного подпроцесса записывается как [70–72]

$$\frac{d\sigma}{dt}[gg \rightarrow 2J/\psi(\eta_c)](s, t) = \frac{\pi M^2 \alpha_s^4}{9216 s^2} |\tilde{R}(0)|^4 \sum_{i=0}^3 \omega_i F^{(i)}(s, t). \quad (2.20)$$

Функции $F^{(0)}(s, t)$ в (2.20) описывают вклад лидирующего порядка из амплитуд (2.7), (2.12) и в пределе $M = 2m$ переходят в соответствующие выражения, полученные в работах [104–107, 110] в рамках подхода НРКХД. Функции $F^{(i>0)}(s, t)$ отвечают вкладу релятивистских поправок из амплитуды, аналогично слагаемым со степенями c_p и c_q в (2.16). Полные аналитические выражения для $F^{(i)}(s, t)$ приведены в приложении Б. Сечение (2.20) содержит ряд непертурбативных параметров, выражающихся через интегралы от волновой функции чармония:

$$I_0 = \int_0^{\infty} \frac{\epsilon(p) + m}{2\epsilon(p)} R(p) p^2 dp, \quad I_n = \int_0^m p^2 R(p) \frac{\epsilon(p) + m}{2\epsilon(p)} \left(\frac{m - \epsilon(p)}{m + \epsilon(p)} \right)^n dp,$$

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_1 = \frac{I_1}{I_0}, \quad \omega_2 = \frac{I_2}{I_0}, \quad \omega_3 = \omega_1^2,$$

$$\tilde{R}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon(p) + m}{2\epsilon(p)} R(p) p^2 dp. \quad (2.21)$$

Таблица 7 — Значения непертурбативных параметров S -волнового чармония, входящих в сечения (2.20)

Мезон ($c\bar{c}$)	$n^{2S+1}L_J$	J^{PC}	$M^{exp},$ $\Gamma_{\Delta B}$	$R(0),$ $\Gamma_{\Delta B^{3/2}}$	$\tilde{R}(0),$ $\Gamma_{\Delta B^{3/2}}$	ω_1	ω_2
J/ψ	1^3S_1	1^{--}	3.097	0.79	0.57	-0.051	0.0047
η_c	1^1S_0	0^{-+}	2.984	0.79	0.65	-0.052	0.0050

Параметр $\tilde{R}(0)$ представляет релятивистское обобщение нуля волновой функции в начале координат $R(0)$. Как и аналогичные параметры ранее, интегралы I_n содержат обрезание на массе c -кварка, связанное с потенциально большими погрешностями при определении волновой функции в данном регионе. Численные значения параметров (2.21) представлены в Таблице 7 [70, 71].

Для получения сечений парного рождения S -волнового чармония в pp взаимодействии выражения (2.20) должны быть проинтегрированы с соответствующими функциями партонного распределения, согласно соотношению (2.2). Результаты такого расчета приведены в Таблице 8, при этом применялись функции лидирующего порядка из наборов STEQ5L [122] и STEQ6L1 [123]. Для константы сильного взаимодействия $\alpha_s(\mu)$ использовался лидирующий результат с начальным условием $\alpha_s(\mu = M_z) = 0.118$. Обе шкалы перенормировки и факторизации выбирались равными поперечной массе $\mu = m_T = \sqrt{M^2 + P_T^2}$, где M — масса чармония J/ψ и η_c , соответственно. Отметим, что неопределенность, связанная с выбором шкалы факторизации, обсуждалась в [114].

2.3 Обсуждение результатов

Согласно Таблице 8, релятивистский результат для сечения парного рождения J/ψ в протон–протонном взаимодействии, соответствующий кинематическим условиям эксперимента LHCb [30] и энергии $\sqrt{S} = 7$ ТэВ, составляет

$$\sigma_{2 < y_{P,Q} < 4.5}^{\text{рел.}} = 1.6 \pm 0.9 \text{ нб}, \quad (2.22)$$

Таблица 8 — Сечения парного рождения чармония в pp взаимодействии (2.20)

Энергия \sqrt{S}	Пара, вид сечения	$\sigma(\text{полное}), \text{ нб}$		$\sigma(2 < y_{P,Q} < 4.5), \text{ нб}$	
		CTEQ5L	CTEQ6L1	CTEQ5L	CTEQ6L1
$\sqrt{S} = 7 \text{ ТэВ}$	$J/\psi J/\psi$, рел.	9.6 ± 5.3	7.4 ± 4.1	1.6 ± 0.9	1.2 ± 0.7
	$J/\psi J/\psi$, нерел.	23.0	17.7	3.8	2.9
	$\eta_c \eta_c$, рел.	23.7 ± 12.3	19.9 ± 10.3	1.3 ± 0.8	1.0 ± 0.6
	$\eta_c \eta_c$, нерел.	56.3	48.1	1.5	1.2
$\sqrt{S} = 14 \text{ ТэВ}$	$J/\psi J/\psi$, рел.	17.1 ± 9.4	13.2 ± 7.3	3.0 ± 1.7	2.1 ± 1.2
	$J/\psi J/\psi$, нерел.	41.0	31.6	7.1	5.1
	$\eta_c \eta_c$, рел.	47.8 ± 24.9	39.3 ± 20.4	2.4 ± 1.4	1.7 ± 1.0
	$\eta_c \eta_c$, нерел.	116.5	94.7	2.8	2.0

тогда как соответствующая оценка для нерелятивистского сечения равна 3.8 нб . Результат (2.22) получен для набора партонных функций CTEQ5L, применение набора CTEQ6L1 дает $1.2 \pm 0.7 \text{ нб}$. В рамках лидирующего порядка НРКХД по скорости тяжелого кварка в [110], также для функций CTEQ5L, было получено значение

$$\sigma_{2 < y_{J/\psi} < 4.5}^{\text{NRQCD}} = 4.1 \pm 1.2 \text{ нб}. \quad (2.23)$$

Экспериментально измеренное коллаборацией LHCb сечение составляет [30]

$$\sigma_{2 < y_{J/\psi} < 4.5}^{\text{LHCb}} = 5.1 \pm 1.0 \pm 1.1 \text{ нб}. \quad (2.24)$$

Таким образом, полученное с учетом рассматриваемых релятивистских поправок сечение (2.22) $1.6 \pm 0.9 \text{ нб}$ лежит существенно ниже результата LHCb в 5.1 нб , даже с учетом экспериментальных ошибок последнего, тогда как нерелятивистское сечение НРКХД (2.23) показывает хорошее согласие с экспериментом. Тем не менее, существует ряд дополнительных вкладов в сечение, которые позволяют сократить разрыв между (2.22) и (2.24). Помимо непосредственного процесса $pp \rightarrow 2J/\psi + X$, при сравнении с (2.24) также должны учитываться сечения процессов $pp \rightarrow J/\psi\psi' + X$ и $pp \rightarrow 2\psi' + X$, приводящие к вкладам

в (2.24) посредством последующего распада $\psi' \rightarrow J/\psi\pi\pi$. Вклад от рождения пары ψ' оказывается мал, тогда как добавка к сечению (2.22) от процесса $pp \rightarrow J/\psi\psi' + X$ составляет около 30% от основного результата [110] и может быть оценена в 0.6 ± 0.4 нб. Сечение процесса $pp \rightarrow 2J/\psi + X$, рассматриваемое в рамках механизма двухпартонного рассеяния, составляет [115, 116]

$$\sigma_{2 < y_{J/\psi} < 4.5}^{\text{DPS}} = 2.0 \text{ нб.} \quad (2.25)$$

В конечном итоге, после суммирования результата (2.22) с дополнительными вкладами, описанными выше, можно получить оценку

$$\sigma_{2 < y_{P,Q} < 4.5}^{\text{рел.} + \psi' \rightarrow J/\psi\pi\pi + \text{DPS}} = 4.2 \pm 1.3 \text{ нб,} \quad (2.26)$$

что находится в хорошем согласии с экспериментальным значением (2.24). Результат (2.26) также близок к предсказанию НРКХД (2.23) 4.1 ± 1.2 нб, однако в последнее не включен вклад двойного партонного рассеяния (2.25), тогда как оба значения учитывают процесс $pp \rightarrow J/\psi\psi' + X \rightarrow 2J/\psi + Y$.

Поправки следующего порядка по константе сильного взаимодействия α_s , не учитываемые ни в одном из приведенных результатов (2.22), (2.23) и (2.26), были вычислены в работе [113]:

$$\sigma_{2 < y_{J/\psi} < 4.5}^{\text{LO}\alpha_s} = 4.8 \text{ нб,} \quad \sigma_{2 < y_{J/\psi} < 4.5}^{\text{NLO}\alpha_s} = 5.3 \text{ нб.} \quad (2.27)$$

Согласно (2.27), поправки NLO α_s составляют около 10% от величины лидирующего порядка для однопартонного рассеяния, так что предполагаемый рост сечений (2.23) и (2.26) может составлять 0.4 и 0.2 нб, соответственно.

Из представленного анализа следует, что вычисления, выполненные в лидирующем порядке по скорости тяжелого кварка в НРКХД (2.23), как и сечения, полученные с учетом релятивистских поправок в рамках квазипотенциального подхода (2.26), не находятся в противоречии с экспериментальным результатом ЛНСб (2.24). При этом для обеспечения согласия релятивистской оценки (2.26) с экспериментом существенным является одновременный учет эффек-

тов двойного партонного рассеяния (2.25), тогда как нерелятивистский результат НРКХД (2.23) равноценно согласуется с данными ЛНСб, с учетом их экспериментальной погрешности, как при наличии дополнительного вклада DPS, так и при его отсутствии. Тем не менее, в работах [114, 124, 125] была получена оценка на вклад сечения двойного партонного рассеяния

$$\sigma_{2 < y_{J/\psi} < 4.5}^{\text{DPS [114]}} = 4.0 \text{ нб}, \quad (2.28)$$

что в два раза превышает предыдущий результат (2.25). Различие между (2.25) и (2.28) связано с использованием для получения последнего результата более высокого значения сечения одиночного рождения J/ψ , квадрат которого входит в общую формулу для DPS, $\sigma_{J/\psi} = 10.5 \text{ мкб}$, тогда как (2.25) соответствует выбору $\sigma_{J/\psi} = 7.7 \text{ мкб}$ [115]. Таким образом, в случае ожидания высоких вкладов механизма двойного партонного рассеяния (2.28), уменьшение сечения за счет релятивистских поправок с 3.8 до $1.6 \pm 0.9 \text{ нб}$ позволяет сохранить согласие предсказания квазипотенциального подхода $\sigma_{2 < y_{R,Q} < 4.5}^{\text{рел.}+\psi' \rightarrow J/\psi\pi\pi+\text{DPS [114]}} = 6.2 \pm 1.3 \text{ нб}$ с экспериментом, тогда как при простом суммировании вклада (2.28) с нерелятивистскими сечениями (2.23), (2.27) получаются несколько завышенные результаты в 8–9 нб.

Вычисление релятивистских поправок к процессу $pp \rightarrow 2J/\psi + X$ в НРКХД было произведено в работе [112]. Для массы c -кварка $m_c = 1.55 \text{ ГэВ}$, соответствующей рассматриваемой модели (1.25) и работам [110, 113], в [112] приводятся следующие значения релятивистского и нерелятивистского сечений:

$$\sigma_{2 < y_{J/\psi} < 4.5}^{\text{нерел. [112]}} = 6.92 \text{ нб}, \quad \sigma_{2 < y_{J/\psi} < 4.5}^{\text{рел. [112]}} = 6.89 \text{ нб}. \quad (2.29)$$

Как следует из (2.29), полученные в [112] значения релятивистских поправок составляют менее 0.5%, что не согласуется с результатом квазипотенциального подхода (2.22), предсказывающим уменьшение сечения более чем в два раза за счет релятивистских эффектов из волновой функции и амплитуды. Существует ряд отличий между методами расчета релятивистских поправок в ква-

зипотенциальном подходе и в [112]. В частности, в работе [112] не учитывается влияние релятивистских эффектов на форму волновой функции, которое в рассматриваемой модели осуществляется посредством эффективного релятивистского гамильтониана (1.25), основанного на КХД-обобщении потенциала Брейта, дополненном членами конфайнмента, учитывающими скалярный и векторный обмен. Именно переход от параметра $R(0)$ к $\tilde{R}(0)$ ответственен за существенное понижение сечения (2.22). Согласно Таблице 7, поправка к $R(0)$ составляет около 30%, но из-за наличия четвертой степени данного параметра в общей формуле для сечения (2.20), итоговый результат уменьшается более чем в три раза. Необходимо отметить, что подобное уменьшение матричного элемента НРКХД, пропорционального квадрату $R(0)$, по сравнению с предсказаниями потенциальных моделей, было установлено в [18] из данных для ширин электронного и фотонного распада для J/ψ и η_c . Уменьшение соответствующих матричных элементов составляет от 45% до 15%, в зависимости от того, учитываются ли поправки следующего порядка по α_s к ширине распада. Кроме того, в [112] используется замена $M_{J/\psi(\eta_c)} = 2\epsilon(p) = 2\sqrt{m_c^2 + p^2}$, после чего проводятся разложения по p^2/m^2 . Как обсуждалось в разделе 1.4, подобное тождество не применяется в квазипотенциальном подходе, и массы мезонов полагаются равными их экспериментальным значениям, тогда как факторы, содержащие энергии кварков $\epsilon(p)$, $\epsilon(q)$ и связанные с законом преобразования волновых функций (2.8), не подлежат разложению и сохраняются в итоговых интегралах (2.21). Результат (2.29) превосходит другие значения (2.23) и (2.27), также полученные в рамках НРКХД, за счет использования более высоких значений соответствующих матричных элементов. Аналогично (2.22), оценка (2.29) должна быть дополнена вкладом процессов $pp \rightarrow J/\psi\psi' + X \rightarrow 2J/\psi + Y$ и двойного партонного рассеяния (2.25), (2.28), что приведет к ее дополнительному увеличению.

Таблица 8 содержит предсказания для полных и ограниченных регионом быстрот ЛНСб сечений процесса парного рождения мезонов J/ψ и η_c , расчи-

таных для энергий pp столкновений $\sqrt{S} = 7$ и 14 $TэВ$ с использованием двух различных наборов функций партонного распределения STEQ5L и STEQ6L1. Переход от энергии 7 $TэВ$ к 14 $TэВ$ практически вдвое увеличивает соответствующие предсказания для сечений, тогда как разброс результатов между двумя наборами партонных функций составляет около 25%. Рассматриваемые поправки приводят к падению на 60%, или более чем в два раза, как полного, так и ограниченного по быстротам сечения парного рождения J/ψ . В случае же пары мезонов η_c , полное сечение также уменьшается на 60%, вместе с тем падение сечения для интервала $2 < y_{P,Q} < 4.5$ оказывается равным только 15%. В данном случае, уменьшение сечения за счет нуля волновой функции компенсируется дополнительным ростом, определяемым релятивистскими поправками из амплитуды, которые для указанного интервала быстрот составляют 75%. Амплитудные поправки к полному сечению не превышают 10%.

Наряду с неопределенностью в значениях волновой функции, которая благодаря наличию четвертой степени соответствующего непертурбативного параметра, вносит потенциальную погрешность до 40% в сечение (2.20), и в следующих порядках амплитудных поправок, предполагаемых достигающими до 30%, в случае расчетов парного рождения в протон–протонном взаимодействии существует дополнительный источник ошибок, связанный с точностью определения функций партонного распределения, входящих в (2.2). Используемые наборы STEQ5L [122] и STEQ6L1 [123] не предоставляют прямых инструментов для оценки погрешности представленных в них партонных функций, тем не менее порядок этой величины может быть оценен на основе набора STEQ6M из общего семейства партонных распределений STEQ6 [123], обладающего необходимым функционалом. Таким образом, данная погрешность оказывается равной 15% [71]. Ошибка, связанная с определением релятивистских интегралов $I_{n>0}$ (2.21) в области импульсов, ограниченной массой тяжелого кварка $\Lambda = m$, оценивается в 30% от величины релятивистских поправок из амплитуды, поскольку данные интегралы представляют собой непертурбативные факторы,

входящие в сечение (2.20) совместно с функциями $F^{(n>0)}(s, t)$, представляющими вклады амплитудных поправок. Данная неопределенность равна 17%, 3% и 25% для сечений пары J/ψ , полных сечений рождения пары η_c и сечений пары η_c с быструтами в интервале $2 < y_{P,Q} < 4.5$, соответственно. Полные оценки погрешности приведенных классов сечений, указанные в Таблице 8 и предшествующем анализе, составляют 55%, 52% и 58%.

3 Парное рождение дваждытяжелых дикварков в протон–протонном взаимодействии

Оценки для сечений процессов парного рождения дваждытяжелых барионов (ccq) или (bcq) в протон–протонном взаимодействии могут быть получены на основе расчета сечений парного рождения дикварков, величины которых представляют верхние границы для сечений соответствующих барионов, просуммированных по возможным ароматам легкого кварка и спиновым состояниям конечных частиц. Расчет сечений парного рождения дикварков проводится аналогично случаю парного рождения чармония в pp взаимодействии, представленному в главе 2, тогда как проекционные операторы и волновые функции скалярных и аксиально–векторных дикварков, а также их соответствующие преобразования, влияющие на амплитуду парного рождения и ее интерпретацию, были рассмотрены в разделе 1.4. Дополнительное усложнение расчета проявляется в наличии несовпадающих цветовых факторов у отдельных частей амплитуды парного рождения дикварков, что связано с относительно большим общим числом диаграмм с различающейся цветовой структурой [82].

3.1 Амплитуда подпроцесса $gg \rightarrow D\bar{D}$

Сечение парного рождения дваждытяжелых дикварков в протон–протонном взаимодействии при энергиях Большого адронного коллайдера может быть определено посредством свертки дифференциального сечения глюонного подпроцесса с соответствующими однопартонными функциями распределения

$$d\sigma[pp \rightarrow D_{bc} + \bar{D}_{\bar{b}\bar{c}} + X] = \int dx_1 dx_2 f_{g/p}(x_1, \mu) f_{g/p}(x_2, \mu) d\sigma[gg \rightarrow D_{bc} + \bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}], \quad (3.1)$$

что представляет частный случай (2.2). Импульсы начальных глюонов имеют вид $k_{1,2} = x_{1,2} \frac{\sqrt{S}}{2} (1, 0, 0, \pm 1)$, где \sqrt{S} — энергия pp столкновения в системе центра инерции.

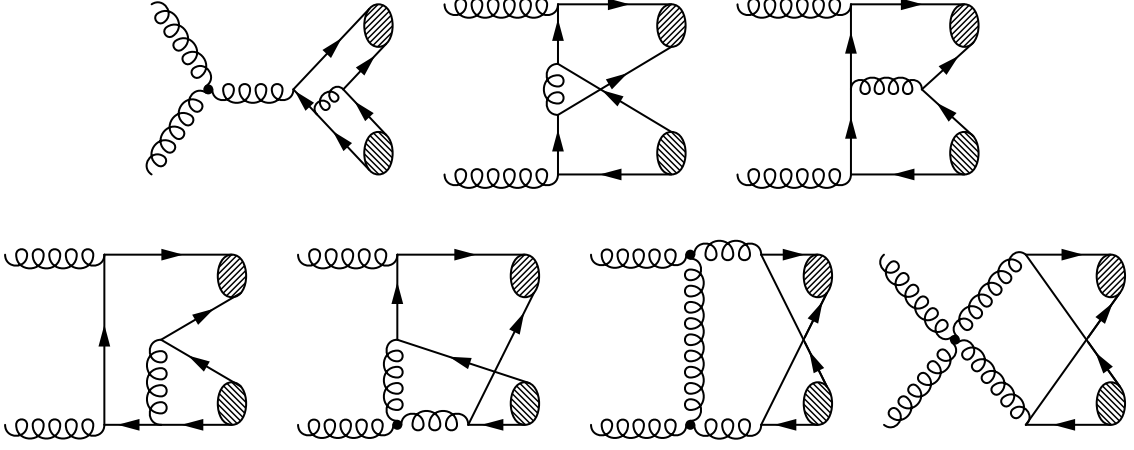


Рисунок 7 — Набор из 35 диаграмм лидирующего порядка, описывающих процесс парного рождения дикварков $gg \rightarrow D_{bc} + \bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$. Оставшиеся диаграммы могут быть получены обращением кварковых линий или перестановкой начальных глюонов

В лидирующем порядке по α_s рождение пары скалярных или аксиально-векторных дикварков в процессах глюонного слияния описывается 35 диаграммами, представленными на Рисунке 7. Одна дополнительная диаграмма, изображенная на Рисунке 8, имеет цветовой фактор, обращающийся в нуль при суммировании с антисимметричной цветовой частью волновых функций дикварков. В квазипотенциальном подходе, амплитуда процесса определяется в виде интеграла по относительному импульсу от волновых функций дикварков $\Psi_{\mathcal{D}}$ и соответствующей пертурбативной части, и для рассматриваемых диаграмм лидирующего порядка может быть записана в следующем виде:

$$\mathcal{M}[gg \rightarrow D_{bc} + \bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}](k_1, k_2, P, Q) = M\pi^2\alpha_s^2 \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \text{Tr } \mathfrak{M},$$

$$\mathfrak{M} = \bar{\Psi}_{P,p}^{bc} \gamma_\beta \bar{\Psi}_{Q,q}^{cb} \gamma_\omega \Gamma_1^{\beta\omega} + \bar{\Psi}_{P,-p}^{cb} \gamma_\beta \Gamma_2^{\beta\omega\theta} \gamma_\omega \bar{\Psi}_{Q,-q}^{bc} \gamma_\theta + \bar{\Psi}_{P,p}^{bc} \gamma_\beta \Gamma_3^{\beta\omega\theta} \gamma_\omega \bar{\Psi}_{Q,q}^{cb} \gamma_\theta +$$

$$+ \bar{\Psi}_{P,p}^{bc} \hat{\varepsilon}_1 \frac{m_c - \hat{k}_1 + \hat{p}_1}{(k_1 - p_1)^2 - m_c^2} \gamma_\beta (\bar{\Psi}_{Q,q}^{cb} \gamma_\omega \Gamma_4^{\beta\omega} + \Gamma_5^{\beta\omega} \bar{\Psi}_{Q,q}^{cb} \gamma_\omega) +$$

$$+ \bar{\Psi}_{P,-p}^{cb} \hat{\varepsilon}_1 \frac{m_b - \hat{k}_1 + \hat{p}_2}{(k_1 - p_2)^2 - m_b^2} \gamma_\beta (\bar{\Psi}_{Q,-q}^{bc} \gamma_\omega \Gamma_6^{\beta\omega} + \Gamma_7^{\beta\omega} \bar{\Psi}_{Q,-q}^{bc} \gamma_\omega) +$$

$$+ \bar{\Psi}_{P,p}^{bc} \hat{\varepsilon}_2 \frac{m_c - \hat{k}_2 + \hat{p}_1}{(k_2 - p_1)^2 - m_c^2} \gamma_\beta \Gamma_8^{\beta\omega} \bar{\Psi}_{Q,q}^{cb} \gamma_\omega + \bar{\Psi}_{P,-p}^{cb} \hat{\varepsilon}_2 \frac{m_b - \hat{k}_2 + \hat{p}_2}{(k_2 - p_2)^2 - m_b^2} \gamma_\beta \Gamma_9^{\beta\omega} \bar{\Psi}_{Q,-q}^{bc} \gamma_\omega +$$

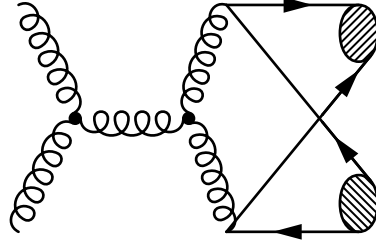


Рисунок 8 — Дополнительная диаграмма процесса $gg \rightarrow D_{bc} + \bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$, имеющая нулевой цветовой фактор

$$+ \bar{\Psi}_{P,-p}^{cb} \gamma^\beta \frac{m_b + \hat{k}_1 - \hat{q}_2}{(k_1 - q_2)^2 - m_b^2} \hat{\varepsilon}_1 \bar{\Psi}_{Q,-q}^{bc} \gamma_\omega \Gamma_{10}^{\beta\omega} + \bar{\Psi}_{P,p}^{bc} \gamma^\beta \frac{m_c + \hat{k}_1 - \hat{q}_1}{(k_1 - q_1)^2 - m_c^2} \hat{\varepsilon}_1 \bar{\Psi}_{Q,q}^{cb} \gamma_\omega \Gamma_{11}^{\beta\omega}, \quad (3.2)$$

где $M = M_{D_{bc}} = M_{\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}}$ — масса конечных дикварков, одинаковая для обеих частиц, $\varepsilon_{1,2}$ — векторы поляризации начальных глюонов, $m_{c,b}$ — массы кварков. Импульсы $p_{1,2}$ кварков, составляющих дикварк D_{bc} , и импульсы $q_{1,2}$ антикварков, образующих $\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$, определяются аналогично (1.36):

$$p_{1,2} = \eta_{1,2} P \pm p, \quad (pP) = 0; \quad q_{1,2} = \rho_{1,2} Q \pm q, \quad (qQ) = 0, \\ \eta_{1,2} = \frac{M_{D_{bc}}^2 \pm m_c^2 \mp m_b^2}{2M_{D_{bc}}^2}, \quad \rho_{1,2} = \frac{M_{\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}}^2 \pm m_c^2 \mp m_b^2}{2M_{\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}}^2},$$

где P и Q — полные четырехимпульсы дикварков D_{bc} и $\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$, а $p = L_P(0, \mathbf{p})$ и $q = L_Q(0, \mathbf{q})$ — относительные четырехимпульсы кварков и антикварков, определяемые преобразованием Лоренца четырехвекторов $(0, \mathbf{p})$ и $(0, \mathbf{q})$ к системам отсчета движущихся дикварков.

Непертурбативный процесс формирования дикварков из кварк–кварковых или антикварк–антикварковых пар определяется квазипотенциальными волновыми функциями $\Psi_{\mathcal{D}}$, которые могут быть получены в системе покоя дикварков, тогда как в амплитуду (3.2) входят выражения для волновых функций, рассматриваемых в системах отсчета, движущихся с полными импульсами P и Q дикварков D_{bc} и $\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$. Необходимый закон преобразования был установлен в работе [57] и задается соотношениями (1.5). Опуская ряд промежуточных преобразований, связанных с применением (1.5) и подробно изложенным в разделе

ле 1.1, можно получить следующие соотношения, связывающие квазипотенциальные волновые функции $\Psi_{P,p}$ и $\Psi_{Q,q}$ в (3.2) с соответствующими волновыми функциями в системе покоя дикварков $\Psi_{D_{bc}}^0(\mathbf{p})$ и $\bar{\Psi}_{\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}}^0(\mathbf{q})$ [79, 82]:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_{P,p}^{bc} &= \frac{\bar{\Psi}_{D_{bc}}^0(\mathbf{p})}{\sqrt{\frac{\epsilon_c(p)}{m_c} \frac{\epsilon_c(p)+m_c}{2m_c} \frac{\epsilon_b(p)}{m_b} \frac{\epsilon_b(p)+m_b}{2m_b}}} \left[\frac{\hat{v}_1 - 1}{2} + \hat{v}_1 \frac{\mathbf{p}^2}{2m_b(\epsilon_b(p) + m_b)} - \frac{\hat{p}}{2m_b} \right] \\ &\quad \times \Sigma^P (1 + \hat{v}_1) \left[\frac{\hat{v}_1 + 1}{2} + \hat{v}_1 \frac{\mathbf{p}^2}{2m_c(\epsilon_c(p) + m_c)} + \frac{\hat{p}}{2m_c} \right], \\ \bar{\Psi}_{Q,q}^{cb} &= \frac{\bar{\Psi}_{\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}}^0(\mathbf{q})}{\sqrt{\frac{\epsilon_c(q)}{m_c} \frac{\epsilon_c(q)+m_c}{2m_c} \frac{\epsilon_b(q)}{m_b} \frac{\epsilon_b(q)+m_b}{2m_b}}} \left[\frac{\hat{v}_2 - 1}{2} + \hat{v}_2 \frac{\mathbf{q}^2}{2m_c(\epsilon_c(q) + m_c)} + \frac{\hat{q}}{2m_c} \right] \\ &\quad \times \Sigma^Q (1 + \hat{v}_2) \left[\frac{\hat{v}_2 + 1}{2} + \hat{v}_2 \frac{\mathbf{q}^2}{2m_b(\epsilon_b(q) + m_b)} - \frac{\hat{q}}{2m_b} \right],\end{aligned}\tag{3.3}$$

где $\epsilon_{c,b}(p) = \sqrt{p^2 + m_{c,b}^2}$, $v_1 = P/M$, $v_2 = Q/M$, и $\Sigma^{P,Q}$ выбирается равным γ_5 и $\hat{\epsilon}_{P,Q}$ для скалярных и аксиально-векторных дикварков, соответственно. Векторы поляризации $\varepsilon_{P,Q}$ аксиально-векторных дикварков удовлетворяют соотношениям $\varepsilon_P P = 0$ и $\varepsilon_Q Q = 0$. Порядок верхних индексов bc или cb в (3.3) отвечает соответствующим перестановкам проекционных операторов, что учтено при записи амплитуды (3.2).

Вершинные функции Γ_i в (3.2) соответствуют вкладам 35 диаграмм лидирующего порядка по α_s , представленным на Рисунке 7, и задаются следующими явными выражениями:

$$\begin{aligned}\Gamma_1^{\beta\omega} &= \mathcal{K}_1 D_\mu^\beta(p_1 + q_1) D_\nu^\omega(p_2 + q_2) (\varepsilon_1^\nu \varepsilon_2^\mu + \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu - 2g^{\mu\nu}(\varepsilon_1 \varepsilon_2) - \\ &\quad - D_{\lambda\kappa}(k_1 - p_1 - q_1) \mathfrak{E}_1^{\lambda\mu}(p_1 + q_1) \mathfrak{E}_2^{\kappa\nu}(p_2 + q_2) - D_{\kappa\lambda}(k_1 - p_2 - q_2) \mathfrak{E}_1^{\kappa\nu}(p_2 + q_2) \mathfrak{E}_2^{\lambda\mu}(p_1 + q_1)), \\ \Gamma_2^{\beta\omega\theta} &= \mathcal{K}_2 \mathfrak{E}_2^\mu(-k_1) D_\mu^\beta(k_1 + k_2) D^{\theta\omega}(p_1 + q_1) \frac{m_b - \hat{p}_1 - \hat{q}_1 - \hat{q}_2}{(p_1 + q_1 + q_2)^2 - m_b^2} + \\ &\quad + \mathcal{K}_5 \varepsilon_2^\omega \mathfrak{E}_1^{\mu\nu}(p_1 + q_1) D_\mu^\beta(k_1 - p_1 - q_1) D_\nu^\theta(p_1 + q_1) \frac{m_b + k_2 - q_2}{(k_2 - q_2)^2 - m_b^2} + \\ &\quad + D^{\theta\beta}(p_1 + q_1) \frac{m_b + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{q}_1}{(p_1 + p_2 + q_1)^2 - m_b^2} \left(\mathcal{K}_2 \mathfrak{E}_1^\mu(-k_2) D_\mu^\omega(k_1 + k_2) + \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathcal{K}_9 \varepsilon_1^\omega \hat{\varepsilon}_2 \frac{m_b + \hat{k}_1 - \hat{q}_2}{(k_1 - q_2)^2 - m_b^2} + \mathcal{K}_7 \varepsilon_2^\omega \hat{\varepsilon}_1 \frac{m_b + \hat{k}_2 - \hat{q}_2}{(k_2 - q_2)^2 - m_b^2} \Big), \\
\Gamma_4^{\beta\omega} &= \mathcal{K}_3 D^{\beta\omega}(k_1 - p_1 - q_1) \frac{m_b + \hat{k}_2 - \hat{p}_2}{(k_2 - p_2)^2 - m_b^2} \hat{\varepsilon}_2 - \mathcal{K}_4 \varepsilon_2^\omega D^{\beta\mu}(k_1 - p_1 - q_1) \times \\
& \times \frac{m_b - \hat{k}_2 + \hat{q}_2}{(k_2 - q_2)^2 - m_b^2} \gamma_\mu - \mathcal{K}_5 \mathfrak{E}_2^{\mu\nu}(p_2 + q_2) D_\mu^\beta(k_1 - p_1 - q_1) D_\nu^\omega(p_2 + q_2), \\
\Gamma_5^{\beta\omega} &= \mathcal{K}_6 D^{\beta\omega}(p_2 + q_2) \frac{m_c + \hat{k}_2 - \hat{q}_1}{(k_2 - q_1)^2 - m_c^2} \hat{\varepsilon}_2 + \mathcal{K}_7 \varepsilon_2^\beta D_\mu^\omega(p_2 + q_2) \frac{m_c - \hat{p}_2 - \hat{q}_1 - \hat{q}_2}{(p_2 + q_1 + q_2)^2 - m_c^2} \gamma_\mu, \\
\Gamma_8^{\beta\omega} &= \mathcal{K}_8 D^{\beta\omega}(p_2 + q_2) \frac{m_c + \hat{k}_1 - \hat{q}_1}{(k_1 - q_1)^2 - m_c^2} \hat{\varepsilon}_1 + \mathcal{K}_9 \varepsilon_1^\beta D_\mu^\omega(p_2 + q_2) \times \\
& \times \frac{m_c - \hat{p}_2 - \hat{q}_1 - \hat{q}_2}{(p_2 + q_1 + q_2)^2 - m_c^2} \gamma_\mu - \mathcal{K}_{10} \mathfrak{E}_1^{\mu\nu}(p_2 + q_2) D_\mu^\beta(k_1 - p_2 - q_2) D_\nu^\omega(p_2 + q_2), \\
\Gamma_{10}^{\beta\omega} &= \mathcal{K}_{11} D^{\beta\omega}(k_1 - p_2 - q_2) \frac{m_c + \hat{k}_2 - \hat{p}_1}{(k_2 - p_1)^2 - m_c^2} \hat{\varepsilon}_2 + \mathcal{K}_3 \varepsilon_2^\omega D^{\beta\mu}(k_1 - p_2 - q_2) \times \\
& \times \frac{m_c - \hat{k}_2 + \hat{q}_1}{(k_2 - q_1)^2 - m_c^2} \gamma_\mu + \mathcal{K}_{10} \mathfrak{E}_2^{\mu\nu}(p_1 + q_1) D_\mu^\beta(k_1 - p_2 - q_2) D_\nu^\omega(p_1 + q_1), \quad (3.4)
\end{aligned}$$

где для удобства вводятся также вспомогательные функции

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_{1,2}^{\mu\nu}(x) &= g^{\mu\nu}(k_{1,2} - 2x)\varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{1,2}^\mu(2k_{1,2}^\nu - x^\nu) + \varepsilon_{1,2}^\nu(k_{1,2}^\mu + x^\mu), \\
\mathfrak{E}_{1,2}^\mu(x) &= \varepsilon_{2,1}^\nu \mathfrak{E}_{1,2}^{\mu\nu}(x).
\end{aligned} \quad (3.5)$$

Для глюонных пропагаторов $D_{\mu\nu}(k)$, входящих в (3.4), в дальнейшем будет использоваться калибровка Фейнмана $D_{\mu\nu}^F(k) = -ig^{\mu\nu}/k^2$. Вершинные функции Γ_i , не выписанные в (3.4), могут быть получены из соответствующих выражений (3.4) с помощью замен $m_c \leftrightarrow m_b$, $p_1 \leftrightarrow p_2$ и $q_1 \leftrightarrow q_2$:

$$\begin{aligned}
\Gamma_3^{\beta\omega\theta} &= \Gamma_2^{\beta\omega\theta} \Big|_{\substack{m_b \rightleftharpoons m_c, \\ p_1 \rightleftharpoons p_2 \\ q_1 \rightleftharpoons q_2}}, & \Gamma_6^{\beta\omega} &= \Gamma_4^{\beta\omega} \Big|_{\substack{m_b \rightleftharpoons m_c, \\ p_1 \rightleftharpoons p_2 \\ q_1 \rightleftharpoons q_2}}, & \Gamma_7^{\beta\omega} &= \Gamma_5^{\beta\omega} \Big|_{\substack{m_b \rightleftharpoons m_c, \\ p_1 \rightleftharpoons p_2 \\ q_1 \rightleftharpoons q_2}}, \\
\Gamma_9^{\beta\omega} &= \Gamma_8^{\beta\omega} \Big|_{\substack{m_b \rightleftharpoons m_c, \\ p_1 \rightleftharpoons p_2 \\ q_1 \rightleftharpoons q_2}}, & \Gamma_{11}^{\beta\omega} &= \Gamma_{10}^{\beta\omega} \Big|_{\substack{m_b \rightleftharpoons m_c, \\ p_1 \rightleftharpoons p_2 \\ q_1 \rightleftharpoons q_2}}.
\end{aligned} \quad (3.6)$$

Цветовая часть волновых функций дикварков описывается антисимметричным тензором и имеет вид $e^{c_1 c_2 A}/\sqrt{2}$ и $e^{c_3 c_4 B}/\sqrt{2}$, $c_i = 1, 2, 3$, для дикварков D_{bc} и $\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$, соответственно, где цветовые индексы $c_{1,2}$ и $c_{3,4}$ суммируются с индексами соответствующих кварков и антикварков в амплитуде, формирующих

заданные дикварки в конечном состоянии. Указанное суммирование приводит к нетривиальной цветовой структуре итоговой амплитуды (3.2), что проявляется в наличии 11 различных цветовых факторов в (3.4):

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1 &= -3\mathcal{C}_0 - 3\mathcal{C}_1 + 4\mathcal{C}_3, & \mathcal{K}_2 &= \frac{4}{3}\mathcal{C}_1, & \mathcal{K}_3 &= \frac{2i}{3}(\mathcal{C}_0 + 2\mathcal{C}_1 - 4\mathcal{C}_2), \\
\mathcal{K}_4 &= \frac{i}{3}(\mathcal{C}_0 - \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2), & \mathcal{K}_5 &= \frac{3}{2}\mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1 - 2\mathcal{C}_3, & \mathcal{K}_6 &= -\frac{i}{3}(\mathcal{C}_0 + 3\mathcal{C}_1 - 5\mathcal{C}_2), \\
\mathcal{K}_7 &= \frac{2i}{3}(\mathcal{C}_0 - 2\mathcal{C}_2), & \mathcal{K}_8 &= -\frac{i}{3}(\mathcal{C}_0 + 2\mathcal{C}_1 - 5\mathcal{C}_2), & \mathcal{K}_9 &= \frac{2i}{3}(\mathcal{C}_0 + 2\mathcal{C}_1 - 2\mathcal{C}_2), \\
\mathcal{K}_{10} &= \frac{3}{2}\mathcal{C}_0 + 2\mathcal{C}_1 - 2\mathcal{C}_3, & \mathcal{K}_{11} &= -\frac{i}{3}(\mathcal{C}_0 + 2\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2), \\
\mathcal{C}_0 &= \delta^{g_1 g_2} \delta_{AB}, & \mathcal{C}_1 &= i f^{g_1 g_2 a} (T^a)_{BA}, & \mathcal{C}_2 &= (T^{g_1} T^{g_2})_{BA}, & \mathcal{C}_3 &= f^{g_1 e a} f^{g_2 e b} (T^a T^b)_{BA},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где f^{ijk} и T^a — структурные константы и цветковые матрицы $SU(3)$, индексы $g_{1,2} = 1, \dots, 8$ соответствуют начальным глюонам, A и B — цветковые индексы дикварков. Цветовой множитель диаграммы, изображенной на Рисунке 8, имеет вид $f^{g_1 g_2 e} f^{a b e} (T^a)_{c_1 c_3} (T^b)_{c_2 c_4} e^{c_1 c_2 A} e^{c_3 c_4 B} = 0$.

Разложение пропагаторов кварков и глюонов, входящих в (3.2), проводится следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(p_{1,2} + q_{1,2})^2} &= \frac{1}{s \eta_{1,2}^2} \left[1 \mp \frac{2(pQ + qP)}{s \eta_{1,2}} - \frac{p^2 + 2pq + q^2}{s \eta_{1,2}^2} + \dots \right], \\
\frac{1}{(p_1 + q_1 + q_2)^2 - m_b^2} &= \frac{1}{Z_1} \left[1 - \frac{2pQ + p^2}{Z_1} + \frac{4(pQ)^2}{Z_1^2} + \dots \right], \\
\frac{1}{(k_2 - q_1)^2 - m_c^2} &= \frac{1}{Z_2} \left[1 + \frac{2k_2 q - q^2}{Z_2} + \frac{4(k_2 Q)^2}{Z_2^2} + \dots \right],
\end{aligned} \tag{3.8}$$

где $s = (k_1 + k_2)^2 = (P + Q)^2 = x_1 x_2 S$ и $t = (P - k_1)^2 = (Q - k_2)^2$ — переменные Мандельштама для глюонного подпроцесса, а знаменатели лидирующего порядка $Z_{1,2}$ имеют вид $Z_1 = s \eta_1 + \eta_2^2 M^2 - m_b^2$ и $Z_2 = t \eta_1 + \eta_1 \eta_2 M^2 - m_c^2$. В амплитуде (3.2) содержится в общей сложности 16 различных пропагаторов, разлагаемых подобно (3.8). В пренебрежении энергиями связи дикварков знаменатели данных пропагаторов принимают одно из следующих значений: $s \eta_{1,2}$,

$s\eta_{1,2}^2$, $\eta_{1,2}(M^2 - t)$ или $\eta_{1,2}(M^2 - s - t)$. Далее, принимая во внимание кинематические ограничения на переменные s и t (2.14), а также используя приближенную оценку $\eta_1 \approx m_c/(m_c + m_b) \approx 1/4$ для (bc) дикварков, можно прийти к выводу, что параметры разложения в (3.8) являются малыми величинами порядка $4p^2/M^2$ и $4q^2/M^2$. После сохранения в разложенной амплитуде слагаемых вплоть до второго порядка малости по p и q угловое интегрирование может быть проведено с применением соотношений (1.40).

3.2 Дифференциальные сечения парного рождения дикварков. Нерелятивистский предел сечений

Для получения дифференциального сечения необходимо просуммировать квадрат амплитуды по поляризациям конечных частиц, в случае рождения пары аксиально-векторных дикварков, а также усреднить по поляризациям начальных глюонов (2.18). Кроме того, необходимо провести усреднение по 8×8 начальным глюонам и просуммировать цветовые индексы дикварков A и B . Итоговый результат для дифференциального сечения процесса парного рождения дваждытяжелых дикварков $gg \rightarrow \mathcal{D}\bar{\mathcal{D}}$ имеет вид

$$d\sigma[gg \rightarrow D_{bc} + \bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}](s, t) = \frac{\pi M^2 \alpha_s^4}{65 \cdot 536 s^2} |\tilde{R}(0)|^4 \times \\ [F^{(1)}(s, t) - 4(\omega_{01} + \omega_{10} - \omega_{11})F^{(1)}(s, t) - 4m_c^{-1}m_b^{-1}(m_c^2\omega_{\frac{1}{2}\frac{3}{2}} + m_b^2\omega_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}})F^{(1)}(s, t) \\ + 6(\omega_{01} + \omega_{10})^2 F^{(1)}(s, t) + \omega_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1 - 3\omega_{01} - 3\omega_{10})F^{(2)}(s, t) + \omega_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^2 F^{(3)}(s, t)]. \quad (3.9)$$

В случае парного рождения дикварков D_{cc} и $D_{\bar{c}\bar{c}}$, состоящих из идентичных (анти)кварков, сечение (3.9) приобретает дополнительный множитель $1/16$, соответствующий принципу исключения Паули. Входящие в (3.9) непертурбативные параметры также были определены в разделе 1.4, выражения (1.48), (1.49):

$$\tilde{R}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{(\epsilon_c(p) + m_c)(\epsilon_b(p) + m_b)}{2\epsilon_c(p) 2\epsilon_b(p)}} R(p) p^2 dp,$$

Таблица 9 — Значения непертурбативных параметров дваждытяжелых дикварков, входящих в сечение (3.9)

Дикварк	$R(0),$ $\Gamma \partial B^{3/2}$	$\tilde{R}(0),$ $\Gamma \partial B^{3/2}$	ω_{10}	ω_{01}	$\omega_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$	ω_{11}	$\omega_{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}$	$\omega_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}$
SD_{bc}	0.67	0.50	0.0383	0.0045	0.0131	0.00039	0.00014	0.0011
AVD_{bc}	0.67	0.48	0.0384	0.0045	0.0132	0.00038	0.00013	0.0011
AVD_{cc}	0.53	0.38		0.0323			0.0023	

$$I_{nk} = \int_0^{m_c} p^2 R(p) \sqrt{\frac{(\epsilon_c(p) + m_c)(\epsilon_b(p) + m_b)}{2\epsilon_c(p)2\epsilon_b(p)}} \left(\frac{\epsilon_c(p) - m_c}{\epsilon_c(p) + m_c}\right)^n \left(\frac{\epsilon_b(p) - m_b}{\epsilon_b(p) + m_b}\right)^k dp,$$

$$\omega_{nk} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{I_{nk}}{\tilde{R}(0)}, \quad 0 < n + k \leq 2. \quad (3.10)$$

Численные значения параметров ω_{nk} с целыми индексами n и k представлены в Таблице 5, однако, в отличие от результатов (1.45)–(1.47), явный вид сечения (3.9) содержит также параметры ω с полуцелыми индексами, введенные для симметризации итогового ответа по массам кварков $m_{c,b}$. Значения данных параметров приведены в Таблице 9.

В нерелятивистском пределе $\omega_{nk} = 0$, $n + k > 0$, параметр $\tilde{R}(0)$ переходит в нуль координатного представления волновой функции $R(0) = \sqrt{2/\pi} \int R(p) p^2 dp$, соответствующий использованию нерелятивистского гамильтониана (1.31) в модифицированной версии программы численного решения уравнения Шредингера *schroed32* [85], и энергия связи дикварков полагается равной нулю, так что $M_{D_{bc}} \rightarrow M_0 = m_c + m_b$, $M_{D_{cc}} \rightarrow M_c = 2m_c$. В случае парного рождения дикварков D_{cc} и $D_{\bar{c}\bar{c}}$ явный вид нерелятивистского дифференциального сечения глюонного подпроцесса следующий:

$$d\sigma^{\text{NR}}[gg \rightarrow D_{cc} + \bar{D}_{\bar{c}\bar{c}}](s, t) = \frac{\pi \alpha_s^4 |R_{D_{cc}}(0)|^4}{54 M_c^2 s^8 (M_c^2 - t)^4 (M_c^2 - s - t)^4} [27648 M_c^{24} -$$

$$- 72 M_c^{22} (1595s + 4596t) + 3 M_c^{20} (67687s^2 + 437088st + 605232t^2) - 8 M_c^{18} \times$$

$$\times (28007s^3 + 278328s^2t + 849501st^2 + 754920t^3) + 4 M_c^{16} (48546s^4 + 575480s^3t +$$

$$\begin{aligned}
& + 2731629s^2t^2 + 5276664st^3 + 3390660t^4) - 2M_c^{14}(66854s^5 + 867710s^4t + \\
& + 5237453s^3t^2 + 15810492s^2t^3 + 21825720st^4 + 10831968t^5) + M_c^{12}(64025s^6 + \\
& + 980113s^5t + 6934011s^4t^2 + 27679700s^3t^3 + 59798910s^2t^4 + 63129024st^5 + \\
& + 25238304t^6) - 2M_c^{10}(9796s^7 + 190998s^6t + 1629993s^5t^2 + 8003124s^4t^3 + \\
& + 23392115s^3t^4 + 38627220s^2t^5 + 32576040st^6 + 10803456t^7) + M_c^8(4006s^8 + \\
& + 94606s^7t + 1029199s^6t^2 + 6247798s^5t^3 + 23171033s^4t^4 + 52444016s^3t^5 + \\
& + 69078684s^2t^6 + 47988288st^7 + 13491360t^8) - 2M_c^6(322s^9 + 7064s^8t + 99306s^7t^2 + \\
& + 779460s^6t^3 + 3657884s^5t^4 + 10718238s^4t^5 + 19496435s^3t^6 + 21114948s^2t^7 + \\
& + 12361788st^8 + 2995920t^9) + M_c^4(68s^{10} + 1153s^9t + 19692s^8t^2 + 217805s^7t^3 + \\
& + 1362129s^6t^4 + 5166549s^5t^5 + 12342213s^4t^6 + 18546596s^3t^7 + 16897269s^2t^8 + \\
& + 8485920st^9 + 1796688t^{10}) - 2M_c^2t(s+t)^2(16s^8 + 243s^7t + 5526s^6t^2 + 49040s^5t^3 + \\
& + 215626s^4t^4 + 530597s^3t^5 + 741924s^2t^6 + 546660st^7 + 163296t^8) + t^2(s+t)^2 \times \\
& \times (8s^8 + 25s^7t + 2536s^6t^2 + 21366s^5t^3 + 78759s^4t^4 + 157896s^3t^5 + 179640s^2t^6 + \\
& + 108864st^7 + 27216t^8)]. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Для рождения пары скалярных или аксиально–векторных дикварков D_{bc} и $D_{\bar{b}\bar{c}}$ нерелятивистское сечение в общем случае имеет вид:

$$d\sigma[gg \rightarrow D_{bc} + \bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}](s, t) = \frac{\pi M_0^2 \alpha_s^4}{65 \cdot 536 s^2} |R(0)|^4 F_0^{(1)}(s, t), \tag{3.12}$$

где функция $F_0^{(1)}(s, t)$ представляет нулевой порядок разложения $F^{(1)}(s, t)$ по энергии связи $W = M - m_c - m_b$, $F^{(1)}(s, t) = F_0^{(1)}(s, t) + W F_1^{(1)}(s, t) + \dots$. Таким образом, из сравнения (3.9) и (3.12) следует, что $F^{(1)}(s, t)$ соответствует лидирующему вкладу в сечение из амплитуды (3.2), тогда как функции $F^{(2,3)}(s, t)$ отражают релятивистские поправки к амплитуде, определяемые разложениями (3.8) и преобразованиями волновых функций (3.3). Полные выражения для данных функций слишком громоздки, особенно для дикварков $D_{bc(\bar{b}\bar{c})}$, состоящих из (анти)кварков неравной массы, поэтому в Приложении В соответствующие результаты представлены лишь для пары D_{cc} и $D_{\bar{c}\bar{c}}$, с точностью до членов первого порядка по энергии связи.

Таблица 10 — Сечения парного рождения дикварков $pp \rightarrow \mathcal{D}\bar{\mathcal{D}} + X$

Энергия \sqrt{S}	Пара дикварков	CTEQ5L		CTEQ6L1	
		$\sigma_{\text{нерел.}}, \text{ нб}$	$\sigma_{\text{рел.}}, \text{ нб}$	$\sigma_{\text{нерел.}}, \text{ нб}$	$\sigma_{\text{рел.}}, \text{ нб}$
$\sqrt{S} = 7 \text{ ТэВ}$	$SD_{bc} + S\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$	0.063	0.018	0.057	0.016
	$AVD_{bc} + AV\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$	0.25	0.053	0.23	0.049
	$AVD_{cc} + AV\bar{D}_{\bar{c}\bar{c}}$	1.39	0.28	1.07	0.22
$\sqrt{S} = 14 \text{ ТэВ}$	$SD_{bc} + S\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$	0.14	0.039	0.12	0.034
	$AVD_{bc} + AV\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$	0.55	0.12	0.48	0.10
	$AVD_{cc} + AV\bar{D}_{\bar{c}\bar{c}}$	2.51	0.51	1.94	0.40

Численные значения сечений парного рождения скалярных и аксиально-векторных дикварков в протон-протонном взаимодействии, отвечающие энергиям pp столкновений $\sqrt{S} = 7$ и 14 ТэВ , представлены в Таблице 10. Как и в предыдущей главе, расчет произведен для двух наборов функций партонного распределения CTEQ5L [122] и CTEQ6L1 [123] с масштабом факторизации $\mu = m_T = \sqrt{M^2 + P_T^2}$. Формирование дваждытяжелых барионов состоит в дополнительном присоединении легкого кварка к каждому из образовавшихся в паре дикварков (bc) или (cc). При этом направление импульса образовавшихся барионов будет фактически совпадать с таковым для изначальных дваждытяжелых дикварков. Таким образом, возможные кинематические ограничения для образовавшихся частиц могут быть эффективно применены на дикварковой стадии процесса образования дваждытяжелых барионов. В частности, Таблица 11 содержит сечения парного рождения дикварков, вычисленные для интервала быстрот $2 < y_{P,Q} < 4.5$ эксперимента ЛНСб. Результаты, представленные в Таблицах 10 и 11, являются ограничениями сверху на сечения парного рождения дваждытяжелых барионов, просуммированные по ароматам легких кварков и возможным спиновым состояниям.

Таблица 11 — Сечения парного рождения дикварков $pp \rightarrow D\bar{D} + X$, отвечающие интервалу быстрот $2 < y_{P,Q} < 4.5$ конечных состояний

Энергия \sqrt{S}	Пара дикварков	CTEQ5L		CTEQ6L1	
		$\sigma_{\text{нерел.}}, \text{ нб}$	$\sigma_{\text{рел.}}, \text{ нб}$	$\sigma_{\text{нерел.}}, \text{ нб}$	$\sigma_{\text{рел.}}, \text{ нб}$
$\sqrt{S} = 7 \text{ ТэВ}$	$SD_{bc} + S\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$	0.010	0.003	0.009	0.003
	$AVD_{bc} + AV\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$	0.032	0.007	0.029	0.006
	$AVD_{cc} + AV\bar{D}_{\bar{c}\bar{c}}$	0.19	0.038	0.14	0.029
$\sqrt{S} = 14 \text{ ТэВ}$	$SD_{bc} + S\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$	0.024	0.007	0.020	0.006
	$AVD_{bc} + AV\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$	0.076	0.016	0.066	0.014
	$AVD_{cc} + AV\bar{D}_{\bar{c}\bar{c}}$	0.35	0.072	0.25	0.053

3.3 Обсуждение результатов

Релятивистские поправки к сечением рождения пары аксиально–векторных дваждытяжелых дикварков в протон–протонном взаимодействии в совокупности приводят к практически пятикратному падению (до 80%) как полного нерелятивистского сечения, так и его значения, соответствующего региону быстрот $2 < y_{P,Q} < 4.5$. В случае рождения пары скалярных дикварков, падение сечения несколько ниже и составляет около 70%. Центральное влияние оказывает нуль волновой функции в координатном представлении $R(0)$ и его релятивистское обобщение в квазипотенциальном подходе: параметр $\tilde{R}(0)$, четвертая степень которых содержится в выражениях для сечений (3.9)–(3.12). Таким образом, изменение формы волновой функции за счет поправок второго порядка по скорости тяжелого кварка в потенциале взаимодействия (1.30) ответственно за более чем трехкратное понижение изначального нерелятивистского сечения. Эффекты связанности частиц, определяемые принятием во внимание ненулевых энергий связи дикварков $W = M - m_c - m_b \neq 0$, также уменьшают сечение. Использование численных значений масс дикварков $M_{SD_{bc}} = 6.517 \text{ ТэВ}$, $M_{AVD_{bc}} = 6.526 \text{ ТэВ}$ и $M_{AVD_{cc}} = 3.224 \text{ ТэВ}$, определенных в рассматриваемой

Таблица 12 — Сечения процесса $pp \rightarrow \mathcal{D}\bar{\mathcal{D}} + X$ с учетом различных источников релятивистских поправок при $\sqrt{S} = 7 \text{ ТэВ}$ (CTEQ5L)

Пара	$\sigma^{\text{NR}},$ $\phi\bar{b}$	$\sigma^{\text{NR+WF}},$ $\phi\bar{b}$	$\sigma^{\text{NR+WF+bound}},$ $\phi\bar{b}$	$\sigma^{\text{NR+WF+bound+amp}},$ $\phi\bar{b}$
$SD_{bc} + S\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$	0.063	0.019	0.015	0.018 ± 0.009
$AVD_{bc} + AV\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$	0.25	0.062	0.047	0.053 ± 0.025
$AVD_{cc} + AV\bar{D}_{\bar{c}\bar{c}}$	1.39	0.37	0.26	0.28 ± 0.13

релятивистской кварковой модели (Таблицы 2 и 5), приводит к результатам, заниженным на 20–30% по сравнению с соответствующими величинами, полученными в приближении нулевой энергии связи $M_{D_{bc}} \rightarrow M_0 = m_c + m_b$, $M_{D_{cc}} \rightarrow M_c = 2m_c$. Релятивистские поправки к амплитуде, определяемые разложениями (3.8) с последующим сохранением членов второго порядка по относительным импульсам p^2 и q^2 , повышают сечение, однако сопутствующий положительный эффект оказывается равным около 10–20%, что недостаточно для компенсации существенных отрицательных вкладов из других источников.

Детальный анализ роли различных источников релятивистских поправок и соответствующих изменений в сечении представлен в Таблице 12. Каждый последующий ее столбец содержит предыдущее сечение, последовательно дополненное релятивистским вкладом, определяемым: волновыми функциями ди-кварков, эффектами связанности и поправками из амплитуды, соответственно. Таблица 12 содержит результаты для энергии $\sqrt{S} = 7 \text{ ТэВ}$, рассчитанные с применением набора CTEQ5L, однако относительная величина вкладов проанализированных источников поправок не зависит от указанных деталей и также сохраняется для сечений в интервале быстрот $2 < y_{P,Q} < 4.5$. Итоговая погрешность проведенного расчета определяется точностью нахождения волновых функций и неопределенностями, связанными с отброшенными при разложениях амплитуды (3.8) слагаемыми порядка четвертой степени относительного импульса p^4 и выше. При точности определения волновой функции в 10%,

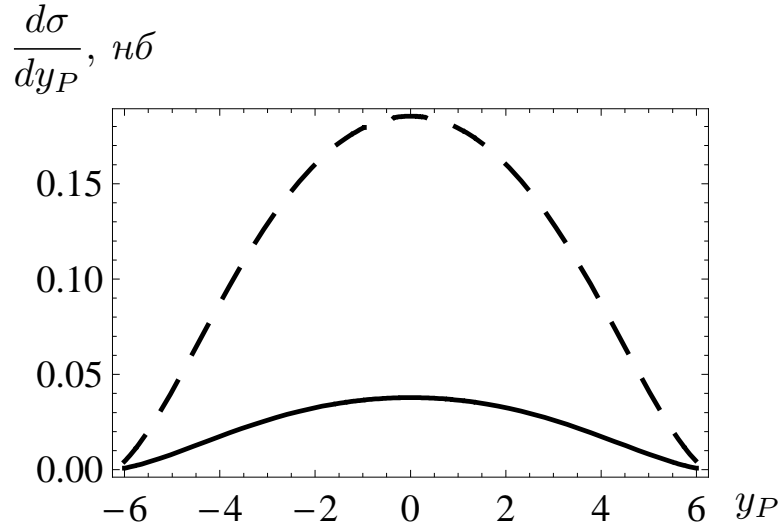


Рисунок 9 — Зависимость дифференциального сечения процесса $d\sigma[pp \rightarrow D_{cc}\bar{D}_{\bar{c}\bar{c}} + X]$ от быстроты y_P дикварка D_{cc} при энергии $\sqrt{S} = 7$ ТэВ.

Пунктирной линии соответствует нерелятивистский результат

общая погрешность сечения оценивается в 40%, что связано с наличием множителя $|\tilde{R}(0)|^4$ в (3.9). Как следует из Таблицы 12, вклад релятивистских поправок к амплитуде в общую величину сечения оказывается не превышающим 20%. В связи с этим, неопределенность, связанная с отброшенными при разложении слагаемыми, также может предполагаться равной 20%. Малая величина пертурбативных поправок к амплитуде позволяет считать несущественной погрешность, вносимую ограничением области определения релятивистских интегралов I_{nk} значениями импульсов, сопоставимыми с массой c -кварка $\Lambda = m_c$. Действительно, оценка в 0.3 от вклада пертурбативных поправок к амплитуде приводит к величине указанной погрешности в 7%. Итого, общая неопределенность релятивистских результатов для сечений составляет 48%, что также включает поправку на точность функций партонного распределения в 15% [71].

Распределения дифференциального сечения парного рождения дикварков D_{cc} и $\bar{D}_{\bar{c}\bar{c}}$ по быстроте y_P дикварка D_{cc} в конечном состоянии и по величине поперечного импульса P_T представлены на Рисунках 9 и 10, соответственно. При отсутствии внешних кинематических ограничений, интервал изменения указанных переменных составляет $\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{S}-\sqrt{S-4M^2}}{\sqrt{S}+\sqrt{S-4M^2}} \leq y_{P,Q} \leq \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{S}+\sqrt{S-4M^2}}{\sqrt{S}-\sqrt{S-4M^2}}$ и

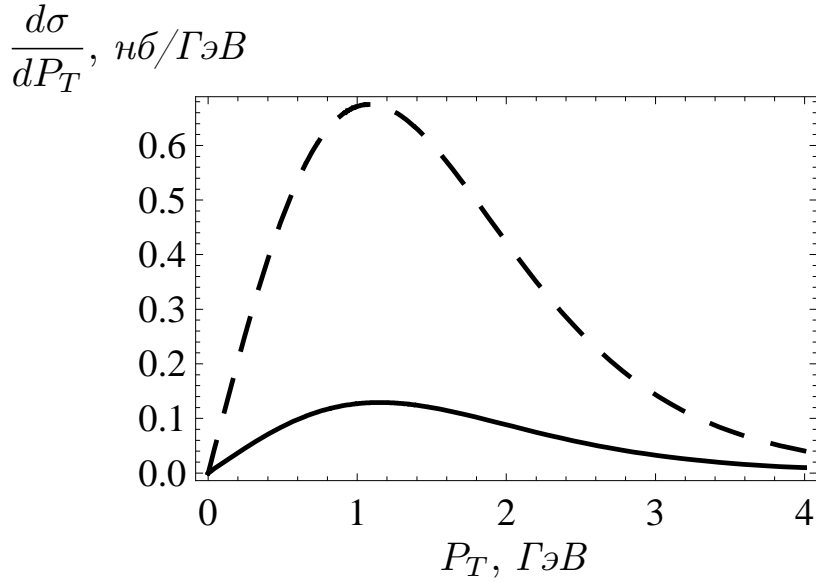


Рисунок 10 — Зависимость дифференциального сечения процесса $d\sigma[pp \rightarrow D_{cc} + D_{\bar{c}\bar{c}} + X]$ от поперечного импульса P_T при энергии $\sqrt{S} = 7$ ТэВ.

Пунктирной линии соответствует нерелятивистский результат

$0 \leq P_T \leq \sqrt{S/4 - M^2}$. Тем не менее, в случае распределения по поперечному импульсу P_T 95% величины полного сечения приходится на область $P_T < 4$ ГэВ и 99% — на интервал $0 \leq P_T \leq 5$ ГэВ. Из построений на Рисунках 9 и 10 следует, что релятивистские эффекты приводят к равномерному падению сечения практически на всей области определения соответствующих кинематических переменных. В частности, для пика в распределении $d\sigma/dP_T$ отношение сечений составляет $\sigma_{\text{рел}}/\sigma_{\text{нерел}} \approx 0.2$. Указанное соотношение остается практически неизменным как в области высоких значений поперечного импульса $P_T \gtrsim 5$ ГэВ, так и для широкого интервала быстрот образовавшихся дикварков $|y_{P,Q}| < 6$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты, полученные в диссертационной работе:

1. Построены релятивистские амплитуды парного рождения P -волнового чармония и S -волновых дикварков в электрон–позитронной аннигиляции и определены соответствующие поправки к сечениям. Показано отсутствие противоречий с результатами Belle. Получена оценка на выход пар барионов с двумя тяжелыми кварками при светимостях современных B фабрик.
2. Вычислены релятивистские поправки к сечениям рождения пар J/ψ и η_c на Большом адронном коллайдере. Полученные результаты использованы для интерпретации экспериментальных данных коллаборации LHCb.
3. Получены нерелятивистские сечения парного рождения дваждытяжелых дикварков в протон–протонном взаимодействии и релятивистские поправки к ним. Исследованы различные источники релятивистских поправок и выявлена роль каждого источника в изменении величин сечений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Г.В. Пахлова, П.Н. Пахлов, С.И. Эйдельман, Успехи физических наук **180**, 225 (2010).
- 2 Р.В. Мизюк, Г.В. Пахлова, П.Н. Пахлов, Р.Н. Чистов, Ядерная физика **73**, 669 (2010).
- 3 N. Brambilla, S. Eidelman, B. K. Heltsley *et al.*, Eur. Phys. J. C **71**, 1 (2011).
- 4 E.S. Swanson, Phys. Rep. **429**, 243 (2006).
- 5 V.V. Kiselev, A.K. Likhoded, S.R. Slabospitsky, A.V. Tkabladze, Sov. J. Nucl. Phys. **49**, 682 (1989).
- 6 M. Krämer, Prog. Part. Nucl. Phys. **47**, 141 (2001).
- 7 E. Braaten, S. Fleming, T.C. Yuan, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **46**, 197 (1996).
- 8 W.E. Caswell, G.P. Lepage, Phys. Lett. B **167**, 437 (1986).
- 9 G.P. Lepage, L. Magnea, C. Nakhleh, Phys. Rev. D **46**, 4052 (1992).
- 10 G.T. Bodwin, E. Braaten, G.P. Lepage, Phys. Rev. D **51**, 1125 (1995); Erratum-
ibid. **55**, 5853 (1997).
- 11 А.А. Быков, И.М. Дремин, А.В. Леонидов, Успехи физических наук **143**, 3 (1984).
- 12 G.T. Bodwin, D. Kang, J. Lee, Phys. Rev. D **74**, 014014 (2006).
- 13 K. Abe *et al.* (Belle Collaboration), Phys. Rev. Lett. **89**, 142001 (2002).
- 14 K. Abe *et al.* (Belle Collaboration), Phys. Rev. D **70**, 071102 (2004).

- 15 B. Aubert *et al.* (BABAR Collaboration), Phys. Rev. D **72**, 031101 (2005).
- 16 K.Y. Liu, Z.G. He, K.-T. Chao, Phys. Lett. B **557**, 45 (2003).
- 17 K. Hagiwara, E. Kou, C.F. Qiao, Phys. Lett. B **570**, 39 (2003).
- 18 E. Braaten, J. Lee. Phys. Rev. D **67**, 054007 (2003); Erratum-ibid. **72**, 099901(E) (2005).
- 19 J.P. Ma, Z.G. Si, Phys. Rev. D **70**, 074007 (2004).
- 20 A.E. Bondar, V.L. Chernyak, Phys. Lett. B **612**, 215 (2005).
- 21 V.V. Braguta, A.K. Likhoded, A.V. Luchinsky, Phys. Rev. D **72**, 074019 (2005).
- 22 V.V. Braguta, A.K. Likhoded, A.V. Luchinsky, Phys. Rev. D **72**, 094018 (2005).
- 23 V.V. Braguta, Phys. Rev. D **79**, 074018 (2009).
- 24 D. Ebert, A.P. Martynenko, Phys. Rev. D **74**, 054008 (2006).
- 25 D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin, A.P. Martynenko, Phys. Lett. B **672**, 264 (2009).
- 26 Z.-G. He, Y. Fan, K.-T. Chao, Phys. Rev. D **75**, 074011 (2007).
- 27 G.T. Bodwin, J. Lee, C. Yu, Phys. Rev. D **77**, 094018 (2008).
- 28 Y.-J. Zhang, Y.-J. Gao, K.-T. Chao, Phys. Rev. Lett. **96**, 092001 (2006).
- 29 B Gong, J.-X. Wang, Phys. Rev. D **77**, 054028 (2008).
- 30 R. Aaij *et al.* (LHCb Collaboration), Phys. Lett. B **707**, 52 (2012).
- 31 Z.-G. He, Y. Fan, K.-T. Chao, Phys. Rev. D **81**, 054036 (2010).
- 32 Y. Jia, Phys. Rev. D **82**, 034017 (2010).
- 33 G.-Z. Xu, Y.-J. Li, K.-Y. Liu, Y.-J. Zhang, Phys. Rev. D **86**, 094017 (2012).

- 34 Y. Fan, Y.-Q. Ma, K.-T. Chao, Phys. Rev. D **79**, 114009 (2009).
- 35 S. Fleck, B. Silvestre-Brac, J.M. Richard, Phys. Rev. D **38**, 1519 (1988).
- 36 S.S. Gershtein, V.V. Kiselev, A.K. Likhoded, A.I. Onishchenko, Phys. Rev. D **62**, 054021 (2000).
- 37 В.В. Киселев, А.К. Лиходед, Успехи физических наук **172**, 497 (2002).
- 38 M. Mattson *et al.* (SELEX Collaboration), Phys. Rev. Lett. **89**, 112001 (2002).
- 39 A. Ocherashvili *et al.* (SELEX Collaboration), Phys. Lett. B **628**, 18 (2005).
- 40 V.V. Kiselev, A.K. Likhoded, arXiv:hep-ph/0208231 (2002).
- 41 R. Chistov *et al.* (Belle Collaboration), Phys. Rev. Lett. **97**, 162001 (2006).
- 42 B. Aubert *et al.* (BABAR Collaboration), Phys. Rev. D **74**, 011103 (2006).
- 43 Y. Kato *et al.* (Belle Collaboration), arXiv:1312.1026 (2013).
- 44 R. Aaij *et al.* (LHCb Collaboration), J. High Energy Phys. **1312**, 090 (2013).
- 45 A. Falk, M. Luke, M.J. Savage, M.B. Wise, Phys. Rev. D **49**, 555 (1994).
- 46 V.V. Braguta, V.V. Kiselev, A.E. Chalov, Phys. At. Nucl. **65**, 1537 (2002).
- 47 H.-R. Dong, F. Feng, Y. Jia, Phys. Rev. D **85**, 114018 (2012).
- 48 G.T. Bodwin, D. Kang, J. Lee, Phys. Rev. D **74**, 114028 (2006).
- 49 Y.-J. Zhang, Y.-Q. Ma, and K.-T. Chao, Phys. Rev. D **78**, 054006 (2008).
- 50 K. Wang, Y.-Q. Ma, and K.-T. Chao, Phys. Rev. D **84**, 034022 (2011).
- 51 V.V. Braguta, A.K. Likhoded, A.V. Luchinsky, Phys. Lett. B **635**, 299 (2006).
- 52 E.N. Elekina, A.P. Martynenko, Phys. Rev. D **81**, 054006 (2010).

- 53 A.P. Martynenko, A.M. Trunin, Proceedings of Science **QFTHEP2011**, 051 (2011).
- 54 A.P. Martynenko, A.M. Trunin, Ядерная физика **77**, 821 (2014).
- 55 В.А. Матвеев, В.И. Саврин, А.Н. Сисакян, А.Н. Тавхелидзе, Теор. мат. физ. **132**, 267 (2002).
- 56 S.J. Brodsky, J.R. Primack, Ann. Phys. **52**, 315 (1969).
- 57 R.N. Faustov, Ann. Phys. (N.Y.) **78**, 176 (1973).
- 58 J.H. Kühn, J. Kaplan, E.J.O. Safiani, Nucl. Phys. B **157**, 125 (1979).
- 59 J.A.M. Vermaseren, FORM, arXiv:math-ph/0010025.
- 60 J. Beringer *et al.* (Particle Data Group), Phys. Rev. D **86**, 010001 (2012).
- 61 А.И. Вайнштейн, М.Б. Волошин, В.И. Захаров, В.А. Новиков, Л.Б. Окунь, М.А. Шифман, Успехи физических наук **123**, 217 (1984).
- 62 A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze, Nuov. Cim. **29**, 380 (1963).
- 63 I.T. Todorov, Phys. Rev. D **3**, 2351 (1971).
- 64 А.П. Мартыненко, Р.Н. Фаустов, Теор. мат. физ. **64**, 179 (1985).
- 65 D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin, Phys. Rev. D **62**, 034014 (2000).
- 66 D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin, Phys. Rev. D **67**, 014027 (2003).
- 67 D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin, Mod. Phys. Lett. A **20**, 875 (2005).
- 68 D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin, A.P. Martynenko, Phys. Rev. D **66**, 014008 (2002).
- 69 D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin, Eur. Phys. J. C **71**, 1825 (2011).

- 70 A.P. Martynenko, A.M. Trunin, Phys. Rev. D **86**, 094003 (2012).
- 71 A.P. Martynenko, A.M. Trunin, Phys. Lett. B **723**, 132 (2013).
- 72 А.П. Мартыненко, А.М. Трунин, Ядерная физика **76** доп. номер, 155 (2013).
- 73 Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989. 728 с.
- 74 S.N. Gupta, S.F. Radford, and W.W. Repko, Phys. Rev. D **26**, 3305 (1982).
- 75 N. Brambilla, A. Pineda, J. Soto, and A. Vairo, Rev. Mod. Phys. **77**, 1423 (2005).
- 76 K. Melnikov and A. Yelkhovsky, Phys. Rev. D **59**, 114009 (1999).
- 77 S.N. Gupta, J.M. Johnson, W.W. Repko, C.J. Suchyta, Phys. Rev. D **49**, 1551 (1994).
- 78 K.G. Chetyrkin, B.A. Kniehl, and M. Steinhauser, Phys. Rev. Lett. **79**, 2184 (1997).
- 79 A.P. Martynenko, A.M. Trunin, Phys. Rev. D **89**, 014004 (2014).
- 80 S.N. Gupta, J.M. Johnson, Phys. Rev. D **51**, 168 (1995).
- 81 С.С. Герштейн, В.В. Киселев, А.К. Лиходед, А.В. Ткабладзе, Успехи физических наук **165**, 3 (1995).
- 82 A.P. Martynenko, A.M. Trunin, arXiv:1405.0969.
- 83 F. Giannuzzi, Phys. Rev. D **79**, 094002 (2009).
- 84 D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin, W. Lucha, Phys. Rev. D **76**, 114015 (2007).
- 85 W. Lucha, F.F. Schöberl, Int. J. Mod. Phys. C **10**, 607 (1999).

- 86 P. Pakhlov *et al.* (Belle Collaboration), Phys. Rev. D **79**, 071101 (2009).
- 87 M. Anselmino, E. Predazzi, S. Ekelin, S. Fredriksson, D. Lichtenberg, Rev. Mod. Phys. **65**, 1199 (1993)
- 88 V.V. Kiselev, A.K. Likhoded, M.V. Shevlyagin, Phys. Lett. B **332**, 411 (1994).
- 89 A.V. Berezhnoy, V.V. Kiselev, A.K. Likhoded, Phys. At. Nucl. **59**, 870 (1996).
- 90 M. A. Doncheski, J. Steegborn, and M. L. Stong, Phys. Rev. D **53**, 1247 (1996).
- 91 S.P. Baranov, Phys. Rev. D **54**, 3228 (1996).
- 92 D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin, A.P. Martynenko, V.A. Saleev, Z. Phys. C **76**, 111 (1997).
- 93 A.V. Berezhnoy, V.V. Kiselev, A.K. Likhoded, and A.I. Onishchenko, Phys. Rev. D **57**, 4385 (1998).
- 94 A.V. Berezhnoy, A.K. Likhoded, Phys. At. Nucl. **67**, 757 (2004).
- 95 D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin, A.P. Martynenko, Phys. At. Nucl. **68**, 784 (2005).
- 96 A.V. Berezhnoy, A.K. Likhoded, Phys. At. Nucl. **70**, 478 (2007).
- 97 V.V. Braguta, Phys. Rev. D **78**, 054025 (2008).
- 98 A.V. Berezhnoy, Phys. At. Nucl. **71**, 1803 (2008).
- 99 G.T. Bodwin, A. Petrelli, Phys. Rev. D **66**, 094011 (2002).
- 100 G.T. Bodwin, J. Lee, Phys. Rev. D **69**, 054003 (2004).
- 101 Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н. Проблема связанных состояний в квантовой теории поля. Квазипотенциальный метод. Самара: Изд-во «Самарский университет», 1994. 64 с.

- 102 J.-W. Zhang, X.-G. Wu, T. Zhong, Y. Yu, Z.-Y. Fang, Phys. Rev. D **83**, 034026 (2011).
- 103 J. Jiang, X.-G. Wu, Q.-L. Liao, X.-C. Zheng, Z.-Y. Fang, Phys. Rev. D **86**, 054021 (2012).
- 104 B. Humpert, P. Méry, Z. Phys. C **20**, 83 (1983).
- 105 C.-F. Qiao, Phys. Rev. D **66**, 057504 (2002).
- 106 R. Li, Y.-J. Zhang, K.-T. Chao, Phys. Rev. D **80**, 014020 (2009).
- 107 C.-F. Qiao, L.-P. Sun, P. Sun, J. Phys. G **37**, 075019 (2010).
- 108 P. Ko, J. Lee, C. Yu, J. High Energy Phys. **1101**, 070 (2011).
- 109 S.P. Baranov, Phys. Rev. D **84**, 054012 (2011).
- 110 A.V. Berezhnoy, A.K. Likhoded, A.V. Luchinsky, A.A. Novoselov, Phys. Rev. D **84**, 094023 (2011).
- 111 A.V. Berezhnoy, A.K. Likhoded, A.V. Luchinsky, A.A. Novoselov, Phys. At. Nucl. **75**, 1006 (2012).
- 112 Y.-J. Li, G.-Z. Xu, K.-Y. Liu, Y.-J. Zhang, J. High Energy Phys. **1307**, 051 (2013).
- 113 L.-P. Sun, H. Han, K.-T. Chao, arXiv:1404.4042.
- 114 A.V. Berezhnoy, A.K. Likhoded, A.V. Luchinsky, A.A. Novoselov, Phys. Rev. D **86**, 034017 (2012).
- 115 S. Baranov, A. Snigirev, N. Zotov, Phys. Lett. B **705**, 116 (2011).
- 116 A. Novoselov, arXiv:1106.2184.
- 117 C.H. Kom, A. Kulesza, W.J. Stirling, Phys. Rev. Lett. **107**, 082002 (2011).

- 118 S.P. Baranov, A.M. Snigirev, N.P. Zotov, A. Szczurek, W. Schäfer, Phys. Rev. D **87**,034035 (2013).
- 119 CMS Collaboration. CMS Physics Analysis Summary, CMS PAS BPH-11-021, (2013).
- 120 V.V. Kiselev, A.K. Likhoded, S.R. Slabospitsky, A.V. Tkabladze, Sov. J. Nucl. Phys. **49**, 1041 (1989).
- 121 V.V. Kiselev, A.K. Likhoded, S.R. Slabospitsky, A.V. Tkabladze, Yad. Fiz. **49**, 1681 (1989).
- 122 H.L. Lai, J. Huston, S. Kuhlmann *et al.*, Eur. Phys. J. C **12**, 375 (2000).
- 123 J. Pumplin, D.R. Stump, J. Huston *et al.*, J. High Energy Phys. **0207**, 012 (2002).
- 124 A.V. Berezhnoy, A.K. Likhoded, A.A. Novoselov, Phys. Rev. D **87**, 054023 (2013).
- 125 A.V. Berezhnoy, A.K. Likhoded, A.V. Luchinsky, A.A. Novoselov, Phys. At. Nucl. **76**, 102 (2013).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Коэффициенты, определяющие амплитуды и сечения парного рождения чармония и дикварков в e^+e^- аннигиляции

А.1 Коэффициенты, входящие в выражения для амплитуд и сечений процесса $e^+e^- \rightarrow h_c + \chi_{cJ}$

Приведены коэффициенты, определяющие амплитуды парного рождения P -волнового чармония в e^+e^- аннигиляции (1.23). Представленные выражения соответствуют выбору наблюдаемых масс h_c и χ_{cJ} (Таблица 1) и модельной массе c -кварка $m = 1.55 \text{ ГэВ}$. Функции c_{ij} определены в (1.24), $r^2 = (M_{h_c} + M_{\chi_{cJ}})^2/s$.

Процесс $e^+ + e^- \rightarrow h_c + \chi_{c0}$:

$$\begin{aligned} A_1 = & -1.13 + 0.16r^2 + (0.11 - 0.91r^2 + 0.19r^4) c_{01} - \\ & -0.16r^2 c_{02} + (0.97 - 1.34r^2 + 0.15r^4) c_{10} + \\ & + (-0.096 + 1.18r^2 - 1.28r^4 + 0.18r^6) c_{11} + (-0.078 - 0.12r^2) c_{20}. \end{aligned}$$

Процесс $e^+ + e^- \rightarrow h_c + \chi_{c1}$:

$$\begin{aligned} B_1 = & 0.78 - 0.355r^2 + (0.29 + 1.47r^2 - 0.38r^4) c_{01} + \\ & + 0.355r^2 c_{02} + (-0.67 + 1.85r^2 - 0.36r^4) c_{10} + \\ & + (-0.25 - 3.34r^2 + 2.62r^4 - 0.40r^6) c_{11} + (-0.39 + 0.36r^2) c_{20}, \\ B_2 = & 3.71 - 1.79r^2 + (-5.65 + 9.59r^2 - 2.63r^4) c_{01} + \\ & + (-1.76 + 1.60r^2) c_{02} + (-10.10 + 11.41r^2 - 2.60r^4) c_{10} + \\ & + (16.78 - 32.13r^2 + 21.35r^4 - 3.52r^6) c_{11} + (-3.71 + 1.71r^2) c_{20}, \\ B_3 = & -0.78r^2 + 0.53r^4 + (-0.54r^2 - 2.20r^4 + 0.76r^6) c_{01} - \\ & -0.53r^4 c_{02} + (0.67r^2 - 2.78r^4 + 0.72r^6) c_{10} + \\ & + (0.46r^2 + 4.98r^4 - 5.23r^6 + 0.99r^8) c_{11} + (0.87r^2 - 0.53r^4) c_{20}, \\ B_4 = & (0.49 - 0.023r^2 + 0.005r^4) c_{01} + \\ & + (-0.42 + 0.054r^2 - 0.015r^4 - 0.01r^6) c_{11} + (-0.56 + 0.086r^2) c_{20}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_5 = & -1.47r^2 + 0.53r^4 + (3.21r^2 - 3.33r^4 + 0.76r^6) c_{01} + \\
& + (0.88r^2 - 0.53r^4) c_{02} + (4.72r^2 - 3.85r^4 + 0.72r^6) c_{10} + \\
& + (-8.72r^2 + 12.75r^4 - 6.81r^6 + 0.99r^8) c_{11} + (1.47r^2 - 0.53r^4) c_{20},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_6 = & (-0.49 + 0.012r^2 + 0.005r^4) c_{01} + \\
& + (0.42 - 0.044r^2 + 0.028r^4 - 0.011r^6) c_{11} + 0.086r^2 c_{20}.
\end{aligned}$$

Процесс $e^+ + e^- \rightarrow h_c + \chi_{c_2}$:

$$\begin{aligned}
C_1 = & -33.48 + (37.43 - 11.35r^2 + 24.28r^4) c_{01} + \\
& + 23.71c_{02} + (41.64 - 19.66r^2 + 0.001r^4) c_{10} + \\
& + (-34.30 - 8.79r^2 - 66.5r^4 + 41.40r^6 - 0.002r^8) c_{11} + 10.54c_{20},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 = & 33.48 + (-16.26 - 8.14r^2) c_{01} - \\
& - 23.71c_{02} + (-41.64 + 19.66r^2 - 0.001r^4) c_{10} + \\
& (11.82 + 44.10r^2 - 15.43r^4) c_{11} - 10.54c_{20},
\end{aligned}$$

$$C_3 = -7.38r^4 c_{01} + (17.45r^4 - 21.01r^6 + 0.001r^8) c_{11},$$

$$C_4 = (-10.58r^2 + 17.88r^4) c_{01} + (11.24r^2 - 23.53r^4 + 22.28r^6 - 0.001r^8) c_{11},$$

$$C_5 = 24.60r^4 c_{01} + (-32.20r^4 + 38.73r^6 - 0.003r^8) c_{11},$$

$$\begin{aligned}
C_6 = & -33.48 + 39.40r^2 + (16.26 - 167.69r^2 + 40.28r^4) c_{01} + \\
& + (23.71 - 39.40r^2) c_{02} + (41.64 - 165.44r^2 + 41.075r^4) c_{10} + \\
& + (-11.82 + 491.75r^2 - 294.74r^4 + 43.32r^6) c_{11} + (10.54 - 39.40r^2) c_{20},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_7 = & -59.09r^4 + (10.58r^2 + 245.86r^4 - 80.57r^6) c_{01} + \\
& + 59.09r^4 c_{02} + (218.68r^4 - 82.15r^6) c_{10} + \\
& + (-11.24r^2 - 780.20r^4 + 598.00r^6 - 108.30r^8) c_{11} + 59.09r^4 c_{20},
\end{aligned}$$

$$C_8 = (1.27r^2 + 24.08r^4) c_{01} + (23.36r^2 - 79.52r^4 + 43.00r^6) c_{11}.$$

Следующие функции $F_i^{(J)}$ определяют сечения соответствующих процессов (1.32) с учетом релятивистских поправок.

Процесс $e^+ + e^- \rightarrow h_c + \chi_{c_0}$:

$$F_0^{(0)} = 2.25 - 2.88r^2 + 0.68r^4 - 0.04r^6,$$

$$F_1^{(0)} = -3.84 + 9.67r^2 - 7.17r^4 + 1.43r^6 - 0.09r^8,$$

$$\begin{aligned}
F_2^{(0)} &= 0.31 + 0.12r^2 - 0.50r^4 + 0.07r^6, \\
F_3^{(0)} &= 1.64 - 6.16r^2 + 8.14r^4 - 4.33r^6 + 0.75r^8 - 0.04r^{10}, \\
F_4^{(0)} &= -0.44 + 4.09r^2 - 4.92r^4 + 1.38r^6 - 0.11r^8, \\
F_5^{(0)} &= 0.63r^2 - 0.72r^4 + 0.09r^6, \\
F_6^{(0)} &= 0.02 - 0.38r^2 + 1.86r^4 - 2.12r^6 + 0.68r^8 - 0.07r^{10}, \\
F_7^{(0)} &= 0.76 - 9.05r^2 + 18.96r^4 - 13.49r^6 + 3.03r^8 - 0.21r^{10}.
\end{aligned}$$

Процесс $e^+ + e^- \rightarrow h_c + \chi_{c1}$:

$$\begin{aligned}
F_0^{(1)} &= 0.19 + 2.00r^2 - 4.32r^4 + 2.64r^6 - 0.51r^8, \\
F_1^{(1)} &= -0.32 - 11.48r^2 + 30.85r^4 - 28.58r^6 + 11.00r^8 - 1.47r^{10}, \\
F_2^{(1)} &= -0.37 - 3.96r^2 + 8.45r^4 - 5.10r^6 + 0.98r^8, \\
F_3^{(1)} &= 0.14 + 15.71r^2 - 51.51r^4 + 64.29r^6 - 37.91r^8 + 10.34r^{10} - 1.06r^{12}, \\
F_4^{(1)} &= 0.14 - 6.78r^2 + 21.01r^4 - 22.91r^6 + 10.03r^8 - 1.49r^{10}, \\
F_5^{(1)} &= -2.13r^2 + 5.02r^4 - 3.81r^6 + 0.92r^8, \\
F_6^{(1)} &= 0.03 + 4.78r^2 - 21.19r^4 + 35.38r^6 - 26.94r^8 + 9.03r^{10} - 1.09r^{12}, \\
F_7^{(1)} &= -0.24 + 38.00r^2 - 133.92r^4 + 186.34r^6 - 123.58r^8 + 37.52r^{10} - 4.13r^{12}.
\end{aligned}$$

Процесс $e^+ + e^- \rightarrow h_c + \chi_{c2}$:

$$\begin{aligned}
F_0^{(2)} &= 0.23 - 0.81r^2 + 0.98r^4 - 0.40r^6, \\
F_1^{(2)} &= -1.72 + 6.75r^2 - 9.73r^4 + 5.83r^6 - 1.13r^8, \\
F_2^{(2)} &= -0.47 + 1.61r^2 - 1.91r^4 + 0.76r^6, \\
F_3^{(2)} &= 3.18 - 13.83r^2 + 23.15r^4 - 18.01r^6 + 6.32r^8 - 0.81r^{10}, \\
F_4^{(2)} &= -1.92 + 7.56r^2 - 10.88r^4 + 6.34r^6 - 1.11r^8, \\
F_5^{(2)} &= -0.47 + 1.63r^2 - 1.96r^4 + 0.80r^6, \\
F_6^{(2)} &= 4.14 - 17.68r^2 + 29.23r^4 - 21.88r^6 + 6.98r^8 - 0.78r^{10}, \\
F_7^{(2)} &= 13.29 - 58.23r^2 + 97.89r^4 - 75.59r^6 + 25.74r^8 - 3.11r^{10}.
\end{aligned}$$

А.2 Коэффициенты, входящие в выражения для амплитуд и сечений парного рождения дваждытяжелых дикварков

Представленные функции определяют амплитуды (1.41)–(1.43) и сечения (1.45)–(1.47) парного рождения дваждытяжелых скалярных и аксиально-векторных дикварков в e^+e^- аннигиляции. Модельные массы дикварков $M_{S,AV}$ даны в Таблице 2, энергии связи могут быть найдены как $W_{S,AV} = M_{S,AV} - M$, $M = m_c + m_b$, $r_{c,b} = m_{c,b}/M$. Параметры ω задаются соотношениями (1.49).

Процесс $e^+e^- \rightarrow SD_{bc} + S\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$:

$$\begin{aligned}
F_{1,S} &= (1 + 2\omega_{01} + \omega_{01}^2)F_{1,S}^{(1)} + (\omega_{10} + \omega_{01}\omega_{10} - \omega_{20})F_{1,S}^{(2)} + \omega_{11}F_{1,S}^{(3)} + \omega_{10}^2F_{1,S}^{(4)}, \\
F_{1,S}^{(1)} &= -3s^2r_c^2r_b(sMr_b(2M^2r_c - r_b s) - \\
&W_{SD_{bc}}[4M^4r_c^2r_b - M^2(2r_c^3 - 25r_c^2 + 16r_c + 1)s + 2(4r_c^2 - 7r_c + 3)s^2]), \\
F_{1,S}^{(2)} &= -2sr_c^3r_b^{-1}(sMr_b[4M^4r_c^2(3r_c + 7) + M^2(6r_c^3 - 15r_c^2 - 10r_c - 1)s - (6r_c^2 - 7r_c + 1)s^2] - \\
&W_{SD_{bc}}[16M^6r_c^3(3r_c + 8)r_b - 4M^4r_c(6r_c^4 - 53r_c^3 - 86r_c^2 + 80r_c + 3)s + \\
&M^2(76r_c^4 - 235r_c^3 - 20r_c^2 + 79r_c + 10)s^2 + 2(26r_c^2 - 21r_c + 3)r_b s^3]), \\
F_{1,S}^{(3)} &= F_{1,S}^{(2)} - 2\frac{r_c^2}{r_b^2}F_{1,S}^{(1)}, \\
F_{1,S}^{(4)} &= -\frac{1}{3}r_c^4r_b^{-3}(sMr_b[96M^6(r_c - 3)r_c^3 - 24M^4r_c(4r_c^3 - 48r_c^2 + 43r_c + 3)s - \\
&2M^2(36r_c^4 + 248r_c^3 - 401r_c^2 + 61r_c + 5)s^2 - (132r_c^2 - 60r_c + 1)r_b s^3] - \\
&W_{SD_{bc}}[128M^8r_c^4(3r_c - 22)r_b + 64M^6(r_c - r_b)r_c^2(3r_c^3 - 28r_c + 4)s + \\
&12M^4(24r_c^6 - 116r_c^5 + 1384r_c^4 - 1995r_c^3 + 609r_c^2 + 112r_c - 2)s^2 - \\
&M^2(984r_c^5 + 5664r_c^4 - 14060r_c^3 + 7721r_c^2 - 726r_c - 85)s^3 - 2(r_c - r_b)(348r_c^2 - 176r_c + 3)r_b s^4]). \\
F_{2,S} &= (1 + 2\omega_{01} + \omega_{01}^2)F_{2,S}^{(1)} + (\omega_{10} + \omega_{01}\omega_{10} - \omega_{20})F_{2,S}^{(2)} + \omega_{11}F_{2,S}^{(3)} + \omega_{10}^2F_{2,S}^{(4)}, \\
F_{2,S}^{(1)} &= 3s^2r_c r_b^2(sMr_c(r_c s - 2M^2r_b) + W_{SD_{bc}}[4M^4r_c r_b^2 + M^2(2r_c^3 + 19r_c^2 - 28r_c + 6)s + 2r_c(4r_c - 1)s^2]), \\
F_{2,S}^{(2)} &= 2sr_c(sMr_c[4M^4(3r_c - 10)r_b^3 - M^2(6r_c^4 - 9r_c^3 - 7r_c^2 + 24r_c - 14)s - r_c(6r_c^2 - 5r_c + 2)s^2] - \\
&W_{SD_{bc}}[16M^6r_c(3r_c - 11)r_b^4 + 4M^4(6r_c^4 + 29r_c^3 - 203r_c^2 + 224r_c - 50)r_b^2 s + \\
&M^2(76r_c^5 - 133r_c^4 - 92r_c^3 + 406r_c^2 - 332r_c + 72)s^2 + 2r_c(26r_c^3 - 33r_c^2 + 21r_c - 5)s^3]), \\
F_{2,S}^{(3)} &= F_{2,S}^{(2)} - 2\frac{r_c^2}{r_b^2}F_{2,S}^{(1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,S}^{(4)} = & \frac{1}{3}r_c r_b^{-2} (sMr_c[96M^6(2+r_c)r_b^5 - 48M^4(2r_c^3 + 21r_c^2 - 32r_c + 4)r_b^3 s - \\
& 2M^2r_c(36r_c^4 - 392r_c^3 + 915r_c^2 - 793r_c + 246)r_b s^2 + r_c(132r_c^4 - 396r_c^3 + 481r_c^2 - 260r_c + 52)s^3] - \\
& W_{SD_{bc}}[128M^8r_c(3r_c + 19)r_b^6 - 32M^6(r_c - r_b)(6r_c^3 - 9r_c^2 - 71r_c + 42)r_b^4 s - \\
& 12M^4(24r_c^6 - 4r_c^5 + 1268r_c^4 - 3743r_c^3 + 3442r_c^2 - 1096r_c + 116)r_b^2 s^2 - \\
& M^2(984r_c^7 - 11640r_c^6 + 38464r_c^5 - 57739r_c^4 + 44376r_c^3 - 16902r_c^2 + 2432r_c + 16)s^3 - \\
& 2r_c(r_c - r_b)(348r_c^4 - 1060r_c^3 + 1293r_c^2 - 690r_c + 136)s^4]).
\end{aligned}$$

Процесс $e^+e^- \rightarrow SD_{bc} + AV\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$:

$$\begin{aligned}
F_{1,SAV} = & (1 + \omega_{01}^S + \omega_{01}^{AV} + \omega_{01}^S \omega_{01}^{AV})F_{1,SAV}^{(1)} + (\omega_{10}^S + \omega_{10}^S \omega_{01}^{AV} - \omega_{20}^S)F_{1,SAV}^{(2)} + \omega_{11}^S F_{1,SAV}^{(3)} + \\
& (\omega_{10}^{AV} + \omega_{01}^S \omega_{10}^{AV} - \omega_{20}^{AV})F_{1,SAV}^{(4)} + \omega_{11}^{AV} F_{1,SAV}^{(5)} + \omega_{10}^S \omega_{10}^{AV} F_{1,SAV}^{(6)},
\end{aligned}$$

$$F_{1,SAV}^{(1)} = -3s^2 r_c^2 r_b (2sMr_b - W_{SD_{bc}}[2M^2 r_c r_b + (13r_c - 10)s] - W_{AV\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}}[2M^2 r_c r_b - (r_c^2 - 13r_c + 9)s]),$$

$$\begin{aligned}
F_{1,SAV}^{(2)} = & -sr_c^3 r_b^{-1} (4sMr_b[M^2 r_c(3r_c + 7) - (3r_c + 2)s] + \\
W_{SD_{bc}}[8M^4 r_c^2(6r_c^2 + 15r_c - 1) - 2M^2(77r_c^3 + 103r_c^2 - 76r_c - 2)s + (110r_c^2 - 14r_c - 35)s^2] - \\
W_{AV\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}}[40M^4 r_c^2(r_c + 3) + 2M^2(37r_c^3 + 37r_c^2 - 72r_c - 4)s + (6r_c^3 - 75r_c^2 + 4r_c + 36)s^2]),
\end{aligned}$$

$$F_{1,SAV}^{(3)} = F_{1,SAV}^{(2)} - \frac{r_c^2}{r_b^2} F_{1,SAV}^{(1)},$$

$$\begin{aligned}
F_{1,SAV}^{(4)} = & -sr_c^3 r_b^{-1} (2sMr_b[2M^2 r_c(3r_c + 7) + (3r_c^2 - 8r_c - 5)s] - \\
W_{SD_{bc}}[40M^4 r_c^2(r_c + 3) + 2M^2(51r_c^3 + 37r_c^2 - 86r_c - 4)s + (27r_c^3 - 121r_c^2 + 21r_c + 44)s^2] + \\
W_{AV\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}}[8M^4 r_c^2(6r_c^2 + 15r_c - 1) + 2M^2(12r_c^4 - 75r_c^3 - 115r_c^2 + 74r_c + 2)s - (53r_c^3 - 158r_c^2 - r_c + 45)s^2]),
\end{aligned}$$

$$F_{1,SAV}^{(5)} = F_{1,SAV}^{(4)} - \frac{r_c^2}{r_b^2} F_{1,SAV}^{(1)},$$

$$\begin{aligned}
F_{1,SAV}^{(6)} = & -\frac{1}{3}r_c^4 r_b^{-3} (2sMr_b[48M^4(r_c - 3)r_c^2 - 4M^2(15r_c^3 - r_c^2 - 16r_c + 8)s - \\
(18r_c^3 - 47r_c^2 - 12r_c - 10)s^2] - W_{SD_{bc}}[64M^6 r_c^3(3r_c - 22)r_b + 16M^4 r_c(r_c - 2)(18r_c^3 + 47r_c^2 - 20r_c - 3)s - \\
2M^2(590r_c^4 - 250r_c^3 - 831r_c^2 + 641r_c - 198)s^2 - (186r_c^4 - 921r_c^3 + 425r_c^2 - 32r_c + 91)s^3] - \\
W_{AV\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}}[64M^6 r_c^3(3r_c - 22)r_b + 16M^4 r_c(12r_c^4 - 25r_c^3 - 108r_c^2 + 73r_c + 6)s +
\end{aligned}$$

$$2M^2(72r_c^5 - 466r_c^4 + 330r_c^3 + 575r_c^2 - 649r_c + 186)s^2 - (318r_c^4 - 797r_c^3 + 182r_c^2 - 44r_c + 90)s^3].$$

$$F_{2,SAV} = (1 + \omega_{01}^S + \omega_{01}^{AV} + \omega_{01}^S \omega_{01}^{AV})F_{2,SAV}^{(1)} + (\omega_{10}^S + \omega_{10}^S \omega_{01}^{AV} - \omega_{20}^S)F_{2,SAV}^{(2)} + \omega_{11}^S F_{2,SAV}^{(3)} +$$

$$(\omega_{10}^{AV} + \omega_{01}^S \omega_{10}^{AV} - \omega_{20}^{AV})F_{2,SAV}^{(4)} + \omega_{11}^{AV} F_{2,SAV}^{(5)} + \omega_{10}^S \omega_{10}^{AV} F_{2,SAV}^{(6)},$$

$$F_{2,SAV}^{(1)} = -3s^2 r_c r_b^2 (2sMr_c - W_{SDbc} [2M^2 r_c r_b - (13r_c - 3)s] - W_{AV\bar{D}\bar{b}\bar{c}} [2M^2 r_c r_b - (r_c^2 + 11r_c - 3)s]),$$

$$F_{2,SAV}^{(2)} = sr_c (2sMr_c [2M^2 (3r_c - 10)r_b^2 + (6r_c^2 - 10r_c + 7)s] -$$

$$2W_{SDbc} [4M^4 (6r_c^2 - 27r_c + 20)r_b^3 + M^2 (77r_c^3 - 328r_c^2 + 358r_c - 102)r_b s - (55r_c^3 - 119r_c^2 + 105r_c - 26)s^2] -$$

$$W_{AV\bar{D}\bar{b}\bar{c}} [40M^4 (r_c - 4)r_b^3 + 2M^2 (37r_c^3 - 142r_c^2 + 110r_c + 2)r_b s - (6r_c^4 + 57r_c^3 - 122r_c^2 + 106r_c - 20)s^2]),$$

$$F_{2,SAV}^{(3)} = F_{2,SAV}^{(2)} - \frac{r_c^2}{r_b^2} F_{2,SAV}^{(1)},$$

$$F_{2,SAV}^{(4)} = sr_c (2sMr_c [2M^2 (3r_c - 10)r_b^2 + (3r_c^3 - r_c^2 - 6r_c + 7)s] -$$

$$W_{SDbc} [40M^4 (r_c - 4)r_b^3 + 2M^2 (51r_c^3 - 184r_c^2 + 138r_c + 2)r_b s - (27r_c^4 + 13r_c^3 - 102r_c^2 + 112r_c - 20)s^2] -$$

$$W_{AV\bar{D}\bar{b}\bar{c}} [8M^4 (20 - 27r_c + 6r_c^2)r_b^3 + 2M^2 (12r_c^4 + 27r_c^3 - 262r_c^2 + 330r_c - 102)r_b s -$$

$$(53r_c^4 - 48r_c^3 - 94r_c^2 + 168r_c - 52)s^2]),$$

$$F_{2,SAV}^{(5)} = F_{2,SAV}^{(4)} - \frac{r_c^2}{r_b^2} F_{2,SAV}^{(1)},$$

$$F_{2,SAV}^{(6)} = \frac{1}{3} r_c r_b^{-2} (2sMr_c [48M^4 (r_c + 2)r_b^4 - 4M^2 (15r_c^3 - 26r_c^2 - 42r_c + 24)r_b^2 s -$$

$$r_c (18r_c^4 - 25r_c^3 + r_c^2 + r_c + 14)s^2] - W_{SDbc} [64M^6 r_c (3r_c + 19)r_b^5 - 16M^4 (18r_c^4 - 65r_c^3 - 48r_c^2 +$$

$$119r_c - 42)r_b^3 s - 2M^2 (590r_c^5 - 1932r_c^4 + 577r_c^3 + 2000r_c^2 - 1556r_c + 348)r_b s^2 +$$

$$(186r_c^6 - 33r_c^5 - 733r_c^4 + 945r_c^3 - 347r_c^2 + 80r_c - 8)s^3] - W_{AV\bar{D}\bar{b}\bar{c}} [64M^6 r_c (3r_c + 19)r_b^5 -$$

$$16M^4 (12r_c^4 - 5r_c^3 - 186r_c^2 + 203r_c - 42)r_b^3 s - 2M^2 (72r_c^6 + 106r_c^5 - 572r_c^4 - 1327r_c^3 + 3364r_c^2 -$$

$$1964r_c + 348)r_b s^2 + (318r_c^6 - 757r_c^5 + 808r_c^4 - 757r_c^3 + 637r_c^2 - 160r_c - 8)s^3]).$$

Процесс $e^+e^- \rightarrow AVD_{bc} + AV\bar{D}_{\bar{b}\bar{c}}$:

$$F_{i,AV} = \left[\frac{Q_c \alpha_s \left(\frac{m_2^2}{M^2} s \right)}{r_b^3} F_{i1,AV} + \frac{Q_b \alpha_s \left(\frac{m_1^2}{M^2} s \right)}{r_c^3} F_{i2,AV} \right], \quad i = 1, 2, 3,$$

$$F_{11,AV} = (1 + 2\omega_{01} + \omega_{01}^2)F_{11,AV}^{(1)} + (\omega_{10} + \omega_{01}\omega_{10} - \omega_{20})F_{11,AV}^{(2)} + \omega_{11}F_{11,AV}^{(3)} + \omega_{10}^2F_{11,AV}^{(4)},$$

$$F_{11,AV}^{(1)} = -3s^2r_c^2r_b(2sMr_cr_b - W_{AVD_{bc}}[4M^2r_c^2r_b + (19r_c^2 - 12r_c - 1)s]),$$

$$F_{11,AV}^{(2)} = -2sr_c^3r_b^{-1}(sMr_b[4M^2r_c^2(3r_c + 7) - (15r_c^2 + 4r_c + 1)s] - W_{AVD_{bc}}[16M^4r_c^3(3r_c + 8)r_b + 4M^2r_c(46r_c^3 + 72r_c^2 - 65r_c - 3)s - (164r_c^3 - 39r_c^2 - 28r_c - 7)s^2]),$$

$$F_{11,AV}^{(3)} = F_{11,AV}^{(2)} - 2\frac{r_c^2}{r_b^2}F_{11,AV}^{(1)},$$

$$F_{11,AV}^{(4)} = \frac{1}{3}r_c^4r_b^{-3}(2sMr_b[48M^4(3 - r_c)r_c^3 + 12M^2r_c(6r_c^3 - 7r_c + 3)s - (38r_c^3 + 17r_c^2 - 7r_c + 3)s^2] + W_{AVD_{bc}}[128M^6r_c^4(3r_c - 22)r_b + 32M^4r_c^2(18r_c^4 + 15r_c^3 - 166r_c^2 + 99r_c - 8)s - 4M^2(500r_c^5 - 256r_c^4 - 833r_c^3 + 749r_c^2 - 214r_c + 6)s^2 + (932r_c^4 - 172r_c^3 - 345r_c^2 + 120r_c - 33)s^3]).$$

$$F_{12,AV} = (1 + 2\omega_{01} + \omega_{01}^2)F_{12,AV}^{(1)} + (\omega_{10} + \omega_{01}\omega_{10} - \omega_{20})F_{12,AV}^{(2)} + \omega_{11}F_{12,AV}^{(3)} + \omega_{10}^2F_{12,AV}^{(4)},$$

$$F_{12,AV}^{(1)} = -3s^2r_cr_b^2(2sMr_cr_b - W_{AVD_{bc}}[4M^2r_cr_b^2 + (19r_c^2 - 26r_c + 6)s]),$$

$$F_{12,AV}^{(2)} = 2sr_c(sMr_cr_b[4M^2(3r_c - 10)r_b^2 + (15r_c^2 - 22r_c + 14)s] - W_{AVD_{bc}}[16M^4r_c(3r_c - 11)r_b^4 + 8M^2(23r_c^3 - 102r_c^2 + 107r_c - 25)r_b^2s + (164r_c^4 - 503r_c^3 + 626r_c^2 - 362r_c + 72)s^2]),$$

$$F_{12,AV}^{(3)} = F_{12,AV}^{(2)} - 2\frac{r_c^2}{r_b^2}F_{12,AV}^{(1)},$$

$$F_{12,AV}^{(4)} = \frac{1}{3}r_cr_b^{-2}(2sMr_cr_b[48M^4(r_c + 2)r_b^4 - 24M^2(3r_c^3 - 6r_c^2 - 6r_c + 4)r_b^2s - r_c(38r_c^3 - 79r_c^2 + 59r_c - 6)s^2] - W_{AVD_{bc}}[128M^6r_c(3r_c + 19)r_b^6 - 32M^4(18r_c^4 - 69r_c^3 - 88r_c^2 + 149r_c - 42)r_b^4s - 4M^2(500r_c^5 - 1692r_c^4 + 383r_c^3 + 2114r_c^2 - 1632r_c + 348)r_b^2s^2 - (932r_c^6 - 3452r_c^5 + 5071r_c^4 - 3510r_c^3 + 1094r_c^2 - 160r_c + 16)s^3]).$$

$$F_{21,AV} = (1 + 2\omega_{01} + \omega_{01}^2)F_{21,AV}^{(1)} + (\omega_{10} + \omega_{01}\omega_{10} - \omega_{20})F_{21,AV}^{(2)} + \omega_{11}F_{21,AV}^{(3)} + \omega_{10}^2F_{21,AV}^{(4)},$$

$$F_{21,AV}^{(1)} = 0,$$

$$F_{21,AV}^{(2)} = 8sM^2r_c^3(6sMr_cr_b - W_{AVD_{bc}}[16M^2r_c^2r_b + (73r_c^2 - 49r_c - 3)s]),$$

$$F_{21,AV}^{(3)} = F_{21,AV}^{(2)} - 2\frac{r_c^2}{r_b^2}F_{21,AV}^{(1)},$$

$$F_{21,AV}^{(4)} = \frac{8}{3}M^2r_c^4r_b^{-2}(2sMr_cr_b[12M^2r_c(r_c - 6) + (15r_c - 16)s] + W_{AVD_{bc}}[32M^4r_c^3(3r_c^2 - 7r_c + 4) - 4M^2r_c(82r_c^3 - 590r_c^2 + 331r_c + 18)s - (424r_c^3 - 687r_c^2 + 267r_c + 9)s^2]).$$

$$F_{22,AV} = (1 + 2\omega_{01} + \omega_{01}^2)F_{22,AV}^{(1)} + (\omega_{10} + \omega_{01}\omega_{10} - \omega_{20})F_{22,AV}^{(2)} + \omega_{11}F_{22,AV}^{(3)} + \omega_{10}^2F_{22,AV}^{(4)},$$

$$F_{22,AV}^{(1)} = 0,$$

$$F_{22,AV}^{(2)} = 8sM^2r_c^2r_b(6sMr_cr_b - W_{AVD_{bc}}[16M^2r_cr_b^2 + (73r_c^2 - 97r_c + 21)s]),$$

$$F_{22,AV}^{(3)} = F_{22,AV}^{(2)} - 2\frac{r_c^2}{r_b^2}F_{22,AV}^{(1)},$$

$$F_{22,AV}^{(4)} = -\frac{8}{3}M^2r_c^2r_b^{-1}(2sMr_cr_b[12M^2(r_c + 5)r_b^2 - (15r_c^2 - 32r_c + 8)s] - W_{AVD_{bc}}[32M^4r_c(3r_c + 1)r_b^4 + 4M^2(82r_c^3 + 368r_c^2 - 615r_c + 159)r_b^2s - (424r_c^4 - 1447r_c^3 + 1551r_c^2 - 595r_c + 76)s^2]).$$

$$F_{31,AV} = (1 + 2\omega_{01} + \omega_{01}^2)F_{31,AV}^{(1)} + (\omega_{10} + \omega_{01}\omega_{10} - \omega_{20})F_{31,AV}^{(2)} + \omega_{11}F_{31,AV}^{(3)} + \omega_{10}^2F_{31,AV}^{(4)},$$

$$F_{31,AV}^{(1)} = -3s^2r_c^2r_b(2sMr_b - W_{AVD_{bc}}[4M^2r_cr_b + (r_c^2 + 20r_c - 15)s]),$$

$$F_{31,AV}^{(2)} = -2sr_c^3r_b^{-1}(sMr_b[4M^2r_c(3r_c + 7) + (r_c^2 - 14r_c - 7)s] - W_{AVD_{bc}}[16M^4r_c^2(3r_c + 8)r_b + 4M^2(r_c^4 + 53r_c^3 + 65r_c^2 - 66r_c - 3)s + (2r_c + 1)(r_c^2 - 86r_c + 55)s^2]),$$

$$F_{31,AV}^{(3)} = F_{31,AV}^{(2)} - 2\frac{r_c^2}{r_b^2}F_{31,AV}^{(1)},$$

$$F_{31,AV}^{(4)} = -\frac{1}{3}r_c^4 r_b^{-3} (2sMr_b[48M^4(r_c-3)r_c^2 - 4M^2(5r_c^3 + 7r_c^2 - 14r_c + 8)s - (2r_c^3 - 29r_c^2 - 12r_c - 12)s^2] - \\ W_{AVD_{bc}}[128M^6r_c^3(3r_c - 22)r_b + 32M^4r_c(7r_c^4 + 18r_c^3 - 131r_c^2 + 58r_c + 6)s - \\ 4M^2(4r_c^5 + 138r_c^4 + 118r_c^3 - 677r_c^2 + 541r_c - 172)s^2 - (20r_c^4 - 800r_c^3 + 243r_c^2 - 160r_c + 195)s^3]).$$

$$F_{32,AV} = (1 + 2\omega_{01} + \omega_{01}^2)F_{32,AV}^{(1)} + (\omega_{10} + \omega_{01}\omega_{10} - \omega_{20})F_{32,AV}^{(2)} + \omega_{11}F_{32,AV}^{(3)} + \omega_{10}^2F_{32,AV}^{(4)},$$

$$F_{32,AV}^{(1)} = -3s^2r_cr_b^2(2sMr_c - W_{AVD_{bc}}[4M^2r_cr_b + (r_c^2 - 22r_c + 6)s]),$$

$$F_{32,AV}^{(2)} = 2sr_c(sMr_c[4M^2(3r_c - 10)r_b^2 + (r_c^3 + 11r_c^2 - 20r_c + 14)s] - W_{AVD_{bc}}[16M^4r_c(3r_c - 11)r_b^3 - \\ 4M^2(r_c^4 - 57r_c^3 + 224r_c^2 - 224r_c + 50)r_b s - (2r_c^4 + 157r_c^3 - 342r_c^2 + 300r_c - 72)s^2]),$$

$$F_{32,AV}^{(3)} = F_{32,AV}^{(2)} - 2\frac{r_c^2}{r_b^2}F_{32,AV}^{(1)},$$

$$F_{32,AV}^{(4)} = \frac{1}{3}r_cr_b^{-2}(2sMr_c[48M^4(r_c + 2)r_b^4 - 4M^2(5r_c^3 - 4r_c^2 - 54r_c + 24)r_b^2 s - \\ r_c(2r_c^4 + 25r_c^3 - 45r_c^2 + 13r_c + 14)s^2] - W_{AVD_{bc}}[128M^6r_c(3r_c + 19)r_b^5 - 32M^4(7r_c^4 - 28r_c^3 - 110r_c^2 + \\ 155r_c - 42)r_b^3 s + 4M^2(4r_c^6 - 150r_c^5 + 178r_c^4 + 1811r_c^3 - 3410r_c^2 + 1888r_c - 348)r_b s^2 + \\ (20r_c^6 + 704r_c^5 - 1549r_c^4 + 914r_c^3 + 142r_c^2 - 80r_c - 16)s^3]).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Функции, определяющие сечения парного рождения чармония в pp взаимодействии

Б.1 Процесс $pp \rightarrow 2J/\psi + X$

Приведенные функции определяют сечение парного рождения J/ψ в pp взаимодействии (2.20) с учетом релятивистских поправок:

$$F^{(0)} = \frac{16384}{9M^4s^6(M^2-t)^4(M^2-s-t)^4} \left[7776M^{24} - 432M^{22}(73s+216t) + 6M^{20} \times \right. \\ (9085s^2 + 60336st + 85536t^2) - 16M^{18} (3629s^3 + 37686s^2t + 117855st^2 + 106920t^3) + \\ 2t^4(s+t)^4 (349s^4 + 2304s^3t + 6192s^2t^2 + 7776st^3 + 3888t^4) + 4M^{16} (11927s^4 + 151588s^3t + \\ 745674s^2t^2 + 1470960st^3 + 962280t^4) - 4M^{14} (7761s^5 + 109608s^4t + 699467s^3t^2 + \\ 2173908s^2t^3 + 3055320st^4 + 1539648t^5) + 2M^{12} (6952s^6 + 117893s^5t + 897043s^4t^2 + \\ 3741980s^3t^3 + 8278410s^2t^4 + 8872416st^5 + 3592512t^6) - 4M^2t^2(s+t)^2(9s^7 + 649s^6t + \\ 6460s^5t^2 + 29630s^4t^3 + 74435s^3t^4 + 105156s^2t^5 + 77868st^6 + 23328t^7) - 2M^{10} (1899s^7 + \\ 43398s^6t + 405618s^5t^2 + 2113568s^4t^3 + 6394090s^3t^4 + 10762584s^2t^5 + 9189936st^6 + \\ 3079296t^7) + M^8 (587s^8 + 19710s^7t + 244772s^6t^2 + 1603468s^5t^3 + 6229962s^4t^4 + \\ 14478304s^3t^5 + 19359816s^2t^6 + 13582080st^7 + 3849120t^8) - 2M^6 (20s^9 + 1185s^8t + \\ 22153s^7t^2 + 193780s^6t^3 + 965358s^5t^4 + 2928368s^4t^5 + 5431786s^3t^6 + 5949528s^2t^7 + \\ 3508920st^8 + 855360t^9) + M^4 (s^{10} + 76s^9t + 3756s^8t^2 + 52062s^7t^3 + 353472s^6t^4 + \\ 1398834s^5t^5 + 3421754s^4t^6 + 5210968s^3t^7 + 4784622s^2t^8 + 2414880st^9 + 513216t^{10}) \left. \right],$$

$$F^{(1)} = -\frac{16384}{27M^4s^8(M^2-t)^5(M^2-s-t)^5} \left[497664M^{32} - 221184M^{30}(13s+36t) + \\ 5760M^{28}(1285s^2 + 7680st + 10368t^2) - 48M^{26}(243089s^3 + 2289552s^2t + 6612480st^2 + \\ 5806080t^3) + 12M^{24}(1090607s^4 + 13899232s^3t + 62988960s^2t^2 + 117411840st^3 + \\ 75479040t^4) - 8M^{22}(1392130s^5 + 22255745s^4t + 136976040s^3t^2 + 399063744s^2t^3 + \\ 540933120st^4 + 271724544t^5) + 8t^5(s+t)^5(1867s^6 + 18256s^5t + 77728s^4t^2 + 181152s^3t^3 + \\ 246096s^2t^4 + 186624st^5 + 62208t^6) + 4M^{20}(1800338s^6 + 35626541s^5t + 276305481s^4t^2 + \\ 1095702384s^3t^3 + 2313080352s^2t^4 + 2435457024st^5 + 996323328t^6) - M^{18}(3514643s^7 + \\ 86600280s^6t + 825013064s^5t^2 + 4139468480s^4t^3 + 11909795760s^3t^4 + 19466599680s^2t^5 + \\ 16605388800st^6 + 5693276160t^7) + 2M^{16}(659715s^8 + 19899554s^7t + 231809132s^6t^2 +$$

$$\begin{aligned}
& 1426201784s^5t^3 + 5209721940s^4t^4 + 11612866752s^3t^5 + 15333506496s^2t^6 + \\
& 10912112640st^7 + 3202467840t^8) - M^2t^3(s+t)^3(664s^9 + 73857s^8t + 969897s^7t^2 + \\
& 6006640s^6t^3 + 21622120s^5t^4 + 49033392s^4t^5 + 71696784s^3t^6 + 65938176s^2t^7 + \\
& 34725888st^8 + 7962624t^9) - M^{14}(380999s^9 + 13782634s^8t + 195250554s^7t^2 + \\
& 1459312784s^6t^3 + 6543590240s^5t^4 + 18571278768s^4t^5 + 33449165568s^3t^6 + \\
& 36752348160s^2t^7 + 22298664960st^8 + 5693276160t^9) + 2M^{12}(39553s^{10} + 1754120s^9t + \\
& 30305432s^8t^2 + 275173836s^7t^3 + 1497456520s^6t^4 + 5228976572s^5t^5 + 12018927060s^4t^6 + \\
& 18013988160s^3t^7 + 16836887232s^2t^8 + 8856207360st^9 + 1992646656t^{10}) - 4M^{10} \times \\
& (2658s^{11} + 152991s^{10}t + 3330028s^9t^2 + 37242554s^8t^3 + 246717845s^7t^4 + 1047413960s^6t^5 + \\
& 2970379604s^5t^6 + 5692479912s^4t^7 + 7256996388s^3t^8 + 5868903744s^2t^9 + 2712213504st^{10} + \\
& 543449088t^{11}) + 2M^4t(s+t)(8s^{12} + 943s^{11}t + 73235s^{10}t^2 + 1243892s^9t^3 + 10501734s^8t^4 + \\
& 53251684s^7t^5 + 176208052s^6t^6 + 396112960s^5t^7 + 612104570s^4t^8 + 641021472s^3t^9 + \\
& 434301120s^2t^{10} + 171417600st^{11} + 29859840t^{12}) + 2M^8(267s^{12} + 31089s^{11}t + 948124s^{10}t^2 + \\
& 13678946s^9t^3 + 112700707s^8t^4 + 584919678s^7t^5 + 2023301960s^6t^6 + 4798139192s^5t^7 + \\
& 7834428690s^4t^8 + 8641058880s^3t^9 + 6129541440s^2t^{10} + 2515968000st^{11} + 452874240t^{12}) - \\
& M^6(8s^{13} + 1772s^{12}t + 139013s^{11}t^2 + 3024912s^{10}t^3 + 33019131s^9t^4 + 215628282s^8t^5 + \\
& 917347710s^7t^6 + 2664532144s^6t^7 + 5399964368s^5t^8 + 7640313480s^4t^9 + 7391197632s^3t^{10} + \\
& 4650333696s^2t^{11} + 1710858240st^{12} + 278691840t^{13})],
\end{aligned}$$

$$F^{(2)} = -4F^{(0)},$$

$$\begin{aligned}
F^{(3)} &= \frac{4096}{81M^4s^{10}(M^2-t)^6(M^2-s-t)^6} \left[31850496M^{40} - 995328M^{38}(219s + 640t) + \right. \\
& 27648M^{36}(33541s^2 + 153432st + 218880t^2) - 9216M^{34}(313031s^3 + 1832460s^2t + \\
& 4240836st^2 + 3939840t^3) + 768M^{32}(8244959s^4 + 63274344s^3t + 189539568s^2t^2 + \\
& 295052544st^3 + 200931840t^4) - 192M^{30}(52201757s^5 + 519109072s^4t + 2012650416s^3t^2 + \\
& 4109435136s^2t^3 + 4827651840st^4 + 2571927552t^5) + 16M^{28}(760108913s^6 + 9260081144s^5t + \\
& 46005056832s^4t^2 + 120457679616s^3t^3 + 188334270720s^2t^4 + 177640667136st^5 + \\
& 77157826560t^6) - 8M^{26}(1475952353s^7 + 20899343744s^6t + 127598524184s^5t^2 + \\
& 423537421056s^4t^3 + 844308839808s^3t^4 + 1076247502848s^2t^5 + 846934050816st^6 + \\
& 308631306240t^7) + 16t^6(s+t)^6(117307s^8 + 841072s^7t + 2960704s^6t^2 + 7010976s^5t^3 + \\
& 12425424s^4t^4 + 16277760s^3t^5 + 14715648s^2t^6 + 7962624st^7 + 1990656t^8) + 4M^{24} \times \\
& \left. (2269174169s^8 + 37035895336s^7t + 266823310648s^6t^2 + 1087787332416s^5t^3 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2722434981120s^4t^4 + 4414063320576s^3t^5 + 4767985797120s^2t^6 + 3212405194752s^1t^7 + \\
& 1003051745280t^8) - M^{22}(5273945643s^9 + 102674924584s^8t + 863595364448s^7t^2 + \\
& 4191387926848s^6t^3 + 12844048277696s^5t^4 + 25933611095040s^4t^5 + 35654616990720s^3t^6 + \\
& 33483324506112s^2t^7 + 19674332061696st^8 + 5349609308160t^9) + 2M^{20}(1108300275s^{10} + \\
& 26970163113s^9t + 270274383346s^8t^2 + 1544514084352s^7t^3 + 5656684280280s^6t^4 + \\
& 13921443451712s^5t^5 + 23690831678976s^4t^6 + 28410755383296s^3t^7 + 23612613792768s^2t^8 + \\
& 12267586805760st^9 + 2942285119488t^{10}) - M^{24}(s+t)^4(82320s^{11} + 10526659s^{10}t + \\
& 122742683s^9t^2 + 663347888s^8t^3 + 2199787352s^7t^4 + 5137832384s^6t^5 + 9050135872s^5t^6 + \\
& 12183171072s^4t^7 + 12114432000s^3t^8 + 8258236416s^2t^9 + 3403026432st^{10} + 637009920t^{11}) - \\
& M^{18}(658318562s^{11} + 20774136911s^{10}t + 256196780079s^9t^2 + 1742958116720s^8t^3 + \\
& 7550194930440s^7t^4 + 22215242834368s^6t^5 + 45850626752448s^5t^6 + 67807235088384s^4t^7 + \\
& 72355739968512s^3t^8 + 53902515363840s^2t^9 + 25023941369856st^{10} + 5349609308160t^{11}) + \\
& 4M^{16}(34194446s^{12} + 1432273039s^{11}t + 22383564112s^{10}t^2 + 185308892030s^9t^3 + \\
& 954476169886s^8t^4 + 3325907679280s^7t^5 + 8190596683920s^6t^6 + 14624279688576s^5t^7 + \\
& 19220073992064s^4t^8 + 18510299039232s^3t^9 + 12475169980416s^2t^{10} + 5218508685312st^{11} + \\
& 1003051745280t^{12}) - M^{14}(19246515s^{13} + 1103736798s^{12}t + 22478276084s^{11}t^2 + \\
& 232094334116s^{10}t^3 + 1443234697510s^9t^4 + 5968097322672s^8t^5 + 17386794613376s^7t^6 + \\
& 36925721101440s^6t^7 + 58395873784128s^5t^8 + 69341740385280s^4t^9 + 60881635077120s^3t^{10} + \\
& 37374891540480s^2t^{11} + 14182623756288st^{12} + 2469050449920t^{13}) + 2M^4t^2(s+t)^2 \times \\
& (1024s^{14} + 151570s^{13}t + 12969265s^{12}t^2 + 212727487s^{11}t^3 + 1644135147s^{10}t^4 + \\
& 7651899125s^9t^5 + 24229924530s^8t^6 + 56242255280s^7t^7 + 100001584488s^6t^8 + \\
& 138359684800s^5t^9 + 146996284416s^4t^{10} + 115115443200s^3t^{11} + 61947293184s^2t^{12} + \\
& 20275826688st^{13} + 3025797120t^{14}) + 2M^{12}(824111s^{14} + 70166611s^{13}t + 1952942482s^{12}t^2 + \\
& 25962244078s^{11}t^3 + 199207601182s^{10}t^4 + 988657795894s^9t^5 + 3408779823892s^8t^6 + \\
& 8542312029248s^7t^7 + 16016481697464s^6t^8 + 22847237069376s^5t^9 + 24808543913472s^4t^{10} + \\
& 19996345055232s^3t^{11} + 11238532171776s^2t^{12} + 3890175787008st^{13} + 617262612480t^{14}) - \\
& M^6t(s+t)(2176s^{15} + 414368s^{14}t + 34529090s^{13}t^2 + 736175475s^{12}t^3 + 7430265423s^{11}t^4 + \\
& 44335186685s^{10}t^5 + 175863201255s^9t^6 + 499176650440s^8t^7 + 1064569592864s^7t^8 + \\
& 1756640077312s^6t^9 + 2262689749056s^5t^{10} + 2242313957376s^4t^{11} + 1643405663232s^3t^{12} + \\
& 831421919232s^2t^{13} + 256940937216st^{14} + 36309565440t^{15}) - M^{10}(48840s^{15} + \\
& 10192723s^{14}t + 435518065s^{13}t^2 + 7912226162s^{12}t^3 + 77545065352s^{11}t^4 + \\
& 471337098042s^{10}t^5 + 1940776757542s^9t^6 + 5736471274304s^8t^7 + 12651167529752s^7t^8 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 21342766010240s^6t^9 + 27846873221696s^5t^{10} + 27881390733312s^4t^{11} + \\
& 20726379168768s^3t^{12} + 10705439195136s^2t^{13} + 3395959603200st^{14} + 493810089984t^{15}) + \\
& 4M^8(24s^{16} + 60117s^{15}t + 6480104s^{14}t^2 + 187031341s^{13}t^3 + 2509040584s^{12}t^4 + \\
& 19370940805s^{11}t^5 + 97105255536s^{10}t^6 + 341150600006s^9t^7 + 884070584925s^8t^8 + \\
& 1749157202600s^7t^9 + 2695987058680s^6t^{10} + 3249848355136s^5t^{11} + 3016059149568s^4t^{12} + \\
& 2073684017664s^3t^{13} + 987205294080s^2t^{14} + 288123568128st^{15} + 38578913280t^{16})].
\end{aligned}$$

В.2 Процесс $pp \rightarrow 2\eta_c + X$

Сперва определим вспомогательные коэффициенты $a_{1,2}$, $b_{1,2}$, $c_{1,2}$ и $k_{a,b,c}$, где $\kappa = m/M$, M — масса η_c , переменные Мандельстама для глюонного подпроцесса s , t и u задаются соотношениями (2.4):

$$\begin{aligned}
a_1 = & 3s^8(t+u) + 148s^7tu - 2s^6(t+u)(3t^2 - 88tu + 3u^2) - 16s^5t(19t^2 - 34tu + 19u^2)u + \\
& s^4(t-u)^2(t+u)(3t^2 - 446tu + 3u^2) + 4s^3t(t-5u)(t-u)^2(5t-u)u + 212s^2t(t-u)^4 \times \\
& (t+u)u + 72st(t-u)^6u + (\kappa - 1/2)(9s^8(t+u) + s^7(21t^2 + 838tu + 21u^2) + 2s^6 \times \\
& (t+u)(3t^2 + 790tu + 3u^2) - 2s^5(9t^4 + 54t^3u - 1142t^2u^2 + 54tu^3 + 9u^4) - 5s^4 \times \\
& (t+u)(3t^4 + 340t^3u - 494t^2u^2 + 340tu^3 + 3u^4) - s^3(t-u)^2(3t^4 + 980t^3u + 626t^2u^2 + \\
& 980tu^3 + 3u^4) - 16s^2t(t-u)^2(17t^2 - 86tu + 17u^2)(t+u)u - 4st(t-u)^4 \times \\
& (55t^2 + 38tu + 55u^2)u - 72t(t-u)^6(t+u)u),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta a = & -16s^2tu(12s^5 + 14s^4(t+u) - s^3(30t^2 - 56tu + 30u^2) - 27s^2(t-u)^2(t+u) + \\
& 4s(t-2u)(t-u)^2(2t-u) + 9(t-u)^4(t+u)) - 8stu(\kappa - 1/2)(143s^6 + 245s^5(t+u) - \\
& 12s^4(5t^2 - 34tu + 5u^2) - 2s^3(t+u)(109t^2 - 158tu + 109u^2) - s^2(t-u)^2 \times \\
& (17t^2 + 86tu + 17u^2) + s(t-u)^2(t+u)(25t^2 + 54tu + 25u^2) - 14(t-u)^4(t+u)^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 = & 3s^{14}(t+u) + 2380s^{13}tu - 12s^{12}(t+u)(t^2 - 383tu + u^2) - 4s^{11}tu \times \\
& (1471t^2 - 5862tu + 1471u^2) + 2s^{10}(t+u)(9t^4 - 8074t^3u + 18050t^2u^2 - 8074tu^3 + 9u^4) + \\
& 4s^9t(t-u)^2(65t^2 - 10314tu + 65u^2)u - 4s^8(t-u)^2(t+u)(3t^4 - 4479t^3u + 11992t^2u^2 - \\
& 4479tu^3 + 3u^4) + 20s^7t(t-u)^4(413t^2 + 1518tu + 413u^2)u + s^6(t-u)^4(t+u) \times \\
& (3t^4 - 5312t^3u + 22906t^2u^2 - 5312tu^3 + 3u^4) - 32s^5t(t-u)^6(184t^2 + 251tu + 184u^2)u - \\
& 8s^4t(t-u)^6(t+u)(259t^2 - 22tu + 259u^2)u + 8s^3t(t-u)^8(73t^2 + 102tu + 73u^2)u + \\
& 1008s^2t(t-u)^{10}(t+u)u + 288st(t-u)^{12}u - (\kappa - 1/2)(9s^{14}(t+u) - s^{13} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (39t^2 + 33074tu + 39u^2) - 4s^{12}(t + u)(21t^2 + 21470tu + 21u^2) + 4s^{11}(27t^4 + 2386t^3u - \\
& 85150t^2u^2 + 2386tu^3 + 27u^4) + 2s^{10}(t + u)(99t^4 + 99076t^3u - 270430t^2u^2 + \\
& 99076tu^3 + 99u^4) - 2s^9(45t^6 - 72738t^5u - 101909t^4u^2 + 414228t^3u^3 - 101909t^2u^4 - \\
& 72738tu^5 + 45u^6) - 4s^8(t - u)^2(t + u)(45t^4 + 18070t^3u - 122638t^2u^2 + 18070tu^3 + 45u^4) + \\
& 4s^7(t - u)^2(3t^6 - 34040t^5u + 26081t^4u^2 + 83112t^3u^3 + 26081t^2u^4 - 34040tu^5 + 3u^6) + \\
& s^6(t - u)^4(t + u)(57t^4 - 70124t^3u - 72506t^2u^2 - 70124tu^3 + 57u^4) + s^5(t - u)^4 \times \\
& (9t^6 - 2350t^5u - 63273t^4u^2 + 2204t^3u^3 - 63273t^2u^4 - 2350tu^5 + 9u^6) + 24s^4t(t - u)^6 \times \\
& (t + u)(1163t^2 - 1906tu + 1163u^2)u + 32s^3t(t - u)^6(562t^4 - 577t^3u - 18t^2u^2 - \\
& 577tu^3 + 562u^4)u + 40s^2t(t - u)^8(t + u)(133t^2 - 34tu + 133u^2)u + 144st(t - u)^{10} \times \\
& (19t^2 + 46tu + 19u^2)u + 864t(t - u)^{12}(t + u)u,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta b = & -4s^2tu(1061s^{11} + 1859s^{10}(t + u) - 6s^9(433t^2 - 1502tu + 433u^2) - 2s^8(t + u) \times \\
& (2827t^2 - 6134tu + 2827u^2) + 24s^7(t - u)^2(72t^2 - 647tu + 72u^2) + 40s^6(t - u)^2(t + u) \times \\
& (161t^2 - 398tu + 161u^2) + 2s^5(t - u)^4(313t^2 + 5986tu + 313u^2) - 2s^4(t - u)^4(t + u) \times \\
& (1525t^2 - 4586tu + 1525u^2) - s^3(t - u)^6(1189t^2 + 3502tu + 1189u^2) + s^2(t - u)^6(t + u) \times \\
& (261t^2 - 1514tu + 261u^2) + 12s(t - u)^8(31t^2 + 14tu + 31u^2) + 144(t - u)^{10}(t + u) - \\
& 4stu(\kappa - 1/2)(14421s^{12} + 34248s^{11}(t + u) - s^{10}(8511t^2 - 129586tu + 8511u^2) - \\
& 8s^9(t + u)(9129t^2 - 23527tu + 9129u^2) - 2s^8(16065t^4 + 59372t^3u - 167130t^2u^2 + \\
& 59372tu^3 + 16065u^4) + 4s^7(t - u)^2(t + u)(10827t^2 - 45008tu + 10827u^2) + 2s^6(t - u)^2 \times \\
& (18891t^4 + 2840t^3u - 77062t^2u^2 + 2840tu^3 + 18891u^4) + 52s^5(t - u)^4(t + u) \times \\
& (97t^2 + 920tu + 97u^2) - s^4(t - u)^4(6659t^4 - 20876t^3u - 3822t^2u^2 - 20876tu^3 + 6659u^4) - \\
& 4s^3(t - u)^6(t + u)(1869t^2 - 2300tu + 1869u^2) - s^2(t - u)^6(3191t^4 + 1344t^3u - 9454t^2u^2 + \\
& 1344tu^3 + 3191u^4) - 4s(t - u)^8(t + u)(203t^2 + 334tu + 203u^2) - 432(t - u)^{10}(t + u)^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 = & 3s^{14}(t + u) + 127924s^{13}tu - 4s^{12}(t + u)(3t^2 - 99607tu + 3u^2) - 16s^{11}t \times \\
& (6327t^2 - 119146tu + 6327u^2)u + 2s^{10}(t + u)(9t^4 - 820440t^3u + 1900702t^2u^2 - \\
& 820440tu^3 + 9u^4) - 32s^9t(42787t^4 + 95828t^3u - 266062t^2u^2 + 95828tu^3 + 42787u^4)u - \\
& 4s^8(t - u)^2(t + u)(3t^4 - 476492t^3u + 1778482t^2u^2 - 476492tu^3 + 3u^4) + 8s^7t(t - u)^2 \times \\
& (395023t^4 + 173924t^3u - 1092582t^2u^2 + 173924tu^3 + 395023u^4)u + s^6(t - u)^4 \times \\
& (t + u)(3t^4 - 45892t^3u + 6221826t^2u^2 - 45892tu^3 + 3u^4) - 4s^5t(t - u)^4 \times \\
& (587629t^4 - 129076t^3u - 999794t^2u^2 - 129076tu^3 + 587629u^4)u - 4s^4t(t - u)^6(t + u) \times \\
& (258537t^2 + 588302tu + 258537u^2)u + 8s^3t(t - u)^6(56911t^4 - 55796t^3u - 45238t^2u^2 -
\end{aligned}$$

$$55796tu^3 + 56911u^4)u + 1440s^2t(t-u)^8u(t+u)(287t^2 + 166tu + 287u^2) + \\ 288st(t-u)^{10}u(255t^2 + 538tu + 255u^2) - 864t(t-u)^{12}(t+u)u,$$

$$\Delta c = -8tu(26215s^{13} + 72029s^{12}(t+u) - s^{11}(46586t^2 - 347812tu + 46586u^2) - \\ 4s^{10}(t+u)(78089t^2 - 168598tu + 78089u^2) - 4s^9(37679t^4 + 168700t^3u - 401590t^2u^2 + \\ 168700tu^3 + 37679u^4) + 2s^8(t-u)^2(t+u)(223529t^2 - 615866tu + 223529u^2) + \\ 2s^7(t-u)^2(227477t^4 + 195492t^3u - 823282t^2u^2 + 195492tu^3 + 227477u^4) - \\ 4s^6(t-u)^4(t+u)(50509t^2 - 265278tu + 50509u^2) - s^5(t-u)^4(402183t^4 - 13884t^3u - \\ 817942t^2u^2 - 13884tu^3 + 402183u^4) - 7s^4(t-u)^6(t+u)(6701t^2 + 56246tu + 6701u^2) + \\ 24s^3(t-u)^6(4913t^4 - 2740t^3u - 6138t^2u^2 - 2740tu^3 + 4913u^4) + 48s^2(t-u)^8(t+u) \times \\ (817t^2 + 812tu + 817u^2) - 324s(t-u)^{10}(11t^2 + 2tu + 11u^2) - 972(t-u)^{12}(t+u),$$

$$a_2 = a_1 + \Delta a, \quad b_2 = b_1 + \Delta b, \quad c_2 = c_1 + \Delta c,$$

$$k_a = \frac{32}{3M^2s^3tu(2s + M^2(1 - 4\kappa^2))(2t - M^2(1 + 4\kappa^2))^2(2u - M^2(1 + 4\kappa^2))^2}, \\ k_b = \frac{-512}{9M^2s^3tu(2s + M^2(1 - 4\kappa^2))^3(2t - M^2(1 + 4\kappa^2))^4(2u - M^2(1 + 4\kappa^2))^4}, \\ k_c = \frac{256(s-t+u)^2(s+t-u)^2}{27M^2s^3tu(2s + M^2(1 - 4\kappa^2))^3(2u - M^2(1 + 4\kappa^2))^6(2t - M^2(1 + 4\kappa^2))^6}.$$

Затем, функции $F^{(i)}(s, t)$, соответствующие рождению пары η_c в (2.20), записываются как

$$F^{(0)} = k_a^2(a_1^2 + a_2^2),$$

$$F^{(1)} = k_a k_b (a_1 b_1 + a_2 b_2) + 8k_a^2(a_1^2 + a_2^2),$$

$$F^{(2)} = -4k_a^2(a_1^2 + a_2^2),$$

$$F^{(3)} = 6k_a k_b (a_1 b_1 + a_2 b_2) + k_a k_c (a_1 c_1 + a_2 c_2) + 24k_a^2(a_1^2 + a_2^2) + \frac{1}{4}k_b^2(b_1^2 + b_2^2).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Функции, определяющие сечения парного рождения дваждытяжелых дикварков в pp взаимодействии

Представленные функции соответствуют рождению пары дикварков D_{cc} и $\bar{D}_{\bar{c}\bar{c}}$ в (3.9), состоящих из идентичных (анти)кварков. Каждая функция записывается в виде $F^{(i)}(s, t) = F_0^{(i)}(s, t) + W F_1^{(i)}(s, t)$, где энергия связи $W = M - M_c$, $M_c = 2m_c$.

$$\begin{aligned}
F_0^{(1)}[AVD_{cc} + AV\bar{D}_{\bar{c}\bar{c}}](s, t) &= \frac{524288}{27M_c^4 s^6 (M_c^2 - t)^4 (M_c^2 - s - t)^4} \\
&\times [27648M_c^{24} - 72M_c^{22}(1595s + 4596t) + 3M_c^{20}(67687s^2 + 437088st + 605232t^2) \\
&- 8M_c^{18}(28007s^3 + 278328s^2t + 849501st^2 + 754920t^3) + 4M_c^{16}(48546s^4 + 575480s^3t \\
&+ 2731629s^2t^2 + 5276664st^3 + 3390660t^4) - 2M_c^{14}(66854s^5 + 867710s^4t + 5237453s^3t^2 \\
&+ 15810492s^2t^3 + 21825720st^4 + 10831968t^5) + M_c^{12}(64025s^6 + 980113s^5t + 6934011s^4t^2 \\
&+ 27679700s^3t^3 + 59798910s^2t^4 + 63129024st^5 + 25238304t^6) - 2M_c^{10}(9796s^7 \\
&+ 190998s^6t + 1629993s^5t^2 + 8003124s^4t^3 + 23392115s^3t^4 + 38627220s^2t^5 + 32576040st^6 \\
&+ 10803456t^7) + t^2(s+t)^2(8s^8 + 25s^7t + 2536s^6t^2 + 21366s^5t^3 + 78759s^4t^4 + 157896s^3t^5 \\
&+ 179640s^2t^6 + 108864st^7 + 27216t^8) - 2M_c^2t(s+t)^2(16s^8 + 243s^7t + 5526s^6t^2 \\
&+ 49040s^5t^3 + 215626s^4t^4 + 530597s^3t^5 + 741924s^2t^6 + 546660st^7 + 163296t^8) + M_c^8 \\
&\times (4006s^8 + 94606s^7t + 1029199s^6t^2 + 6247798s^5t^3 + 23171033s^4t^4 + 52444016s^3t^5 \\
&+ 69078684s^2t^6 + 47988288st^7 + 13491360t^8) - 2M_c^6(322s^9 + 7064s^8t + 99306s^7t^2 \\
&+ 779460s^6t^3 + 3657884s^5t^4 + 10718238s^4t^5 + 19496435s^3t^6 + 21114948s^2t^7 \\
&+ 12361788st^8 + 2995920t^9) + M_c^4(68s^{10} + 1153s^9t + 19692s^8t^2 + 217805s^7t^3 \\
&+ 1362129s^6t^4 + 5166549s^5t^5 + 12342213s^4t^6 + 18546596s^3t^7 \\
&+ 16897269s^2t^8 + 8485920st^9 + 1796688t^{10})],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_0^{(2)}[AVD_{cc} + AV\bar{D}_{\bar{c}\bar{c}}](s, t) &= -\frac{524288}{81M_c^4 s^8 (M_c^2 - t)^5 (M_c^2 - s - t)^5} \\
&\times [1741824M_c^{32} - 1728M_c^{30}(5897s + 16128t) + 144M_c^{28}(189641s^2 + 1087056st + 1451520t^2) \\
&- 144M_c^{26}(322301s^3 + 2802300s^2t + 7789176st^2 + 6773760t^3) + M_c^{24}(57554074s^4 \\
&+ 656045232s^3t + 2763480672s^2t^2 + 4972983552st^3 + 3170119680t^4) - 2M_c^{22}(27433899s^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +384167638s^4t + 2133779508s^3t^2 + 5813307936s^2t^3 + 7628766624st^4 + 3804143616t^5) \\
& + 6M_c^{20}(6821962s^6 + 113839005s^5t + 781665683s^4t^2 + 2819646560s^3t^3 + 5596217064s^2t^4 \\
& + 5718898944st^5 + 2324754432t^6) - 2M_c^{18}(12207465s^7 + 234642355s^6t + 1930593059s^5t^2 \\
& + 8652159088s^4t^3 + 22804443900s^3t^4 + 35210657664s^2t^5 + 29218299264st^6 + 9963233280t^7) \\
& + M_c^{16}(11661347s^8 + 251850550s^7t + 2421795360s^6t^2 + 13072181288s^5t^3 + 42975298740s^4t^4 \\
& + 88311607776s^3t^5 + 110619734400s^2t^6 + 76740162048st^7 + 22417274880t^8) \\
& - M_c^{14}(4223561s^9 + 104555317s^8t + 1160158397s^7t^2 + 7399876560s^6t^3 + 29431644460s^5t^4 \\
& + 75678177864s^4t^5 + 126369906768s^3t^6 + 132222824064s^2t^7 + 78350462784st^8 + 19926466560t^9) \\
& + 4t^3(s+t)^3(88s^{10} + 291s^9t + 30322s^8t^2 + 297142s^7t^3 + 1336999s^6t^4 + 3529608s^5t^5 \\
& + 5988728s^4t^6 + 6737472s^3t^7 + 4950288s^2t^8 + 2177280st^9 + 435456t^{10}) + M_c^{12}(1077011s^{10} \\
& + 31978294s^9t + 416887472s^8t^2 + 3125057808s^7t^3 + 14810788148s^6t^4 + 46251513620s^5t^5 \\
& + 96893779668s^4t^6 + 135324576576s^3t^7 + 120857286384s^2t^8 + 62193643776st^9 + 13948526592t^{10}) \\
& - M_c^2t^2(s+t)^2(1504s^{11} + 23728s^{10}t + 685939s^9t^2 + 7528052s^8t^3 + 42573677s^7t^4 \\
& + 146340250s^6t^5 + 329945926s^5t^6 + 504952416s^4t^7 + 526855224s^3t^8 + 362855808s^2t^9 \\
& + 149506560st^{10} + 27869184t^{11}) - M_c^{10}(189099s^{11} + 6711431s^{10}t + 106896474s^9t^2 \\
& + 958886210s^8t^3 + 5412164759s^7t^4 + 20272621428s^6t^5 + 51752902204s^5t^6 + 90884023920s^4t^7 \\
& + 108459347328s^3t^8 + 84070738368s^2t^9 + 38069792640st^{10} + 7608287232t^{11}) + M_c^8(23696s^{12} \\
& + 902460s^{11}t + 18000829s^{10}t^2 + 201542412s^9t^3 + 1383434183s^8t^4 + 6237258490s^7t^5 \\
& + 19205490660s^6t^6 + 41225350568s^5t^7 + 61985442066s^4t^8 + 64263674160s^3t^9 + 43813561824s^2t^{10} \\
& + 17647352064st^{11} + 3170119680t^{12}) + 2M_c^4t(1648s^{13} + 36454s^{12}t + 814068s^{11}t^2 + 10491584s^{10}t^3 \\
& + 77792679s^9t^4 + 366446361s^8t^5 + 1170001946s^7t^6 + 2627856120s^6t^7 + 4228552375s^5t^8 \\
& + 4881077725s^4t^9 + 3965125248s^3t^{10} + 2157018696s^2t^{11} + 705148416st^{12} + 104509440t^{13}) \\
& - M_c^6(1664s^{13} + 72088s^{12}t + 1733298s^{11}t^2 + 25982195s^{10}t^3 + 228949037s^9t^4 \\
& + 1276267953s^8t^5 + 4775775315s^7t^6 + 12428268880s^6t^7 + 22908511678s^5t^8 + 29980767340s^4t^9 \\
& + 27364070472s^3t^{10} + 16589102400s^2t^{11} + 5996839104st^{12} + 975421440t^{13}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_0^{(3)}[AVD_{cc} + AV\bar{D}_{\bar{c}\bar{c}}](s, t) &= \frac{262144}{243M_c^4s^{10}(M_c^2 - t)^6(M_c^2 - s - t)^6} \\
&\times [222953472M_c^{40} - 27869184M_c^{38}(59s + 160t) + 3456M_c^{36}(1634233s^2 + 9209088st + 12257280t^2) \\
&- 576M_c^{34}(21154723s^3 + 183547236s^2t + 506435328st^2 + 441262080t^3) + 48M_c^{32}(390910561s^4 \\
&+ 4582950624s^3t + 19453613688s^2t^2 + 35059433472st^3 + 22504366080t^4) - 4M_c^{30}(5537521813s^5 \\
&+ 81274350792s^4t + 466630287984s^3t^2 + 1292676789888s^2t^3 + 1712700702720st^4 \\
&+ 864167657472t^5) + 4M_c^{28}(5240554941s^6 + 91437358522s^5t + 659112431964s^4t^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2471543238528s^3t^3 + 5029243275744s^2t^4 + 5227645796352s^5t^5 + 2160419143680t^6) \\
& - M_c^{26}(16330544031s^7 + 326792003628s^6t + 2815199542892s^5t^2 + 13284503935680s^4t^3 \\
& + 36610822146240s^3t^4 + 58396559171328s^2t^5 + 49627101855744st^6 + 17283353149440t^7) \\
& + M_c^{24}(10537886063s^8 + 237559033812s^7t + 2365887361944s^6t^2 + 13397155539088s^5t^3 \\
& + 46551035169840s^4t^4 + 100601034937344s^3t^5 + 131082206097024s^2t^6 + 93716708327424st^7 \\
& + 28085448867840t^8) - 2M_c^{22}(2784626670s^9 + 70737215246s^8t + 800148664831s^7t^2 \\
& + 5268464876020s^6t^3 + 22039344056906s^5t^4 + 60145366265904s^4t^5 + 106205291855712s^3t^6 \\
& + 116324448634368s^2t^7 + 71451599192064st^8 + 18723632578560t^9) + M_c^{20}(2378426106s^{10} \\
& + 68538265551s^9t + 877306323899s^8t^2 + 6598930104580s^7t^3 + 32238538637660s^6t^4 \\
& + 106201836358040s^5t^5 + 237119424205104s^4t^6 + 352010470800384s^3t^7 + 330977605825152s^2t^8 \\
& + 177504964116480st^9 + 41191991672832t^{10}) - M_c^{18}(815322191s^{11} + 26692617042s^{10}t \\
& + 387726963435s^9t^2 + 3311677836814s^8t^3 + 18562148953601s^7t^4 + 71659299951396s^6t^5 \\
& + 193566257649996s^5t^6 + 363728035723392s^4t^7 + 463561912782144s^3t^8 + 380261571985152s^2t^9 \\
& + 180350463541248st^{10} + 37447265157120t^{11}) + 4t^4(s+t)^4(2904s^{12} + 10131s^{11}t + 1088812s^{10}t^2 \\
& + 12565370s^9t^3 + 71302945s^8t^4 + 257354136s^7t^5 + 650793576s^6t^6 + 1191722688s^5t^7 \\
& + 1576367280s^4t^8 + 1465413120s^3t^9 + 906204672s^2t^{10} + 334430208st^{11} + 55738368t^{12}) \\
& + M_c^{16}(220505891s^{12} + 8239519834s^{11}t + 136412070144s^{10}t^2 + 1324461974452s^9t^3 \\
& + 8455632770450s^8t^4 + 37581776673544s^7t^5 + 119310422197680s^6t^6 + 271757302270944s^5t^7 \\
& + 438797604649680s^4t^8 + 487891081751040s^3t^9 + 353665494179712s^2t^{10} + 149887606063104st^{11} \\
& + 28085448867840t^{12}) - M_c^{2t^3}(s+t)^3(52864s^{13} + 808320s^{12}t + 29421610s^{11}t^2 + 375769223s^{10}t^3 \\
& + 2557032615s^9t^4 + 11233867505s^8t^5 + 34796810259s^7t^6 + 79006480208s^6t^7 + 132647858276s^5t^8 \\
& + 162616078080s^4t^9 + 141063190272s^3t^{10} + 81801031680s^2t^{11} + 28398698496st^{12} + 4459069440t^{13}) \\
& - 2M_c^{14}(22481965s^{13} + 978678070s^{12}t + 18711980507s^{11}t^2 + 207897944100s^{10}t^3 \\
& + 1512657963970s^9t^4 + 7680203547784s^8t^5 + 28156966746706s^7t^6 + 75568224170616s^6t^7 \\
& + 148153722926478s^5t^8 + 208861152514800s^4t^9 + 205204061269152s^3t^{10} + 132824617585920s^2t^{11} \\
& + 50738580652032st^{12} + 8641676574720t^{13}) + M_c^{4t^2}(s+t)^2(122528s^{14} + 2904080s^{13}t \\
& + 82920640s^{12}t^2 + 1181123451s^{11}t^3 + 9594060453s^{10}t^4 + 51055788685s^9t^5 + 192342235019s^8t^6 \\
& + 534248481092s^7t^7 + 1111820399652s^6t^8 + 1729605262024s^5t^9 + 1976699347728s^4t^{10} \\
& + 1605475058688s^3t^{11} + 874662022656s^2t^{12} + 285993566208st^{13} + 42361159680t^{14}) \\
& + M_c^{12}(6597472s^{14} + 338366703s^{13}t + 7696397325s^{12}t^2 + 99678452662s^{11}t^3 + 833912155244s^{10}t^4 \\
& + 4841060642370s^9t^5 + 20335964523054s^8t^6 + 63209010354088s^7t^7 + 146358554142828s^6t^8 \\
& + 250907906992024s^5t^9 + 312764014124112s^4t^{10} + 274363712128512s^3t^{11} + 159957170755200s^2t^{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 55477289484288st^{13} + 8641676574720t^{14}) - 2M_c^6 t(s+t)(56096s^{15} + 2136820s^{14}t + 61039254s^{13}t^2 \\
& + 1006276056s^{12}t^3 + 9868826220s^{11}t^4 + 63875343113s^{10}t^5 + 292621754603s^9t^6 + 988998062953s^8t^7 \\
& + 2518818379737s^7t^8 + 4859851351942s^6t^9 + 7049500248014s^5t^{10} + 7539507992112s^4t^{11} \\
& + 5747250009888s^3t^{12} + 2946149978112s^2t^{13} + 908354248704st^{14} + 127083479040t^{15}) \\
& - M_c^{10}(657624s^{15} + 39367890s^{14}t + 1104413029s^{13}t^2 + 17344487058s^{12}t^3 + 170832670892s^{11}t^4 \\
& + 1146876637852s^{10}t^5 + 5529671411978s^9t^6 + 19757278335172s^8t^7 + 53132548989137s^7t^8 \\
& + 107815796091060s^6t^9 + 163659426240484s^5t^{10} + 182253522957504s^4t^{11} + 143985271325760s^3t^{12} \\
& + 76165483016448s^2t^{13} + 24134155960320st^{14} + 3456670629888t^{15}) + M_c^8(33792s^{16} + 2774244s^{15}t \\
& + 97694544s^{14}t^2 + 1994311862s^{13}t^3 + 24356767073s^{12}t^4 + 194789687794s^{11}t^5 + 1093516581704s^{10}t^6 \\
& + 4504581919900s^9t^7 + 13974266124379s^8t^8 + 33029076981316s^7t^9 + 59471161006872s^6t^{10} \\
& + 80753245374608s^5t^{11} + 81030643128336s^4t^{12} + 58075814264832s^3t^{13} + 28049364706176s^2t^{14} \\
& + 8164110237696st^{15} + 1080209571840t^{16})].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{(1)}[AVD_{cc} + AV\bar{D}_{cc}](s, t) &= -\frac{262144}{27M_c^5 s^7 (M_c^2 - t)^5 (M_c^2 - s - t)^5} \\
&\times [1728M_c^{30} - 144M_c^{28}(1393s + 144t) + 144M_c^{26}(7517s^2 + 16668st + 792t^2) - 18M_c^{24}(130927s^3 \\
& + 658936s^2t + 718992st^2 + 21120t^3) + 6M_c^{22}(414903s^4 + 3896270s^3t + 9595884s^2t^2 + 6850464st^3 \\
& + 142560t^4) - 2M_c^{20}(570966s^5 + 10935641s^4t + 49831179s^3t^2 + 80012160s^2t^3 + 41813496st^4 \\
& + 684288t^5) + 2M_c^{18}(-70283s^6 + 3939119s^5t + 38212583s^4t^2 + 114578976s^3t^3 + 134518860s^2t^4 \\
& + 54136512st^5 + 798336t^6) + M_c^{16}(514957s^7 + 2926870s^6t - 11814356s^5t^2 - 114600008s^4t^3 \\
& - 268330620s^3t^4 - 242157600s^2t^5 - 73652544st^6 - 1368576t^7) - M_c^{14}(361295s^8 + 4828723s^7t \\
& + 24570531s^6t^2 + 51080312s^5t^3 + 31705580s^4t^4 - 8315448s^3t^5 + 8718192s^2t^6 + 17635968st^7 \\
& - 855360t^8) + 8st^3(s+t)^3(8s^8 + 25s^7t + 2536s^6t^2 + 21366s^5t^3 + 78759s^4t^4 + 157896s^3t^5 \\
& + 179640s^2t^6 + 108864st^7 + 27216t^8) + M_c^{12}(151121s^9 + 2725998s^8t + 22467644s^7t^2 \\
& + 100637416s^6t^3 + 266920660s^5t^4 + 453877540s^4t^5 + 511993860s^3t^6 + 349531200s^2t^7 \\
& + 104894352st^8 - 380160t^9) - M_c^2 st^2(s+t)^2(320s^9 + 3892s^8t + 110625s^7t^2 + 1057188s^6t^3 \\
& + 4932499s^5t^4 + 13283958s^4t^5 + 21746386s^3t^6 + 21339360s^2t^7 + 11507112st^8 + 2612736t^9) \\
& - M_c^{10}(42121s^{10} + 891469s^9t + 9756298s^8t^2 + 61315158s^7t^3 + 234557673s^6t^4 + 572091236s^5t^5 \\
& + 907966580s^4t^6 + 913025712s^3t^7 + 525013056s^2t^8 + 129865536st^9 - 114048t^{10}) + M_c^8(7984s^{11} \\
& + 172896s^{10}t + 2390911s^9t^2 + 20059044s^8t^3 + 102849261s^7t^4 + 335986166s^6t^5 + 718609852s^5t^6 \\
& + 1005256024s^4t^7 + 884461578s^3t^8 + 441939600s^2t^9 + 95071968st^{10} - 20736t^{11}) + 2M_c^4 st(360s^{11} \\
& + 7056s^{10}t + 133908s^9t^2 + 1462154s^8t^3 + 8991251s^7t^4 + 34117345s^6t^5 + 84461098s^5t^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +139249436s^4t^7 + 151574975s^3t^8 + 104472969s^2t^9 + 41237280st^{10} + 7089912t^{11}) - M_c^6(816s^{12} \\
& + 17956s^{11}t + 301806s^{10}t^2 + 3524997s^9t^3 + 24696371s^8t^4 + 107402983s^7t^5 + 303244845s^6t^6 \\
& + 567265544s^5t^7 + 697527422s^4t^8 + 540613740s^3t^9 + 238658328s^2t^{10} + 45603648st^{11} - 1728t^{12}]),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{(2)}[AVD_{cc} + AV\bar{D}_{\bar{c}\bar{c}}](s, t) &= \frac{262144}{81M_c^5s^8(M_c^2 - t)^6(M_c^2 - s - t)^6} \\
&\times [20221056M_c^{36} - 576M_c^{34}(233941s + 561036t) + 144M_c^{32}(2753877s^2 + 14104544st + 16667448t^2) \\
&- 4M_c^{30}(170096945s^3 + 1400883912s^2t + 3527653392st^2 + 2738026368t^3) + 24M_c^{28}(31650883s^4 \\
&+ 371666283s^3t + 1502816442s^2t^2 + 2481655488st^3 + 1422434160t^4) - M_c^{26}(570679427s^5 \\
&+ 9029032556s^4t + 52252923804s^3t^2 + 138610384704s^2t^3 + 168906874176st^4 + 76170786048t^5) \\
&+ M_c^{24}(256191463s^6 + 5795816012s^5t + 46170706992s^4t^2 + 176966758928s^3t^3 + 347658174288s^2t^4 \\
&+ 333497539584st^5 + 122937429888t^6) - 2M_c^{22}(2466837s^7 + 863671542s^6t + 11311001039s^5t^2 \\
&+ 62914230172s^4t^3 + 183012632274s^3t^4 + 286116482160s^2t^5 + 224984126880st^6 + 69253636608t^7) \\
&+ M_c^{20}(-91034264s^8 - 813592713s^7t + 48326175s^6t^2 + 28800780204s^5t^3 + 158775180088s^4t^4 \\
&+ 405100852344s^3t^5 + 539810088048s^2t^6 + 356995482624st^7 + 90987152256t^8) + M_c^{18}(75448045s^9 \\
&+ 1332147106s^8t + 9770119165s^7t^2 + 38874308682s^6t^3 + 89128173899s^5t^4 + 110253341580s^4t^5 \\
&+ 56052424932s^3t^6 - 1916424576s^2t^7 + 2804763456st^8 + 9582693120t^9) - 32t^4(s+t)^4(104s^{10} \\
&+ 349s^9t + 38895s^8t^2 + 388900s^7t^3 + 1790450s^6t^4 + 4854528s^5t^5 + 8476608s^4t^6 + 9797760s^3t^7 \\
&+ 7348320s^2t^8 + 3265920st^9 + 653184t^{10}) - M_c^{16}(35021597s^{10} + 833102650s^9t + 8603539424s^8t^2 \\
&+ 50889644964s^7t^3 + 193786066418s^6t^4 + 500022958888s^5t^5 + 890742644832s^4t^6 \\
&+ 1097311247136s^3t^7 + 910938066192s^2t^8 + 463385184768st^9 + 108408972672t^{10}) + M_c^{14}t^3(s+t)^3 \\
&\times (17984s^{11} + 225976s^{10}t + 8137786s^9t^2 + 91342653s^8t^3 + 513344601s^7t^4 + 1753334331s^6t^5 \\
&+ 3950202209s^5t^6 + 6069862064s^4t^7 + 6365607660s^3t^8 + 4394297088s^2t^9 + 1806167808st^{10} \\
&+ 334430208t^{11}) + 2M_c^{14}(5369598s^{11} + 159532368s^{10}t + 2107768049s^9t^2 + 15931331624s^8t^3 \\
&+ 77303868220s^7t^4 + 256070555832s^6t^5 + 594867075166s^5t^6 + 973395581112s^4t^7 \\
&+ 1105034420970s^3t^8 + 832224987792s^2t^9 + 374238168480st^{10} + 75776553216t^{11}) - M_c^{12}t^2(s+t)^2 \\
&\times (43888s^{12} + 903104s^{11}t + 22877182s^{10}t^2 + 282654857s^9t^3 + 1903612637s^8t^4 + 8005381771s^7t^5 \\
&+ 22622947685s^6t^6 + 44524612444s^5t^7 + 61674802264s^4t^8 + 59340363672s^3t^9 + 37899841968s^2t^{10} \\
&+ 14458383360st^{11} + 2488195584t^{12}) - M_c^{12}(2248090s^{12} + 79574449s^{11}t + 1317350515s^{10}t^2 \\
&+ 12475000442s^9t^3 + 74917211664s^8t^4 + 304907732366s^7t^5 + 873255100426s^6t^6 \\
&+ 1787109792136s^5t^7 + 2607119746632s^4t^8 + 2654336950408s^3t^9 + 1794055635504s^2t^{10} \\
&+ 722668267008st^{11} + 130908645504t^{12}) + M_c^{10}(308488s^{13} + 12561878s^{12}t + 259953855s^{11}t^2 \\
&+ 3131090454s^{10}t^3 + 23484836972s^9t^4 + 117277669268s^8t^5 + 408772826718s^7t^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +1021374753100s^6t^7 + 1847123871971s^5t^8 + 2403577776876s^4t^9 + 2196880552908s^3t^{10} \\
& + 1338590478528s^2t^{11} + 487521423936st^{12} + 80079439104t^{13} + 2M_c^6t(27696s^{14} + 788592s^{13}t \\
& + 18122252s^{12}t^2 + 256127153s^{11}t^3 + 2159709194s^{10}t^4 + 11773460135s^9t^5 + 44215597904s^8t^6 \\
& + 118957864637s^7t^7 + 234050783174s^6t^8 + 338739874305s^5t^9 + 357552284964s^4t^{10} \\
& + 268091824970s^3t^{11} + 135283963248s^2t^{12} + 41152829472st^{13} + 5692280832t^{14}) - M_c^8(21360s^{14} \\
& + 1150240s^{13}t + 29400040s^{12}t^2 + 473008826s^{11}t^3 + 4622824387s^{10}t^4 + 29030729246s^9t^5 \\
& + 124308726592s^8t^6 + 377796208660s^7t^7 + 833064465237s^6t^8 + 1342006821284s^5t^9 \\
& + 1567237665232s^4t^{10} + 1293304522224s^3t^{11} + 714916476432s^2t^{12} + 237204615168st^{13} \\
& + 35637528960t^{14})],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{(3)}[AVD_{cc} + AV\bar{D}_{\bar{c}\bar{c}}](s, t) &= \frac{262144}{243M_c^5s^{10}(M_c^2 - t)^7(M_c^2 - s - t)^7} \\
&\times [1741824000M_c^{44} - 13824M_c^{42}(1024717s + 2520000t) + 3456M_c^{40}(15157181s^2 + 78409048st \\
& + 95243904t^2) - 768M_c^{38}(152602537s^3 + 1244415438s^2t + 3174024582st^2 + 2539071360t^3) \\
& + 48M_c^{36}(3709614441s^4 + 42282452456s^3t + 169803625392s^2t^2 + 284772736512st^3 + 168755166720t^4) \\
& - 8M_c^{34}(24326003617s^5 + 362802284320s^4t + 2037040979064s^3t^2 + 5374375596864s^2t^3 \\
& + 6667854384384st^4 + 3121487953920t^5) + 16M_c^{32}(9762324075s^6 + 183890145551s^5t \\
& + 1354940349368s^4t^2 + 5002564231056s^3t^3 + 9760290607872s^2t^4 + 9555769117440st^5 \\
& + 3679463854080t^6) - 4M_c^{30}(22457637797s^7 + 532549281496s^6t + 4996889068172s^5t^2 \\
& + 24325079883568s^4t^3 + 66552894119904s^3t^4 + 102498878252160s^2t^5 + 82476996844032st^6 \\
& + 26843207860224t^7) + M_c^{28}(31939769109s^8 + 1031865139936s^7t + 12519019456864s^6t^2 \\
& + 78810576693872s^5t^3 + 286787234374848s^4t^4 + 622093712687616s^3t^5 + 788656117759488s^2t^6 \\
& + 536192491511808st^7 + 150284156682240t^8) - M_c^{26}(318053197s^9 + 218468720272s^8t \\
& + 4411307171664s^7t^2 + 38715857406848s^6t^3 + 189114078871984s^5t^4 + 556628554281920s^4t^5 \\
& + 1004225800991616s^3t^6 + 1080262099763712s^2t^7 + 632454318425088st^8 + 154289933844480t^9) \\
& + M_c^{24}(-8778960932s^{10} - 134452810824s^9t - 488149274250s^8t^2 + 4001218034320s^7t^3 \\
& + 48976432024272s^6t^4 + 230412433439024s^5t^5 + 608946149725312s^4t^6 + 966382124532480s^3t^7 \\
& + 907484756435712s^2t^8 + 461490695018496st^9 + 97128844001280t^{10}) + M_c^{22}(7078070576s^{11} \\
& + 173778399959s^{10}t + 1874571584019s^9t^2 + 11483453562160s^8t^3 + 43164708110292s^7t^4 \\
& + 100643321821024s^6t^5 + 138667494855120s^5t^6 + 93684817569344s^4t^7 + 3332723177088s^3t^8 \\
& - 24935540497920s^2t^9 + 968161379328st^{10} + 7021362216960t^{11}) - 16t^5(s+t)^5(3960s^{12} + 14151s^{11}t \\
& + 1702238s^{10}t^2 + 20378278s^9t^3 + 120761039s^8t^4 + 456128424s^7t^5 + 1201156440s^6t^6 + 2269682496s^5t^7 \\
& + 3068773200s^4t^8 + 2893812480s^3t^9 + 1805006592s^2t^{10} + 668860416st^{11} + 111476736t^{12}) - M_c^{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (3405990647s^{12} + 104523726104s^{11}t + 1437801582469s^{10}t^2 + 11759612667954s^9t^3 \\
& + 63654208362929s^8t^4 + 240386484084080s^7t^5 + 652169234475584s^6t^6 + 1289432039042896s^5t^7 \\
& + 1857555696533856s^4t^8 + 1912110070725888s^3t^9 + 1336908589885440s^2t^{10} + 568038597894144st^{11} \\
& + 110118364102656t^{12}) + 4M_c^2t^4(s+t)^4(91504s^{13} + 1159496s^{12}t + 51949345s^{11}t^2 + 687364992s^{10}t^3 \\
& + 4769853365s^9t^4 + 21399318662s^8t^5 + 67686740542s^7t^6 + 156321971272s^6t^7 + 265402870978s^5t^8 \\
& + 327237185520s^4t^9 + 284374491696s^3t^{10} + 164763942912s^2t^{11} + 57042994176st^{12} + 8918138880t^{13}) \\
& + M_c^{18}(1131091631s^{13} + 42014573246s^{12}t + 693307252728s^{11}t^2 + 6787879263196s^{10}t^3 \\
& + 44334703856018s^9t^4 + 204596890047160s^8t^5 + 687431049901512s^7t^6 + 1704996711408576s^6t^7 \\
& + 3124052755731456s^5t^8 + 4176368330021184s^4t^9 + 3956371217584896s^3t^{10} + 2511745562866176s^2t^{11} \\
& + 956202781427712st^{12} + 164551924776960t^{13}) - M_c^4t^3(s+t)^3(962656s^{14} + 21094520s^{13}t \\
& + 691108948s^{12}t^2 + 10002353127s^{11}t^3 + 80665258449s^{10}t^4 + 426581637437s^9t^5 + 1603433166215s^8t^6 \\
& + 4449490702576s^7t^7 + 9237022428688s^6t^8 + 14298644494848s^5t^9 + 16229093115728s^4t^{10} \\
& + 13078157302656s^3t^{11} + 7067907479808s^2t^{12} + 2293062524928st^{13} + 337147453440t^{14}) - 2M_c^{16} \\
& \times (133029237s^{14} + 5947101882s^{13}t + 117421358999s^{12}t^2 + 1355188930116s^{11}t^3 + 10363630842574s^{10}t^4 \\
& + 56081817619836s^9t^5 + 222407868023894s^8t^6 + 657773336913072s^7t^7 + 1458291508962840s^6t^8 \\
& + 2410239762599576s^5t^9 + 2920175104142912s^4t^{10} + 2512162544509056s^3t^{11} \\
& + 1449370729677312s^2t^{12} + 501693012043776st^{13} + 78585246351360t^{14}) + M_c^6t^2(s+t)^2(1391744s^{15} \\
& + 43117128s^{14}t + 1279151434s^{13}t^2 + 20465640103s^{12}t^3 + 192094141903s^{11}t^4 + 1196102161809s^{10}t^5 \\
& + 5318240639251s^9t^6 + 17564547014872s^8t^7 + 43863878016444s^7t^8 + 83088452331520s^6t^9 \\
& + 118407481083504s^5t^{10} + 124541123134400s^4t^{11} + 93507020744832s^3t^{12} + 47299950093312s^2t^{13} \\
& + 14419185974784st^{14} + 1998499184640t^{15}) + M_c^{14}(43621482s^{15} + 2343138771s^{14}t \\
& + 56199599441s^{13}t^2 + 773612810138s^{12}t^3 + 6932647567340s^{11}t^4 + 43593912548178s^{10}t^5 \\
& + 200838117586542s^9t^6 + 693892463426240s^8t^7 + 1816416867876372s^7t^8 + 3603519546818400s^6t^9 \\
& + 5370130545307120s^5t^{10} + 5898572062338496s^4t^{11} + 4619743847396736s^3t^{12} \\
& + 2435030828186112s^2t^{13} + 772528110925824st^{14} + 111261585899520t^{15}) - M_c^{12}(4569808s^{16} \\
& + 303380716s^{15}t + 9094156671s^{14}t^2 + 154232294898s^{13}t^3 + 1654322273320s^{12}t^4 \\
& + 12195176483488s^{11}t^5 + 65211887760950s^{10}t^6 + 261153355185708s^9t^7 + 796490061350461s^8t^8 \\
& + 1861164352695808s^7t^9 + 3323329278341024s^6t^{10} + 4486352440347568s^5t^{11} \\
& + 4487438605163072s^4t^{12} + 3215047033035264s^3t^{13} + 1556602532015616s^2t^{14} \\
& + 455363166265344st^{15} + 60694275317760t^{16}) - 2M_c^8t(473008s^{17} + 22997364s^{16}t + 723877564s^{15}t^2 \\
& + 13517149022s^{14}t^3 + 154742601512s^{13}t^4 + 1189403439533s^{12}t^5 + 6565310531804s^{11}t^6 \\
& + 27133825223148s^{10}t^7 + 85972286205904s^9t^8 + 211182065007357s^8t^9 + 403046816578584s^7t^{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+594612672095720s^6t^{11}+669840935465464s^5t^{12}+564179282090816s^4t^{13}+343245181246848s^3t^{14} \\
&+142249221368640s^2t^{15}+35889377398272st^{16}+4155365007360t^{17})+M_c^{10}(231552s^{17} \\
&+23087576s^{16}t+898504584s^{15}t^2+19979428298s^{14}t^3+269237598605s^{13}t^4+2395515473146s^{12}t^5 \\
&+15079912639380s^{11}t^6+70246320893068s^{10}t^7+248576830505007s^9t^8+677016721065728s^8t^9 \\
&+1424186961493664s^7t^{10}+2304170990875904s^6t^{11}+2833619756443696s^5t^{12} \\
&+2594347606941888s^4t^{13}+1708831468731264s^3t^{14}+763746183277056s^2t^{15} \\
&+207045959569920st^{16}+25667685679104t^{17})].
\end{aligned}$$