ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

КОЗЫРЕВ
Николай Юрьевич

Расширенные суперсимметрии и их спонтанное нарушение в механике и теории протяженных объектов

01.04.02 – теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна – 2015

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики имени Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:

Кривонос Сергей Олегович,
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник (ЛТФ ОИЯИ, Дубна).

Официальные оппоненты:

Алкалаев Константин Борисович,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник (ФИАН, Москва)

Галажинский Антон Владимирович,
доктор физико-математических наук,
профессор (ТПУ, Томск)

Ведущая организация:

НИЦ “Курчатовский институт” ФГБУ
“Государственный научный центр РФ Институт
теоретической и экспериментальной физики”, г. Москва

Защита диссертации состоится “___” ____________ 2015 г. в __________ на заседании диссертационного совета Д 720.001.01 в Лаборатории теоретической физики имени Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований (141980, г. Дубна Моск. обл., ул. Жолио Кюри, 6).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Объединенного института ядерных исследований (http://wwwinfo.jinr.ru/announce_disser.htm).

Автореферат разослан “___” ____________ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета А.Б. Арбузов

Общая характеристика диссертации

Актуальность темы. Суперсимметричная механика представляет значительный интерес для математической физики, как сама по себе, так и как источник относительно простых моделей, допускающих более полное исследование по сравнению с теориями поля. В рамках суперсимметричной механики, в частности, была исследована одномерная версия AdS/CFT соответствия, построены модели, реализующие спонтанное нарушение суперсимметрии, а также рассмотрены задачи о движении частицы вблизи горизонта черной дыры и о суперсимметричном анионе [1]. Стоит отметить также применение суперсимметричной механики для конструирования вычислительных методов в квантовой механике и статистической физике [2].

Одной из задач, которая может быть решена в рамках суперсимметричной механики, является задача о построении суперсимметричных обобщений квантового эффекта Холла. Эффект Холла в многомерных искривленных пространствах и неабелевых магнитных полях был рассмотрен в работах [3] и [4]. В работе [3] была исследована система, описывающая фермионы на сфере $\mathbb{S}^4$ в $SU(2)$ - магнитном поле, запертые на нижнем уровне Ландау. Одним из ее интересных свойств, является присутствие частицы со спином 2 в спектре возбуждений фермионной жидкости, что позволяет использовать эту систему для построения моделей квантовой гравитации: дискретный характер фермионной жидкости обеспечит отсутствие в них расходимостей. Дальнейшее обобщение квантового эффекта Холла было выполнено в работе [4], в которой исследовалась фермионная жидкость на пространствах $\mathbb{CP}^n$ в присутствии разных комбинаций $U(1)$ и $SU(n)$ магнитных полей. Дальнейшие возможности исследований таких систем связаны, наряду с построением эффективных действий для флуктуаций в объеме и на границе, с привлечением иных пространств, допускающих введение согласованного с геометрией магнитного поля ($\mathbb{HP}^n$, некомпактные пространства) и суперсимметризацией. Для выполнения последней задачи необходимо, в первую очередь, построить суперсимметричные механики частиц на перечисленных пространствах, в присутствии внешних магнитных полей, желательно, сохранив большинство свойств бозонных механик.

Суперсимметричная механика представляет интерес и для исследования спонтанного нарушения суперсимметрии. Суперсимметричные одномерные системы рассматривались как в первых работах по изучению условий спонтанного нарушения, так и в дальнейшем - как источник относительно простых моделей, позволяющих понять способы построения суперполевых низкоэнергетических действий бран.

(Суперсимметричные) браны являются одними из объектов, представляющих интерес для современной теоретической физики, в частности, теории струн и супергравитации. Брану можно представить как гиперповерхность, погруженную в пространство равной или большей размерности, являющуюся решением одной из теорий супергравитации. Флуктуации браны могут быть описаны эффективной теорией поля, определенной на мировом объеме браны, и содержащей в бозонном секторе скалярные и калибровочные поля. Своим присутствием брана нарушает группу симметрий исходного пространства до группы симметрий собственного мирового объема, и, частично, суперсимметрию, если таковая имеет место. В случае одиночной браны, как правило, нарушается половина суперсимметрий. Существенно, что действие теории поля, описывающей суперсимметричную брану, может быть зафиксировано требованием инвариантности относительно точной и спонтанно нарушенной суперсимметрий. Последняя оказывается нелинейно реализованной.

Для того, чтобы автоматически обеспечить инвариантность теории относительно ненарушенной суперсимметрии, действия бран формулируют, как правило, в терминах суперполей; инвариантность относительно нарушенной суперсимметрии фиксирует явный вид суперполевого лагранжиана. Лагранжиан можно построить, либо выписав анзац и проверив его инвариантность относительно дополнительной нарушенной суперсимметрии, либо построив линейную реализацию спонтанно нарушенной суперсимметрии (в последнем случае суперполевой лагранжиан оказывается одной из компонент расширенного мультиплета). Таким способом было построено большинство известных суперполевых действий бран [5, 6, 7, 8, 9].

К сожалению, явно построить суперполевое действие оказалось возможным только для некоторых представляющих интерес систем. Этому препятствуют как технические трудности, так и то, что в ряде случаев ковариантизовать условия неприводимости оказывается возможным только совместно с уравнениями движения [5]. Естественный метод работы со спонтанно нарушенными симметриями, формализм нелинейных реализаций, оказывается неприменимым непосредственно к конструированию суперполевых действий: суперполевой лагранжиан при преобразованиях нарушенной суперсимметрии не является точным инвариантом, а сдвигается на полные производные. Кроме того, вычисление компонентного действия из суперполевого также оказывается нетривиальной задачей, что связано с возможностью различными способами определить фермионные компоненты. Таким образом, существует необходимость усовершенствования методов работы с действиями для суперсимметричных бран.

Один из возможных подходов к действиям супербран состоит в том, чтобы пропустить этап построения суперполевого действия и строить непосредственно компонентное действие. Существование такой возможности можно предположить, используя известные результаты Волкова-Акулова [10] о структуре действия Голдстоуновского фермиона. Ими установлено, что преобразования сдвига фермионного поля $\psi_\alpha \to \psi_\alpha + \zeta_\alpha$ можно дополнить преобразованиями координат x^A так, чтобы они образовывали алгебру суперсимметрии:

$$\psi_\alpha \to \psi_\alpha + \zeta_\alpha,\ \bar\psi_{\dot\alpha} \to \bar\psi_{\dot\alpha} + \bar\zeta_{\dot\alpha},\ x^A \to x^A - \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\bar\zeta^{\dot\alpha}\psi^\alpha - \bar\psi^{\dot\alpha}\zeta^\alpha\right)\left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot\alpha}.$$

Требование инвариантности относительно таких преобразований позволяет зафиксировать действие Голдстоуновского фермиона в виде

$$S_{GF} = \int d^4x \det E,\ E_A^B = \delta_A^B + \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\bar\psi^{\dot\alpha}\partial_A\psi^\alpha + \psi^\alpha\partial_A\bar\psi^{\dot\alpha}\right)\left(\sigma^B\right)_{\alpha\dot\alpha}.$$

Кроме того, если в теории присутствуют другие, инвариантные, поля (материя), то способ взаимодействия с ними Голдстоуновского фермиона также диктуется такой симметрией: все слагаемые со взаимодействием могут быть получены с помощью замены производных $\partial_A \to \mathcal{D}_A = (E^{-1})_A^B \partial_B$ и меры интегрирования $d^4x \to d^4x \det E$ на ковариантные относительно спонтанно нарушенной суперсимметрии. Можно предположить, что действия суперсимметричных P-бран имеют аналогичную структуру, и исследовать их инвариантность относительно ненарушенной суперсимметрии. Такое исследование имеет смысл начать с простейших примеров, известных в суперсимметричной механике, чтобы выявить и разрешить трудности, возникающие в этом подходе.

Цели и задачи диссертационной работы. Настоящая диссертация преследует две цели.

Первой целью является является построение гамильтонианов суперчастиц в искривленных пространствах и внешних (неабелевых) магнитных полях, интересных с точки зрения квантового эффекта Холла. Для достижения этой цели поставлены и решены следующие задачи

- Построение $SU(n+1)$ инвариантной $\mathbb{CP}^n$ механики во внешнем $U(n)$ магнитном поле, а также поиск представления ее гамильтониана в терминах генераторов ее симметрий;

- Построение суперсимметричной $\mathbb{CP}^3$ механики, допускающей гамильтонову редукцию к механике на сфере $\mathbb{S}^4$ без нарушения суперсимметрии, и ее обобщение до $\mathbb{CP}^{2k+1}$, редуцируемой к $\mathbb{HP}^k$.

Второй целью является разработка нового подхода к действиям со спонтанно нарушенной суперсимметрией и его практическое применение для построения действий суперчастиц и P-бран. В рамках этой программы решаются следующие задачи:

- Построение действия механики, основанной на $N=2$, $d=1$ киральном мультиплете, с дополнительной спонтанно нарушенной $N=2$ суперимметрией. Построение суперполевого действия и сравнение результатов применения обоих методов;

- Построение и исследование суперсимметричных механик с нарушениями высших суперсимметрий ($N=8 \to N=4$, $N=16 \to N=8$, ...);

- Построение $N=4 \to N=2$ действий с высшими производными (анион, частица с жесткостью [11, 12]);

- Построение действия мембраны в $D=5$ и доказательство его инвариантности относительно нарушенной и ненарушенной $N=2$, $d=3$ суперсимметрий;

- Вычисление действий, дуальных действию мембраны в $D=5$ и содержащих электромагнитные поля в $d=3$;

- Построение и доказательство инвариантности действий 3-бран в $D = 6, 8$ и мембраны в $D = 7$ относительно нарушенной и ненарушенной суперсимметрии с учетом полученного опыта.

Научная новизна и практическая ценность результатов. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми.

Выполненное в диссертационной работе исследование $N = 2$ и $N = 4$ суперсимметричных механик частиц во внешних неабелевых калибровочных полях, создает основу для построения суперсимметричных обобщений квантового эффекта Холла. Это открывает возможности как для исследования проялений суперсимметрии в физике конденсированного состояния, так и для оценки влияния суперсимметрии в моделях квантовой гравитации, основанных на квантовом эффекте Холла. Кроме того, построенные квантово-механические системы представляют интерес и сами по себе, как системы, взаимодействия которых полностью фиксируется свойствами симметрии.

Исследования систем со спонтанным нарушением суперсимметрии, как суперчастиц, так и бран, проведенные в диссертационной работе, позволяют понять структуру действий этих систем, сформулированных в терминах компонент суперполей. Осуществленные построения позволяют сформулировать общий метод поиска компонентных действий бран, флуктуации которых описываются только скалярными полями, в ряде случаев оказывающийся более эффективным, чем распостраненные суперполевые методы. В частности, суперсимметричные действия мембран в $D = 5, 7$ и 3-браны в $D = 8$, не были известны ни в терминах компонент, ни суперполей. Рассмотренные действия представляют интерес как для исследования низкоэнергетического предела и непертурбативных свойств теории струн и супергравитации, так и для дальнейшего поиска возможностей построения действий со спонтанным нарушением суперсимметрии, содержащих калибровочные поля. Построенные суперсимметричные действия для аниона и частицы с жесткостью могут найти применение в теории конденсированных сред.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались и обсуждались на научных семинарах Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ), отделения теоретической физики Физического института им. П.Н. Лебедева Российской академии наук, отделения теоретической физики Института теоретической и экспериментальной физики им. А.И. Алиханова (ИТЭФ), докладывались на международных семинарах “Интегрируемые системы и квантовые симметрии” (Прага,2013,2014), “Суперсимметрия и интегрируемые системы” (Ереван,2012, Ганновер,2013, Дубна,2014).

Публикации. По результатам диссертации опубликованно 7 работ. В их числе 5 статей в изданиях, рекомендованных ВАК, один труд конференции, и один препринт.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения, общим объемом 139 страниц, а также списка цитированной литературы из 76 наименований.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, проведен краткий обзор литературы. В частности, кратко обсуждаются модели квантового эффекта Холла на сфере $\mathbb{S}^4$ и комплексных проективных пространствах $\mathbb{CP}^n$, суперсимметризация которых является основной мотивацией исследования суперсимметричных механик на $\mathbb{S}^4$ и $\mathbb{CP}^n$ в присутствии $SU(2)$ и $U(n)$ калибровочных полей. Также обсуждаются подходы к описанию суперсимметричных бран и обосновывается перспективность компонентного подхода к действиям P-бран, который предполается опробовать при построении действий суперчастиц с половинным спонтанным нарушением суперсимметрии. Кроме того, формулируются цели работы и дается описание содержания диссертации по главам.

В первой главе рассматриваются механики суперчастиц в искривленных пространствах (сфере $\mathbb{S}^4$, комплексных проективных $\mathbb{CP}^n$, кватернионных проективных $\mathbb{HP}^n$) в присутствии согласованных с геометрией внешних калибровочных полей.

В первом разделе первой главы подробно рассматриваются бозонные и суперсимметричные механики частиц на пространствах $\mathbb{CP}^n$. В начале описывается бозонная $\mathbb{CP}^n$ механика как сигма-модель на фактор-пространстве $SU(n+1)/U(n)$ [13], построение ее лагранжиана с помощью метода нелинейных реализаций, гамильтонова формулировка и интегралы движения, образующие алгебру $su(n+1)$ относительно скобок Пуассона. Далее обсуждается возможность введения магнитных полей, не разрушающих $SU(n+1)$ симметрию, путем расширения токов, образующих $su(n+1)$, дополнительными изоспиновыми генераторами. Отдельно обсуждается $N=4$ суперсимметричная $\mathbb{CP}^n$ механика, основанная на киральных суперполях, дается ее гамильтонова формулировка. На основе изложенного, обсуждается возможность введения в эту механику взаимодействия с магнитным полем. Показано [14], что возможно расширить ее суперзаряды дополнительными $su(1,n)$ токами так, чтобы они по-прежнему образовывали $N=4$, $d=1$ супералгебру Пуанкаре. Доказана $SU(n+1)$ инвариантность соответсвующего гамильтониана. Интегралы движения, образующие алгебру $su(n+1)$ относительно скобок Пуассона, построены явно и содержат только $u(n)$ изоспиновые токи. Полный гамильтониан представим в виде суммы $H = \mathcal{C}_{SU(n+1)} + \mathcal{C}_{SU(1,n)}$, где $\mathcal{C}$ - квадратичные операторы Казимира, причем $\mathcal{C}_{SU(1,n)}$ не содержит координат, импульсов и фермионов $\mathbb{CP}^n$ механики, а лишь изоспиновые токи.

Второй раздел первой главы посвящен рассмотрению механики на комплексном пространстве $\mathbb{CP}^3$. Показано [15], что бозонную механику на $\mathbb{CP}^3$ можно представить как механику частицы на сфере $\mathbb{S}^4$ во внешнем $SU(2)$ поле; последнее связано в тем, что $\mathbb{CP}^3$ допускает расслоение $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{CP}^3 \to \mathbb{S}^4$. Получающаяся механика допускает гамильтонову редукцию либо фиксацией значения оператора Казимира $su(2)$, либо одновременным занулением $su(2)$ токов. Ставится задача построить $N = 2$ суперсимметричную механику с аналогичными свойствами. Для этого требуется, чтобы координаты на $\mathbb{S}^2$ и сопряженные им импульсы входили в суперзаряды только через $su(2)$ токи. Показано, что требуемыми свойствами обладает механика на $\mathbb{S}^2$, основывающаяся на общих, а не киральных $N = 2$ суперполях. Она оказывается $N = 2$ переформулировкой $N = 4$ механики на $\mathbb{S}^2$, основанной на нелинейном киральном мультиплете [16]. Из ее суперзарядов, стандартных суперзарядов механики на $\mathbb{S}^4$ и дополнительных фермионных слагаемых построены суперзаряды, обладающие требуемым свойством редуцируемости. Приведены гамильтониан, компонентный лагранжиан и суперполевая формулировка этой механики. Данные построения также обобщены на случай расслоения $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{CP}^{2n+1} \to \mathbb{HP}^n$ и механик на кватернионных проективных пространствах $\mathbb{HP}^n$.

Вторая глава посвящена адаптации метода нелинейных реализаций для построения компонентных действий суперчастиц.

В первом разделе этой главы описано построение действия частицы в трехмерном пространстве-времени. Введена соответствующая алгебра Пуанкаре в одномерных обозначениях, постулирован элемент фактор-пространства и построены формы Картана. С помощью форм Картана, на поля - параметры фактор-пространства наложены ковариантные связи (обратный эффект Хиггса [17]). С учетом этих связей, интеграл от формы при генераторе временных трансляций оказывается требуемым действием.

Во втором разделе второй главы кратко обсуждаются суперполевые подходы к построению действий суперчастиц и связанные с ними трудности, анализируются преимущества компонентного подхода к таким действиям.

В третьем разделе осуществлено построение компонентного действия суперчастицы в $D = 3$, инвариантного относительно $N = 4, d = 1$ суперсимметрии. Алгебра и элемент фактор-пространства, рассмотренные в первом разделе, расширены 4 фермионными генераторами, причем параметрами при половине этих генераторов являются Голдстоуновские фермионы $\boldsymbol{\psi}$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}$, при других - координаты суперпространства θ, $\bar{\theta}$. Также, как и бозонном случае, найдены формы Картана; кроме того, введены производные, действующие на суперполя, ковариантные относительно нарушенной и ненарушенной суперсимметрий. Ковариантное условие на суперполя, наложенное аналогично бозонному случаю, дает возможность выразить голдстоуновские фермионы через производные бозонных суперполей и выделить неприводимый мультиплет (обобщенный $N = 2, d = 1$ киральный мультиплет), которому принадлежат обсуждаемые компоненты. Поскольку вспомогательные поля в этом мультиплете отсутствуют, анализ следствий условий неприводимости, с учетом алгебры ковариантных производных, позволяет выразить результат действия нечетных производных на $\boldsymbol{\psi}$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}$ через производные по времени Голдстоуновских бозонов. Далее определены физические компоненты и найдены законы их преобразования относительно нарушенной суперсимметрии. Введена специальная ковариантная производная, упрощающая законы преобразования производных всех компонент по времени, с ее помощью сформулирован анзац для лагранжиана, обеспечивающий инвариантность относительно нарушенной суперсимметрии

$$\partial_t \to \mathcal{D}_t = \mathcal{E}^{-1}\partial_t, \quad \mathcal{E} = 1 + \mathrm{i}\left(\dot{\psi}\bar{\psi} + \dot{\bar{\psi}}\psi\right), \quad S = \int dt \mathcal{E} F(\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}).$$

С ее помощью сформулирован анзац для лагранжиана, обеспечивающий инвариантность относительно нарушенной суперсимметрии. Функция в анзаце зафиксирована инвариантностью относительно ненарушенной суперсимметрии, также доказана инвариантность действия относительно полной $SO(1,2)$:

$$S_4 = \int dt \left[2 - \mathcal{E}\left(1 + \sqrt{1 - 4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}}\right)\right].$$

В четвертом разделе обсуждается возможность построения действия для суперчастицы, инвариантного относительно высших суперсимметрий. Для решения этой задачи в рамках обсуждаемого подхода требуется использовать уравнения движения вспомогательных полей. Для этого исследованы уравнения движения, следующие из $N = 4$ суперсимметричного действия и показано, что они эквивалентны условиям $\omega_S|_{\theta \to 0} = 0$. Поскольку в случае высших суперсимметрий $d\theta$-проекции этой формы содержат вспомогательные поля, то из условия $(\omega_S)\,|_{d\theta} = 0$ следуют искомые уравнения движения для вспомогательных полей.

Пятый раздел посвящен построению действия суперчастицы в $D = 3$, инвариантного относительно $N = 8$, $d = 1$ суперсимметрии, спонтанно нарушенной до $N = 4$, $d = 1$. Сформулирована $N = 8$, $d = 1$ супералгебра Пуанкаре, расширенная двумя центральными зарядами, вычислены необходимые законы преобразования и формы Картана. С помощью условия $\omega_Z = 0$ выделен $N = 4$, $d = 1$ киральный супермультиплет, описывающий систему. Уравнения движения вспомогательных полей, следующие из $(\omega_S)^a|_{d\theta} = 0$, имеют правильный “плоский” предел. Законы преобразования ненарушенной суперсимметрии оставляют инвариантным действие с той же структурой, что и в случае $N = 4 \to N = 2$. Действие оказывается инвариантным также и относительно автоморфизмов $SO(1,2)$:

$$S_8 = \int dt \left[2 - \mathcal{E}\left(1 + \sqrt{1 - 4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}}\right)\right], \ \mathcal{E} = 1 + \mathrm{i}\left(\dot{\psi}_a \bar{\psi}^a + \dot{\bar{\psi}}^a \psi_a\right), \ a = 1, 2.$$

В шестом разделе описано построение действия суперчастицы в $D = 3$, инвариантного относительно $N = 16$, $d = 1$ суперсимметрии. Его построение отличается от предыдущих тем, что условия $\omega_Z = 0$ оказываются неспособными выделить неприводимый мультиплет $N = 8$ суперсимметрии, поскольку его условия неприводимости включают дополнительные соотношения второго порядка по производным. Несмотря на то, что эти соотношения оказывается невозможным выделить как проекции форм Картана, условие $(\omega_S)\,|_{d\theta} = 0$ оказывается эквивалентным одновременному наложению условий неприводимости и уравнений движения для вспомогательных полей. Это позволяет сформулировать законы преобразования относительно ненарушенной суперсимметрии и группы автоморфизмов, оставляющие инвариантным действие со стандартной структурой:

$$S_{16} = \int dt \left[2 - \mathcal{E}\left(1 + \sqrt{1 - 4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}}\right)\right], \ \mathcal{E} = 1 + \mathrm{i}\left(\dot{\psi}_{ia}\bar{\psi}^{ia} + \dot{\bar{\psi}}^{ia}\psi_{ia}\right), \ i, a = 1, 2.$$

В седьмом разделе построены действия, инвариантные относительно супералгебр с еще большим числом суперзарядов. Действительно, оказывается возможным расширить алгебру $N = 16, d = 1$ суперсимметрии с двумя центральными зарядами так, чтобы она содержала $4 \cdot 2^n$, $n = 0, 1, 2 \ldots$ либо $4m$, $m = 1, 2 \ldots$ суперзарядов. Как и в случае частицы с $N = 16$, $d = 1$ суперсимметрией следствия условий $(\omega_S)^{i_1, i_2, \ldots i_n}|_{d\theta} = 0$, $(\omega_S)|^{i\alpha} = 0$ оказываются достаточными, чтобы доказать инвариантность действия с увеличенным числом фермионов, не заботясь об условиях неприводимости.

В восьмом разделе разработанный метод построения компонентных действий применен для построения действия суперчастицы в пятимерном пространстве-времени. Такая частица рассматривалась ранее в работе [18], в которой была сформулирована соответствующая алгебра ($N = 16$, $d = 1$ супералгебра Пуанкаре с 4 центральными зарядами), найдены формы Картана и ковариантные уравнения движения. Компоненты, описывающие данную частицу, принадлежат обобщенному $N = 8$, $d = 1$ гипермультиплету, определенному на массовой поверхности. В данном разделе построено соотвествующее компонентное действие и доказана его инвариантность относительно спонтанно нарушенной и ненарушенной суперсимметрий. Инвариантное действие имеет вид

$$S_{16hyper} = \int dt \left[2 - \mathcal{E}\left(1 + \sqrt{1 - 2\mathcal{D}_t q^{ia} \mathcal{D}_t q_{ia}}\right)\right], \quad \mathcal{E} = 1 + \frac{1}{2}\Omega^{\beta\gamma}\psi^a_\beta \partial_t \psi_{a\gamma},$$

где постоянная матрица $\Omega_{\alpha\beta}$ удовлетворяет соотношениям

$$\Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\lambda\sigma}\Omega^{\lambda\sigma}, \ \Omega_{\alpha\gamma}\Omega^{\gamma\beta} = \delta^\beta_\alpha, \ \alpha, \beta \ldots = 1, 2, 3, 4.$$

Девятый раздел посвящен исследованию возможности построения суперсимметричных действий с высшими производными, в качестве примеров которых рассмотрены действия для аниона и частицы с жесткостью. Бозонные действия этих систем обобщены до инвариантных относительно нарушенной $N = 2$, $d = 1$ суперсимметрии с помощью ковариантизации производных и меры интегрирования; кроме того, оказывается необходимым добавить дополнительные слагаемые, исчезающие в бозонном пределе. Функции при этих слагаемых однозначно определены требованием инвариантности относительно ненарушенной $N = 2$, $d = 1$ суперсимметрии. Для этих систем также оказывается возможным выписать простые суперполевые действия.

В десятом разделе приводятся некоторые выводы, сделанные при исследовании суперсимметричных механик со спонтанным нарушением суперсимметрии.

Третья глава посвящена построению действий суперсимметричных бран, погруженных в плоские пространства. С использованием опыта, полученного в суперсимметричной механике, в ней сформулированы действия мембран в $D = 5,\ 7$ и 3-браны в $D = 6,\ 8$.

В первом разделе третьей главы кратко рассматриваются результаты использования суперполевых методов при построении действия бран, связанные с ними трудности и перспективы их преодоления. Отмечается структура компонентного действия, включающего ковариантизованное бозонное действие и член Весса-Зумино.

Второй раздел посвящен построению действия мембраны в $D = 5$ и доказательству его инвариантности относительно спонтанно нарушенной и ненарушенной суперсимметрий. Сформулирована $N = 4$, $d = 3$ суперaлгебра Пуанкаре с двумя центральными зарядами, постулирован элемент фактор-пространства со структурой, аналогичной таковым в механике, найдены следующие из них законы преобразования и формы Картана. Наложением условий $\Omega_Z = 0$ получены условия неприводимости, выделяющие обобщенный $N = 2$, $d = 3$ киральный мультиплет. Соотношения на массовой поверхности, включающие уравнения движения вспомогательных полей и связь спинорной производной фермионных суперполей и производных Голдстоуновских бозонов по пространственно-временным координатам, следуют из условия $\Omega_S|_{d\theta} = 0$. На практике, для поиска явного вида последней связи оказывается необходимым обратиться к исследованию следствий условий неприводимости с учетом антикоммутаторов ковариантных производных. Также интеграл объема от бозонной формы Ω_P, редуцированной условием $\Omega_Z = 0$, позволяет найти бозонное действие. Оно может быть обобщено до инвариантного относительно нарушенной суперсимметрии заменой производных $\partial_A \to \mathcal{D}_A = (\mathcal{E}^{-1})_A^B \partial_B$ и меры интегрирования $d^3x \to d^3x \det \mathcal{E}$, где необходимая фермионная тетрада $\mathcal{E}_A^B$ может быть найдена в рамках формализма нелинейных реализаций. Также сохраняется возможность добавить интеграл $\int d^3x \det \mathcal{E}$, тривиальный в бозонном пределе. Кроме того, в данной системе существует член Весса-Зумино, содержащий явно ϵ^{ABC}-символ [19]. В данном простейшем случае его вид может быть угадан из размерных соображений и требования баланса индексов. Таким образом, действие оказывается установленным с точностью до двух констант (множителях при $\det \mathcal{E}$ без бозонов и члене Весса-Зумино), которые зафиксированы в ходе доказательства инвариантности действия относительно ненарушенной суперсимметрии:

$$\begin{aligned} S_{D=5} &= \int d^3x \left[2 - \det \mathcal{E} \left(1 + \sqrt{(1 - 2\mathcal{D}^A q \mathcal{D}_A \bar{q})^2 - 4(\mathcal{D}_B q \mathcal{D}^B q)(\mathcal{D}_C \bar{q} \mathcal{D}^C \bar{q})}\right)\right] + \\ &\quad + 2\mathrm{i} \int d^3x \det \mathcal{E} \epsilon^{ABC} \mathcal{D}_A q \mathcal{D}_B \bar{q} \left(\psi_\alpha \mathcal{D}_C \bar{\psi}^\alpha + \bar{\psi}^\alpha \mathcal{D}_C \psi_\alpha\right). \end{aligned}$$

В третьем разделе построены два дуальных действия, включающие абелевы калибровочные поля, которые могут быть получены из известного компонентного действия мембраны в $D = 5$ дуализацией одного и двух скалярных полей. Они соответствуют тензорному и двойному векторному голдстоуновским супермультиплетам $N = 2$, $d = 3$ суперсимметрии [20].

В четвертом разделе построено действие 3-браны в $D = 6$ и доказана его инвариантность относительно обеих суперсимметрий. Это построение во многом повторяет таковое для мембраны в $D = 5$, за исключением способа конструирования члена Весса-Зумино и деталей доказательства инвариантности. Сформулированы $N = 2$, $d = 4$ супералгебра Пуанкаре с двумя центральными зарядами, надлежащий элемент фактор-пространства, законы преобразования и формы Картана. Голдстоуновские поля принадлежат обобщенному $N = 1$, $d = 4$ киральному супермультиплету. Уравнения вспомогательных полей найдены из условия $\Omega_S|_{d\theta} = 0$. Связь спинорных производных фермионных суперполей и производных Голдстоуновских бозонов по координатам x^A вычислена с использованием следствий условий неприводимости и уравнений движения вспомогательных полей. Найдены ковариантизация бозонного действия и дополнительное чисто фермионное слагаемое. Член Весса-Зумино построен с помощью метода [19], использующего замкнутую 5-форму, инвариантную относительно нарушенной суперсиммерии, и ее представление как точной формы. Таким образом, оказывается возможным сформулировать анзац, инвариантный относительно нарушенной суперсимметрии, содержащий две произвольные константы, фиксируемые инвариантностью относительно ненарушенной суперсимметрии:

$$
\begin{aligned}
S_{D=6} \;\; &= \;\; \int d^4x \left[2 - \det \mathcal{E} \left(1 + \sqrt{\left(1 - 2\mathcal{D}^A q \mathcal{D}_A \bar{q}\right)^2 - 4\left(\mathcal{D}^B q \mathcal{D}_B q\right)\left(\mathcal{D}^C \bar{q} \mathcal{D}_C \bar{q}\right)}\right)\right] - \\
&\quad -2 \int d^4x \det \mathcal{E} \epsilon^{ABCD} \mathcal{D}_A q \mathcal{D}_B \bar{q} \left(\psi^\alpha \mathcal{D}_C \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} + \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \mathcal{D}_C \psi^\alpha\right) \left(\mathcal{E}^{-1}\right)_D^{\;F} \left(\sigma_F\right)_{\alpha\dot{\alpha}} .
\end{aligned}
$$

Пятый раздел посвящен построению действия для суперсимметричной мембраны в семимерном пространстве. Для этого сформулированы $N = 8$, $d = 3$ супералгебра Пуанкаре с четырьмя центральными зарядами, элемент фактор-пространства, законы преобразования и формы Картана, найдены бозонное действие, его ковариантизация и член Весса-Зумино. Ковариантные условия неприводимости, следующие из $\Omega_Z = 0$, свидетельствуют, что рассматриваемые бозонные поля принадлежат обобщенному $N = 4$, $d = 3$ гипермультиплету. В отличие от рассмотренных ранее случаев, найти связь вторых компонент фермионных полей и производных бозонов в явном виде, используя условия на фермионные формы и следствия условий неприводимости, оказывается технически очень сложно. Окончательное выражение для них может быть получено из требования инвариантности действия относительно ненарушенной суперсимметрии и удовлетворяет перечисленным ранее условиям. Инвариантное действие имеет структуру, повторяющую структуру суперсимметричных действий мембраны в $D = 5$ и 3-браны в $D = 6$:

$$
\begin{aligned}
S_{D=7} \;\; &= \;\; \int d^3x \left[2 - \det \mathcal{E} \left(1 + \sqrt{\det\left(\delta_A^B - 2\mathcal{D}_A q^{ia} \mathcal{D}^B q_{ia}\right)}\right)\right] - \\
&\quad -2\mathrm{i} \int d^3x \det \mathcal{E} \epsilon^{ABC} \mathcal{D}_A q^{ia} \mathcal{D}_B q_i^b \left(\psi_{a\alpha} \mathcal{D}_C \bar{\psi}_b^\alpha + \bar{\psi}_b^\alpha \mathcal{D}_C \psi_{a\alpha}\right) .
\end{aligned}
$$

В шестом разделе обсуждается построение действия суперсимметричной 3-браны в восьмимерном пространстве. Для этого сформулирована $N = 4$, $d = 4$ супералгебра Пуанкаре с четырьмя центральными зарядами, элемент фактор-пространства, формы Картана. Компоненты, описывающие супербрану, образуют обобщенный $N = 2$, $d = 4$ гипермультиплет. С помощью форм Картана вычислено бозонное действие, осуществлена его ковариантизация относительно нарушенной суперсимметрии, построен член Весса-Зумино. Доказательство инвариантности действия относительно ненарушенной суперсимметрии осуществлено с помощью приема, примененного ранее при рассмотрении мембраны в $D=7$. Действие, инвариантное относительно обеих суперсимметрий, имеет вид

$$\begin{aligned}
S_{D=8} &= \int d^4x \left[2 - \det \mathcal{E}\left(1 + \sqrt{\det\left(\delta_A^B - 2\mathcal{D}_A q^{ia}\mathcal{D}^B q_{ia}\right)}\right)\right] + \\
&+2\int d^4x \det \mathcal{E}\, \epsilon^{ABCD}\Big[\left(\psi_a^\alpha \mathcal{D}_A \bar\psi^{b\dot\alpha} + \bar\psi^{b\dot\alpha}\mathcal{D}_A\psi_a^\alpha\right)\mathcal{D}_B q^{ia}\mathcal{D}_C q_{ib}\left(\sigma_D\right)_{\alpha\dot\alpha} - \\
&-2\mathrm{i}\left(\psi_a^\alpha \mathcal{D}_A \psi_\alpha^b\ \bar\psi^{c\dot\alpha}\mathcal{D}_B\bar\psi_{c\dot\alpha} + \psi^{c\alpha}\mathcal{D}_A\psi_{c\alpha}\ \bar\psi_a^{\dot\alpha}\mathcal{D}_B\bar\psi_{\dot\alpha}^b\right)\mathcal{D}_C q^{ia}\mathcal{D}_D q_{ib}\Big].
\end{aligned}$$

В седьмом разделе приводятся некоторые выводы о возможностях и недостатках компонентного подхода к суперсимметричным действиям протяженных объектов.

В заключении подводятся краткие итоги работы по главам, обсуждаются возможности дальнейших исследований, а также приводятся результаты, выносимые на защиту.

На защиту выдвигаются следующие результаты:

1. Основываясь на идеях работы [14], построены $N=4$ суперсимметричные механики на комплексных проективных пространствах $\mathbb{CP}^n$ в присутствии внешнего $U(n)$ поля, обладающие $SU(n+1)$ инвариантностью. Найденные генераторы соответствующей симметрии коммутируют с суперзарядами. Гамильтониан таких систем может быть представлен как сумма операторов Казимира, построенных из токов $su(n+1)$ и изоспиновых токов.

2. Построена $N=2$ суперсимметричная механика на комплексном проективном пространстве $\mathbb{CP}^3$, допускающая формулировку как механика на сфере $\mathbb{S}^4$ во внешнем $SU(2)$ магнитном поле. Построена суперполевая формулировка этой механики. Также построены суперсимметричные механики на пространствах $\mathbb{CP}^{2k+1}$, которые могут быть сформулированы как механики суперчастиц на кватернионных проективных пространствах $\mathbb{HP}^k$ во внешних $SU(2)$ магнитных полях.

3. Построены механики релятивистских частиц в трехмерном пространстве-времени с $N=4$, $N=8$, $N=16$, а также высшими $4\cdot 2^k,\ k=3,4,\ldots$ суперсимметриями, половина из которых спонтанно нарушена. Доказана инвариантность компонентных действий этих механик относительно обеих суперсимметрий. Построена суперсимметричная механика частицы в $D=5$ с 16 суперсимметриями, из которых 8 спонтанно нарушены. Построены компонентные $N=4$ - суперсимметричные действия с высшими производными для аниона и частицы с жесткостью и найдены их суперполевые формулировки.

4. Разработан метод построения компонентных действий P-бран, непосредственно обобщающий методы, разработанные в суперсимметричной механике. С его помощью построены компонентные действия для мембран в $D = 5, 7$ и 3-бран в $D = 6, 8$. Доказана их инвариантность относительно спонтанно нарушенной и ненарушенной суперсимметрий.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. Bellucci S., Kozyrev N., Krivonos S., Sutulin A., “Symmetries of $N = 4$ supersymmetric $\mathbb{CP}^n$ mechanics”, Journal of Physics A 46, 275305 (2013), 10 pages.
2. Kozyrev N., Krivonos S., Lechenfeld O., “$N = 2$ supersymmetric $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{CP}^3 \to \mathbb{S}^4$ fibration viewed as superparticle mechanics”, Journal of Physics: Conference Series 411, 012019 (2013), 7 pages.
3. Bellucci S., Kozyrev N., Krivonos S., Sutulin A., “Partial breaking of global supersymmetry and superparticle actions”, Journal of High Energy Physics 1401, 154 (2014), 16 pages.
4. Kozyrev N., Krivonos S., Lechenfeld O., Nersessian A., “Higher derivative $N = 4$ superparticle in three-dimensional space-time”, Physical Review D 89, 045013 (2014), 11 pages.
5. Bellucci S., Kozyrev N., Krivonos S., Yeranyan A., “Supermembrane in $D = 5$: component action”, Journal of High Energy Physics 1405, 142 (2014), 18 pages.
6. Bellucci S., Kozyrev N., Krivonos S., Sutulin A., “Component on-shell actions for supersymmetric 3-brane I. 3-brane in $D = 6$”, Classical and Quantum Gravity 32, 035025 (2015), 14 pages.
7. Bellucci S., Kozyrev N., Krivonos S., Sutulin A., “Component on-shell actions for supersymmetric 3-branes II. 3-brane in $D = 8$”, arXiv:1411.7550 [hep-th] (2015), 16 pages.

Список литературы

[1] Gorbunov I.V., Kuzenko S.M., Lyakhovich S.L. “$N = 1$, $D = 3$ Superanyons, $osp(2|2)$ and the Deformed Heisenberg Algebra”, Phys.Rev. **D56**, 3744-3755 (1997), arXiv:hep-th/9702017.

[2] Генденштейн Л.Э., Криве И.В. “Суперсимметрия в квантовой механике”, УФН **146**, 553-590 (1985).

[3] Zhang S.C., Hu J.P., Science **294**, 823 (2001).

[4] Karabali D., Nair V.P., “Quantum Hall Effect in higher dimensions”, Nucl. Phys. **B641**, 533-546 (2002).

[5] Bagger J., Galperin A., "Matter couplings in partially broken extended supersymmetry", Phys.Lett. **B336**, 25 (1994), arXiv:hep-th/9406217.

[6] Bagger J., Galperin A., "A New Goldstone multiplet for partially broken supersymmetry", Phys.Rev. **D55**, 1091 (1997), arXiv:hep-th/9608177.

[7] Bagger J., Galperin A., "The Tensor Goldstone multiplet for partially broken supersymmetry", Phys.Lett. **B412**, 296 (1997), arXiv:hep-th/9707061.

[8] Roček M., Tseytlin A.A., "Partial breaking of global $D = 4$ supersymmetry, constrained superfields, and 3-brane actions", Phys.Rev. **D59**, 106001 (1999), arXiv:hep-th/9811232.

[9] Ivanov E., Krivonos S., "$N = 1, D = 4$ supermembrane in the coset approach", Phys.Lett. **B453**, 237-244 (1999), arXiv:hep-th/9901003.

[10] Volkov D. and Akulov V., "Possible Universal Neutrino Interaction", JETP Lett. **16**, 438-440 (1972)
"Is the neutrino Goldstone particle?", Phys. Lett. **B46**, 109 (1973).

[11] Pavsic M., "Classical Motion of Membranes, Strings and Point Particles With Extrinsic Curvature", Phys.Lett. **205B**, 231 (1988),
"The Quantization of a Point Particle With Extrinsic Curvature Leads to the Dirac Equation", Phys.Lett. **221B**, 264 (1989).

[12] Nersessian A., "The Hamiltonian formalism for the generalized rigid particles", Theor.Math.Phys. **117**, 1214 (1998), arXiv:hep-th/9805009.

[13] Macfarlane A.J., "The $SU(N+1)$ σ-model of CP^N model as a non-linear realisation of $SU(N+1)$ symmetry", Nucl. Phys. **B152**, 145 (1979).

[14] Bellucci S., Krivonos S., Sutulin A., "CP^n supersymmetric mechanics in $U(n)$ background gauge fields", Phys. Rev **D84**, 065033 (2011), arXiv:1106.2435 [hep-th].

[15] Bellucci S., Casteill P.Y., Nersessian A., "Four-dimensional Hall mechanics as a particle on CP^3", Phys. Lett. **B574**, 121 (2003), arXiv:hep-th/0306277.

[16] Bellucci S., Beylin A., Krivonos S., Nersessian A., "$N = 4$ supersymmetric mechanics with nonlinear chiral supermultiplet", Phys.Lett. **B616**, 228-232 (2005), arXiv:hep-th/0503244.

[17] Ivanov E.A., Ogievetsky V.I., "Inverse Higgs Phenomenon in Nonlinear Realisations", Teor. Mat. Fiz. **25**, 164 (1975).

[18] Bellucci S., Ivanov E., Krivonos S., "Partial breaking of $N = 1, D = 10$ supersymmetry", Phys. Lett. **B460**, 348-358 (1999), arXiv:hep-th/9811244.

[19] Henneaux M., Mezincescu L., "A Sigma Model Interpretation of Green-Schwarz Covariant Superstring Action", Phys. Lett. **B152**, 340 (1985).

[20] Ivanov E., Krivonos S., Lechtenfeld O., “Double-vector multiplet and partially broken $N = 4, d = 3$ supersymmetry”, Phys.Lett. **B487**, 192-200 (2000), arXiv:hep-th/0006017.