ОБЪЕДИНЁННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

Сидоров Степан Сергеевич

# Деформированные модели суперсимметричной квантовой механики

Специальность: 01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Дубна – 2015

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики имени Н. Н. Боголюбова
Объединённого института ядерных исследований.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
**Иванов Евгений Алексеевич**.

Официальные оппоненты: **Галажинский Антон Владимирович**,
доктор физико-математических наук,
Национальный исследовательский
Томский политехнический университет;

**Григорьев Максим Анатольевич**,
кандидат физико-математических наук,
Физический институт имени П. Н. Лебедева
Российской академии наук,
Отделение теоретической физики имени И. Е. Тамма.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение «Государственный научный центр Российской Федерации – Институт физики высоких энергий».

Защита состоится ____________________ 2015 г. в ________ на заседании диссертационного совета Д 720.001.01 при Объединённом институте ядерных исследований (Лаборатория теоретической физики) по адресу: 141980, г. Дубна, Московской области, ул. Жолио-Кюри, д. 6.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте Объединённого института ядерных исследований (http://wwwinfo.jinr.ru/announce_disser.htm).

Автореферат разослан «_____» _____________ 2015 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 720.001.01, д. ф.-м. н. Арбузов Андрей Борисович

## Общая характеристика работы

**Актуальность работы.** Суперсимметрия интенсивно исследуется в современной теоретической физике в связи с её значительной ролью в физике элементарных частиц как гипотетической симметрии между бозонными и фермионными полями. В настоящее время именно с суперсимметрией связаны надежды на построение единой теории всех взаимодействий. Кандидатом на такую теорию является теория суперструн [1].

Суперсимметричная квантовая механика – простейшая $d = 1$ суперсимметричная теория [2, 3], соответствующая $d = 1$ супералгебре Пуанкаре,

$$\{Q^k, Q^n\} = 2\delta^{kn}\, H\,, \qquad [H, Q^k] = 0\,, \qquad k, n = 1, \ldots \mathcal{N}\,, \tag{1}$$

которая состоит из $\mathcal{N}$ действительных суперзарядов $Q^n$ и гамильтониана $H$ . Суперсимметрия в одном измерении играет важную роль в исследовании свойств многомерных суперсимметричных теорий, которые порождают различные виды суперсимметричной механики через размерную редукцию. Эффективным инструментом построения суперсимметричных инвариантных действий является суперполевой формализм. Суперполе – это обобщение понятия поля на суперпространство, расширение пространства-времени той или иной размерности антикоммутирующими грассмановыми координатами.

В последнее время возрос интерес к суперсимметричным теориям поля на искривлённых пространствах с жёсткой (rigid) суперсимметрией [4–7], основанной на искривлённых аналогах супергруппы Пуанкаре в различных измерениях. Существует надежда, что изучение нового класса теорий приведёт к дальнейшему прогрессу в понимании AdS/CFT соответствия. Поэтому естественный интерес вызывают суперсимметричные модели, которые основываются на некоторых искривлённых версиях $d = 1$ суперсимметрии Пуанкаре. Их можно рассматривать в качестве $d = 1$ аналогов многомерных суперсимметричных моделей, а в некоторых случаях они следуют из многомерных теорий через размерную редукцию [8]. Независимо от вопроса размерной редукции, они могут представлять очевидный интерес сами по себе как нетривиальные самосогласованные деформации стандартных моделей суперсимметричной квантовой механики с большим количеством возможных применений.

Один из возможных способов определения таких моделей следует из вида простейшей нетривиальной $\mathcal{N} = 2$ , $d = 1$ супералгебры Пуанкаре. Вводя комплексные генераторы

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q^1 + iQ^2)\,, \qquad \bar{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q^1 - iQ^2)\,, \tag{2}$$

супералгебру (1) для $\mathcal{N}=2$ можно переписать в виде

$$\{Q,\bar{Q}\}=2H\,,\quad Q^2=\bar{Q}^2=0,\quad [H,Q]=[H,\bar{Q}]=0\,. \tag{3}$$

С одной стороны, (анти)коммутаторы (3) определяют $\mathcal{N}=2\,,\ d=1$ супералгебру Пуанкаре. С другой стороны, эти же (анти)коммутационные отношения определяют супералгебру $su(1|1)$, с $H$ в качестве генератора центрального заряда. Эта двойственная интерпретация $\mathcal{N}=2\,,\ d=1$ супералгебры Пуанкаре предполагает две возможности её расширения на $d=1$ суперсимметрии более высокого ранга. Первый способ – это прямое расширение

$$(\mathcal{N}=2\,,\ d=1)\quad\Rightarrow\quad(\mathcal{N}>2\,,\ d=1\ \text{Poincaré})\,, \tag{4}$$

где $\mathcal{N}$ , $d=1$ супералгебра Пуанкаре определяется соотношениями (1). Другая, менее очевидная возможность соответствует следующей цепочке вложений:

$$(\mathcal{N}=2\,,\ d=1)\equiv u(1|1)\ \subset\ su(2|1)\ \subset\ su(2|2)\ \subset\ \ldots\,. \tag{5}$$

Характерной особенностью этого вида расширения является то, что соответствующая супералгебра обязательно содержит, помимо аналога гамильтониана $H$ , также дополнительные бозонные генераторы. Эти генераторы появляются в замыкании суперзарядов и образуют внутренние симметрии, коммутирующие с гамильтонианом и имеющие определённые ненулевые коммутаторы с суперзарядами. Цепочка (5) не уникальна в том смысле, что можно было бы предложить некоторые другие расширения $u(1|1)$. Супералгебры $su(2|1)$ и $su(2|2)$ в цепочке (5) являются простейшими нетривиальными деформациями $\mathcal{N}=4$ и $\mathcal{N}=8$ одномерных супералгебр Пуанкаре.

Ранее, модели суперсимметричной механики с альтернативной суперсимметрией $SU(2|1)$, известной также как слабая суперсимметрия (“Weak supersymmetry”), были рассмотрены в [9–12]. Однако систематические методы построения новых моделей такой деформированной суперсимметричной квантовой механики не были предъявлены. Одной из основных целей настоящей работы является разработка таких методов, которые были бы применимы не только к $SU(2|1)$, но и к аналогичным суперсимметриям более высокого ранга с $\mathcal{N}>4$. Универсальным методом построения таких моделей является суперполевой подход, в котором суперполя определены на фактор-пространствах соответствующей супергруппы, т. е. на искривлённом суперпространстве.

Суперсимметрия $SU(2|1)$ в квантовой механике также возникает в различных вариантах суперсимметричных моделей Ландау [13–15], [A1]. В данных моделях суперсимметрия связана с преобразованиями полей пространства отображения. Тем не менее, исследование таких моделей позволяют выявить общие свойства, присущие $SU(2|1)$ суперсимметрии. С другой стороны, модели Ландау могут обладать нестандартной скрытой мировой суперсимметрией, например, $SU(2|2)$, как показано в [16].

В работе [17] было показано, что конформная механика [18] может быть разделена на три класса, соответствующие *параболическим*, *тригонометрическим* и *гиперболическим* реализациям одномерной конформной группы $SO(2,1) \sim SL(2,\mathbb{R})$. Ранее в основном изучались суперсимметричные расширения конформной механики, отвечающие параболическим преобразованиям [19–21]. В недавней работе [22] классификация $\mathcal{N} = 4$ моделей суперконформной механики была дополнена *тригонометрическим/гиперболическим* типом. Как оказалось, тригонометрические модели могут рассматриваться как модели со слабой суперсимметрией. В отличие от параболических моделей, тригонометрические/гиперболические суперконформные лагранжианы деформированы дополнительным осцилляторным потенциалом. Один из примеров тригонометрического суперконформного $\mathcal{N} = 4$ действия с потенциалом осциллятора рассматривался в [23].

**Цель диссертационной работы.** Основной целью диссертации является разработка суперполевого $SU(2|1)$ формализма, который позволяет построить широкий класс моделей суперсимметричной квантовой механики как деформации стандартных $\mathcal{N} = 4$ , $d = 1$ моделей. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

- Построение деформированного суперпростанства $SU(2|1)$, а также его гармонического аналога;
- Определение и решение ковариантизованных связей для $SU(2|1)$ суперполей;
- Построение суперсимметричных лагранжианов;
- Изучение квантово-механических систем на простых примерах;
- Анализ структуры суперсимметричных волновых функций с точки зрения теории представлений супергруппы $SU(2|1)$;
- Установление связи с ранее известными моделями с деформированной суперсимметрией $SU(2|1)$ на мировой линии;

**Научная новизна и практическая ценность.** Суперполевой подход к суперсимметрии $SU(2|1)$ позволяет построить новый класс деформированных моделей суперсимметричной квантовой механики и найти суперполевую формулировку лагранжианов вне массовой оболочки (off-shell) для ранее известных моделей [9, 11, 12, 23]. Заметим, что суперполевые $SU(2|1)$ модели были также построены на фактор-пространствах супергруппы $SU(2|1)$, включающих бозонные координатные подпространства размерности $d = 2, 3$ [6, 7].

Существует проблема воспроизведения $SU(2|1)$ моделей суперсимметричной механики на основе размерной редукции многомерных теорий с искривлённой суперсимметрией. В недавней работе [8] для вычисления энергии вакуума была проведена размерная редукция $d = 4\,, \mathcal{N} = 1$ суперсимметричных киральных моделей на искривлённом пространстве $S^3 \times \mathbb{R}$, где соответствующая супералгебра деформирована до $su(2|1)$. В результате, размерная редукция приводит к моделям $SU(2|1)$ суперсимметричной механики. Это даёт ещё одно возможное направление исследований, имеющее целью установление связи этой конструкции с $SU(2|1)$ суперсимметричной механикой, обсуждаемой в диссертации.

**Основные результаты.** В диссертационной работе предложен и исследован новый тип моделей $\mathcal{N} = 4\,,\ d = 1$ суперсимметричной механики. Эти модели обладают мировой $SU(2|1)$ суперсимметрией, которая представляет собой деформацию стандартной $\mathcal{N} = 4\,,\ d = 1$ суперсимметрии параметром $m$ размерности массы. С использованием суперполей на фактор-пространствах супергруппы $SU(2|1)$ построены классические и квантовые модели для супермультиплетов $(\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{3})$, $(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{2})$ и $(\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$.

Показано, что ранее известные модели со слабой $SU(2|1)$ суперсимметрией естественно воспроизводятся из суперполевого $SU(2|1)$ описания. В частности, лагранжианы на массовой оболочке (on-shell), рассмотренные в [9], основаны на $SU(2|1)$ мультиплете $(\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{3})$. Другой ранее известный тип $SU(2|1)$ суперсимметричных моделей [11, 12] связан с обобщением стандартного кирального условия для $SU(2|1)$ мультиплета $(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{2})$.

Для описания мультиплетов $(\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$ (обычного и его зеркального аналога) было построено гармоническое $SU(2|1)$ суперпространство. Как оказалось, модели для этих двух мультиплетов деформированы существенно по-разному, т. е. в деформированном случае мы имеем дело с 2 разными типами неэквивалентных моделей. Таким образом, зеркальность в $SU(2|1)$ случае «искривлена».

Построено гильбертово пространство суперволновых функций для простых примеров рассматриваемых мультиплетов, и проанализирована структура соответствующих квантовых состояний. Некоторые особенности квантового спектра находят естественное объяснение в рамках теории $SU(2|1)$ представлений. Показано, что собственные значения операторов Казимира играют определяющую роль в структуре суперволновых функций. Отличительным фактом является наличие нетривиальных атипических $SU(2|1)$ представлений с неравным количеством бозонных и фермионных состояний, на которых операторы Казимира принимают нулевые значения.

Представлена реализация суперпространства тригонометрического типа для суперконформной суперсимметрии $D(2,1;\alpha)$, с $m = -\alpha\mu\,$. Эта реализация дана на суперпространстве $SU(2|1)$ при $\alpha \neq 0$ и на $U(1)$ деформированном $\mathcal{N} = 4\,,\ d = 1$ суперпространстве при $\alpha = 0\,$. Оказалось, что $SU(2|1)$ суперполя и их продолжения на случай $\alpha = 0$ идеально подходят для полного описания тригонометрических конформных $\mathcal{N} = 4$ действий. Гиперболические действия могут быть получены из тригонометрических простой заменой параметров. В пределе $\mu = 0$ соответствующие суперконформные модели становятся моделями стандартной параболической суперконформной механики, построенными на основе стандартных $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ суперполей. Общим свойством лагранжианов суперконформной механики является их зависимость от квадрата параметра деформации $\mu$. Это позволяет представить суперконформные преобразования полей как замыкание двух видов деформированных $SU(2|1)$ преобразований с параметрами $\mu$ и $-\mu$.

**Апробация работы.** Результаты, выносимые на защиту, докладывались соискателем на следующих научных конференциях:

- Armenia-Dubna Workshop on Problems of (Supersymmetric) Integrable Systems, Дубна, 24 - 25 декабря, 2012, “Super Landau Models on Odd Cosets”;
- Supersymmetries and Quantum Symmetries – SQS’2013, Дубна, 29 июля - 3 августа, 2013, “Deformed N=4, d=1 Supersymmetry”;
- Armenia-Dubna Workshop on Problems of (Supersymmetric) Integrable Systems, Дубна, 24 - 26 декабря, 2013, “Superfield Approach to Supersymmetric Kähler oscillator”;
- Supersymmetry in Integrable Systems – SIS’13, Ганновер, 28 - 30 Декабря, 2013, “Deformation of the standard N = 4 supersymmetric mechanics”;
- Integrable Systems and Quantum symmetries – ISQS-22, Прага, 23 - 29 июня, 2014, “Supersymmetric Mechanics in Deformed Superspace”;
- Quantum Field Theory and Gravity – QFTG’14, Томск, 28 июля - 3 августа, 2014, “N = 4 Superconformal Mechanics in Deformed Superspace”;
- Supersymmetry in Integrable Systems - SIS’14, Дубна, 11 - 13 сентября, 2014, “Deformed SU(2|1) Superfields and Superconformal Mechanics”;
- Supersymmetry in Integrable Systems – SIS’15, Ереван, 9 - 13 сентября, 2015, “SU(2|1) mechanics and harmonic superspace”.

**Публикации.** По материалам диссертационной работы опубликованы 8 статей, 4 из них в реферируемых международных журналах [A1, A2, A3, A7], 3 в сборниках трудов конференций [A4, A5, A6] и одна в виде препринта [A8]. Последняя работа [A8] направлена в журнал “Classical and Quantum Gravity”.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и приложения. Объем диссертации – 92 страницы, в т. ч. 1 рисунок. Список литературы содержит 59 наименований.

## Основное содержание работы

**Во введении** сформулированы актуальность и цель работы, кратко изложено содержание диссертации.

**Первая глава** посвящена построению суперпространства $SU(2|1)$ и его гармонического аналога. В этой главе показана процедура построения суперпространства $SU(2|1)$ как фактор-пространства этой супергруппы, где супералгебра $su(2|1)$ определена как деформация $\mathcal{N}=4$ , $d=1$ супералгебры Пуанкаре. Используя метод форм Картана, мы находим трансформационные свойства координат суперпространства и суперполей, а также ковариантные производные, соответствующие этому суперпространству. Аналогичным образом построено гармоническое суперпространство для супергруппы $SU(2|1)$.

**В разделе 1.1** обсуждается супералгебра $su(2|1)$ как деформация стандартной $\mathcal{N}=4$ , $d=1$ супералгебры Пуанкаре массовым параметром $m$ . Супералгебра $su(2|1)$ в стандартной форме записывается как

$$\begin{aligned}
&\{Q^i, \bar{Q}_j\} = 2mI^i_j + 2\delta^i_j\tilde{H}, \qquad && \left[I^i_j, I^k_l\right] = \delta^k_j I^i_l - \delta^i_l I^k_j\,, \\
&\left[I^i_j, \bar{Q}_l\right] = \frac{1}{2}\,\delta^i_j\bar{Q}_l - \delta^i_l\bar{Q}_j\,, \qquad && \left[I^i_j, Q^k\right] = \delta^k_j Q^i - \frac{1}{2}\,\delta^i_j Q^k, \\
&\left[\tilde{H}, \bar{Q}_l\right] = \frac{m}{2}\,\bar{Q}_l\,, \qquad \left[\tilde{H}, Q^k\right] = -\frac{m}{2}\,Q^k, &&
\end{aligned} \tag{6}$$

Все остальные (анти)коммутаторы равны нулю. Безразмерные генераторы $I^i_j$ соответствуют симметрии $SU(2)_{\text{int}}$ , в то время как генератор $\tilde{H}$ с размерностью массы является внутренним генератором симметрии $U(1)_{\text{int}}$ . В пределе $m=0$ супералгебра $su(2|1)$ переходит в $\mathcal{N}=4$ , $d=1$ супералгебру Пуанкаре. При этом $\tilde{H}$ становится каноническим гамильтонианом, а генераторы $I^i_j$ становятся генераторами внешних автоморфизмов $SU(2)$. $\mathcal{N}=4$ , $d=1$ супергруппа, соответствующая «плоскому» случаю $m=0$ , обладает группой автоморфизмов $SO(4)\sim SU(2)\times SU'(2)$ .

Супералгебру (6) можно расширить внешним $U(1)_{\text{ext}}$ генератором автоморфизмов $F$ [4], который вращает суперзаряды как

$$\left[F, \bar{Q}_l\right] = -\frac{1}{2}\,\bar{Q}_l\,, \qquad \left[F, Q^k\right] = \frac{1}{2}\,Q^k. \tag{7}$$

Массовый параметр $m$ позволяет разделить внутренний генератор $U(1)_{\text{int}}$ как $\tilde{H}\equiv H-mF$ . Это приводит супералгебру $su(2|1)\oplus u(1)_{\text{ext}}$ к виду центрально-расширенной супералгебры $\widehat{su}(2|1)$:

$$\begin{aligned}
&\{Q^i, \bar{Q}_j\} = 2m\left(I^i_j - \delta^i_j F\right) + 2\delta^i_j H\,, \qquad \left[I^i_j, I^k_l\right] = \delta^k_j I^i_l - \delta^i_l I^k_j\,,\\
&\left[I^i_j, \bar{Q}_l\right] = \frac{1}{2}\delta^i_j \bar{Q}_l - \delta^i_l \bar{Q}_j\,, \qquad \left[I^i_j, Q^k\right] = \delta^k_j Q^i - \frac{1}{2}\delta^i_j Q^k,\\
&\left[F, \bar{Q}_l\right] = -\frac{1}{2}\,\bar{Q}_l\,, \qquad \left[F, Q^k\right] = \frac{1}{2}\,Q^k.
\end{aligned} \tag{8}$$

Генератор $F$ становится внутренним $U(1)_{\rm int}$ генератором супералгебры $\widehat{su}(2|1)$. Таким образом, внутренние генераторы $I^i_j$ и $F$ образуют симметрию $U(2)_{\rm int}$ , в то же время новый оператор $H$ коммутирует со всеми остальными генераторами и может рассматриваться как центральный заряд. В случае $m \neq 0$ из второй группы автоморфизмов $SU'(2)$ в алгебре (8) выживает только генератор $F$ .

**В разделе 1.2** дан краткий обзор моделей Ландау на различных фактор-пространствах супергруппы $SU(2|1)$. Супергруппа $SU(2|1)$ была реализована левыми сдвигами на нескольких фактор-пространствах супергруппы $SU(2|1)$, которые использовались в различных вариантах суперсимметричных моделей Ландау [13–15], [A1], с суперсимметрией $SU(2|1)$ в пространстве отображения. Простейший вариант такой модели описан в некоторых деталях в **Приложении А**.

**В разделе 1.3** мы определяем суперпространство $SU(2|1)$ как фактор-пространство супергруппы $\widehat{SU}(2|1)$ с соответствующей центрально-расширенной алгеброй (8). Поля возникают как компоненты суперполей, определенных на этом фактор-пространстве. Расщепление $U(1)_{\rm int}$ генератора в алгебре (8) на $H$ и $F$ позволяет отождествить гамильтониан с оператором центрального заряда. Мы помещаем генераторы $U(2)_{\rm int}$ в подгруппу стабильности, оставляя генераторы $H$, $Q_i$ и $\bar{Q}_j$ в фактор-пространстве

$$\frac{\widehat{SU}(2|1)}{SU(2)_{\rm int}\times U(1)_{\rm int}} \sim \frac{\{Q^i, \bar{Q}_j, H, I^i_j, F\}}{\{I^i_j, F\}}\,. \tag{9}$$

Координаты суперпространства $\zeta = \left\{t, \theta_i, \bar{\theta}^j\right\}$ отождествляются с параметрами, связанными с генераторами фактор-пространства. Элемент фактор-пространства в экспоненциальной параметризации записывается как

$$g = \exp\left\{\left(1 - \frac{2m}{3}\,\bar{\theta}^k\theta_k\right)\left(\theta_i Q^i + \bar{\theta}^j\bar{Q}_j\right)\right\}\exp\{itH\}, \qquad \overline{(\theta_i)} = \bar{\theta}^i. \tag{10}$$

Для реализации $SU(2|1)$ на координатах суперпространства $\zeta = \left\{t, \theta_i, \bar{\theta}^j\right\}$ следует вычислить лево-ковариантные формы Картана $g^{-1}dg$. Используя метод форм Картана, легко найти $\epsilon$-преобразования суперпространственных координат

$$\delta\theta_i = \epsilon_i + 2m\,\bar{\epsilon}^k\theta_k\theta_i\,, \qquad \delta\bar{\theta}^j = \bar{\epsilon}^j - 2m\,\epsilon_k\bar{\theta}^k\bar{\theta}^j, \qquad \delta t = i\left(\epsilon_k\bar{\theta}^k + \bar{\epsilon}^k\theta_k\right), \tag{11}$$

и пассивные нечётные преобразования суперполей

$$\delta\Phi^A = m\left[\left(\epsilon_k\bar{\theta}^k + \bar{\epsilon}^k\theta_k\right)\tilde{F} - \left(1 - m\,\bar{\theta}^l\theta_l\right)\left(\epsilon_i\bar{\theta}^j + \bar{\epsilon}^j\theta_i\right)\tilde{I}^i_j\right]\Phi^A. \tag{12}$$

Матричные генераторы $\tilde I^i_j$ и $\tilde F$ действуют на суперполе $\Phi^A$ с внешним индексом $A$ некоторого $U(2)_{\rm int}$ представления.

Мера интегрирования, определённая формулой

$$d\zeta := dt\, d^2\theta\, d^2\bar\theta\, \left(1 + 2m\,\bar\theta^k\theta_k\right), \tag{13}$$

инвариантна под действием преобразований (11), $\delta\,(d\zeta) = 0$.

Ковариантные производные $\mathcal{D}^i, \bar{\mathcal{D}}_j, \mathcal{D}_{(t)}$ вычисляются в виде:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^i &= \left[1 + m\,\bar\theta^k\theta_k - \frac{3m^2}{8}\,(\theta)^2\left(\bar\theta\right)^2\right]\frac{\partial}{\partial\theta_i} - m\,\bar\theta^i\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j} - i\bar\theta^i\partial_t \\
&\quad + m\,\bar\theta^i\tilde F - m\,\bar\theta^j\left(1 - m\,\bar\theta^k\theta_k\right)\tilde I^i_j\,, \\
\bar{\mathcal{D}}_j &= -\left[1 + m\,\bar\theta^k\theta_k - \frac{3m^2}{8}\,(\theta)^2\left(\bar\theta\right)^2\right]\frac{\partial}{\partial\bar\theta^j} + m\,\bar\theta^k\theta_j\frac{\partial}{\partial\bar\theta^k} + i\theta_j\partial_t \\
&\quad - m\,\theta_j\tilde F + m\,\theta_k\left(1 - m\,\bar\theta^l\theta_l\right)\tilde I^k_j\,, \\
\mathcal{D}_{(t)} &= \partial_t\,.
\end{aligned} \tag{14}$$

Важной особенностью суперполевого $SU(2|1)$ формализма является наличие дополнительных матричных $U(2)_{\rm int}$ генераторов с нетривиальным действием на спинорные ковариантные производные:

$$\begin{aligned}
&\tilde I^i_j\bar{\mathcal{D}}_l = \delta^i_l\bar{\mathcal{D}}_j - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\bar{\mathcal{D}}_l\,, \qquad \tilde I^i_j\mathcal{D}^k = \frac{1}{2}\,\delta^i_j\mathcal{D}^k - \delta^k_j\mathcal{D}^i, \\
&\tilde F\bar{\mathcal{D}}_l = \frac{1}{2}\,\bar{\mathcal{D}}_l\,, \qquad \tilde F\mathcal{D}^k = -\,\frac{1}{2}\,\mathcal{D}^k.
\end{aligned} \tag{15}$$

**Раздел 1.4** посвящён построению гармонического $d = 1$ суперпространства для супергруппы $\widehat{SU}(2|1)$. Используя обозначения

$$\begin{aligned}
&Q^1 \equiv Q^+, \quad Q^2 \equiv Q^-, \quad \bar Q_1 \equiv \bar Q^-, \quad \bar Q_2 \equiv -\bar Q^+, \\
&I^{++} \equiv I^1_2\,, \quad I^{--} \equiv I^2_1\,, \quad I^0 \equiv I^1_1 - I^2_2 = 2I^1_1\,,
\end{aligned} \tag{16}$$

мы можем соответственно переписать супералгебру (8). Мы можем также расширить эту супералгебру генераторами $\{T^0, T^{++}, T^{--}\}$ группы автоморфизмов $SU(2)_{\rm ext}$, которые вращают суперзаряды как внутренние $SU(2)_{\rm int}$ генераторы $\{I^0, I^{++}, I^{--}\}$. Для согласованности, $SU(2)_{\rm ext}$ генераторы должны вращать таким же образом индексы генераторов $I^i_j$, т. е. эти группы $SU(2)$ образуют полу-прямое произведение $[T, I] \propto I$.

Затем мы вводим гармоническое фактор-пространство расширенной супергруппы:

$$\frac{\{H, Q^\pm, \bar Q^\pm, F, I^{\pm\pm}, I^0, T^{\pm\pm}, T^0\}}{\{F, I^{++}, I^0, I^{--} - T^{--}, T^0\}} \sim \left\{t_{(A)}, \theta^\pm, \bar\theta^\pm, w^\pm_i\right\} =: \zeta_H\,. \tag{17}$$

Это суперпространство – деформация стандартного «плоского» $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ гармонического суперпространства [24]. Новые гармоники $w^\pm_i$, подходящим образом выраженные через би-гармонический набор координат $(v^i_j, u^\pm_k)$ [25], по-прежнему удовлетворяют стандартным условиям $w^{+i}w^-_i = 1$. Гармоническое суперпространство $SU(2|1)$

содержит замкнутое аналитическое гармоническое подпространство, параметризованное сокращенным набором координат $\zeta_{(A)} := \big(t_{(A)}, \bar\theta^+, \theta^+, w_i^\pm\big)$.

Далее, вычислены нечётные преобразования координат гармонического суперпространства $SU(2|1)$ и гармонических суперполей, получены деформированные ковариантные производные и определено условие аналитичности.

**В Главе 2** мы определяем суперполя на $SU(2|1)$ суперпространстве, которые описывают соответствующие аналоги неприводимых линейных мультиплетов стандартной $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ суперсимметрии вне массовой оболочки. Они обозначены как $(\mathbf{n}, \mathbf{4}, \mathbf{4} - \mathbf{n})$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Мультиплет $(\mathbf{n}, \mathbf{4}, \mathbf{4} - \mathbf{n})$ состоит из 4 фермионных полей, $n$ динамических бозонных полей и $(4 - n)$ вспомогательных бозонных полей.

**В разделе 2.1** рассматривается $SU(2|1)$ аналог мультиплета $(\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{3})$ [26, 27]. Он описывается вещественным нейтральным суперполем $X$, удовлетворяющим $SU(2|1)$ ковариантизации условий стандартного мультиплета $(\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{3})$,

$$\varepsilon^{lj}\bar{\mathcal{D}}_l\,\bar{\mathcal{D}}_j\,X = \varepsilon_{lj}\mathcal{D}^l\,\mathcal{D}^j\,X = 0\,, \qquad \big[\mathcal{D}^i, \bar{\mathcal{D}}_i\big]\,X = 4m\,X - 4c\,. \tag{18}$$

Здесь $c$ – произвольное действительное число. Эти условия имеют следующее решение:

$$\begin{aligned} X \;=\; & \Big[1 - m\,\bar\theta^k\theta_k + m^2\,(\theta)^2\,\big(\bar\theta\,\big)^2\Big]\,x + \frac{\ddot{x}}{4}\,(\theta)^2\,\big(\bar\theta\,\big)^2 + \bar\theta^j\theta_i\,B^i_j + c\,\bar\theta^j\theta_j\,\big(1 - 2m\,\bar\theta^k\theta_k\big) \\ & + \big(1 - 2m\,\bar\theta^k\theta_k\big)\,\big(\theta_i\,\psi^i - \bar\theta^j\,\bar\psi_j\big) - i\,\bar\theta^k\theta_k\,\Big(\theta_i\,\dot\psi^i + \bar\theta^j\,\dot{\bar\psi}_j\Big)\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Используя определение (13), мы можем построить общий лагранжиан и действие для $SU(2|1)$ мультиплета $(\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{3})$ в виде

$$S(X) = -\int d\zeta\,f(X) = -\int dt\,d^2\theta\,d^2\bar\theta\,\big(1 + 2m\,\bar\theta^k\theta_k\big)\,f(X)\,, \quad S = \int dt\,\mathcal{L}\,. \tag{20}$$

В частном случае $c = 0$, соответствующий лагранжиан переходит в лагранжиан модели со слабой суперсимметрией, введённой в [9].

В качестве простой модели рассматривается квантование гармонического осциллятора, что соответствует выбору $f(x) = x^2/4$. Гильбертово пространство волновых функций строится в терминах волновых функций бозонного гармонического осциллятора. Анализ структуры квантовых состояний показал нетривиальные вырождения уровней Ландау. Операторы Казимира принимают нулевые значения только на уровнях $\ell = 0$ и $\ell = 1$, так что эти уровни образуют атипические представления супергруппы $SU(2|1)$. Из-за этого основное состояние $(\ell = 0)$ и первое возбужденное состояние $(\ell = 1)$ являются специальными, в том смысле, что их волновые функции включают неравное число бозонов и фермионов. На возбуждённых уровнях $\ell > 1$ оба оператора Казимира не равны нулю, так что эти состояния принадлежат к типическим $SU(2|1)$ представлениям, которые характеризуются равным числом бозонов и фермионов. Для наглядности, на рис. 1 показана картина вырождения уровней Ландау.

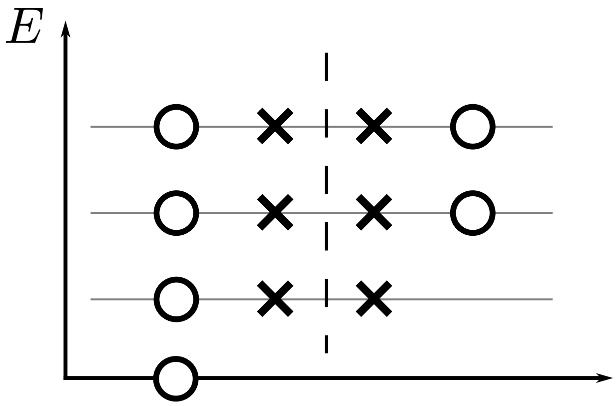

Рис. 1. Вырождение уровней Ландау. Круги и кресты обозначают бозонные и фермионные состояния.

**В разделе 2.2** мы рассматриваем мультиплет $(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{2})$, который описывается киральным суперполем $\Phi$. Мы показали наличие у супергруппы $SU(2|1)$ левого и правого киральных подпространств $\zeta_L = \{t_L, \theta_i\}$, $\zeta_R = \left\{t_R, \bar{\theta}^k\right\}$. Соответствующие комплексные бозонные координаты связаны с координатой времени $t$ как

$$t_L = t + i\,\bar{\theta}^k\theta_k - \frac{i}{2}\,m\,(\theta)^2\left(\bar{\theta}\,\right)^2, \qquad \text{и к.с..} \tag{21}$$

Грассмановы координаты $\theta_i$ и $\bar{\theta}^i$ такие же, как и в (11). Преобразования $SU(2|1)$ на координатах $\{t_L, \theta_i\}$, $\left\{t_R, \bar{\theta}^i\right\}$ замкнуты и реализованы как

$$\delta\theta_i = \epsilon_i + 2m\,\bar{\epsilon}^k\theta_k\theta_i\,, \qquad \delta t_L = 2i\,\bar{\epsilon}^k\theta_k\,, \quad \text{и к.с..} \tag{22}$$

Условие киральности

$$\bar{\mathcal{D}}_j\Phi = 0\,, \qquad \tilde{I}^i_j\Phi = 0\,, \qquad \tilde{F}\Phi = 2\kappa\Phi\,, \tag{23}$$

имеет решение

$$\Phi\left(t_L, \theta, \bar{\theta}\,\right) = \left(1 + 2m\,\bar{\theta}^k\theta_k\right)^{-\kappa}\Phi_L\left(t_L, \theta\right). \tag{24}$$

Здесь суперполе обладает фиксированным внешним $U(1)_{\rm int}$ зарядом. В принципе, мы могли бы приписать суперполю также нетривиальный внешний $SU(2)_{\rm int}$ индекс, но мы рассматриваем простейший случай.

Общий лагранжиан определяется через функцию $f\left(\Phi, \bar{\Phi}\right)$, которая является аналогом потенциала Кэлера стандартной $\mathcal{N}=4$ механики для мультиплета $(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{2})$:

$$\mathcal{L}_{\rm kin.} = \frac{1}{4}\int d^2\theta\, d^2\bar{\theta}\left(1 + 2m\,\bar{\theta}^k\theta_k\right) f\left(\Phi, \bar{\Phi}\right). \tag{25}$$

Так как $\Phi$ преобразуется с нетривиальным $U(1)_{\rm int}$ весом,

$$\delta\Phi = 2\kappa m\left(\epsilon_i\bar{\theta}^i + \bar{\epsilon}^j\theta_j\right)\Phi\,, \tag{26}$$

то потенциал Кэлера должен удовлетворять условию $f\left(\Phi, \bar{\Phi}\right) = \tilde{f}\left(\Phi\bar{\Phi}\right)$ для $\kappa \neq 0$. Если $\kappa = 0$, то потенциал $f\left(\Phi, \bar{\Phi}\right)$ – произвольная действительная функция.

Когда $\kappa \neq 0$, мы можем добавить к кинетическому лагранжиану $\mathcal{L}_{\text{kin.}}$ потенциальный член

$$\mathcal{L}_{\text{pot.}} = \tilde{m}\int d^2\theta\,\mathcal{U}\left(\Phi_L\right) + \text{к.с.}. \tag{27}$$

где $\tilde{m}$ – дополнительный параметр размерности массы. В отличие от случая стандартной $\mathcal{N}=4$ механики [28], $SU(2|1)$ инвариантный суперполевой потенциал $\mathcal{U}\left(\Phi_L\right)$ строго ограничен требованием компенсации нетривиального преобразования киральной меры $d\zeta_L = dt_L\, d^2\theta$:

$$\delta\left(d\zeta_L\right) = -\,2m\left(d\zeta_L\right)\bar{\epsilon}^k\theta_k\,. \tag{28}$$

Единственной возможностью обеспечения инвариантности является следующий выбор потенциала:

$$\mathcal{U}\left(\Phi_L\right) = \left(\Phi_L\right)^{\frac{1}{2\kappa}}. \tag{29}$$

Для $\kappa = 0$, никакого суперпотенциала в принципе не существует. Для простоты в дальнейшем мы ограничили наше рассмотрение выбором $\tilde{m} = 0$.

В этом разделе мы также проквантовали суперзаряды и рассмотрели квантовую модель на плоскости, которая соответствует простейшему выбору потенциала Кэлера $f\left(\Phi, \bar{\Phi}\right) = \Phi\bar{\Phi}$.

**В разделе 2.3** рассматривается обобщённый киральный мультиплет $(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{2})$ с целью описать суперсимметричный осциллятор Кэлера. Мы имеем дело с другим фактор-пространством $SU(2|1)$:

$$\frac{SU(2|1)}{SU(2)_{\text{int}}} \sim \frac{\{Q^i, \bar{Q}_j, \tilde{H}, I^i_j\}}{\{I^i_j\}}\,. \tag{30}$$

В новом фактор-пространстве гамильтониан $\tilde{H}$ является полным внутренним $U(1)_{\text{int}}$ генератором в супералгебре (6). Хотя $\tilde{H}$ не коммутирует с суперзарядами, соответствующие нётеровские заряды сохраняются из-за наличия в них явной зависимости от $t$. Такая же ситуация имеет место, например, в конформной и суперконформной механиках [21].

Применяя тот же метод форм Картана, легко найти соответствующие ковариантные производные:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^i &= e^{-\frac{imt}{2}} \Big\{ \Big[1 + m\,\bar{\theta}^k\theta_k - \frac{3m^2}{8}\,(\theta)^2\left(\bar{\theta}\,\right)^2\Big] \frac{\partial}{\partial\theta_i} - m\,\bar{\theta}^i\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j} - i\bar{\theta}^i\partial_t \\
&\quad - m\,\bar{\theta}^j\left(1 - m\,\bar{\theta}^k\theta_k\right)\tilde{I}^i_j \Big\}, \\
\bar{\mathcal{D}}_j &= e^{\frac{imt}{2}} \Big\{ - \Big[1 + m\,\bar{\theta}^k\theta_k - \frac{3m^2}{8}\,(\theta)^2\left(\bar{\theta}\,\right)^2\Big] \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^j} + m\,\bar{\theta}^k\theta_j\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^k} + i\theta_j\partial_t \\
&\quad + m\,\theta_k\left(1 - m\,\bar{\theta}^l\theta_l\right)\tilde{I}^k_j \Big\}, \\
\mathcal{D}_{(t)} &= \partial_t\,.
\end{aligned} \tag{31}$$

Объекты в квадратных скобках совпадают с ковариантными производными (14) без матричного генератора $U(1)_{\text{int}}$ , который теперь лежит вне подгруппы стабильности.

Киральное условие может быть обобщено как

$$\text{(a)}\;\; \left(\cos\omega\,\bar{\mathcal{D}}_i - \sin\omega\,\mathcal{D}_i\right)\varphi = 0\,, \qquad \text{(b)}\;\; \left(\cos\omega\,\mathcal{D}^i + \sin\omega\,\bar{\mathcal{D}}^i\right)\bar{\varphi} = 0\,. \tag{32}$$

Очевидно, что в подходе на основе суперпространства (9) условия (32) не ковариантны по подгруппе $U(1)_{\text{int}}$, генератор которой умножает $\mathcal{D}_i$ и $\bar{\mathcal{D}}_i$ на сопряжённые фазовые факторы. В нашем случае $\mathcal{D}_i$ и $\bar{\mathcal{D}}_i$ не подвергаются индуцированным суперсимметрией $U(1)_{\text{int}}$ фазовым преобразованиям, т. е. киральные условия (32) $SU(2|1)$ ковариантны для любого $\omega$. Линейные комбинации можно интерпретировать как результат вращения дублета $\mathcal{D}_{i'i} := (\mathcal{D}_i, \bar{\mathcal{D}}_i)$ по однопараметрической подгруппе внешней группы $SU'(2)$, действующий на индекс дублета $i'$. Так как эта подгруппа не является автоморфизмом супералгебры (8), зависимость от $\omega$ не может быть удалена из (32) переопределением грассмановых переменных $\theta_i$ , $\bar{\theta}^k$. Это возможно только в пределе $m = 0$ , когда $SU'(2)$ повороты становятся группой автоморфизмов $\mathcal{N} = 4$ , $d = 1$ супералгебры.

Условия (32) допускают существование киральных подпространств:

$$\hat{\zeta}_L = \left\{\hat{t}_L, \hat{\theta}_i\right\}, \qquad \hat{\zeta}_R = \left\{\hat{t}_R, \hat{\bar{\theta}}^i\right\}, \qquad \overline{(\hat{\zeta}_L)} = \hat{\zeta}_R\,, \tag{33}$$

где левое подпространство $\hat{\zeta}_L$ определяется как

$$\hat{t}_L = t + i\,\hat{\bar{\theta}}^k\hat{\theta}_k\,, \qquad \hat{\theta}_i = \left(\cos\omega\,\theta_i e^{\frac{i}{2}mt} + \sin\omega\,\bar{\theta}_i e^{-\frac{i}{2}mt}\right)\left(1 - \frac{m}{2}\,\bar{\theta}^k\theta_k\right). \tag{34}$$

В базисе $\left\{\hat{t}_L, \hat{\theta}_i, \hat{\bar{\theta}}^k\right\}$ условие кiральности (32a) решается в виде $\varphi = \varphi\big(\hat{t}_L, \hat{\theta}_i\big)$.

Наиболее общее $SU(2|1)$ инвариантное действие для обобщённого кирального суперполя $\varphi\big(\hat{t}_L, \hat{\theta}_i\big)$ задаётся произвольным потенциалом Кэлера $f\left(\varphi, \bar{\varphi}\right)$:

$$S_{\text{kin.}} = \int dt\,\mathcal{L}_{\text{kin.}} = \frac{1}{4}\int d\hat{\zeta}\, f\left(\varphi, \bar{\varphi}\right). \tag{35}$$

Соответствующий лагранжиан распознаётся как лагранжиан суперсимметричного осциллятора Кэлера [12], который зависит от напряжённости магнитного поля $m\cos 2\omega$ и частоты осциллятора Кэлера $(m\sin 2\omega)/2$ .

**В разделах 2.4 и 2.5** мы рассматриваем суперсимметричную механику для мультиплетов $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$ и зеркального $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$ в рамках гармонического суперпространства $SU(2|1)$. Для обоих мультиплетов мы построили соответствующие $SU(2|1)$ инвариантные лагранжианы, применили гамильтонов формализм и подробно рассмотрели простейшие свободные модели.

Соответствующие модели для двух $SU(2|1)$ мультиплетов $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$ имеют несколько серьёзных отличий. В частности, мы показали отсутствие действия Весса-Зумино для $SU(2|1)$ мультиплета $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$, в то же время как в зеркальном случае мы построили $SU(2|1)$ инвариантные суперполевые действия Весса-Зумино. Это означает, что в деформированном случае определённые взаимодействия этих мультиплетов могут быть не эквивалентны.

На самом деле, стандартные мультиплеты $(\mathbf{n},\mathbf{4},\mathbf{4}-\mathbf{n})$ плоской $\mathcal{N}=4$ , $d=1$ суперсимметрии могут иметь свои «зеркальные» (или «твистованные») аналоги, которые обладают тем же набором полей, но для которых две коммутирующие $SU(2)$ группы из группы автоморфизмов $SU(2)\times SU'(2)$ супералгебры $\mathcal{N}=4$ , $d=1$ меняются ролями. Поскольку эти автоморфизмы входят в расширенную ими супералгебру совершенно симметричным образом, разница между двумя взаимно зеркальными мультиплетами проявляется только в тех моделях суперсимметричной квантовой механики, где эти мультиплеты присутствуют одновременно. В $SU(2|1)$ деформированном случае, симметрия между двумя бывшими группами автоморфизмов $SU(2)$ и $SU'(2)$ плоской супералгебры нарушена: первая группа $SU(2)$ становится внутренней группой $SU(2)_{\rm int}$ , в то время как только генератор $F$ из $SU'(2)$ выживает в супералгебре (8). Таким образом, возникает существенная разница между $SU(2|1)$ мультиплетами и их возможными зеркальными партнёрами.

**В третьей главе** мы рассматриваем подкласс моделей $SU(2|1)$ механики, которые обладают суперконформной симметрией $D(2,1;\alpha)$. Супералгебра $D(2,1;\alpha)$ содержит 8 суперзарядов и 9 бозонных генераторов со следующими ненулевыми (анти)коммутаторами:

$$\{Q_{\alpha i i'}, Q_{\beta j j'}\} = 2\left[\epsilon_{ij}\epsilon_{i'j'}T_{\alpha\beta} + \alpha\,\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{i'j'}J_{ij} - (1{+}\alpha)\,\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{ij}L_{i'j'}\right], \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
&[T_{\alpha\beta}, Q_{\gamma i i'}] = -i\,\epsilon_{\gamma(\alpha}Q_{\beta)ii'}\,, \qquad [T_{\alpha\beta}, T_{\gamma\delta}] = i\left(\epsilon_{\alpha\gamma}T_{\beta\delta} + \epsilon_{\beta\delta}T_{\alpha\gamma}\right),\\
&[J_{ij}, Q_{\alpha k i'}] = -i\,\epsilon_{k(i}Q_{\alpha j)i'}\,, \qquad [J_{ij}, J_{kl}] = i\left(\epsilon_{ik}J_{jl} + \epsilon_{jl}J_{ik}\right),\\
&[L_{i'j'}, Q_{\alpha i k'}] = -i\,\epsilon_{k'(i'}Q_{\alpha i j')}\,, \qquad [L_{i'j'}, L_{k'l'}] = i\left(\epsilon_{i'k'}L_{j'l'} + \epsilon_{j'l'}L_{i'k'}\right).
\end{aligned} \tag{37}$$

Бозонная подалгебра есть сумма 3 взаимно коммутирующих алгебр $su(2)\oplus su'(2)\oplus$

$so(2,1)$ с генераторами $J_{ik}$ , $L_{i'k'}$ и $T_{\alpha\beta}$, соответственно. Перестановка $\alpha$ как $\alpha \leftrightarrow -(1+\alpha)$ означает перестановку $SU(2)$ генераторов как $J_{ik} \leftrightarrow L_{i'k'}$ .

$\mathcal{N} = 4$ , $d = 1$ супералгебра Пуанкаре определяется как подалгебра $D\,(2,1;\alpha)$:

$$\{Q_{1ii'}, Q_{1jj'}\} = 2\epsilon_{ij}\epsilon_{i'j'}\hat{H}. \tag{38}$$

Бозонный генератор $\hat{H}$ является одним из генераторов стандартной конформной алгебры $so(2,1)$, которые определены как

$$\hat{H} := T_{11}\,, \qquad \hat{K} := T_{22}\,, \qquad \hat{D} := T_{12}\,, \tag{39}$$

$$\left[\hat{D}, \hat{H}\right] = -i\hat{H}, \qquad \left[\hat{D}, \hat{K}\right] = i\hat{K}, \qquad \left[\hat{H}, \hat{K}\right] = 2i\hat{D}. \tag{40}$$

**В разделе 3.2** рассмотрено вложение супералгебры $su(2|1)$ в $D\,(2,1;\alpha)$. Для этого мы переходим к новому базису в $D\,(2,1;\alpha)$ с помощью следующих линейных преобразований:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{ik}Q_{1k1'} =: -\frac{1}{2}\left(S^i + Q^i\right), \qquad Q_{1j2'} =: -\frac{1}{2}\left(\bar{S}_j + \bar{Q}_j\right),\\
&\varepsilon^{ik}Q_{2k1'} =: \frac{i}{\mu}\left(Q^i - S^i\right), \qquad Q_{2j2'} =: -\frac{i}{\mu}\left(\bar{Q}_j - \bar{S}_j\right),\\
&T_{22} =: \frac{2}{\mu^2}\left[\mathcal{H} - \frac{1}{2}\left(T + \bar{T}\right)\right], \qquad T_{11} =: \frac{1}{2}\left[\mathcal{H} + \frac{1}{2}\left(T + \bar{T}\right)\right],\\
&T_{12} = T_{21} =: \frac{i}{2\mu}\left(T - \bar{T}\right), \qquad \mu \neq 0\,,\\
&L_{1'1'} =: -iC, \quad L_{2'2'} =: i\bar{C}, \quad L_{1'2'} = L_{2'1'} =: -iF, \qquad J^i_j =: -iI^i_j\,.
\end{aligned} \tag{41}$$

Параметр $\mu$ является действительным параметром размерности массы.

В новом базисе суперконформная алгебра включает в качестве подалгебры супералгебру $su(2|1)$, определённую как

$$\begin{aligned}
&\{Q^i, \bar{Q}_j\} = -\,2\alpha\mu\, I^i_j + 2\delta^i_j\left[\mathcal{H} + (1+\alpha)\,\mu\, F\right],\\
&[F, \bar{Q}_l] = -\frac{1}{2}\,\bar{Q}_l\,, \quad [F, Q^k] = \frac{1}{2}\,Q^k, \quad [\mathcal{H}, \bar{Q}_l] = \frac{\mu}{2}\,\bar{Q}_l\,, \quad [\mathcal{H}, Q^k] = -\frac{\mu}{2}\,Q^k,\\
&[I^i_j, \bar{Q}_l] = \frac{1}{2}\delta^i_j\bar{Q}_l - \delta^i_l\bar{Q}_j\,, \qquad [I^i_j, Q^k] = \delta^k_j Q^i - \frac{1}{2}\delta^i_j Q^k.
\end{aligned} \tag{42}$$

Эти соотношения совпадают с (8) при следующем отождествлении:

$$m(\mu) = -\alpha\mu\,, \qquad H(\mu) = \mathcal{H} + \mu\, F. \tag{43}$$

Заметим, что замыкание $SU(2|1)$ суперзарядов зависит от параметра $\alpha$, поскольку $SU(2)$ и $SU'(2)$ генераторы $J_{ij} = -iI_{ij}$ и $L_{i'j'} \sim \left\{F, C, \bar{C}\right\}$ появляются в антикоммутаторах (36) с факторами $\alpha$ и $1+\alpha$ соответственно. Генератор $F$ в (42) происходит из алгебры $su'(2)$, в то время как алгебра $su(2)$ с генераторами $I_{ij}$ является подалгеброй (42), $su(2) \subset su(2|1)$.

Другое вложение $su(2|1) \subset D\,(2,1;\alpha)$ связано с суперзарядами $S^i$ и $\bar{S}_j$, которые генерируют супералгебру $su(2|1)$, но с противоположным по знаку параметром $\mu$ по сравнению с (42). Все остальные генераторы $T$ , $\bar{T}$ , $C$ , $\bar{C}$ появляются в антикоммутаторах суперзарядов $(Q^i, \bar{Q}_j)$ с $(S_i, \bar{S}^j)$. Таким образом, супералгебра $D\,(2,1;\alpha)$ может быть представлена в виде замыкания двух её $su(2|1)$ подалгебр, которые переходят друг в друга при отражении $\mu \to -\mu$ . Это наблюдение оказывается очень полезным для построения $D\,(2,1;\alpha)$ инвариантного подкласса $SU(2|1)$ инвариантных действий.

После возвращения к первоначальным суперконформным генераторам, любая зависимость (анти)коммутационных соотношений от $\mu$ исчезает, но она по-прежнему сохраняется в реализации $D\,(2,1;\alpha)$ на координатах $SU(2|1)$ суперпространства. Беря предел $\mu = 0$ в этом базисе, мы получаем стандартную параболическую реализацию $D\,(2,1;\alpha)$ в плоском $\mathcal{N} = 4$ , $d = 1$ суперпространстве.

Ещё одна особенность связана с наличием композитного параметра деформации $m = -\alpha\mu$ в (42). Он обращается в ноль не только в стандартном пределе $\mu = 0$ , но также в пределе $\alpha = 0$ с $\mu \neq 0$ . Супералгебра (42) при $\alpha = 0$ переходит в $\mathcal{N} = 4$ супералгебру

$$\begin{aligned}
&\{Q^i, \bar{Q}_j\} = 2\delta^i_j\,(\mathcal{H} + \mu\,F)\,, \\
&\big[F, \bar{Q}_l\big] = -\frac{1}{2}\,\bar{Q}_l\,, \quad \big[F, Q^k\big] = \frac{1}{2}\,Q^k, \quad \big[\mathcal{H}, \bar{Q}_l\big] = \frac{\mu}{2}\,\bar{Q}_l\,, \quad \big[\mathcal{H}, Q^k\big] = -\frac{\mu}{2}\,Q^k. \qquad (44)
\end{aligned}$$

Эта алгебра всё ещё образует подалгебру в $D(2,1;\alpha = 0)$. Тем не менее, она не совпадает со стандартной плоской $\mathcal{N} = 4$ , $d = 1$ супералгеброй Пуанкаре в пределе $\mu = 0$ , потому что антикоммутатор в (44) порождает сумму $\mathcal{H} + \mu F$ . Генераторы $I^j_i$ становятся генераторами автоморфизмов алгебры (44) и супералгебры $psu(1,1|2)$, в то время как генератор $F$ остаётся внутренним $U(1)$ генератором. Вся супералгебра $D(2,1;\alpha = 0)$ теперь может рассматриваться как замыкание супералгебры (44) и её $\mu \to -\mu$ аналога.

Кроме суперпространств (9) и (30), мы можем рассмотреть ещё одно $SU(2|1)$ суперпространство, которое определено как фактор-пространство

$$\frac{SU(2|1) \rtimes U(1)_{\text{ext}}}{SU(2) \times U(1)_{\text{int}}} \sim \frac{\{Q^i, \bar{Q}_j, \mathcal{H}, F, I^i_j\}}{\{I^i_j, F\}}\,. \qquad (45)$$

В случае $\alpha = -1$ , убирая генератор $F$ из (45), мы получаем суперпространство (30) с параметром деформации $m = \mu$ . В пределе $\alpha = 0$ мы переходим к фактор-пространству

$$\frac{(\mathcal{N} = 4, d = 1) \rtimes U(1)_{\text{ext}}}{U(1)_{\text{int}}} \sim \frac{\{Q^i, \bar{Q}_j, \mathcal{H}, F\}}{\{F\}}\,, \qquad (46)$$

где $(\mathcal{N} = 4, d = 1) \rtimes U(1)_{\text{ext}}$ соответствует алгебре (44). Подставляя $\alpha = 0$ во все формулы, соответствующие выбору (45), мы приходим к суперпространству (46) и соответствующему суперполевому формализму.

**В разделе 3.2** найдена тригонометрическая реализация суперконформных генераторов на координатах суперпространства $SU(2|1)$. Суперконформные генераторы (41) могут быть реализованы на $SU(2|1)$ суперпространстве (45). Элемент этого фактор-пространства определяется через (10) как

$$g_1 = g\exp\{-i\mu tF\}\,. \tag{47}$$

В частном случае $\alpha = 0$ в (47) , элемент фактор-пространства параметризуется координатами плоского суперпространства $\zeta_{(\alpha=0)} = \left\{t, \theta_i, \bar{\theta}^k\right\}$. На самом деле, элемент (47) совпадает с элементом фактор-пространства конформной супергруппы $D(2,1;\alpha)$:

$$\frac{\{Q^i, \bar{Q}_j, S^i, \bar{S}_j, \mathcal{H}, T, \bar{T}, F, C, \bar{C}, I^i_j\}}{\{I^i_j, F, C, \bar{C}, T-\bar{T}, \mathcal{H}-\frac{1}{2}\left(T+\bar{T}\right), S^i-Q^i, \bar{S}_k-\bar{Q}_k\}}\,. \tag{48}$$

Генераторы, помещённые в знаменатель, действительно образуют замкнутую алгебру.

На координате $t$ тригонометрическая форма конформных генераторов $\{\mathcal{H}, T, \bar{T}\}$ записывается в виде

$$\mathcal{H} = i\partial_t\,, \qquad T = ie^{-i\mu t}\partial_t\,, \qquad \bar{T} = ie^{i\mu t}\partial_t\,, \tag{49}$$

Стандартные $so(2,1)$ генераторы (39), определённые в (41), выражаются как

$$\hat{H} = \frac{i}{2}\left(1+\cos\mu t\,\right)\partial_t\,, \quad \hat{K} = \frac{2i}{\mu^2}\left(1-\cos\mu t\,\right)\partial_t\,, \quad \hat{D} = \frac{i}{\mu}\sin\mu t\,\partial_t\,. \tag{50}$$

В пределе $\mu \to 0$ эти генераторы превращаются в параболические генераторы

$$\hat{H} = i\partial_t\,, \qquad \hat{D} = it\partial_t\,, \qquad \hat{K} = it^2\partial_t\,. \tag{51}$$

Такие же свойства присущи всей совокупности $D(2,1;\alpha)$ генераторов (41) для $\mu \neq 0$ .

**В следующем разделе 3.3** показано, что после соответствующего переопределения координат $SU(2|1)$ суперпространства весь набор суперконформных генераторов может быть построен в терминах деформированных суперзарядов $Q(\mu)$ и $S(\mu) \equiv Q(-\mu)$ .

**В разделах 3.4 – 3.6** построены суперконформные лагранжианы для мультиплетов $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$, $(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{2})$ и $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$.

**В Заключении** приведены основные результаты диссертационной работы и обсуждаются направления возможных дальнейших исследований.

**В Приложении А** рассмотрена суперсимметричная модель Ландау на фермионном фактор-пространстве $SU(2|1)/U(2)$.

**В Приложении Б** дана классификация конечномерных неприводимых представлений супергруппы $SU(2|1)$.

# Список публикаций по теме диссертации

A1. M. Goykhman, E. Ivanov, and S. Sidorov, "Super Landau Models on Odd Cosets," *Phys. Rev.* **D87**, (2013) 025026, `arXiv:1208.3418 [hep-th]`.

A2. E. Ivanov and S. Sidorov, "Deformed Supersymmetric Mechanics," *Class. Quant. Grav.* **31** (2014) 075013, `arXiv:1307.7690 [hep-th]`.

A3. E. Ivanov and S. Sidorov, "Super Kähler oscillator from SU(2|1) superspace," *J. Phys.* **A47** (2014) 292002, `arXiv:1312.6821 [hep-th]`.

A4. S. Sidorov, "Deformed $\mathcal{N} = 4$, d = 1 supersymmetry," *Phys. Part. Nucl. Lett.* **11**, (2014) 971–973.

A5. E. Ivanov and S. Sidorov, "New Type of $\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric Mechanics," *Springer Proc. Math. Stat.* **111** (2014) 51–66.

A6. E. Ivanov and S. Sidorov, "New type of $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric quantum mechanics," *AIP Conf. Proc.* **1606** (2014) 374–385.

A7. E. Ivanov, S. Sidorov, and F. Toppan, "Superconformal mechanics in SU(2|1) superspace," *Phys. Rev.* **D91**, (2015) 085032, `arXiv:1501.05622 [hep-th]`.

A8. E. Ivanov and S. Sidorov, "SU(2|1) mechanics and harmonic superspace," `arXiv:1507.00987 [hep-th]`.

# Список цитируемой литературы

1. K. Becker, M. Becker, and J. Schwarz, *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction.* Cambridge University Press, 2006.

2. E. Witten, "Dynamical Breaking of Supersymmetry," *Nucl. Phys.* **B188** (1981) 513.

3. E. Witten, "Constraints on Supersymmetry Breaking," *Nucl. Phys.* **B202** (1982) 253.

4. G. Festuccia and N. Seiberg, "Rigid Supersymmetric Theories in Curved Superspace," *JHEP* **06** (2011) 114, `arXiv:1105.0689 [hep-th]`.

5. T. T. Dumitrescu, G. Festuccia, and N. Seiberg, "Exploring Curved Superspace," *JHEP* **08** (2012) 141, `arXiv:1205.1115 [hep-th]`.

6. I. B. Samsonov and D. Sorokin, "Superfield theories on $S^3$ and their localization," *JHEP* **04** (2014) 102, `arXiv:1401.7952 [hep-th]`.

7. I. B. Samsonov and D. Sorokin, "Gauge and matter superfield theories on $S^2$," *JHEP* **09** (2014) 097, `arXiv:1407.6270 [hep-th]`.

8. B. Assel, D. Cassani, L. Di Pietro, Z. Komargodski, J. Lorenzen, and D. Martelli, “The Casimir Energy in Curved Space and its Supersymmetric Counterpart,” *JHEP* **07** (2015) 043, `arXiv:1503.05537 [hep-th]`.

9. A. V. Smilga, “Weak supersymmetry,” *Phys. Lett.* **B585** (2004) 173–179, `arXiv:hep-th/0311023`.

10. D. Robert and A. V. Smilga, “Supersymmetry vs ghosts,” *J. Math. Phys.* **49** (2008) 042104, `arXiv:math-ph/0611023`.

11. S. Bellucci and A. Nersessian, “(Super)oscillator on CP**N and constant magnetic field,” *Phys. Rev.* **D67** (2003) 065013, `arXiv:hep-th/0211070`. [Erratum: Phys. Rev.D71,089901(2005)].

12. S. Bellucci and A. Nersessian, “Supersymmetric Kahler oscillator in a constant magnetic field,” in *International Seminar on Supersymmetries and Quantum Symmetries SQS 03 Dubna, Russia, July 24-29, 2003.* 2004. `arXiv:hep-th/0401232`.

13. E. Ivanov, L. Mezincescu, and P. K. Townsend, “A Super-Flag Landau model,” `arXiv:hep-th/0404108`.

14. E. Ivanov, L. Mezincescu, A. Pashnev, and P. K. Townsend, “Odd coset quantum mechanics,” *Phys. Lett.* **B566** (2003) 175–182, `arXiv:hep-th/0301241`.

15. A. Beylin, T. L. Curtright, E. Ivanov, L. Mezincescu, and P. K. Townsend, “Unitary Spherical Super-Landau Models,” *JHEP* **10** (2008) 069, `arXiv:0806.4716 [hep-th]`.

16. V. Bychkov and E. Ivanov, “N=4 Supersymmetric Landau Models,” *Nucl. Phys.* **B863** (2012) 33–64, `arXiv:1202.4984 [hep-th]`.

17. G. Papadopoulos, “New potentials for conformal mechanics,” *Class. Quant. Grav.* **30** (2013) 075018, `arXiv:1210.1719 [hep-th]`.

18. V. de Alfaro, S. Fubini, and G. Furlan, “Conformal Invariance in Quantum Mechanics,” *Nuovo Cim.* **A34** (1976) 569.

19. E. Ivanov, S. Krivonos, and O. Lechtenfeld, “New variant of N=4 superconformal mechanics,” *JHEP* **03** (2003) 014, `arXiv:hep-th/0212303`.

20. E. Ivanov, S. Krivonos, and O. Lechtenfeld, “N=4, d = 1 supermultiplets from nonlinear realizations of $D(2,1;\alpha)$,” *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 1031–1050, `arXiv:hep-th/0310299`.

21. S. Fedoruk, E. Ivanov, and O. Lechtenfeld, “Superconformal Mechanics,” *J. Phys.* **A45** (2012) 173001, `arXiv:1112.1947 [hep-th]`.

22. N. L. Holanda and F. Toppan, “Four types of (super)conformal mechanics: D-module reps and invariant actions,” *J. Math. Phys.* **55** (2014) 061703, `arXiv:1402.7298 [hep-th]`.

23. S. Bellucci and S. Krivonos, “Potentials in N=4 superconformal mechanics,” *Phys. Rev.* **D80** (2009) 065022, `arXiv:0905.4633 [hep-th]`.

24. E. Ivanov and O. Lechtenfeld, “N=4 supersymmetric mechanics in harmonic superspace,” *JHEP* **09** (2003) 073, `arXiv:hep-th/0307111`.

25. A. S. Galperin, E. A. Ivanov, V. I. Ogievetsky, and E. S. Sokatchev, *Harmonic Superspace*. Cambridge University Press, 2001.

26. E. A. Ivanov, S. O. Krivonos, and V. M. Leviant, “Geometric Superfield Approach to Superconformal Mechanics,” *J. Phys.* **A22** (1989) 4201.

27. E. A. Ivanov, S. O. Krivonos, and A. I. Pashnev, “Partial supersymmetry breaking in N=4 supersymmetric quantum mechanics,” *Class. Quant. Grav.* **8** (1991) 19–40.

28. V. Berezovoi and A. Pashnev, “On the structure of the N=4 supersymmetric quantum mechanics in D = 2 and D = 3,” *Class. Quant. Grav.* **13** (1996) 1699, `arXiv:hep-th/9506094`.