

На правах рукописи

Петросян Давид Рафаелович

**ВЫРОЖДЕННЫЕ СУПЕРИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ
НА ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ
ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ**

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Дубна — 2016

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
Погосян Георгий Самвелович

Официальные оппоненты: **Рыбаков Юрий Петрович**
доктор физико-математических наук,
профессор, Российский университет
дружбы народов, кафедра теоретической
физики и механики

Громов Николай Алексеевич
доктор физико-математических наук,
профессор, Коми научный центр
уральского отделения РАН,
отдел математики

Ведущая организация: Национальный исследовательский центр
"Курчатовский институт", Федеральное
государственное бюджетное учреждение
Государственный научный центр РФ
Институт физики высоких энергий

Защита состоится _____ г. в _____ часов на диссертационном совете Д 720.001.01 при Объединенном институте ядерных исследований (Лаборатория теоретической физики) по адресу: 141980, г. Дубна, Московской области, ул. Жолио-Кюри, д. 6.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте Объединенного института ядерных исследований (http://wwwinfo.jinr.ru/announce_disser.htm).

Автореферат разослан _____ года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 720.001.01
д.ф.-м.н.

Арбузов Андрей Борисович

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Термин суперинтегрируемые системы впервые введен Войцеховским в работе [1] при решении так называемой задачи с потенциалом Калоджеро-Мозера. Он обозначает, что данные системы могут решены несколькими альтернативными способами. В более строгом определении суперинтегрируемые системы - это специальный подкласс интегрируемых гамильтоновых систем обладающих полным возможным набором операторов симметрии или интегралов движения. Другими словами, N -мерная интегрируемая система называется суперинтегрируемой, если в дополнении к N функционально независимым и хорошо определенным (не имеющим особенностей, точек ветвления и др.) в фазовом пространстве, интегралам движения, находящимся в инволюции с гамильтонианом системы в классической механике или линейно независимых операторов, коммутирующих с гамильтонианом в квантовой механике, существует дополнительно $(N - 1)$ таких же интегралов движения, но не обязательно коммутирующих между собой. Среди суперинтегрируемых систем особо выделяются системы второго рода, когда интегралы движения являются полиномами не выше второго порядка от импульсов системы.

К наиболее известным, частным или вырожденным (когда потенциал системы зависит только от одной константы связи) суперинтегрируемым системам относятся изотропный гармонический осциллятор, движение в поле Кеплера - Кулона и движение в поле анизотропного осциллятора с рациональным отношением частот. Еще Лапласу была известна [2], добавочная к вектору углового момента, векторная сохраняющаяся величина, лежащая в плоскости орбиты и направленная по большой оси эллипса. В дальнейшем она была переоткрыта Рунге [3], а чуть позже введена в квантовую механику Ленцем [4]. Дополнительный интеграл движения для изотропного осциллятора, так называемый тензор Демкова, впервые был найден в работе [5]. Вопросы симметрии анизотропного осциллятора рассматривался в статьях Демкова [6] и Илькаевой в [7].

Наличие $(2N - 1)$ интегралов движения приводит ко многим специфическим свойствам отличающих суперинтегрируемые системы от просто интегрируемых. Особое место занимает теорема Бертрана [8], согласно которой, из всех центрально - симметрических полей лишь в кулонов-

ком и осцилляторных полях все конечные траектории движения замкнуты. В квантовой механике этому явлению соответствует полное вырождение уровней энергии дискретного спектра по орбитальному и азимутальному квантовым числам. В последствии такое вырождение называли случайным. Объяснение явления случайного вырождения привело к понятию скрытой или динамической симметрии таких систем. Фоком [9] было показано, что за вырождение дискретного спектра атома водорода ответственна ортогональная группа $SO(4)$, а непрерывного спектра группа Лоренца $SO(3, 1)$. Для N - мерного гармонического осциллятора в качестве группы динамической симметрии, как показано в работах [10, 11], выступает унитарная группа $U(N)$.

Другой важной особенностью кулоновской и осцилляторной задач как в классической так и квантовой механике выступает феномен разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби и Шредингера в нескольких ортогональных системах координат. Полная классификация всех ортогональных систем координат допускающих разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби и или Шредингера для различных пространств постоянной кривизны представляет собой сложную задачу дифференциальной геометрии. Сегодня известны ответы только для некоторых пространств низкой размерности: двух и трехмерного евклидова пространства E_2 и E_3 [12], двух- и трехмерной сферы $S_2 \sim SO(3)/SO(2)$ и $S_3 \sim SO(4)/SO(3)$ [13], двух- и трехмерном гиперboloиде (пространства Лобачевского) $H_2 \sim SO(2, 1)/SO(2)$ и $H_3 \sim SO(3, 1)/SO(3)$ [13], двух- и трехмерный однополостный гиперboloид (мнимое пространства Лобачевского) $H_1^1 \sim SO(2, 1)/SO(1, 1)$ [14] и $H_2^1 \sim SO(3, 1)/SO(2, 1)$ [15], трехмерное гиперболическое пространство $H_2^2 \sim SO(2, 2)/SO(2, 1)$ [16].

Задача о движение классической частицы в поле тяготения и заряженной частицы в кулоновском поле на пространствах постоянной положительной и отрицательной кривизны, как и в евклидовом пространстве, имеет богатую историю. Введение гиперболической геометрии в закон всемирного тяготения можно найти уже в работах Лобачевского (Сборник научных трудов, том 2, Москва 1949), который определил как сам вид кеплеровского потенциала в виде гиперболического котангенса, так и нашел траекторию классического движения.

Квантовые суперинтегрируемые системы в пространствах постоянной положительной и отрицательной кривизны становятся предметом

исследования начиная с работы Э. Шредингера [17], в которой он используя метод факторизации для уравнения Шредингера, впервые решил задачу об “атоме водорода” на трехмерной сфере (замкнутая модель вселенной). В том же году Стивенсон [18] используя довольно оригинальный метод квантования уравнения Шредингера нашел ненормированные волновые функции атома водорода на трехмерной сфере. Аналогичная задача в трехмерном пространстве Лобачевского впервые была решена Инфельдом и Шилдом [19]. В дальнейшем суперинтегрируемые системы на пространствах постоянной кривизны становятся объектом многочисленных исследований, связанное как с той ролью которую играет геометрия в современной физике, так как и нетривиальной симметрией данных систем. В частности двухмерный и трехмерный однополостный гиперболоиды (мнимое пространство Лобачевского) как и гиперболоид с группой изометрии $SO(2, 2)$ являются моделями для релятивистского пространства времени постоянной кривизны, а именно пространство де Ситтера и анти де Ситтера, которое является отправной точкой определяющей их широкое применение в теории поля [20, 21], квантовой гравитации и космологии [22, 23, 24], при решении уравнения Янга-Милса-Хиггса [25, 26]. Отметим также, что квантовомеханические модели, основанные на геометрии пространств постоянной кривизны, используют для описания связанных состояний в физике элементарных частиц, в частности в релятивистских моделях, подробно изученных в работах Кадышевского, Мир-Касимова и Скачкова [27, 28, 29], в атомной и ядерной физике [30, 31, 32, 33]. На основе их предпринимаются попытки дать объяснение проблеме конфайнмента кварков

Вопрос который не был отражен должным образом в литературе связан с исследованием как классических так квантовых суперинтегрируемых систем в двух важных пространствах отрицательной кривизны, а именно, в мнимом пространстве Лобачевского и $SO(2, 2)$ гиперболоиде. Решению этих задач и посвящена настоящая диссертация.

Цель диссертации Основной задачей диссертации является изучение двух наиболее интересных вырожденных суперинтегрируемых систем: гармонического осциллятора и системы Кеплера-Кулона на трехмерных пространствах отрицательной кривизны (гиперболических пространствах). Нас будут интересовать как классические, так и квантовые свойства данных систем. В частности в классическом случае нас интересуют дополнительные интегралы движения, классическая алгебра сим-

метрии и траектории движения. В квантовом же случае нас интересует Шредингеровская задача на собственные значения и собственные функции а также вычисление коэффициентов межбазисных разложений между волновыми функциями соответствующих разделению переменных в различных системах координат.

Научная новизна

- Впервые, с точки зрения классической механики, исследована задача об гармоническом осцилляторе и задача Кеплера-Кулона на гиперболоиде $SO(2, 2)$, с построением и решением уравнения Гамильтона-Якоби.
- Впервые Шредингеровская задача на собственные значения и собственные функции решена для потенциала гармонического осциллятора и Кеплера-Кулона на $SO(2, 2)$. Построены межбазисные разложения разложения для волновых функций гармонического осциллятора в различных системах координат.
- Впервые построена полная система функций для задачи Кеплера-Кулона на однополостном гиперболоиде как в классическом так и в квантовом случае. Найдена альтернативная система координат и построены межбазисные разложения.
- Впервые решена задача о смешанных межбазисных разложениях для задачи гармонического осциллятора на двух полостном гиперболоиде для подгрупповых систем координат.

Основные результаты

Сжато формулируем основные результаты диссертационной работы.

- Определена классическая задача о гармоническом осцилляторе и движении в кеплеровском поле на $SO(2, 2)$ гиперболоиде. Построены дополнительные интегралы движения: аналог тензора Демкова для гармонического осциллятора и вектор Рунге-Ленца-Лапласа для движения в кулоновском поле. Построена классическая алгебра симметрии.
- В рамках уравнения Гамильтона-Якоби построены классические траектории движения для разных значений Лоренцевского момента L^2 и энергии E . Найдены условия при которых все конечные орбиты замкнуты.

- Показано что при движении в кеплеровском поле на $SO(2, 2)$ имеют место все три закона Кеплера.
- Вычислены ортонормированные собственные функции дискретного и непрерывного спектров и собственные значения уравнения Шредингера для потенциалов гармонического осциллятора и Кеплера-Кулона на $SO(2, 2)$ гиперboloиде при положительных значениях Лоренцевского момента $L^2 > 0$. Показано, что существует конечное число уровней энергии вырожденных по угловому квантовому числу и бесконечно-кратно по азимутальному квантовому числу.
- Найдены решения уравнения Шредингера для гармонического осциллятора в цилиндрической и эквидистантной системах координат, вычислен спектр энергии. Построены коэффициенты разложения для переходов между цилиндрическим и эквидистантными базисами в дискретном спектре.
- Сформулирована классическая задача Кеплера на однополостном гиперboloиде $SO(3, 1)$ и построен аналог вектора Рунге-Ленца-Лапласа. Построены траектории движения для разных значений момента L^2 и энергии E . Показано, что все конечные траектории замкнуты.
- Решена задача о разложении произвольной функции на однополостном гиперboloиде $SO(3, 1)$ по полной системе псевдо-сферических кулоновских волновых функций. Вычислены коэффициенты межбазисных разложений для переходов между псевдо-сферическими и эллиптико-параболическими волновыми функциями.
- Решена задача о смешанных межбазисных разложениях для гармонического осциллятора на двухполостном гиперboloиде $SO(3, 1)$. Показано что соответствующие коэффициенты разложений выражаются через полиномы Вильсона.

Практическая значимость

Результаты диссертационной работы могут быть использованы:

1. для расширения известных (модель МИК-Кеплера, Калоджеро-Мозера, цепочка Тоды и др.) и поиска новых интегрируемых и суперинтегрируемых систем на мнимом пространстве Лобачевского и пространстве анти де Ситтера;

2. для построения новых тождественных преобразований в теории специальных функций;
3. при описании различных физических процессов основанных на геометрии пространств отрицательной кривизны, таких как рассеяние в кулоновском поле, туннельные переходы, поведение “атома водорода” и гармонического осциллятора во внешних полях;

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на семинарах Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова на конференциях “SIMPHYS XIV 2010”, “Armenia-Dubna workshop 2012,2013”, “SYMPHYS-XVI 2014”, “Group 30 2014”, “QTS 9 2015”.

Публикации

По материалам диссертации опубликовано 6 работ, 4 работы опубликованных [A1 – A4] еще 2 статьи принятые к печати [A5 – A6] в журналах из перечня рецензируемых изданий, рекомендованных ВАК.

Личный вклад

В диссертации представлены результаты, полученные при определяющем участии соискателя.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и списка цитируемой литературы, содержащего 125 наименований и имеет объем 119 страниц.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится краткий обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи решенные в диссертационной работе.

В первой главе изучается геодезическое движение на гиперболоиде $H_2^2 : z_0^2 + z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 = R^2$. В разделе 1.1 приведено определение псевдосферической системы координат, в которой Гамильтониан свободного движения на H_2^2 запишется как

$$\mathcal{H}_{free} = \frac{1}{2R^2} \left\{ p_r^2 - \frac{1}{\sinh^2 r} \left(p_\tau^2 - \frac{p_\varphi^2}{\cosh^2 \tau} \right) \right\}. \quad (1)$$

Далее задана алгебра $so(2, 2)$, и даны формулы Пуассоновых коммутационных соотношений ее генераторов $\mathcal{L}_i, \mathcal{N}_j, i, j = 1, 2, 3$. Определен Лоренцевский угловой момент

$$L^2 = \mathcal{L}_1^2 - \mathcal{L}_2^2 - \mathcal{L}_3^2 = - \left(p_\tau^2 - \frac{p_\varphi^2}{\cosh^2 \tau} \right), \quad (2)$$

который в отличии от движения в Евклидовом пространстве (или сфере и двухполостном гиперboloиде), может принимать не только положительные и нулевые, а также отрицательные значения.

В разделе 1.2 определен потенциал гармонического осциллятора на H_2^2

$$V^{osc} = \frac{\omega^2 R^2}{2} \left(\frac{z_2^2 + z_3^2 - z_1^2}{z_0^2} \right) = \begin{cases} \frac{\omega^2 R^2}{2} \tanh^2 r, & |z_0| \geq R \\ -\frac{\omega^2 R^2}{2} \tan^2 \chi, & |z_0| \leq R. \end{cases} \quad (3)$$

а так же выписаны дополнительные интегралы движения, аналог так называемого тензора Демкова-Фрадкина

$$\mathcal{D}_{ik} = \frac{1}{R^2} N_i N_k + \omega^2 R^2 \frac{z_i z_k}{z_0^2}, \quad \mathcal{D}_{ik} = \mathcal{D}_{ki} \quad i, k = 1, 2, 3.$$

(коммутационные соотношения компонентов тензора Демкова-Фрадкина и компонентов момента импульса приведены в приложении). Раздел 1.3 полностью посвящен решению уравнения Гамильтона-Якоби

$$H = \frac{1}{2R^2} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{\sinh^2 r} \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{\sinh^2 r \cosh^2 \tau} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} + \frac{\omega^2 R^2}{2} \tanh^2 r = E$$

для различных значений энергии E и квадрата момента импульс L^2 . Решение в уравнении Гамильтона-Якоби найдено в рамках аддитивного метода разделения переменных. Используя полученные результаты, в разделе 1.4 показано, что для $L^2 > 0$ при соответствующем выборе параметров движение происходит на двумерном двухполостном гиперboloиде $z_0^2 - z_2^2 - z_3^2 = R^2$, и уравнение движения дается формулой

$$\tanh^2 r = \frac{p}{1 + \varepsilon(R) \cos 2\varphi}, \quad (4)$$

где использованы обозначения

$$p = \left(\frac{ER^2}{L^2} + \frac{1}{2} \right)^{-1} > 0, \quad \varepsilon(R) = \sqrt{1 - \frac{4\omega^2 R^4 L^2}{(2ER^2 + L^2)^2}}, \quad (5)$$

Далее построены траектории для разных значений E и L^2

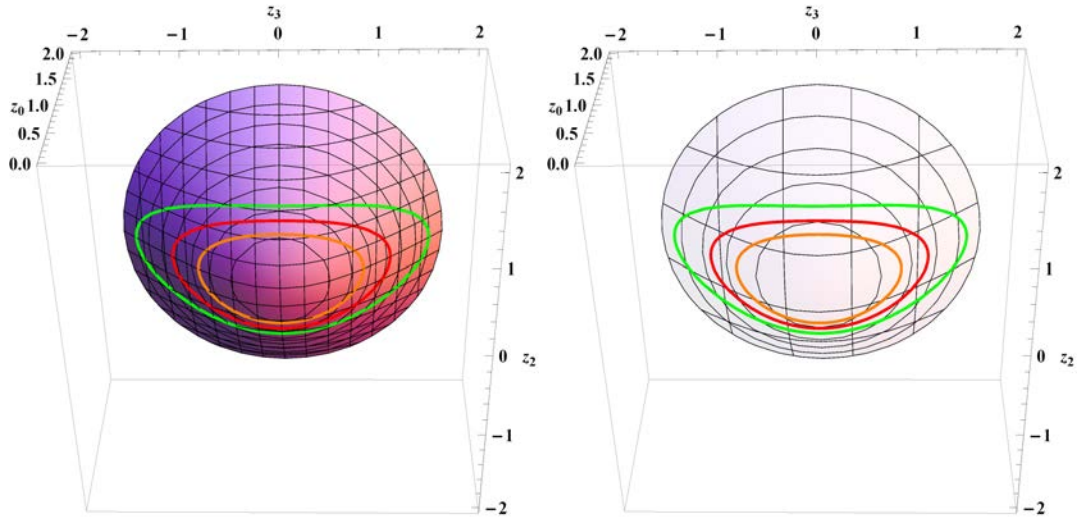


Рис. 1: Эллиптические траектории на верхнем листе двухполостного гиперboloида $z_0^2 - z_2^2 - z_3^2 = R^2$ для значений $\varepsilon = 0.3$ and $p = 0.3, 0.4, 0.5$.

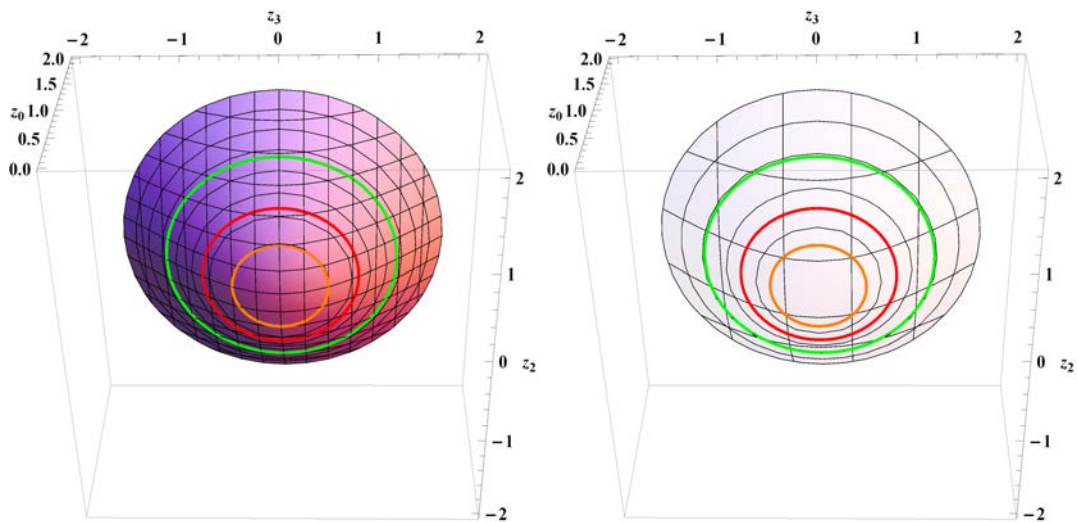


Рис. 2: Круговые траектории для $\varepsilon = 0$ и $p = 0.2, 0.4, 0.6$.

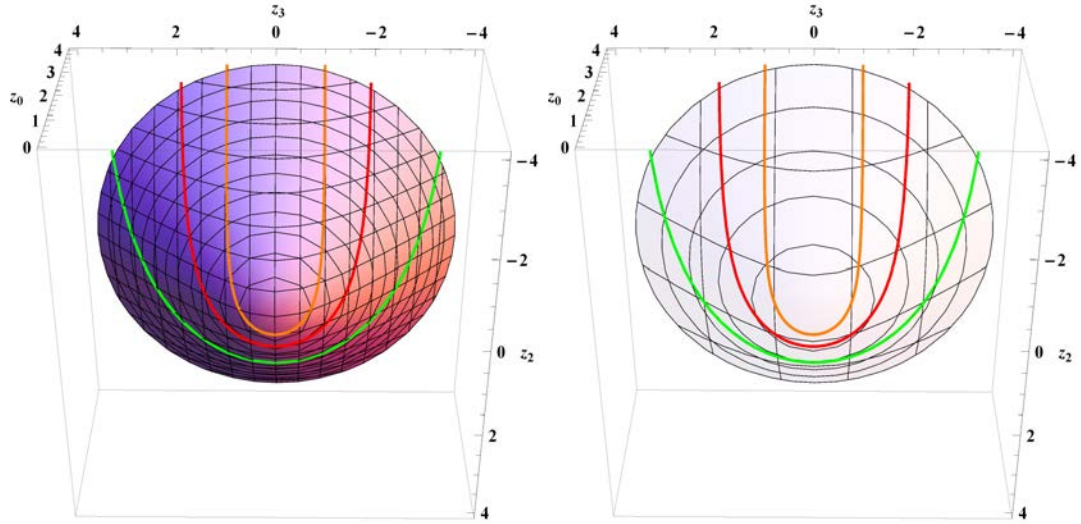


Рис. 3: Эквидистантные траектории на верхнем листе двухполостного гиперboloида $z_0^2 - z_2^2 - z_3^2 = R^2$ для значений пар $(p, \epsilon) = (1/3, 2/3); (2/3, 1/3); (8/9, 1/9)$.

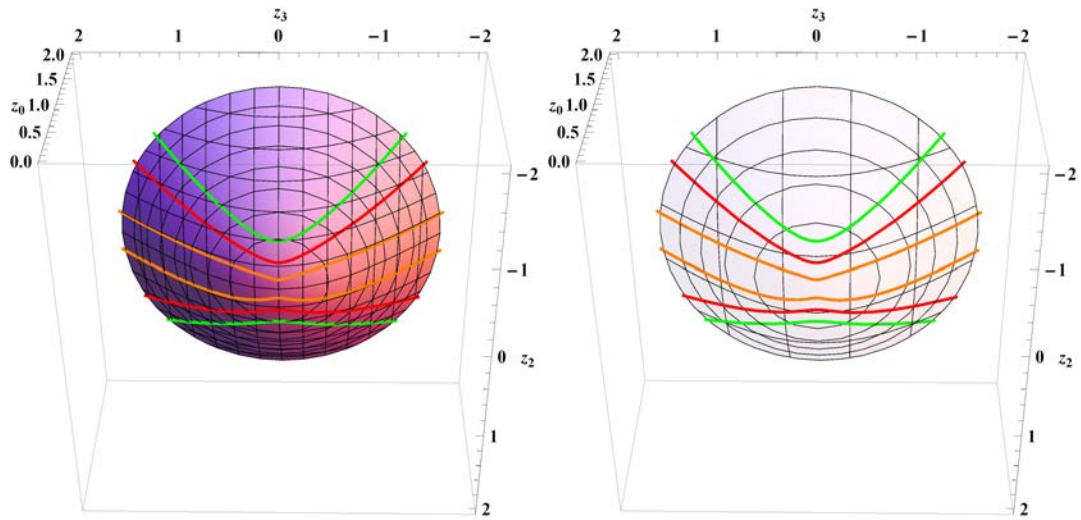


Рис. 4: Ультраэллиптические траектории на верхнем листе двухполостного гиперboloида $z_0^2 - z_2^2 - z_3^2 = R^2$ для значений $\epsilon = 0.8$ and $p = 0.2, 0.5, 0.8$.

В разделе 1.5 рассмотрены траектории движения для случаев $L^2 < 0$ и $L^2 = 0$, которые лежат на однополостном гиперboloида $z_0^2 + z_1^2 - z_2^2 = R^2$ и на гиперболическом цилиндре $z_0^2 - z_2^2 = R^2$, $z_1^2 = z_3^2$, $z_0 \geq R$ соответственно.

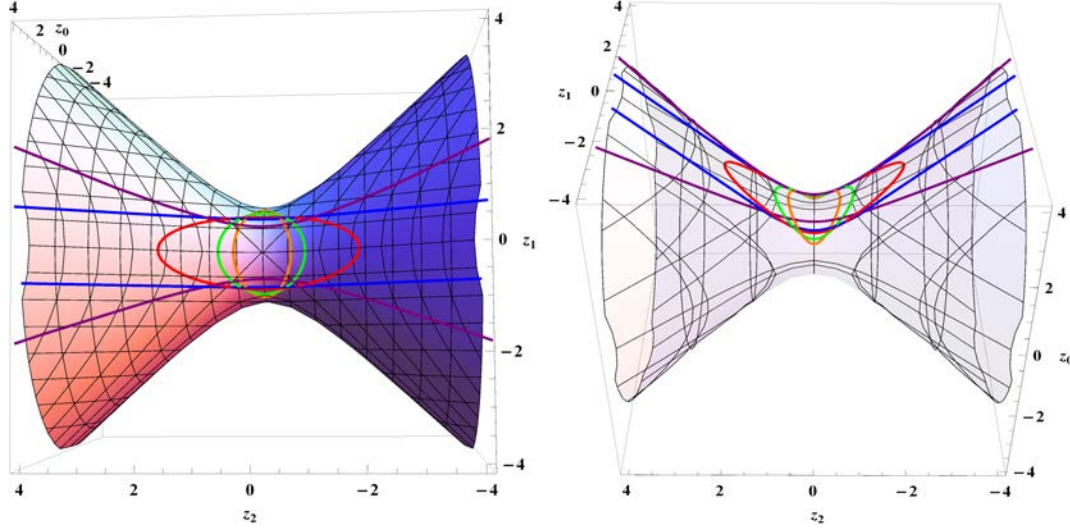


Рис. 5: Траектории для случая $L^2 = -1$; $E = -3/2, -1/2, 1/4, 1/2, 3/2$ ($\omega = R = 1$)

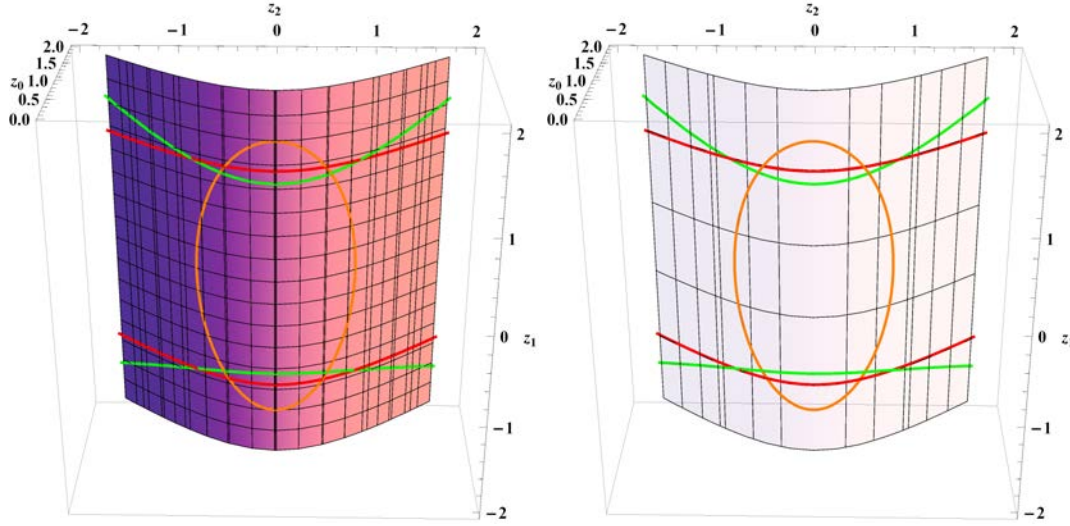


Рис. 6: Траектории для случая $A = 0$ на гиперболическом цилиндре $z_0^2 - z_2^2 = R^2$, $z_1^2 = z_3^2$, and $z_0 \geq R$. для значений $E = 0.2, 0.5, 0.8$ ($\omega = R = p_\varphi = 1$)

В разделе 1.6 изучена классическая задача Кеплера-Кулона на $SO(2, 2)$ гиперboloиде. Определен Кеплеровский потенциал

$$V^{KC}(r) = -\frac{\mu}{R} \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 - R^2}} = \begin{cases} -\frac{\mu}{R} \coth r, & |z_0| \geq R \\ -\frac{\mu}{R} \cot \chi, & |z_0| \leq R. \end{cases} \quad (6)$$

и дополнительный интеграл движения, аналог вектора Рунге-Ленца:

$$\vec{A} = -\frac{1}{2R} \left([\vec{N} \times \vec{L}] - [\vec{L} \times \vec{N}] \right) - \mu \frac{\vec{x}}{|x|}, \quad [A_i, H] = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

На основе всех интегралов движения построена алгебра симметрии, которая носит нелинейный характер и совпадает с квадратичной алгеброй Хиггса. Далее в разделе 1.7 для данной системы решено уравнение Гамильтона-Якоби

$$H = \frac{1}{2R^2} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{\sinh^2 r} \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{\sinh^2 r \cosh^2 \tau} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} - \frac{\mu}{R} \coth r = E$$

Как и в случае гармонического осциллятора уравнение решается путем разделения переменных. Полученные результаты использованы в разделе 1.8 для получения уравнения движения на двухполостном гиперboloиде $z_0^2 - z_2^2 - z_3^2 = R^2$

$$\frac{1}{\coth r - 1} = \frac{p}{1 + \varepsilon(R) \cos \varphi} \quad (7)$$

где приняты следующие обозначения

$$p = \left(\frac{\mu R}{L^2} - 1 \right)^{-1} > 0, \quad \varepsilon(R) = \sqrt{1 + \frac{2L^2(R^2 E + \mu R)}{(\mu R - L^2)^2}} \quad (8)$$

На основе последней формулы построены траектории движения для разных значений E и L^2

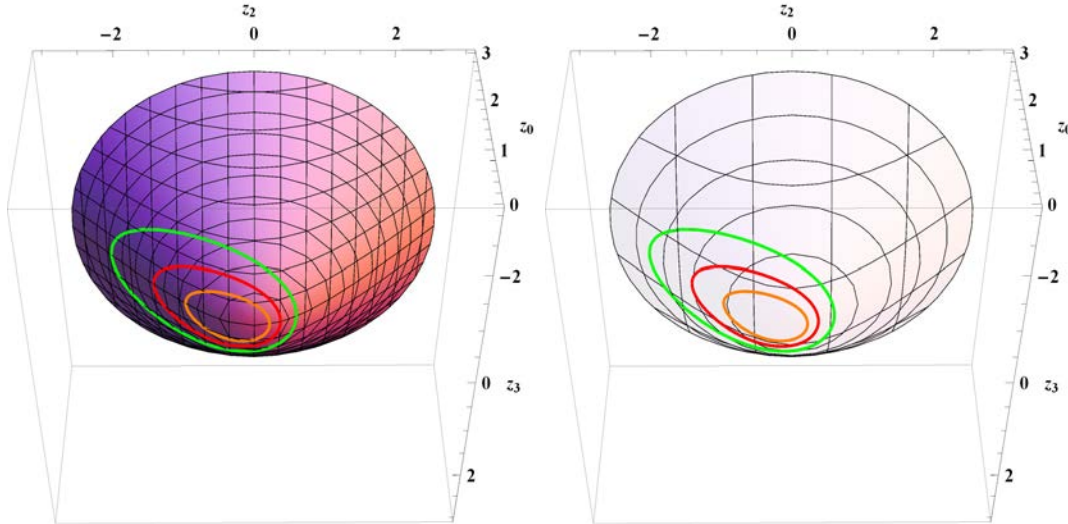


Рис. 7: Траектория для $p = 0.5, 1, 2$, $\epsilon = 0.8$

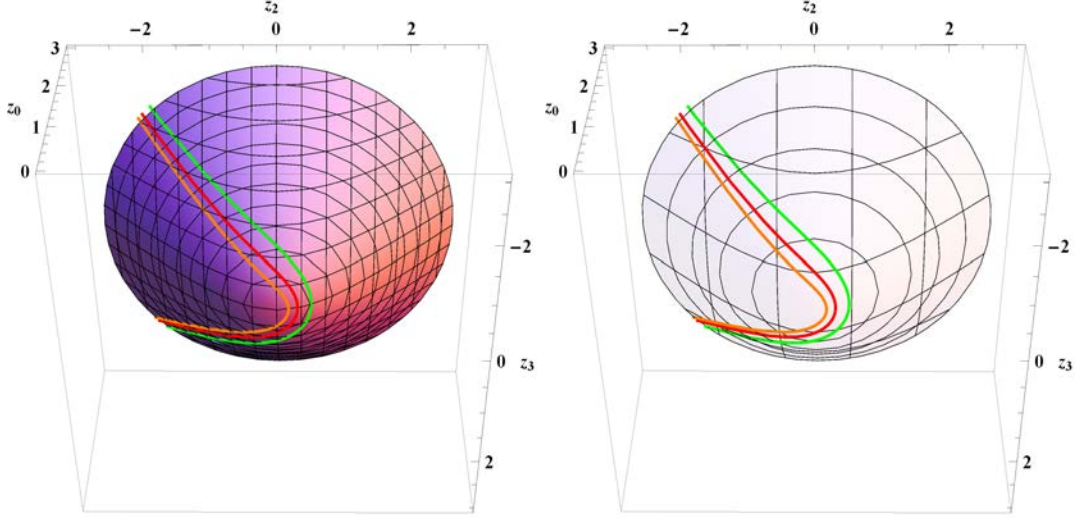


Рис. 8: Траектории для $p = 0.5, 1, 2$, $\epsilon = 1.3$

Показано, что для кеплеровского движения на $SO(2, 2)$ гиперboloиде выполняются все три закона Кеплера.

Во второй главе рассмотрены задача об гармоническом осцилляторе и проблема Кеплера-Кулона на $SO(2, 2)$ но уже в контексте квантовой механики. Так в разделе 2.1 представлены общие формулы связанные с пространством $SO(2, 2)$, квантовые аналоги многих формул представленных ранее в разделе 1.1. В разделе 2.2 приведены уравнения Шредингера для обеих систем

$$\frac{1}{\sinh^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \sinh^2 r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \left[2R^2 E - \frac{\hat{L}^2}{\sinh^2 r} - \omega^2 R^4 \tanh^2 r \right] \Psi = 0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\sinh^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \sinh^2 r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \left[2R^2 E - \frac{\hat{L}^2}{\sinh^2 r} + \frac{\mu}{R} (\coth r - 1) \right] \Psi = 0, \quad (10)$$

и представлен общий вид анзаца волновой функции $\Psi(r, \tau, \varphi) = \mathcal{R}(r)\mathcal{Y}(\tau, \varphi)$ где функция $\mathcal{Y}(\tau, \varphi)$ является собственной функцией операторов

$$\mathbf{L}^2 \mathcal{Y}_\ell^m = \ell(\ell + 1) \mathcal{Y}_\ell^m \quad L_1^2 \mathcal{Y}_\ell^m = m^2 \mathcal{Y}_\ell^m \quad (11)$$

которое описывает квантовое геодезическое движение на двухмерном однополостном гиперboloиде. Спектр ℓ , согласно неприводимому представлению группы $SO(2, 1)$, разделяется на следующие случаи ¹: положительная дискретная серия - ℓ целое и $m = \ell + 1, \ell + 2, \dots$, отрицательная

¹Мы не учитываем дополнительную непрерывную серию где $-1/2 < \ell < 0$ и $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

дискретная серия - ℓ целое и $m = -(\ell + 1), -(\ell + 2), \dots$ и основная непрерывная серия - $\ell = -1/2 + i\rho$ and $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В первом случае собственные значения оператора \hat{L}^2 положительны а во втором отрицательны.

Раздел 2.3 посвящен решению задачи Шредингера для гармонического осциллятора. Решение приведено для трех координатных систем, псевдо сферического, цилиндрического и эквидистантного. Для каждой из этих систем координат построены ортонормированные волновые функции для дискретного спектра и найден спектр энергии

$$E = -\frac{(N+1)(N+3)}{2R^2} + \frac{\nu+1/2}{R^2} \left(N + \frac{3}{2}\right) \quad N < \nu - 3/2 \quad (12)$$

В случае разделения переменных в псевдо-сферической системе координат приведены также волновые функции для непрерывные спектра. В разделе 2.4 вычислены коэффициенты межбазисных разложений эквидистантных волновых функций по цилиндрическим волновым функциям для дискретного спектра. Показано, что соответствующие коэффициенты разложения выражаются через полиномы дискретной переменной Хана. В конце главы в разделе 2.5 приведено решение уравнения Шредингера для системы Кеплера-Кулона в псевдо-сферических координатах. Рассчитаны ортонормированные волновые функции, как для дискретного спектра энергии

$$E_N = -\frac{N^2 - 1}{2R^2} - \frac{\mu^2}{2N^2} + \frac{\mu}{R}, \quad \lambda = N + \sigma - 1/2$$

где $\sigma = R\mu/N$, $N = (n_r + \ell + 1) = 1, 2, \dots, N_{max} < \sqrt{R\mu}$, а также и для непрерывного спектра.

В третьей главе в начале рассматривается система Кеплера-Кулона на однополостном гиперболоиде $H_1^3 : -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$. В начале главы в разделе 3.1 определяются псевдо-сферические координаты, приводятся вид свободного гамильтониана на H_1^3 , и записываются генераторы группы $so(3, 1)$ вместе с соответствующими коммутационными соотношениями. В разделе 3.2 изучается классический случай задачи, определением потенциала Кеплера-Кулона на H_1^3

$$V = -\frac{\alpha}{R} \frac{x_0}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{\alpha}{R} \tanh \tau$$

и решением соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби

$$H = \frac{1}{2R^2} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{1}{\cosh^2 \tau} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{\cosh^2 \tau \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 \right\} - \frac{\alpha}{R} \tanh \tau = E.$$

В результате показано, что движение происходит на однополостном гиперболоиде $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = -R^2$ и уравнение движения имеет вид

$$\frac{1}{1 - \tanh \tau} = \frac{p}{1 + \varepsilon(R) \cos \varphi}, \quad (13)$$

где

$$p = \left(1 - \frac{\alpha R}{L^2} \right)^{-1} > 0, \quad \varepsilon(R) = \sqrt{1 + \frac{2\alpha R}{L^2} \frac{(1 + RE/\alpha)}{(1 - \alpha R/L^2)^2}}, \quad (14)$$

Используя данное уравнение построены траектории для разных значений энергии E и импульс момента L^2 .

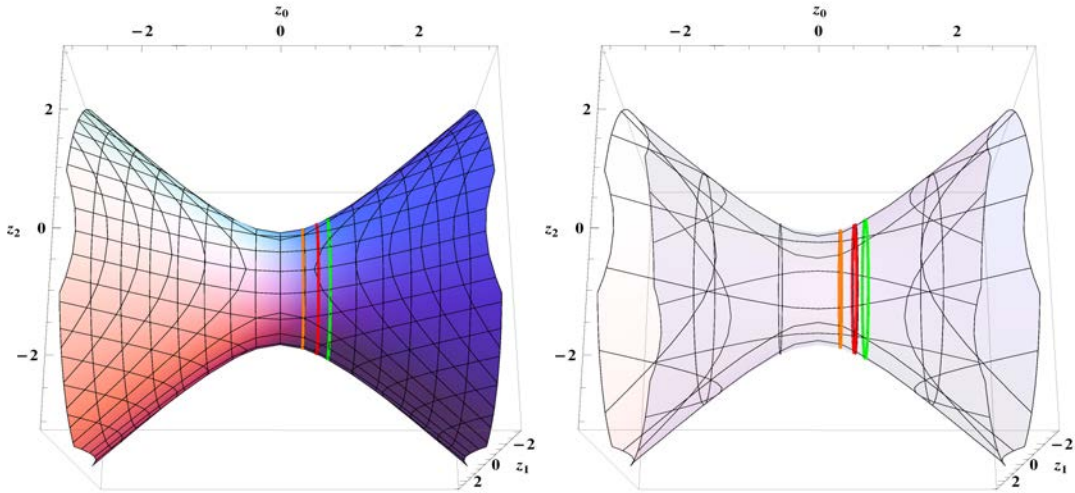


Рис. 9: Траектории движения для $\epsilon = 0$ и $p = 1.5, 2, 2.5$

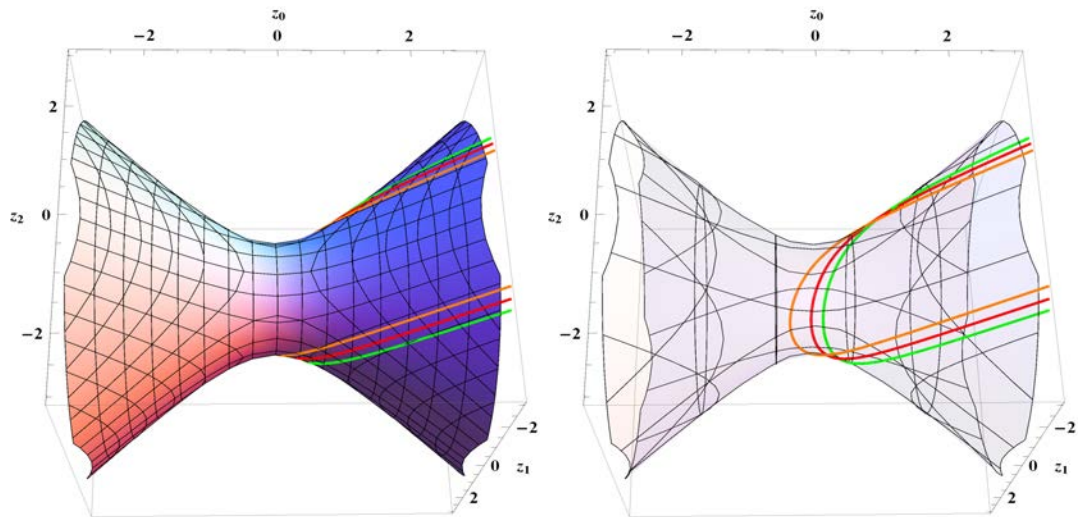


Рис. 10: Траектория движения для $\epsilon = 1$ и $p = 1.5, 2, 2.5$

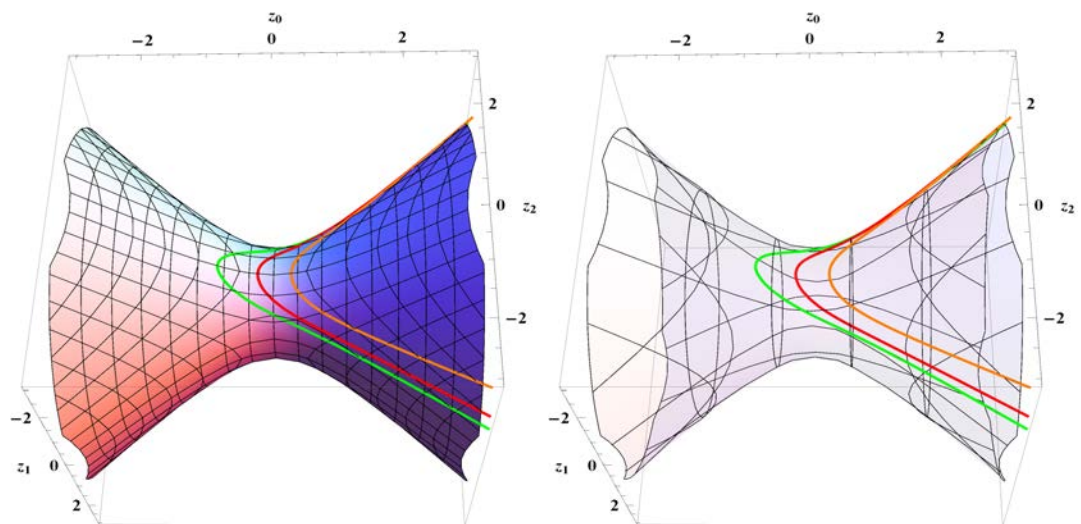


Рис. 11: Траектория движения для $L^2 = 1/2$ и $E = -1/2, 0, 1/2$ ($\alpha = R = 1$)

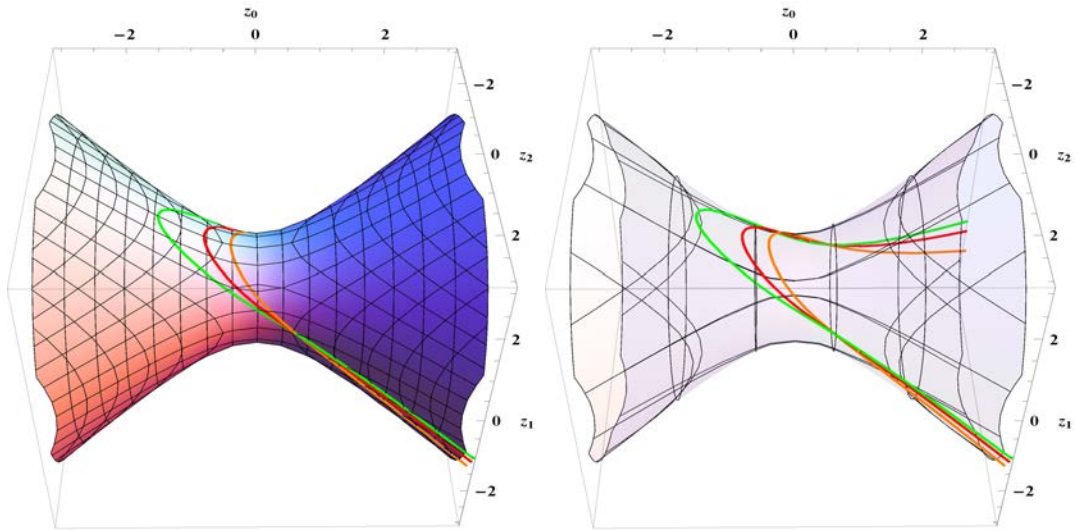


Рис. 12: Траектория движения для $L^2 = 2$ и $E = -1/2, 0, 1/2$ ($\alpha = R = 1$)

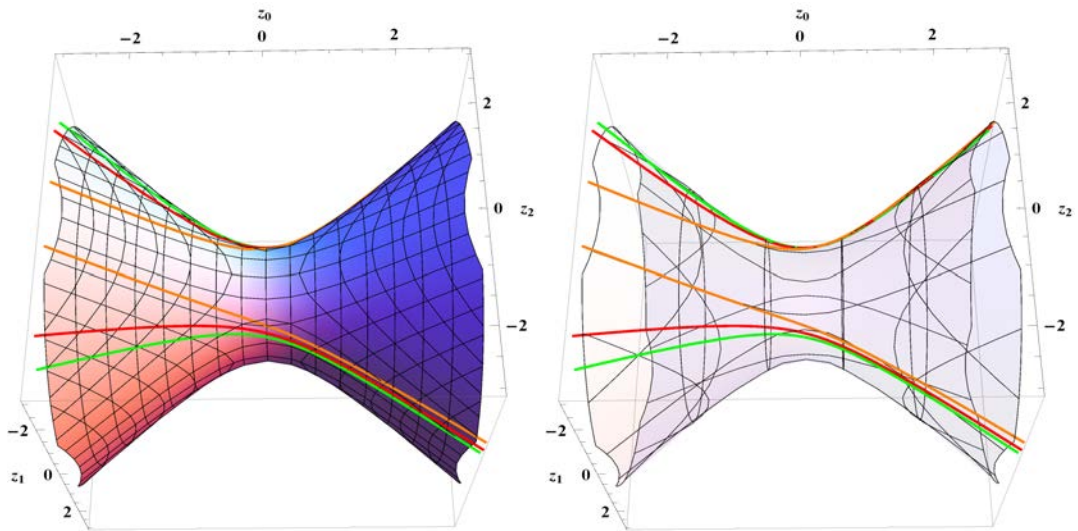


Рис. 13: Траектория движения для $L^2 = 1/2$ и $E = 1, 2, 3$ ($\alpha = R = 1$)

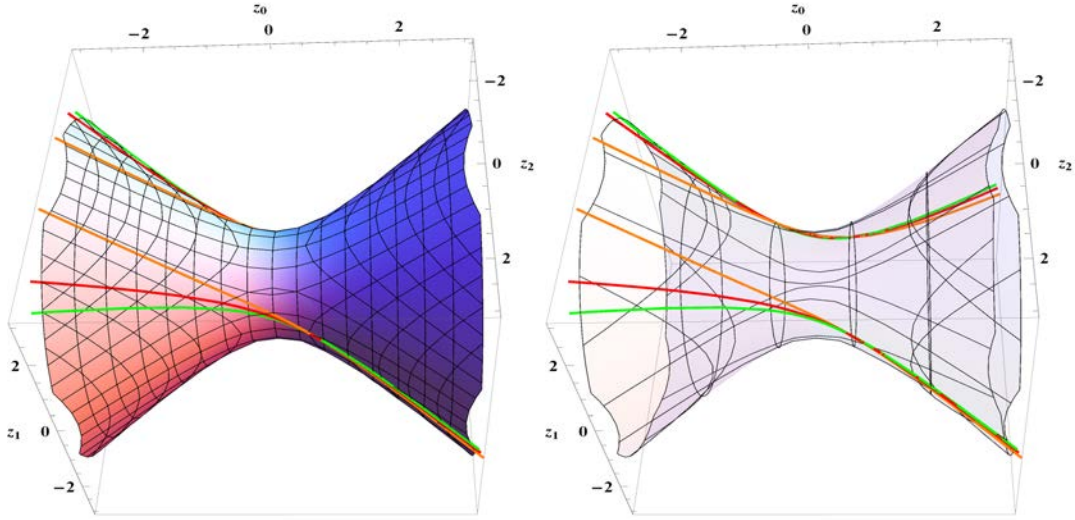


Рис. 14: Траектория движения для $L^2 = 2$ и $E = 1, 2, 3$ ($\alpha = R = 1$)

Далее в разделе 3.3 изучен квантовый случай задачи. Выписаны ортонормированные волновые функции для дискретного и непрерывного спектров в сферических и эллиптико-параболических координатах. Приведен вид дискретного спектра энергии

$$E_n = -\frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{n^2 - 1}{2R^2}. \quad (15)$$

где $n = \delta, \delta + 1, \dots, l$, и $\delta = \max\{\lceil \sqrt{\alpha R} \rceil, 1\}$. Решена задача о разложении произвольной функции на гиперboloиде H_1^3 по полной системе псевдо-сферических кулоновских волновых функциях. В частности произведено разложение эллиптико-параболических волновых функций по псевдо-сферическим и показано, что коэффициенты разложения выражаются через гипергеометрические функции ${}_4F_3$. В разделе 3.4 изучена задача гармонического осциллятора на двухполостном гиперboloиде $H_3^1 : x_0^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = R^2$. Задача изучена в контексте квантовой механики и полностью решена в сферической и полярно-цилиндрической системах координат. Найден спектр энергии для дискретного спектра

$$E_N(\nu, R) = -\frac{(N+1)(N+3)}{2R^2} + \frac{\nu + 1/2}{R^2} \left(N + \frac{3}{2}\right) \quad (16)$$

в котором $N \leq \nu - 3/2$. В подразделах 3.4.6, 3.4.7 произведено разложение полярно-цилиндрических волновых функций по сферическим волновым функциям, как для дискретного так и для непрерывного спектров. Показано, что коэффициенты разложения вырождаются через полиномы Рака и Вильсона.

В заключении приводятся основные результаты диссертационной работы.

Список публикаций по теме диссертации

- A1.** Petrosyan D.R., Pogosyan G.S. The Kepler-Coulomb problem on $SO(2, 2)$ hyperboloid // Ядерная Физика. – 2012. – Т. 75(10). – С. 1343-1349.
- A2.** Petrosyan D.R., Pogosyan G.S. Classical Kepler-Coulomb problem on $SO(2, 2)$ hyperboloid // Ядерная Физика. – 2013. – Т. 76(10). – С. 1334-1344.
- A3.** Petrosyan D.R., Pogosyan G.S. Oscillator problem on $SO(2, 2)$ hyperboloid // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2014. – Vol. 17(4). – p. 405-408.
- A4.** Petrosyan D.R., Pogosyan G.S. Harmonic Oscillator on the $SO(2, 2)$ Hyperboloid // SIGMA. – 2015. – Vol. 11(96). – p. 1-23.
- A5.** Kurochkin Yu.A., Otchik V.S., Petrosyan D.R., Pogosyan G.S. Eigenfunction expansions in the imaginary Lobachevsky space // Proceedings of the IX International conference BGL-9, принято к печати в ЯФ. – arXiv:1603.07971.
- A6.** Kurochkin Yu.A., Mardoyan L.G., Otchik V.S., Petrosyan D.R., Pogosyan G.S. Kepler motion on single-sheet hyperboloid // Proceedings of the IX International conference BGL-9, принято к печати в ЯФ. – arXiv:1603.08139.

Список литературы

- [1] S. Wojciechowski. Superintegrability of the calogero-moser system. *Phys.Lett. A*, 95:279, 1983.
- [2] M.Laplace. *Traite de mecanique celeste*, volume 1. Bachelier, Paris, 1889.
- [3] C.Runge. *Vektoranalysis*, volume 1. Hirtel, Leipzig, 1919.
- [4] W.Lenz. über den bewegungsverlauf und die quantenzustände der gestörten keplerbewegung. *Zeitschr.Phys.*, 24:197–207, 1924.
- [5] Yu.N.Demkov. Symmetry group of the isotropic oscillator. *Sov.Phys.JETP*, 26:757, 1954.
- [6] Ю.Н.Демков. Об определение группы симметрии квантовой системы. Анизотропный осциллятор. *ЖЭТФ*, 44:2007–2010, 1963.
- [7] Л.А.Илькаева. Группа симметрии анизотропного осциллятора. *Вест. ЛГУ*, 22:56–62, 1963.
- [8] J.Bertrand. Théorime relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe. *Comptes Rendus*, 77:849–853, 1873.
- [9] V.A.Fock. Zur theorie des wasserstoffatoms. *Zs. Phys.*, 98:145–154, 1935.
- [10] J.M.Jauch. Groups of quantum-mechanical contact transformations and the degeneracy of energy-levels. *Phys. Rev. A*, 55:1132, 1939.
- [11] E.L.Hill J.M.Jauch. On the problem of degeneracy in quantum mechanics. *Phys.Rev.*, 57:641, 1940.
- [12] L.P.Eisenhart. Enumeration of potentials for which one-particle schrödinger equations are separable. *Phys. Rev.*, 74:87–89, 1948.
- [13] М.Н.Олевский. *Математический сборник*, chapter 27, pages 379–420. 1950.
- [14] G.S.Pogosyan and A.Yakhno. Lie algebra contractions on two – dimensional hyperboloids. *Physics of Atomic Nuclei*, 2010.
- [15] E. G. Kalnins and W. Miller. Lie theory and the wave equation in space–time. I. the lorentz group. *Journal of Mathematical Physics*, 18(1), 1977.

- [16] E.G.Kalnins and W.Miller Jr. The wave equation $o(2, 2)$, and separation of variables on hyperboloids. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, A79:227–256, 1977.
- [17] E.Schrödinger. A method of determining quantum mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proc.Roy.Irish Soc.*, 46(9), 1941.
- [18] A. F. Stevenson. Note on the "kepler problem" in a spherical space, and the factorization method of solving eigenvalue problems. *Phys. Rev.*, 59:842–843, May 1941.
- [19] L.Infeld and A.Schild. A note on the kepler problem in a space of constant negative curvature. *Phys.Rev.*, 67:121–122, 1945.
- [20] L.E.Parker and D.J.Toms. *Quantum field theory in curved space time*. Cambridge Univ. Press, 2009.
- [21] V. V. Varlamov. Cpt groups of spinor fields in de sitter and anti-de sitter spaces. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25(2):487–516, 2015.
- [22] L.C.Ambrozio. On perturbations of the schwarzschild anti-de sitter spaces of positive mass. *Communications in Mathematical Physics*, 337(2):767–783, 2015.
- [23] G.W. Gibbons. Anti-de-sitter spacetime and its uses.
- [24] G. 't Hooft. Non-perturbative 2 particle scattering amplitudes in 2+1 dimensional quantum gravity. *Commun. Math. Phys.*, 117:685, 1988.
- [25] V.Kotecha and R.S.Ward. Integrable yang-mills-higgs equations in three-dimensional de sitter space-time. *J. Math. Phys.*, 42(3):1018, 2001.
- [26] Z.Zhou. Solutions of the yang-mills-higgs equations in 2+1 -dimensional anti de sitter space-time. *J. Math. Phys.*, 42(3):1085, 2001.
- [27] Смородинский Я. А. Виленкин Н. Я. Инвариантные разложения релятивистских амплитуд. *ЖЭТФ*, 46(5):1793, 1964.
- [28] Н.Б. Скачков В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов. Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел. *ЭЧАЯ*, 3, 1971.
- [29] И.Л. Соловцов Н.Б. Скачков. Релятивистское трёхмерное описание взаимодействия двух фермионов. *ЭЧАЯ*, 9(1), 1978.
- [30] N. Bessis and G. Bessis. Electronic wavefunction in a space of constant curvature. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 12(11):1991–1997, 1979.

- [31] G. Bessis N. Bessis and R. Shamseddine. Space-curvature effects in atomic fine and hyperfine structure calculations. *Phys. Rev. A.*, 29(5):2375–2388, 1984.
- [32] G. Bessis N. Bessis and D. Roux. Atomic fine-structure calculations in a space of constant negative curvature. *Phys. Rev. A.*, 30(2):1094–1097, 1984.
- [33] D. Roux N. Bessis, G. Bessis. Space-curvature effects in the interaction between atoms and external fields: Zeeman and stark effects in a space of constant positive curvature. *Phys. Rev. A.*, 33(1):324–336, 1986.