

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

Фризен Александра Вадимовна

**ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА  
МАТЕРИИ В ЭФФЕКТИВНЫХ КИРАЛЬНЫХ  
МОДЕЛЯХ КХД**

Специальность: 01.04.16

Физика атомного ядра и элементарных частиц

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

доктор физ.-мат.наук,  
Ю. Л. Калиновский,  
доктор физ.-мат. наук,  
В. Д. Тонеев

Дубна — 2015 г.

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Эффективные модели КХД</b>	<b>13</b>
1.1 Лагранжиан модели Намбу-Иона-Лазинио. Симметрии .	16
1.1.1 Конституентные кварки и мезоны . . . . .	17
1.2 Модель Намбу-Иона-Лазинио в среде. Приближение среднего поля . . . . .	21
1.3 Регуляризация . . . . .	24
1.4 Фазовая диаграмма . . . . .	26
1.5 Выводы . . . . .	30
<b>2 Модель Намбу-Иона-Лазинио с петлей Полякова</b>	<b>31</b>
2.1 Конфайнмент в модели НИЛ . . . . .	32
2.1.1 Эффективный потенциал . . . . .	32
2.1.2 Приближение среднего поля. Спектр масс . . . . .	38
2.2 Векторное взаимодействие . . . . .	46
2.3 Уравнения состояния кварковой материи . . . . .	52
2.4 Влияние мезонных корреляций на уравнения состояния адронной материи . . . . .	56
2.4.1 Теорема Левинсона . . . . .	65
2.5 Выводы . . . . .	67
<b>3 Процессы рассеяния в плотной и горячей ядерной материи</b>	<b>70</b>
3.1 Упругое рассеяние кварка на кварке и антикварке . . . . .	71
3.2 Упругое рассеяние кварка на пионе . . . . .	76
3.3 Выводы . . . . .	85
<b>Заключение</b>	<b>86</b>
<b>Приложение 1</b>	<b>89</b>
<b>Приложение 2</b>	<b>92</b>
<b>Список литературы</b>	<b>96</b>

## Введение

В настоящее время исследование свойств ядерной материи в экстремальных условиях больших сжатий и высоких температур является актуальной проблемой физики столкновения тяжелых ионов. Это отражается как в большом числе теоретических работ по этой тематике, так и в строительстве новых ускорителей и экспериментальных установок. Особенно большое внимание уделяется вопросу поиска фазового перехода от горячей и сжатой материи к состоянию кварк-глюонной плазмы. Существование такого фазового перехода теоретически было предсказано Дж. Коллинсом и М. Перри в 1975 году [1]. Они предположили, что в сильно нагретой и сжатой ядерной материи, вслед за перекрытием объемов нуклонов, может возникнуть состояние, когда принадлежность кварков одному объекту станет не очевидной. Таковую систему можно будет рассматривать как газ квази-свободных частиц, состоящий из сильно-взаимодействующих кварков и глюонов (кварк-глюонную плазму).

Проверка этой гипотезы, и достижение температуры и плотности, достаточных для такого перехода ( $T_c \sim 2 \cdot 10^{12}$  К) стали возможными в экспериментах по столкновению тяжелых ионов [2]. В настоящее время исследование фазовой диаграммы сильно-взаимодействующей материи проводится в экспериментах на ускорителях AGS, RHIC (Брукхейвен, США), SPS, LHC (ЦЕРН, Швейцария). В этих экспериментах энергия в системе центра масс столкновения ионов меняется от  $\sqrt{s} = 5$  ГэВ (AGS) до  $\sqrt{s} = 2700$  ГэВ (и планируемых 5500 ГэВ) (LHC). На исследования ядерной материи при меньших энергиях (небольших температурах и больших плотностях) направлены научные программы экспериментов CBM@FAIR (Дармштадт, Германия) и NICA-MPD (Дубна, Россия), которые покроют область энергий  $\sqrt{s} = 4 - 11$  ГэВ.

С экспериментальной точки зрения, при столкновении тяжелых ионов, система проходит стадию теплового равновесия (КТП), фазу адронного газа и стадию кинетическое охлаждения. В момент столкновения тяжелых ионов образуется горячий и плотный сгусток материи, в котором партоны (кварки и глюоны) являются свободными частицами и участвуют в неупругих столкновениях до тех пор, пока система не достигнет теплового равновесия - состояния кварк-глюонной плаз-

мы. Практически сразу после столкновения, образовавшийся сгусток материи начинает расширяться из-за внутреннего давления в системе. Расширение приводит к охлаждению и кварки с глюонами начинают "склеиваться" в адроны - происходит процесс адронизации. При дальнейшем расширении существенную роль начинают играть процессы неупругого рассеяния адронов, которые прекращаются, когда в системе происходит так называемое "химическое охлаждение". Дальнейшее расширение приводит к прекращению даже упругих столкновений адронов, в этот момент происходит тепловое (или кинетическое) охлаждение системы (freeze-out) [3, 4].

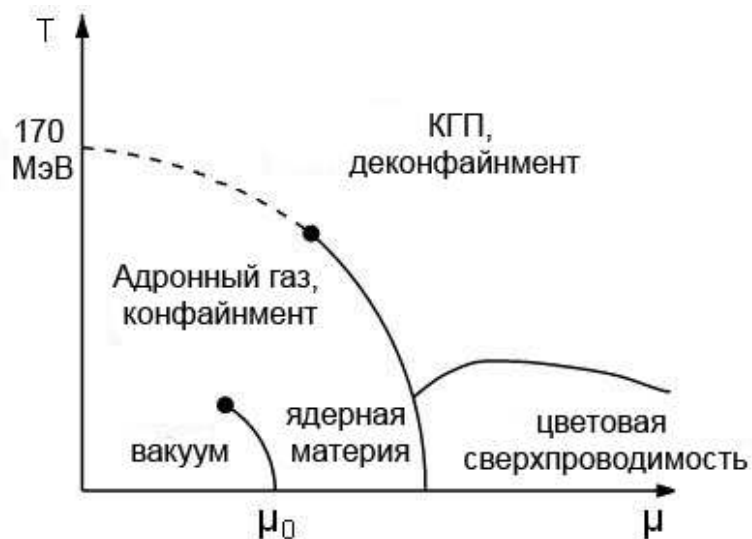


Рис. 1: Фазовая диаграмма. Пунктирной линией показан фазовый переход типа "кроссовер". Рисунок взят из статьи [5] с небольшими упрощениями.

С теоретической точки зрения, этот сложный процесс можно отразить на фазовой диаграмме адронной материи, которая описывается в терминах температуры и химического потенциала, связанного с сохранением числа кварков (либо барионного химического потенциала). Такая диаграмма однозначно должна включать как фазу, в которой кварки заключены внутри адронов, так и фазу, в которой они свободны [5, 6]. Согласно современным теоретическим предположениям, фазовая диаграмма имеет гораздо более сложную структуру и может включать в себя большее число фаз. Самый простой вариант фазовой диаграммы представлен схематически на Рис.1. Из рисунка видно, что

при низких температурах и плотностях вещество состоит из адронов и ядер, и кварк-глюонные степени свободы заморожены. Если плотность достаточно велика, при низких температурах может возникнуть специфическое состояние вещества - цветовая сверхпроводимость [7–9]. С ростом температуры при фиксированных невысоких значениях химического потенциала происходит переход от адронной фазы к фазе кварк-глюонной плазмы, однако, граница здесь может оказаться настолько размытой (кроссовер), что говорить о фазовом переходе станет не совсем правомерным (см., например [6]). Ожидается, что при средних значениях температуры и химического потенциала фазовый переход изменит свою структуру и станет фазовым переходом первого рода. Для полного описания структуры фазовой диаграммы необходима теория, способная охватить основные принципы взаимодействия кварков и глюонов.

На сегодняшний день общепринятой теорией сильных взаимодействий является квантовая хромодинамика (КХД), которая описывает взаимодействие между кварками и глюонами на основе обмена цветовыми зарядами [10]. Неабелева природа КХД позволяет ввести и описать два основополагающих явления КХД: асимптотическую свободу и конфайнмент. Асимптотическая свобода, описывающая свойство кварков и глюонов слабо взаимодействовать при высоких энергиях, была предсказана в 1973 году Франком Вилчеком, Давидом Гроссом и Давидом Политцером, получившими за это в 2004 году Нобелевскую премию [11, 12]. Свойство кварков образовывать в нормальных условиях бесцветные состояния (адроны) называется конфайнментом. Его существование можно объяснить наличием вакуумного глюонного конденсата, энергия которого меньше, чем энергия "пустого" вакуума. Нарушение киральной симметрии и тот факт, что кварки в адронах имеют массу, много большую токовой массы, объясняют существованием кварк-антикваркового конденсата. Таким образом, с ростом температуры и плотности КХД материя может претерпевать два фазовых перехода: деконфайнмент цвета и восстановление киральной симметрии. На сегодняшний день постулаты квантовой хромодинамики являются неоспоримыми, но использовать лагранжиан КХД для прямых расчетов очень сложно. Для получения информации о фазовых состо-

яниях ядерной материи был разработан метод прямых вычислений на решетке [13].

Киральный фазовый переход, согласно данным решеточной КХД, происходит при температуре  $T_c^{\text{lat}} \sim 0.154 \pm 0.009$  ГэВ [13] для случая с 2+1 ароматами и 0.170 ГэВ для случая с двумя ароматами [14] и должен совпадать с переходом типа деконфайнмент. Остается неясной природа фазовых переходов: расчеты на решетке в чисто калибровочном секторе показывают фазовый переход первого рода [15], а при включении легких кварков - переход типа кроссовер. Подход, применимый в решеточной КХД можно считать довольно точным, но существуют некоторые трудности, связанные, например, с недостаточной мощностью современных суперкомпьютеров, что не позволяет сделать размер элементарной ячейки достаточно мелким. И кроме того, масса кварков, используемая в расчетах на решетке, на порядок больше массы реальных кварков. Расчеты на решетке затруднены также в области конечного химического потенциала в связи с возникновением так называемой "проблемы знака", для решения которой предлагается, например, введение комплексного химического потенциала для двух ароматов [16].

Эти сложности стали одной из причин развития эффективных, КХД-мотивированных моделей типа модели Намбу-Иона-Лазинио [17] или линейной  $\sigma$ -модели [18] как предельных случаев КХД при низких энергиях. Модель Намбу-Иона-Лазинио (НИЛ) возникла в 1961 году в результате попытки объяснить происхождение массы нуклона через механизм спонтанного нарушения киральной симметрии и была построена по аналогии с моделью сверхпроводимости Бардина-Купера-Шриффера [17]. Так как квантовая хромодинамика на тот момент еще не была построена, модель не включала в себя понятия кварков и глюонов. Для кварков модель была переформулирована несколько позже, японскими физиками Т. Егучи и К. Кикава [19, 20]. Они показали, как токовые кварки с массой  $m_0 = 0$  ГэВ переходят в массивные кварки с массой  $m \sim 0.3$  ГэВ, составляющие адроны через механизм спонтанного нарушения киральной симметрии. В их работах токовые массы кварков и массы псевдоскалярных мезонов равны нулю (так называемый киральный предел). Более реалистичный вариант модели с нену-

левыми токовыми массами кварков ( $m \sim 5$  МэВ) был предложен М. К. Волковым с соавторами [21–23]. Процедура адронизации, позволившая определить массы мезонов и их внутренние свойства была предложена авторами работ [24–27]. Использование модели Намбу-Иона-Лазинио удобно для описания свойств мезонов и изучения свойств адронной материи при конечной температуре [28–31]. Применение модели НИЛ к исследованию свойств материи при конечных температуре и плотности было инициировано авторами работ [32, 33] и продолжено в дальнейших работах по модели НИЛ (см. например, [34, 35]).

Из-за того, что в модели НИЛ присутствует четырехфермионное взаимодействие, она является неперенормируемой и существенным моментом применения модели является выбор регуляризационной схемы [31, 34, 36]. Устранить ограничения, налагаемые введением регуляризации, можно, используя нелокальную модель Намбу-Иона-Лазинио [37–39], однако и здесь возникают проблемы, связанные с выбором нелокального взаимодействия, поскольку однозначного метода вывода эффективного нелокального лагранжиана из лагранжиана КХД нет. Одним из способов построения нелокальной теории является, например, использование инстантонного представления вакуума КХД [40–42].

Локальное взаимодействие в НИЛ не позволяет описать явление конфайнмента. Но модель НИЛ остается актуальной, так как для описания многих процессов, наличие конфайнмента не является определяющим. Модель, связывающая кварки с однородным фоновым калибровочным полем, динамика которого описывается петлей Полякова [43–46], была предложена на основе модели НИЛ в 2004 году [47, 48]. Модель НИЛ с петлей Полякова (НИЛП) широко используется для изучения термодинамических свойств адронной материи как в критических условиях столкновения тяжелых ионов [48–51], так и в критических условиях, возникающих в нейтронных звездах (см., например, [52–54]).

Расчеты, выполненные в решеточной КХД, показали, что температура кирального фазового перехода и температура фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент совпадают. И следовательно, можно с уверенностью говорить о сильной связи между кварковым конденса-

том и калибровочным фоновым полем. Начиная с самых первых работ по модели НИЛП, было отмечено, что критическая температура фазового перехода при нулевом химическом потенциале сильно завышена ( $\sim 0.23$  ГэВ) по сравнению с данными решеточной КХД ( $\sim 0.17$  ГэВ) или даже стандартной НИЛ ( $\sim 0.19$  ГэВ). Изменение параметров модели позволяет снизить температуру фазового перехода, но приводит к тому, что температура кирального фазового перехода и температура деконфайнмента перестали совпадать, это противоречит данным, полученным в решеточной КХД [48, 49]. Авторы [55] предположили, что связь между кварками и глюонами в модели НИЛП недостаточно сильна и ввели феноменологическую зависимость константы четырехкваркового взаимодействия от поля петли Полякова [56–58].

На структуру фазовой диаграммы влияет так же включение отталкивания между кварками (или векторного взаимодействия). Этот вопрос рассматривался как в рамках модели НИЛ [59, 60], так и в рамках модели НИЛ с петлей Полякова [51, 61–66]. Векторное взаимодействие приводит к тому, что на фазовой диаграмме происходит уменьшение области фазового перехода первого рода и полное ее исчезновение, когда константа взаимодействия достаточно велика. Ситуация меняется с использованием нелокальной модели НИЛ с петлей Полякова. Такая модель показывает, что область фазового перехода первого рода не зависит от величины векторного взаимодействия (см., например, [67]).

Включение зависимости константы векторного взаимодействия от поля петли Полякова обсуждалось в работах [58, 68]. Полученная модель удовлетворяет не только условию совпадения кирального фазового перехода и перехода типа деконфайнмент, но и показывает исчезновение области фазового перехода первого рода при гораздо больших значениях константы векторного взаимодействия.

Процесс эволюции столкновения тяжелых ионов может быть выражен не только в терминах фазовой диаграммы возбужденной ядерной материи, но и с точки зрения гидродинамики или кинетики. Изучение динамики столкновения тяжелых ионов дало толчок в развитии таких моделей, как многофазная транспортная модель (АМРТ) [69] и партон-адронная струнная динамика (PHSD) [70–72]. Обе эти модели



описывают эволюцию столкновения тяжелых ионов, исходя из описания кварк-глюонной системы, как начальных условий и эволюцию конечной адронной фазы. Изучение динамики этих фаз основано на изучении происходящих в них процессов рассеяния. Переход от кваркового газа к адронному характеризуется преимущественно неупругими столкновениями, дальнейшее расширение и охлаждение сопровождается появлением упругих столкновений. Модели НИЛ и НИЛП используются для изучения свойств связанных состояний вблизи фазовых переходов, а также процессов распада и рассеяния мезонов и кварков при конечных температурах и плотностях. Изучение таких процессов немаловажно, так как они могут служить источником информации о происходящих в системе фазовых изменениях в экстремальных условиях высоких температур и плотностей.

**Целью диссертации** является развитие эффективных методов для изучения адронной материи при столкновении тяжелых ионов. В диссертации решены следующие задачи:

- развиты эффективные методы для описания свойств плотной и горячей ядерной материи в рамках эффективных моделей НИЛ и НИЛ с петлей Полякова;
- проведено исследование факторов, оказывающих влияние на структуру фазовой диаграммы адронной материи в рамках эффективной модели НИЛ с петлей Полякова при конечных температуре и плотности;
- предложена процедура учета мезонных корреляций в расчетах при конечных температуре и плотности;
- построены амплитуды процессов упругого рассеяния кварков на кварках, антикварках и пионах при конечной температуре.

### **Структура диссертации**

Диссертация состоит из **Введения**, трех глав и **Заключения**.

Во **Введении** раскрывается актуальность поставленной задачи, формулируются проблемы, возникающие в теоретических исследованиях фазовой диаграммы адронного вещества в рамках выбранной модели и дается обзор существующей по данной теме литературы.

В **Первой главе** диссертации формулируется модель Намбу-Иона-Лазинио с двумя ароматами и скалярным и псевдоскалярным взаимодействием с лагранжианом

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{q} (i\partial - \hat{m}_0) q + G_s \left[ (\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2 \right] .$$

Формулируются уравнения Швингера-Дайсона и Бете-Салпитера, определяющие спектр масс модели НИЛ а также моделей, построенных на основе модели НИЛ. Проводится обобщение модели на случай конечной температуры и плотности и вводится процедура адронизации с усреднением по полю с целью получения большого термодинамического потенциала, определяющего свойства системы. В **Первой главе** диссертации обосновывается выбор схемы регуляризации расходимостей в модели, проведен сравнительный анализ двух методов регуляризации: метода обрезания по трехмерному импульсу и метода Паули-Вилларса.

**Вторая глава** диссертации посвящена исследованию термодинамических свойств сильно взаимодействующей материи в рамках модели Намбу-Иона-Лазинио с петлей Полякова с двумя ароматами. Лагранжиан модели НИЛП

$$\mathcal{L}_{\text{PNJL}} = \bar{q} (i\gamma_\mu D^\mu - \hat{m}_0) q + G_s \left[ (\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2 \right] - \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}; T)$$

связан с калибровочным сектором через ковариантную производную  $D^\mu = \partial^\mu - iA^\mu$ , поле петли Полякова  $\Phi(\bar{\Phi})$  и эффективный потенциал  $\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}; T)$ , который вводится таким образом, чтобы он полностью воспроизводил термодинамические свойства глюонов, полученные в расчетах решеточной КХД. Показано, как влияние петли Полякова проявляется в основных уравнениях системы.

Анализ структуры фазовой диаграммы адронной материи во второй главе построен следующим образом:

- проводится исследование влияния выбора аппроксимирующей функции эффективного потенциала  $\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}; T)$  и выбора его параметризации на термодинамические свойства материи;
- вводится векторное взаимодействие в модели НИЛ с петлей Полякова и проводится исследование влияния векторного взаимодействия на поведение критических точек фазовой диаграммы;

- вводится зависимость констант четырехкваркового взаимодействия от поля петли Полякова. Проводится анализ фазовой диаграммы, построенной в рамках этой модели как с векторным взаимодействием, так и без него;
- проводится исследование влияния мезонных корреляций на термодинамику системы вблизи фазового перехода. Показана справедливость теоремы Левинсона.

**Третья глава** диссертации посвящена изучению процессов рассеяния кварков и адронов в горячей материи в рамках модели НИЛ с петлей Полякова. Изучены полное и дифференциальное сечение упругого рассеяния кварка на кварке и антикварке. Дана оценка полного и дифференциального сечений упругого рассеяния кварка на пионе. Для распада  $\sigma \rightarrow \pi\pi$  получены амплитуда и ширина распада, проведено сравнение с экспериментальными данными.

В **Заключении** приводятся основные выводы и положения, выносимые на защиту.

### **Достоверность результатов**

Достоверность результатов, полученных в диссертации обеспечена использованием апробированных методов квантовой теории поля и квантовой хромодинамики при конечных температуре и плотности. А так же подтверждена сравнением с результатами, полученными в других моделях и расчетах решеточной КХД.

### **Апробация результатов**

Основные результаты работы докладывались на семинарах Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Лаборатории информационных технологий ОИЯИ, Лаборатория физики высоких энергий им. В.И. Векслера и А.М. Балдина, семинаре в Университете г. Вроцлав (Польша), а также были представлены на конференциях: Seminar for young scientists "Physics of high energy density in matter" (FAIR-Russia Research, Moscow, 2010, 2011); XV, XVII научная конференция молодых ученых и специалистов, (ОИЯИ, Дубна, Россия

2011, 2013); XVIII, XIX международная научная конференция молодых ученых и специалистов, (ОИЯИ, Дубна, Россия 2014, 2015); I школа-конференция молодых ученых и специалистов (Алушта, Украина, 2012); III школа-конференция молодых ученых и специалистов (Алушта, Россия, 2014).

# 1 Эффективные модели КХД

Эффективные КХД-мотивированные модели, например позволяют изучить свойства адронной материи в критических условиях при высоких температурах и плотностях материи - там, где прямые расчеты КХД, выполняемые на решетке невозможны. Принцип построения эффективных теорий КХД следующий. Лагранжиан КХД в общем виде записывается как

$$\mathcal{L} = \bar{q} (i\gamma_\mu D^\mu - \hat{m}_q) q - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (1)$$

с тензором взаимодействия

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\nu^a A_\mu^b.$$

Здесь  $q, \bar{q}$  - кварковые поля с  $N_c$  цветами и  $N_f$  ароматами,  $\hat{m}_q$  - матрица токовых масс кварков ( $\hat{m}_q = \text{diag}_f(m_u, m_d \dots)$ ),  $D_\mu = \partial_\mu - ig\lambda^a A_\mu^a$  - ковариантная производная,  $A_\mu^a$  ( $a = 1, 2, \dots, 8$ ) - цветное калибровочное поле,  $g$  - константа сильного взаимодействия,  $\lambda^a$  - матрицы Гелл-Манна и  $f^{abc}$  - структурные антисимметричные константы.

Действие, описывающее взаимодействие цветных кварковых токов  $j_\mu^a(x) = \bar{q}(x)\gamma_\mu \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ij} q(x)$ , вводится как

$$S[\bar{q}, q] = \int d^4x \bar{q}(x) S_0^{-1}(x) q(x) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y j_\mu^a(x) g^2 D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) j_\nu^a(y), \quad (2)$$

где  $S_0^{-1} = i\gamma_\mu \partial_\mu - \hat{m}_0$  - функция Грина свободного кварка, а  $D_{\mu\nu}^{ab}(x-y)$  - двухточечная глюонная функция Грина, выбор которой диктуется физикой адронов.

После преобразований Фирца, билोकальное взаимодействие сводится к эффективному глюонному пропагатору

$$D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) = \delta^{ab} g_{\mu\nu} D(x-y),$$

а действие  $S[\bar{q}, q]$  (2), можно переписать через ядро взаимодействия  $K(x-y)$

$$(\gamma_\mu \otimes \gamma_\nu) g^2 D(x-y) \equiv K(x-y)$$

следующим образом:

$$S[q, \bar{q}] = \int d^4x \int d^4y \left\{ q(y) \bar{q}(x) [-S_0^{-1}(x)] \delta(x - y) + \frac{1}{2N_c} [(q(y) \bar{q}(x)) K(x - y) (q(x) \bar{q}(y))] \right\}. \quad (3)$$

Процедура перехода от кварковых полей к мезонным полям, называется адронизацией. Ее формализм основан на выполнении преобразования Хаббарда-Стратоновича, которое приводит к появлению вспомогательных полей, несущих смысл адронных мод, порожденных комбинацией кварковых полей  $\mathcal{M} = (q(x) \bar{q}(y))$  и позволяет снять интегрирование в функциональном интеграле

$$\mathcal{Z}[q, \bar{q}; \mathcal{M}] = \int \mathcal{D}\mathcal{M} \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} e^{iS[q, \bar{q}]} \quad (4)$$

по кварковым полям. Остается эффективное действие, зависящее только от полей  $\mathcal{M}(x, y)$ , которое символически можно записать как

$$S_{eff}[\mathcal{M}] = -N_c \left\{ \frac{1}{2} (\mathcal{M}, K^{-1} \mathcal{M}) + i \text{Tr} \ln [-S_0^{-1} + \mathcal{M}] \right\}, \quad (5)$$

где  $\text{Tr}$  означает как интегрирование по непрерывным переменным, так и суммирование по дискретным переменным.

Минимизируя действие (5) по полям  $\mathcal{M}$  можно получить уравнение Швингера-Дайсона, имеющее вакуумное решение  $\mathcal{M} = \Sigma - m_0$

$$\Sigma(x - y) = \hat{m}_0 \delta(x - y) + iK(x - y)S(x - y), \quad (6)$$

где  $S(x - y)$  - функция Грина кварка

$$S^{-1}(x - y) = i\partial \delta(x - y) - \Sigma(x - y). \quad (7)$$

Раскладывая эффективное действие (5) по полю вблизи вакуумного решения  $\mathcal{M}(x, y) = (\Sigma + m_0) + \mathcal{M}'$

$$S_{eff}[\mathcal{M}'] = S_{eff}[\Sigma] + N_c \left\{ -\frac{1}{2} (\mathcal{M}', K^{-1} \mathcal{M}') - \frac{i}{2} \text{Tr} (S \mathcal{M}')^2 - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} (-S \mathcal{M}')^n \right\} \quad (8)$$

и приравнявая нулю вторую производную эффективного действия (11) по  $\mathcal{M}'$ , получаем уравнение Бете - Салпетера на вершинную функцию  $\Gamma(x, y)$

$$\Gamma(x, y) = -iK(x - y) \int dx_1 dx_2 S(x - x_1) \Gamma(x_1, x_2) S(x_2 - y), \quad (9)$$

описывающее свойства мезонов.

Таким образом, процедура адронизации приводит к получению ряда важных для модели уравнений (уравнение Швингера-Дайсона (6), уравнение Бете-Салпетера (9), описывающее спектр связанных состояний), эффективное действие, описывающее свободное движение бислокального поля

$$S_{eff}[\mathcal{M}'] = -\frac{1}{2} (\mathcal{M}', K^{-1} \mathcal{M}') - \frac{i}{2} \text{Tr} (S \mathcal{M}')^2 \quad (10)$$

и действие, описывающее взаимодействие бислокальных полей

$$S_{int}[\mathcal{M}'] = i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} (-S \mathcal{M}')^n. \quad (11)$$

Дальнейшая формулировка модели зависит от выбора ядра взаимодействия  $K(x - y)$ . Для локальной модели Намбу-Иона-Лазинио, например, ядро взаимодействия имеет структуру

$$K(x - y) = \frac{N_c}{\mu^2} \delta(x - y). \quad (12)$$

Такая модель воспроизводит все киральные теоремы низкоэнергетической физики адронов. Из-за наличия локального четырехфермионного взаимодействия, модель является непернормируемой, и выбор регуляризационной схемы является важным моментом. Выбор регуляризационной схемы и способа вычисления расходящихся интегралов обсуждалась, например, в [31, 60, 73–76]. Когда модель используется для исследования термодинамических свойств материи, большинство авторов использует схему обрезания по трехмерному импульсу. Эта схема достаточно проста, но приводит к нарушению Лоренц-инвариантности модели, что оправдывается тем, что при конечных температуре и плотности она и так нарушена наличием среды. Введение регуляризации приводит и к ограничению применимости модели

областью температур  $< 2-2.5T_c$ . Вторым распространенным способом регуляризации является регуляризация Паули-Вилларса. Эта регуляризация заключается в вычитании из пропагатора кварка массой  $m$  такого же пропагатора, но с большой фиктивной массой. Преимущество этой схемы регуляризации заключается в сохранении инвариантности относительно Лоренц-преобразований и отсутствии ограничений по импульсу. Но она несколько усложняет вычисления и не уменьшает количество свободных параметров модели.

Эта глава диссертации является введением в модель Намбу-Иона-Лазинио. В ней приводятся основные уравнения, используемые также в моделях, построенных на основе НИЛ. Приводится анализ влияния выбора схемы регуляризации расходящихся интегралов на поведение описываемой системы.

### 1.1 Лагранжиан модели Намбу-Иона-Лазинио. Симметрии

Простейший лагранжиан модели НИЛ для случая скалярного и псевдоскалярного взаимодействий с двумя кварками имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{q} (i\partial - \hat{m}_0) q + G_s \left[ (\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2 \right], \quad (13)$$

где  $G_s$  - четырехкварковая константа связи,  $\bar{q}$  и  $q$  - кварковые поля,  $\hat{m}_0$  - диагональная матрица,  $\hat{m}_0 = \text{diag} (m_u^0, m_d^0)$ ,  $m_u^0 = m_d^0$  - токовые массы кварков,  $\vec{\tau}$  - матрицы Паули в пространстве  $SU(2)$ . В выражениях  $(\bar{q}\cdot q)$  подразумевается суммирование по цветам кварков,  $N_c = 3$ .

Первое слагаемое в лагранжиане (13) соответствует свободному лагранжиану свободной частицы со спином  $1/2$ , подчиняющейся уравнению Дирака. Вторая часть описывает взаимодействие и включает в себя скалярное и псевдоскалярное четырех-кварковое взаимодействие с константой взаимодействия  $G_s$ .

Данный лагранжиан удовлетворяет симметриям сильного взаимодействия и сохраняет соответствующие токи [31]:

- За сохранение барионного числа отвечает глобальная  $U_V(1)$  инвариантность этого лагранжиана относительно преобразования вращения:

$$U_V(1) : q \rightarrow e^{-i\alpha} q.$$



- Так как токовые массы  $u$  и  $d$  кварков практически одинаковы ( $m_u = m_d = m_0$ ), лагранжиан симметричен относительно вращений  $SU_V(2)_f$  группы:

$$SU_V(2) : q \rightarrow e^{-\frac{i}{2}\alpha_a\tau_a}q.$$

Взаимодействия в КХД не зависят от цвета и аромата кварков, и можно говорить о  $N_f = 2$  - вырождении в пространстве ароматов и о  $N_c = 3$  вырождении в цветовом пространстве.

- Безмассовые частицы со спином  $1/2$  обладают свойством спиральности (их спин либо сонаправлен, либо противоположно направлен по отношению к импульсу). Спиральность (или киральность) является сохраняющимся свойством только для безмассовой частицы. При наличии у частицы массы, киральная симметрия нарушается. Это свойство выражено в лагранжиане (13) появлением члена  $(\bar{q}m_0q)$ . В киральном пределе ( $m_0 = 0$ ) лагранжиан инвариантен относительно унитарного преобразования:

$$SU_A(2) : q \rightarrow e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\alpha_a\tau_a}q.$$

Такая симметрия могла бы проявляться в Голдстоуновской фазе посредством нарушения киральной симметрии и возникновения псевдоскалярного безмассового Голдстоуновского бозона с  $I = 1$ . Этот бозон обычно связывают с пионом.

### 1.1.1 Конституентные кварки и мезоны

Многие свойства адронов можно описать, исходя из предположения, что они состоят из массивных (конституентных) кварков с массами  $M_{u,d}(M_s) \sim 0.3(0.5)$  ГэВ. Появление тяжелых кварков внутри адронов связано с возникновением собственной энергии, вызванной четырехкварковым взаимодействием. Это явление аналогично появлению энергетической щели в теории БКШ.

Собственная энергия кварка возникает из-за наличия в лагранжиане слагаемых, отвечающих за взаимодействие, и рассчитывается в приближении Хартри. Соответствующее ему уравнение Швингера-Дайсона (6) в диаграммной форме представлено на Рис. 2. Это взаи-

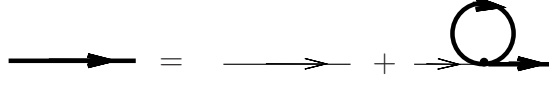


Рис. 2: Уравнение Швингера-Дайсона в диаграммной форме. Тонкая линия соответствует пропагатору токового кварка, толстая - пропагатору "одетого", петля описывает собственную энергию кварка.

модействие приводит к появлению постоянного сдвига в массе кварка и в импульсном представлении уравнение имеет вид:

$$m = m_0 + 2iG_s \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}S(p), \quad (14)$$

где  $m_0$  - токовая масса кварка, а  $S^{-1}(p) = (\hat{p} - m)$  - пропагатор "одетого" (толстая линия) кварка, а след берется по цветовым, ароматным и Дираковским индексам. После преобразований, получаем уравнение:

$$m = m_0 + 8N_c N_f G_s m i \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2}, \quad (15)$$

где  $N_c = 3$  и  $N_f = 2$  - число цветов и ароматов соответственно. Если взаимодействие, описываемое константой  $G$  достаточно сильно, то решение, отличное от нуля будет существовать даже в киральном пределе, где  $m_0 = 0$ . По аналогии с теорией БКШ, это уравнение часто называют уравнением щели, а массу  $m$  - "конституентной" массой кварка. Интеграл в этом уравнении обозначают как  $I_1$

$$I_1 = i \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2}. \quad (16)$$

С этим уравнением связана величина, называемая кварковым конденсатом:

$$\langle \bar{q}q \rangle = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}S(p). \quad (17)$$

Тогда уравнение (14) примет вид

$$m = m_0 + 2G \langle \bar{q}q \rangle .$$

Мезоны в модели НИЛ вводятся как коллективные моды (кварк - антикварковые связанные состояния). Четырех-кварковое взаимодей-

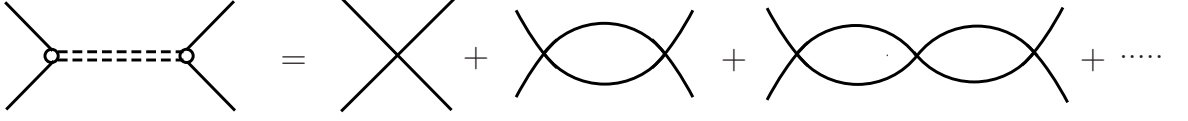


Рис. 3: Эффективное взаимодействие в приближении случайных фаз. В левой части равенства двойная пунктирная линия обозначает пропагатор мезона, сплошные линии - линии кварков, точки показывают кварк-мезонную константу связи.

ствоие в лагранжиане (13), показано на Рис. 3 и в приближении случайных фаз приводит к возникновению T-матрицы:

$$T_M(k^2) = \frac{2iG_s}{1 - 2G_s\Pi_M(k^2)}. \quad (18)$$

Вся информация о свойствах мезона содержится в функции  $\Pi_M$ , которую называют поляризационным оператором мезонов:

$$\Pi_M(k^2) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\Gamma_M S(p+k) \Gamma_M S(p)], \quad (19)$$

где  $S(p)$  - кварковый пропагатор,  $\Gamma_\pi = i\gamma_5\tau^a$ , а  $\Gamma_\sigma = \mathbf{1}$ .

После вычисления следа и необходимых преобразований, поляризационный оператор можно записать в терминах интегралов  $I_1$ ,  $I_2(k^2)$

$$\begin{aligned} \Pi_{ps}(k^2) &= 4N_c N_f i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2} \\ &\quad - 2N_c N_f i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)((p+k)^2 + m^2)} \\ &= 4N_c N_f I_1 - 2N_c N_f k^2 I_2(k^2), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Pi_s(k^2) &= 4N_c N_f i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2} \\ &\quad - 2N_c N_f i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)((p+k)^2 + m^2)} \\ &= 4N_c N_f I_1 - 2N_c N_f (k^2 - 4m^2) I_2(k^2). \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$I_2(k^2) = i \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)}. \quad (22)$$

В полюсном приближении матрицу  $T_M$  можно представить в виде:

$$T_M = \frac{g_{Mqq}^2}{k^2 - M^2}. \quad (23)$$

Сравнивая (23) с (18), можно увидеть, что для нахождения массы мезона необходимо решить уравнение

$$1 - 2G_s \Pi_M(k^2)|_{k^2=M^2} = 0, \quad (24)$$

а константа связи мезона с кварками будет вычисляться как

$$g_{Mqq}^{-2} = \frac{\partial \Pi_M(k^2)}{\partial k^2} \Big|_{k^2=M^2}. \quad (25)$$

Таким образом, для мезонов в системе покоя ( $\mathbf{k} = 0$ ), уравнения на массу мезонов будут иметь вид:

$$1 - 8N_c N_f G_s I_1 + 2N_c N_f G_s k^2 I_2(k^2)|_{k^2=M_\pi^2} = 0, \quad (26)$$

$$1 - 8N_c N_f G_s I_1 + 2N_c N_f G_s (k^2 - 4m^2) I_2(k^2)|_{k^2=M_\sigma^2} = 0. \quad (27)$$

Из выражения (26) видно, что в киральном пределе, когда  $m_u^0 = m_d^0 = 0$  и  $k^2 = M_\pi^2 = 0$ , уравнение (26) совпадает с уравнением (15) и киральная симметрия восстанавливается. Поэтому пионы могут быть идентифицированы как Голдстоуновские бозоны [77]. Когда  $m_u^0 = m_d^0 \neq 0$ , киральная симметрия является неточной и пионы приобретают массу.

Уравнение Голдбергера-Треймана связывает константы распада пиона и массу кварка [78]:

$$g_{\pi qq} f_\pi = m + \mathcal{O}(m_0),$$

что в киральном пределе подразумевает  $f_\pi = m/g_{\pi qq}$ . Константа слабого распада пиона  $f_\pi$  определяется как [60]:

$$f_\pi p^\mu \delta_{ab} = g_{\pi qq} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} S(k+p) i \gamma_5 \tau^b S(k)). \quad (28)$$

После взятия следа по Дираковским, цветовым и ароматным индексам приведет к результату:

$$f_\pi = 4g_{\pi qq} N_c N_f m i I_2(M_\pi). \quad (29)$$

Масса пиона должна быть связана с токовой массой кварка выражением Гелл-Манна-Окса-Реннера [79]

$$M_\pi^2 f_\pi^2 = -m_0 \langle \bar{q}q \rangle + \mathcal{O}(m_0),$$

Величина константы слабого распада пиона определяется экспериментально из  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu$  и равна  $f_\pi = 0.092$  ГэВ [80]. Ее значение является одной из ключевых величин, используемых для фиксирования параметров модели.

## 1.2 Модель Намбу-Иона-Лазинио в среде. Приближение среднего поля

Для обобщения модели НИЛ на случай конечных температур и плотностей, в лагранжиан (13) добавим слагаемое  $\bar{q}\gamma_0\mu q$ :

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{q}(i\cancel{\partial} - \hat{m}_0 - \gamma_0\mu)q + G_s \left[ (\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2 \right], \quad (30)$$

Используя стандартную процедуру адронизации, можно получить большой термодинамический потенциал [81]. Для этого, используя формализм мнимого времени ( $\tau = it$  - мнимое время), введем производящий функционал

$$\mathcal{Z}[\bar{q}, q] = \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int_v d^3x [\mathcal{L}_{\text{NJL}}] \right\}. \quad (31)$$

После применения преобразования Хаббарда-Стратоновича, введем гауссовы интегралы по вспомогательным бозонным полям и перепишем функционал в следующем виде:

$$\mathcal{Z}[\bar{q}, q] = \int \mathcal{D}\sigma' \mathcal{D}\pi' \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int_v d^3x \left[ \mathcal{L}'_{\text{NJL}} - \frac{\sigma'^2 + \pi'^2}{4G_s} \right] \right\}, \quad (32)$$

где введено обозначение

$$\mathcal{L}'_{\text{NJL}} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0 - \gamma_0\mu - \sigma' - \pi' i\gamma_5\tau)q$$

с пропагатором кварка  $S^{-1}[m_0] = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0 - \gamma_0\mu - \sigma' - \pi' i\gamma_5\tau)$ . Определив  $m = m_0 + \sigma'$ , и учитывая, что

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int_v d^3x [\bar{q}S^{-1}[m]q] \right\} &= \\ &= \det S^{-1} = \exp(\ln \det S^{-1}) = \exp(\text{Tr} \ln S^{-1}), \end{aligned} \quad (33)$$

снимем интегрирование по кварковым полям:

$$\mathcal{Z}[T, V, \mu] = \int \mathcal{D}\sigma' \mathcal{D}\pi' \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int_v d^3x [\mathcal{L}''_{\text{NJL}} + \text{Tr} \ln S^{-1}[m]] \right\}, \quad (34)$$

где  $S^{-1}[m]$  - пропагатор "одетого" кварка.

Теперь, в лагранжиане  $\mathcal{L}''_{\text{NJL}} = \frac{\sigma'^2 + \pi'^2}{2G_s}$  остаются только наблюдаемые мезонные поля. Такой переход от лагранжиана  $\mathcal{L}'$  к  $\mathcal{L}''$  и смену матрицы токовых кварков на матрицу конститuentных, в работе [82] предлагается рассматривать как перестройку вакуума вследствие спонтанного нарушения киральной симметрии. Описывая поле как флуктуации относительно средней величины  $\sigma' = \sigma + \sigma_{\text{MF}}$ ,  $\pi' = \pi + \pi_{\text{MF}}$ , переход к "одетым" кваркам объясняют тем, что вакуумное ожидание скалярного поля (в отличие от псевдоскалярного) имеет ненулевое среднее  $\sigma_{\text{MF}} = \langle \sigma \rangle \neq 0$  ( $\pi_{\text{MF}} = \langle \pi \rangle = 0$ ). Теперь можно ввести пропагатор в приближении среднего поля:

$$S^{-1}[m] = S_{\text{MF}}^{-1}[m](1 - S_{\text{MF}}[m](\sigma + \pi i \gamma_5 \tau)), \quad (35)$$

$$S_{\text{MF}}^{-1}[m] = (i\gamma_\mu D^\mu - m - \gamma_0 \tilde{\mu}) \quad (36)$$

с  $m = m_0 + \sigma_{\text{MF}}$ . Выбирая только слагаемые, относящиеся к среднему полю, исходный функционал примет вид

$$\mathcal{Z}_{\text{MF}}[\bar{q}, q] = \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int_v d^3x \frac{\sigma_{\text{MF}}'^2}{4G_s} + \text{Tr} \ln S_{\text{MF}}^{-1}[m] \right\}. \quad (37)$$

Термодинамические свойства физической системы определяются большим термодинамическим потенциалом, который вычисляется стандартным образом:

$$\Omega_{\text{MF}}(T, \mu) = -\frac{T}{V} \ln \mathcal{Z}_{\text{MF}}[\bar{q}, q]. \quad (38)$$

С точки зрения термодинамики, нарушение киральной симметрии может произойти в случае, когда термодинамический потенциал имеет минимум по отношению к параметру порядка, каковым является среднее поле  $\sigma_{\text{MF}}$ , т.е. при условиях, когда [35]

$$\frac{\partial \Omega_{\text{MF}}}{\partial \sigma_{\text{MF}}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Omega_{\text{MF}}}{\partial \sigma_{\text{MF}}^2} \geq 0. \quad (39)$$

При этом получатся уже известное уравнение щели  $m = m_0 + \sigma_{\text{MF}}$ , где  $\sigma_{\text{MF}}$  несет смысл квакркового конденсата  $\langle \bar{q}q \rangle$ .

Принимая во внимание выражения (37) и (38), и выполнив все преобразования, можно записать выражение для большого термодинамического потенциала в модели НИЛ:

$$\Omega_{\text{NJL}} = G_s \langle \bar{q}q \rangle^2 + \Omega_q, \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_q = & -2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p \\ & - 2N_c N_f T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [\ln N^+(E_p) + \ln N^-(E_p)], \end{aligned} \quad (41)$$

где функции  $N^\pm$  определяются как

$$N^+(E_p) = 1 + e^{-\beta(E_p - \mu)}, \quad N^-(E_p) = 1 + e^{-\beta(E_p + \mu)}$$

$E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  - энергия кварка, а  $\beta = 1/T$  - обратная температура. Как показано в разделе 1.1.1, все уравнения можно выразить в терминах интегралов  $I_1$ ,  $I_2(k^2)$  (15, 26, 27). Для обобщения интегралов  $I_1$  и  $I_2(k^2)$  на случай конечных температур и плотностей, при интегрировании по  $p_0$  производится замена

$$\int \frac{dp_0}{2\pi} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p_0^2 - E_p^2} \rightarrow iT \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(i\omega_n + \mu)^2 - E_p^2} \quad (42)$$

с  $p_0 = i\omega_n + \mu$ , где  $\omega_n = (2n + 1)\pi T$  - частота Матсубары, а  $\mu$  - химический потенциал. После суммирования по  $\omega_n$  в случае  $\mathbf{k} = 0$ , интегралы  $I_1$  и  $I_2(k^2)$  примут вид:

$$I_1 = \int \frac{p^2 dp}{4\pi^2} \frac{1}{E_p} (1 - f(E_p) - \bar{f}(E_p)), \quad (43)$$

$$I_2(k^2) = \int \frac{p^2 dp}{2\pi^2} \frac{1}{E(k^2 - 4E_p^2)} (1 - f(E_p) - \bar{f}(E_p)), \quad (44)$$

где  $f(E_p) = (1 + e^{(E_p - \mu)/T})^{-1}$ ,  $\bar{f}(E_p) = (1 + e^{(E_p + \mu)/T})^{-1}$  - функции распределения Ферми для кварков и антикварков.

### 1.3 Регуляризация

Модель Намбу-Иона-Лазинио является неперенормируемой, а следовательно, интегралы, определяющие физические величины расходятся, и для их вычисления требуется ввести процедуру регуляризации. Существует несколько способов регуляризации модели НИЛ [31]: обрезание интегралов по трехмерному импульсу, четырехмерная регуляризация [31, 73, 74] и регуляризация Паули-Вилларса [75, 76].

#### Обрезание по трехмерному импульсу

Этот способ вычисления расходящихся интегралов подразумевает ограничение области интегрирования в импульсном пространстве  $\mathbf{p}^2 < \Lambda^2$ . Например, при вычислении интеграла  $I_1$  (16)

$$\begin{aligned} I_1 &= i \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \\ &= i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{1}{p_0^2 - E_p^2 + i\varepsilon} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}, \end{aligned} \quad (45)$$

остается интеграл

$$I_1 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{p^2 dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} \rightarrow \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\Lambda} \frac{p^2 dp}{\sqrt{p^2 + m^2}}. \quad (46)$$

Уравнение щели (15) после введения параметра обрезания  $\Lambda$  записывается как

$$m = m_0 + 8N_c N_f G_s m \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\Lambda} \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3 E_p} \frac{1}{E_p}, \quad (47)$$

где  $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$  - энергия кварка, и интеграл в правой части уравнения имеет простую аналитическую форму:

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\Lambda} \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3 E_p} \frac{1}{E_p} = \frac{1}{4\pi^2} \left( \Lambda \sqrt{m^2 + \Lambda^2} - m^2 \operatorname{arcsch}\left(\frac{\Lambda}{m}\right) \right). \quad (48)$$

Этот метод используется практически во всех работах, связанных с расчетами в моделях типа НИЛ. Все численные расчеты, приведенные в данной диссертации, за небольшим исключением, также выполнены с использованием данной схемы регуляризации.



## Метод регуляризации Паули-Вилларса

Особенностью метода регуляризации Паули-Вилларса [31, 34, 75, 76] является то, что такой способ регуляризации сохраняет калибровочную инвариантность теории (за исключением случая неабелевых калибровочных теорий). Сама процедура заключается в замене подынтегральной функции суммой модифицированных функций

$$f^{\text{reg}}(m, p) = \sum_a C_a f(M_a, p)$$

с параметрами, удовлетворяющими условиям  $\sum_a C_a = 0$ ,  $\sum_a C_a M_a^2 = 0$ , где величины  $M_a$  несут смысл масс тяжелых вспомогательных частиц и определяются через параметр  $\Lambda$  как

$$M_a^2 = m^2 + \alpha_a \Lambda^2.$$

При выборе набора параметров  $\alpha_a = (0, 2, 1)$ ,  $C_a = (1, 1, -2)$ , интеграл заменяется на сумму [31, 83, 84]:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} f(m, p) \rightarrow \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (f(m, p) + f(\sqrt{m^2 + 2\Lambda^2}, p) - 2f(\sqrt{m^2 + \Lambda^2}, p)) \quad (49)$$

Подставляя явный вид функции  $f(m, p) = (\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})^{-1}$ , соответствующий интегралу  $I_1$  (16), получаем

$$I_1 = \frac{1}{16\pi^2} \left( m^2 \ln \left( \frac{m^2}{m^2 + \Lambda^2} \right) + (m^2 + 2\Lambda^2) \ln \left( \frac{m^2 + 2\Lambda^2}{m^2 + \Lambda^2} \right) \right). \quad (50)$$

Если в подынтегральной функции содержатся функции Ферми, интеграл сходится, поэтому интегралы делят на вакуумное расходящееся слагаемое, которое требует регуляризации

$$I_1^{\text{vac}} = \int_0^\Lambda \frac{p^2 dp}{4\pi^2} \frac{1}{E_p}, \quad (51)$$

$$I_2^{\text{vac}} = \int_0^\Lambda \frac{p^2 dp}{2\pi^2} \frac{1}{E(k^2 - 4E_p^2)} \quad (52)$$

и слагаемое, содержащее функции Ферми, которое формально считается без параметра обрезания:

$$I_1^{med} = - \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{4\pi^2} \frac{1}{E_p} (f(E_p) + \bar{f}(E_p)), \quad (53)$$

$$I_2^{med} = - \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{2\pi^2} \frac{1}{E(k^2 - 4E_p^2)} (f(E_p) + \bar{f}(E_p)). \quad (54)$$

#### 1.4 Фазовая диаграмма

В модели НИЛ существуют три свободных параметра:  $m_0$ ,  $G$ ,  $\Lambda$ . Эти параметры фиксируются из значений физических величин: константы распада пиона, которая определяется экспериментально из распада  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu$  и равна  $F_\pi = 0.092$  ГэВ [80], плотности кваркового конденсата  $\langle \bar{q}q \rangle^{-1/3} = -0.25$  ГэВ [85] и значения массы пиона  $M_\pi = 0.14$  ГэВ. Самосогласованное решение уравнений щели (47), уравнения на массу связанного состояния (26) и константы слабого распада пиона (29) при нулевых значениях температуры и химического потенциала позволяет зафиксировать параметры модели НИЛ. Результаты численных расчетов представлены в Таблице 1 (двойной чертой отделены фиксируемые физические величины).

Для того, чтобы провести сравнение двух способов регуляризации, параметры в Таблице 1 численно определены так, чтобы в каждой паре методов совпадали конституентные массы кварков. Рассмотрены два набора параметров. Параметры для трехмерной регуляризации (3D) взяты из [86] (набор А), а параметры для регуляризации Паули - Вилларса (ПВ) соответствуют параметрам, приведенным в работе [87] (набор В). Из таблицы видно, что для набора параметров (А) получается хорошее согласие с воспроизведением  $f_\pi$ ,  $M_\pi$ ,  $m$ , а для (В) значение константы распада пиона  $f_\pi$  несколько завышено по сравнению с экспериментальными данными [36].

На Рис.4 показано поведение масс кварков, массы пиона и  $\sigma$ -мезона как функций температуры. Значения масс получены из самосогласованное решения уравнения щели (47) и уравнений (26, 27) для наборов параметров, приведенных в Таблице 1. Температура нормирована к  $T_{\text{Mott}}$ , которая определяется из условия  $2m(T = T_{\text{Mott}}) = M_\pi(T =$

Рег.	$m_0$ [МэВ]	$\Lambda$ [ГэВ]	$G$ [ГэВ] <sup>-2</sup>	$f_\pi$ [ГэВ]	$m_\pi$ [ГэВ]	$m$ [ГэВ]
Набор параметров А						
3D	5.5	0.639	5.227	0.092	0.139	0.319
ПВ	5.4	0.788	5.11	0.092	0.132	0.319
Набор параметров В						
3D	5.6	0.646	5.56	0.099	0.141	0.394
ПВ	6.77	0.8	5.45	0.111	0.140	0.395

Таблица 1: Параметры модели НИЛ.

$T_{\text{Mott}}$ ). Ее значение для каждого случая указано на рисунке. Когда  $T > T_{\text{Mott}}$ , пион превращается в резонансное состояние кварка и антикварка и его масса и ширина начинают расти. Масса пиона становится близкой к массе  $\sigma$  - мезона, а масса кварка стремится к своему токовому значению. Из Рис.4 также можно сделать вывод, что выбор способа вычисления расходящихся интегралов не влияет на поведение системы, в то время как выбор параметров существенно влияет на значения масс и констант [36].

Согласно КХД, при низких температурах и плотностях должно наблюдаться спонтанное нарушение киральной симметрии и цветовой конфайнмент. При больших температуре и плотности киральная симметрия восстанавливается и в системе происходит деконфайнмент. Так как модель НИЛ конфайнмент не описывает, фазовая диаграмма включает только киральный фазовый переход.

В киральном пределе линия фазового перехода определяется как

$$\left[ \frac{1}{2G_s} - \frac{\partial \Omega_q}{\partial m^2} \right]_{m=0} = 0$$

и отделяет область, где киральная симметрия нарушена ( $m \neq 0$ ) от области, где она восстановлена ( $m = 0$ ).

Когда токовая масса кварка не равно нулю, линия кирального перехода является кроссовером и определяется как максимум  $\frac{\partial \langle \bar{q}q \rangle}{\partial T} \Big|_{\mu=const}$ . Данная линия с ростом химического потенциала убывает до определенного значения температуры, где она заканчивается критической конечной точкой, после которой фазовый переход превращается в фазовый переход первого рода, положение которого определяется как

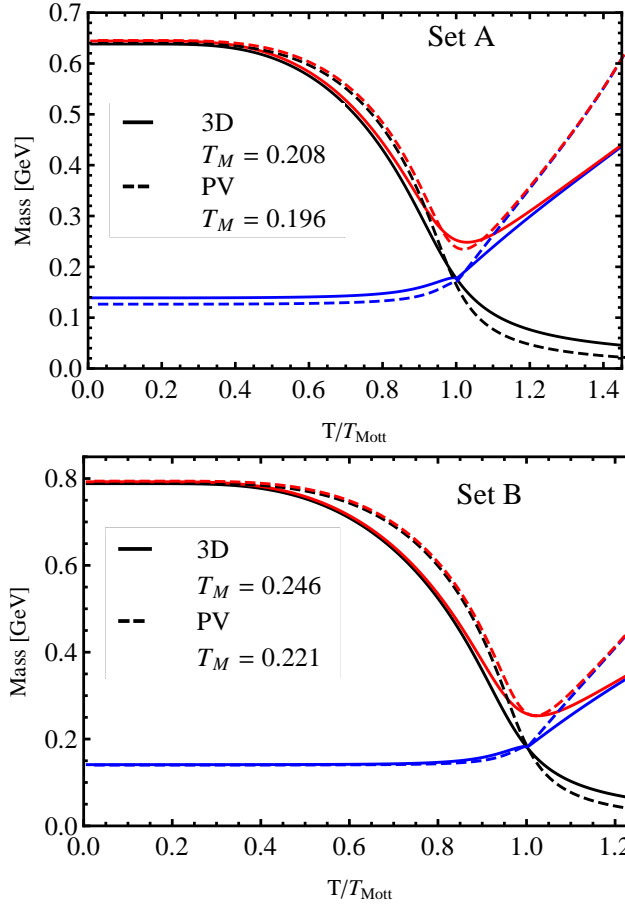


Рис. 4: Температурная зависимость масс кварков и мезонов для двух способов регуляризации при  $\mu = 0$ . На верхнем графике показаны результаты для набора параметров А,  $M_\sigma = 0.644$  (3D) и  $0.645$  (ПВ) ГэВ. На нижнем показаны результаты для параметров набора В  $M_\sigma = 0.793$  (3D) и  $0.7934$  (ПВ).

максимум  $\left. \frac{\partial n_q}{\partial \mu} \right|_{T=const}$ . Фазовые диаграммы для двух случаев регуляризации приведены на Рис. 5.

При нулевом химическом потенциале фазовый переход происходит при температуре, превышающей критическое значение, называемое псевдокритической температурой  $T_c$ . В данной работе значения  $T_c^{PV} = 0.186, 0.211$  ГэВ и  $T_c^{3D} = 0.192, 0.2265$  ГэВ для набора параметров А и В, соответственно. В верхней части Рис.5 видно, что при определенном выборе параметров в случае, когда для регуляризации интегралов используется метод Паули-Вилларса, возможна ситуация, когда на диаграмме отсутствует фазовый переход первого рода. Эти результаты согласуются с результатами, полученными [34, 76]. Анало-

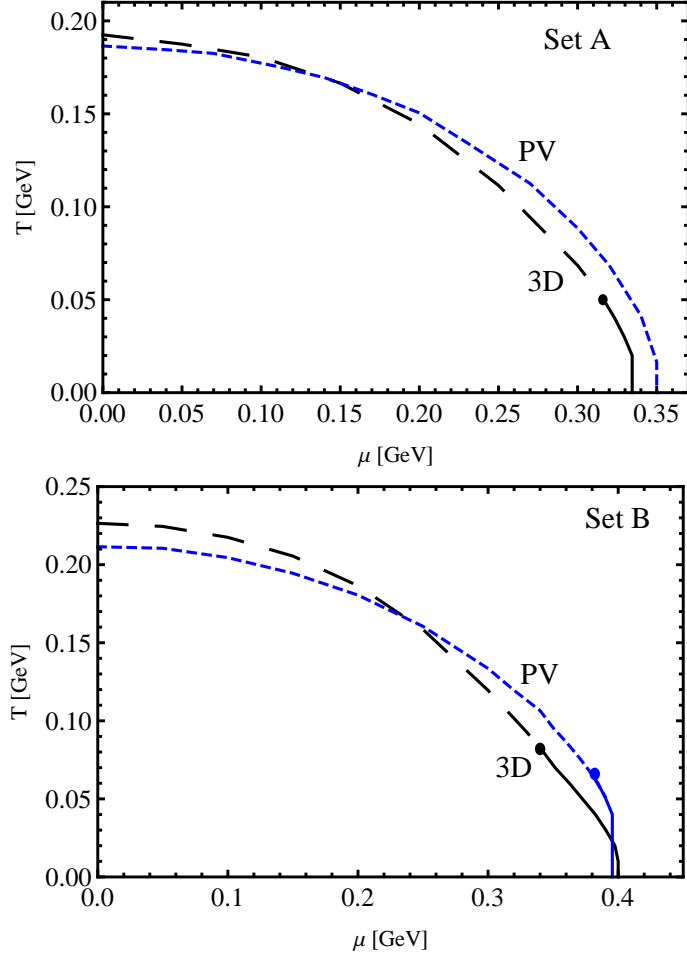


Рис. 5: Фазовая диаграмма. Пунктирные линии показывают фазовый переход типа "кроссовер", сплошные - фазовый переход первого рода.

гичная ситуация возникает, когда в модель НИЛ (в том числе, НИЛ с петлей Полякова [48]) включают векторное взаимодействие. С ростом константы связи векторного взаимодействия, область фазового перехода первого рода становится все уже, и при определенном ее значении вовсе исчезает [68, 88, 89]. Положение критической точки для первого набора параметров в случае трехмерной регуляризации на плоскости  $(T, \mu)$  определяется как  $(0.05, 0.3165)$ . Для второго набора параметров критическая точка определяется как  $(0.08, 0.3425)$  для трехмерной регуляризации и  $(0.0655, 0.38)$  для регуляризации Паули-Вилларса. Результаты, полученные для первого набора лучше согласуются с данными, полученными в расчетах на решетке  $T_c^{\text{lat}} \sim 0.16 - 0.19$  ГэВ [13, 14]. Все описанные критические точки вынесены в Таблицу 2.

	$T_{\text{Mott}}, \text{ГэВ}$	$T_c, \text{ГэВ}$	$T_{\text{СЕР}}(T, \mu), \text{ГэВ}$
Набор параметров А			
3D	0.208	0.186	(0.05, 0.3165)
PV	0.196	0.211	–
Набор параметров В			
3D	0.246	0.192	(0.08, 0.3425)
PV	0.221	0.2265	(0.0655, 0.38)

Таблица 2: Критические температуры модели НИЛ.

## 1.5 Выводы

В Главе 1 рассмотрена модель Намбу-Иона-Лазинио как эффективная модель теории КХД. Получены основные уравнения для определения ключевых свойств кварков и мезонов. Основным вопросом, рассмотренным в этой главе диссертации был выбор схемы регуляризации модели Намбу-Иона-Лазинио. Проведен сравнительный анализ двух способов регуляризации: обрезание по трехмерному импульсу ( $\mathbf{p}^2 < \Lambda^2$ ) [31, 59, 60, 82, 90] и регуляризация Паули-Вилларса [31, 34, 76, 84]. Два набора параметров модели зафиксированы исходя из значений физических наблюдаемых величин и подбирались так, чтобы массы конститuentных кварков, образующих связанное состояние, совпадали для двух способов регуляризации. Параметры представлены в Таблице 1.

Численные решения уравнения щели и уравнений на массу мезонов воспроизводят все температурные зависимости  $m(T)$ ,  $M_\pi(T)$ ,  $M_\sigma(T)$  и описывают восстановление киральной симметрии вне зависимости от выбора способа регуляризации. Рассмотрена структура фазовой диаграммы возбужденной ядерной материи. Показано, что выбор способа вычисления расходящихся интегралов и выбор параметров влияют на структуру фазовой диаграммы. При использовании регуляризации Паули-Вилларса и набора параметров А, в системе исчезает фазовый переход первого рода. Результаты, представленные в этой главе опубликованы в [36].

## 2 Модель Намбу-Иона-Лазинио с петлей Полякова

Модель Намбу-Иона-Лазинио просто и наглядно демонстрирует механизм нарушения киральной симметрии, однако локальность взаимодействия не позволяет объяснить причину возникновения конфайнмента. В работах [47, 48] было предложено объединить свойства модели НИЛ и свойства петли Полякова, являющейся параметром порядка в глюонном секторе. Конфайнмент в модели НИЛ с петлей Полякова (НИЛП) определяется калибровочным полем петли Полякова  $\Phi$  и эффективным потенциалом  $\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}; T)$ . Лагранжиан модели НИЛП в случае скалярного и псевдоскалярного взаимодействий с двумя кварками имеет вид [48, 91]:

$$\mathcal{L}_{\text{PNJL}} = \bar{q} (i\gamma_\mu D^\mu - \hat{m}_0) q + G_s \left[ (\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau}q)^2 \right] - \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}; T) . \quad (55)$$

Здесь учитывается характерное для НИЛ четырехкварковое взаимодействие кварковых полей  $q, \bar{q}$ , характеризующееся константой взаимодействия  $G_s$ ,  $\vec{\tau}$  - матрицы Паули в пространстве ароматов,  $\hat{m}_0$  диагональная матрица токовых масс кварков. Связь с калибровочным полем возникает через ковариантную производную  $D^\mu = \partial^\mu - iA^\mu$  ( $A^\mu$  - калибровочное поле) и эффективный потенциал  $\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}; T)$ . Эффективный потенциал должен удовлетворять  $Z_3$ -симметрии и воспроизводить данные, полученные в решеточной КХД в отсутствие динамических кварков. Поведение эффективного потенциала определяется параметром  $T_0 = 0.27$  ГэВ, являющимся температурой деконфайнмента. Для фиксирования параметров потенциала изначально использовались данные решеточной КХД, полученные в работе [92]. В работе [86] нами было проведено исследование влияния параметризации потенциала на термодинамику и фазовую диаграмму адронного вещества. Для сравнения была проведена параметризация данных, полученных в работе [93].

Недостатком модели НИЛП является слишком высокое, по сравнению с решеточной КХД, значение критической температуры при нулевом химическом потенциале ( $T_c \sim 0.25$  ГэВ). В первоисточниках [48, 91] было предложено перенормировать ( $T_0 \sim 0.19$  ГэВ) с тем, чтобы уменьшить значение температуры фазового перехода. Такой подход действительно привел к снижению температуры  $T_c$ , но при

этом температура кирального фазового перехода и температура деконфайнмента перестали совпадать, что расходится с данными решеточной КХД [94]. Расчеты, выполненные в рамках решеточной КХД при мнимом кварковом  $\mu_q$  [95–97] и мнимом изоспиновом  $\mu_I$  [98, 99] химическом потенциале показали, что киральный кроссовер и деконфайнмент совпадают в пределах численной ошибки. Следовательно, можно с уверенностью говорить о сильной связи между кварковым конденсатом и калибровочным полем. Это отразилось в работе [55], авторы которой предложили усилить взаимодействие между кварками и глюонами, добавив феноменологическую зависимость константы четырехкваркового взаимодействия от поля  $\Phi$ . Такая формулировка модели НИЛП действительно приводит к снижению температуры фазового перехода за счет перенормировки  $T_0$  с 0.27 до 0.19 ГэВ, но при этом температуры фазовых переходов совпадают [68].

Большая часть работ в которых проводится исследование термодинамических свойств кварк-адронной системы в рамках модели Намбу-Иона-Лазинио или ее производных моделей, ограничиваются приближением среднего поля. В критических условиях, вблизи фазового перехода диссоциация адронов и корреляция пред-адронных состояний также может внести свой вклад в термодинамику системы. В работе [100] термодинамика двухчастичных корреляций описывается обобщенным уравнением Бет-Уленбека, что позволило оценить вклад пред-адронных состояний в давление системы вблизи области фазовых переходов.

## 2.1 Конфайнмент в модели НИЛ

### 2.1.1 Эффективный потенциал

В чисто калибровочной теории  $SU(N_c)$  конфайнмент описывается эффективным потенциалом, который можно связать с комплексным полем петли Полякова [91, 101, 102]. При изучении фазовой структуры  $SU(N_c)$ -симметричной материи в качестве параметра порядка может служить линия Полякова (Вильсона) [102]:

$$L(\vec{x}) \equiv \mathcal{P} \exp \left[ i \int_0^\beta d\tau A_4(\vec{x}, \tau) \right], \quad (56)$$



где  $A_4 = iA^0$  - временная компонента калибровочного поля  $(\vec{A}, A_4)$ , которое включает в себя константу сильного взаимодействия  $g_S$  как  $A^\mu(x) = g_S A_a^\mu \frac{\lambda_a}{2}$ , где  $A_a^\mu$  является калибровочным полем в  $SU(3)$ ,  $\lambda_a$  - матрицы Гелл-Манна, а  $\mathcal{P}$  - оператор упорядочивания.

Петля Полякова в  $SU_c(3)$  является цветовым синглетом

$$l(\vec{x}) = \frac{1}{N_c} \text{Tr} L(\vec{x}). \quad (57)$$

$SU_c(3)$ -симметричная материя должна удовлетворять и глобальной  $Z_3$ -симметрии, нарушающейся лишь в присутствии динамического кварка. При  $Z_3$ -преобразованиях, петля Полякова преобразуется как заряженное поле:

$$l \rightarrow e^{i\phi} l$$

Физической интерпретацией петли Полякова [43, 91, 102] является ее аналогия со свободной энергией  $F_Q(\vec{x})$ , которую необходимо затратить, чтобы добавить тяжелый цветовой источник (динамический кварк) в систему:

$$\langle l(\vec{x}) \rangle = e^{-\beta \Delta F_Q(\vec{x})}.$$

Если система замкнута, количество энергии должно быть бесконечно большим, следовательно,  $\langle l(\vec{x}) \rangle = 0$  будет соответствовать фазе конфайнмента ( $Z_3$ -симметричная фаза). В случае наличия в системе цветового источника, возникает поле  $\Phi$ , которое в  $SU_c(3)$  калибровочной теории вводится как среднее значение линии Полякова по конечному объему пространства [101]:

$$\Phi(\vec{x}) \equiv \langle \langle l(\vec{x}) \rangle \rangle = \frac{1}{N_c} \text{Tr} \langle \langle L(\vec{x}) \rangle \rangle. \quad (58)$$

Эффективный потенциал  $U(\Phi, \bar{\Phi}; T)$  определяют, исходя из результатов, полученных в решеточной КХД в отсутствии динамических кварков. На него накладываются два условия: он должен удовлетворять условиям  $Z_3$ -симметрии и воспроизводить данные глюодинамики в решеточной КХД [92]. Это дает определенную свободу в выборе аппроксимирующей функции для описания эффективного потенциала [48, 49, 51, 103]:

- Наиболее часто используемой является полиномиальная форма потенциала [48]:

$$\frac{\mathcal{U}_{\text{RTW05}}(\Phi, \bar{\Phi}; T)}{T^4} = -\frac{b_2(T)}{2}\bar{\Phi}\Phi - \frac{b_3}{6}(\Phi^3 + \bar{\Phi}^3) + \frac{b_4}{4}(\bar{\Phi}\Phi)^2, \\ b_2(T) = a_0 + a_1\left(\frac{T_0}{T}\right) + a_2\left(\frac{T_0}{T}\right)^2 + a_3\left(\frac{T_0}{T}\right)^3. \quad (59)$$

- Можно заменить слагаемые высших порядков логарифмической зависимостью [49, 103]:

$$\frac{\mathcal{U}_{\text{RTW06}}(\Phi, \bar{\Phi}; T)}{T^4} = -\frac{1}{2}a(T)\Phi\bar{\Phi} + b(T)\ln[h(\Phi, \bar{\Phi})]. \quad (60)$$

Где

$$h(\Phi, \bar{\Phi}) = [1 - 6\bar{\Phi}\Phi + 4(\bar{\Phi}^3 + \Phi^3) - 3(\bar{\Phi}\Phi)^2], \\ a(T) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1\left(\frac{T_0}{T}\right) + \tilde{a}_2\left(\frac{T_0}{T}\right)^2, \\ b(T) = \tilde{b}_3\left(\frac{T_0}{T}\right)^3, \quad (61)$$

здесь параметр  $T_0$  является температурой деконфайнмента в глюодинамике на решетке и зависит от числа ароматов и химического потенциала [104], в чисто калибровочном секторе  $T_0 = 0.27$  [93].

Для определения параметров эффективного потенциала, необходимо учесть следующее:  $\Phi \rightarrow 1$  и  $p/T^4 \rightarrow 1.75$  (предел Стефана-Больцмана для глюонов), когда  $T \rightarrow \infty$ . Откуда сразу можно получить условия, что  $\tilde{a}_0 = 3.51$  для логарифмической формы потенциала и  $1.75 = a_0/2 + b_3/3 - b_4/4$  для полиномиальной формы. Минимизируя  $\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}, T)$  по отношению к переменной  $\Phi$ , и, имея в виду, что  $\Phi = \bar{\Phi}$  при  $\mu = 0$ , используя метод наименьших квадратов, можно получить оставшиеся коэффициенты для фиксирования эффективного потенциала. Для аппроксимации потенциала традиционно используются данные, полученные в расчетах на решетке в работе [92]. Для оценки влияния параметризации эффективного потенциала на термодинамику адронной системы, была проведена оценка параметров для

полиномиальной (59) и логарифмической (60) форм потенциала, воспроизводящих данные, полученные в работе [92] и новые данные, полученные в [93]. Полученные коэффициенты представлены в Таблице 3.

Данные	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_3$	$b_4$	$\tilde{a}_0$	$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$	$\tilde{b}_3$
старые [92]	6.75	-1.95	2.625	-7.44	0.75	7.5	3.51	-2.47	15.2	-1.75
новые [93]	6.47	-4.62	7.95	-9.09	1.03	7.32	3.51	-5.121	20.99	-2.09

Таблица 3: Параметры эффективного потенциала  $\mathcal{U}[A]$  в полиномиальной и логарифмической аппроксимациях (59), (60).

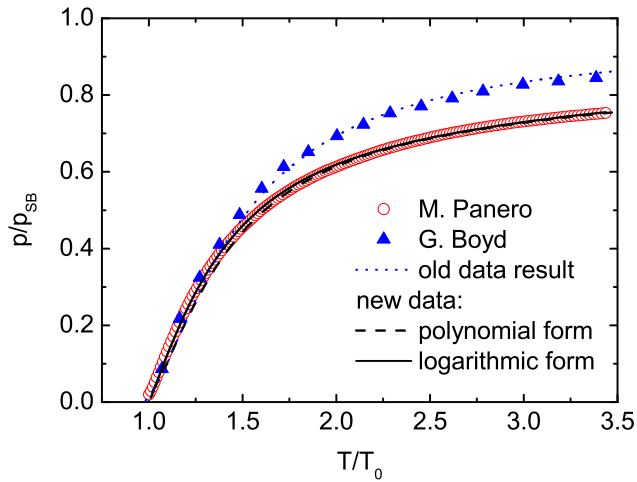


Рис. 6: Нормированное давление глюонов как функция нормированной температуры. Старые [92] и новые [93] данные, полученные на решетке изображены треугольниками и окружностями соответственно. Сплошная линия соответствует полиномиальной форме потенциала, пунктирная - логарифмической.

На Рис. 6 старые и новые результаты, полученные в расчетах решеточной КХД сравниваются с результатами их аппроксимации. Видно, что сами результаты отличаются довольно сильно: около 10% при  $T/T_0 \sim 2$ , а с подобранными параметрами логарифмическая и полиномиальная формы аппроксимации эффективного потенциала имеют очень хорошее согласование друг с другом.

Эффективный потенциал для двух наборов параметров изображен на Рис. 7 как функция поля петли Полякова при разных значениях

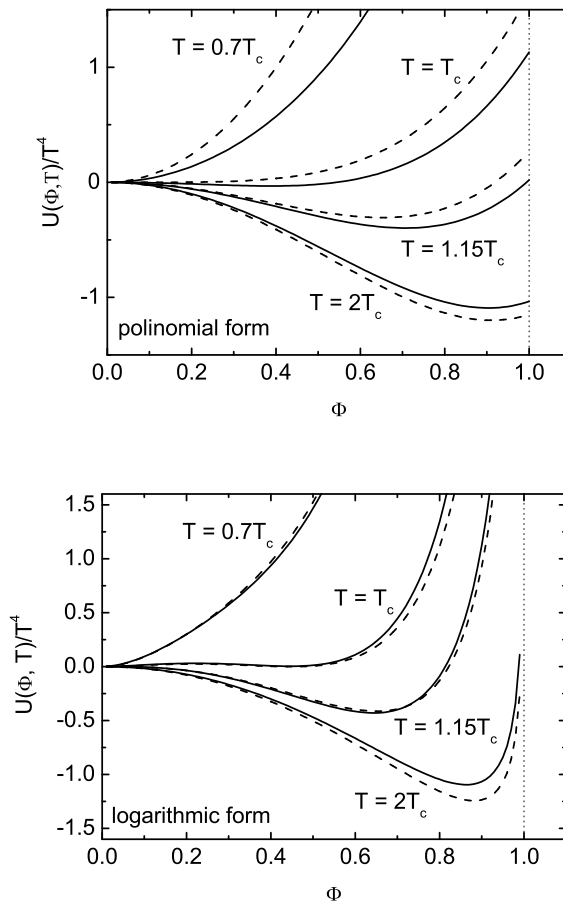


Рис. 7: Эффективный потенциал  $\mathcal{U}$  как функция  $\Phi$  для различных значений температуры для старых (пунктирная линия) и новых (сплошная линия) параметров. Сверху изображен потенциал полиномиальной формы, а снизу - логарифмической.

температуры. Так как потенциал обладает  $Z_3$  симметрией, он должен обладать одним максимумом при  $\Phi = 0$  при температурах, ниже критической (фаза конфайнмента). Когда температура становится близкой к критической, эффективный потенциал сглаживается. При температурах выше критической, минимум появляется при  $\Phi \neq 0$ . Когда  $T \rightarrow \infty$ , положение минимума стремится к  $\Phi \rightarrow 1$ . Нужно отметить, что логарифмический потенциал возрастает гораздо сильнее, чем полиномиальный. Область применения модели с учетом петли Полякова ограничивается  $T \sim 2.5T_c$  [105].

Сравнение поля петли Полякова с данными, полученными в КХД на решетке приводится на Рис. 8. Заметно, что независимо от выбора

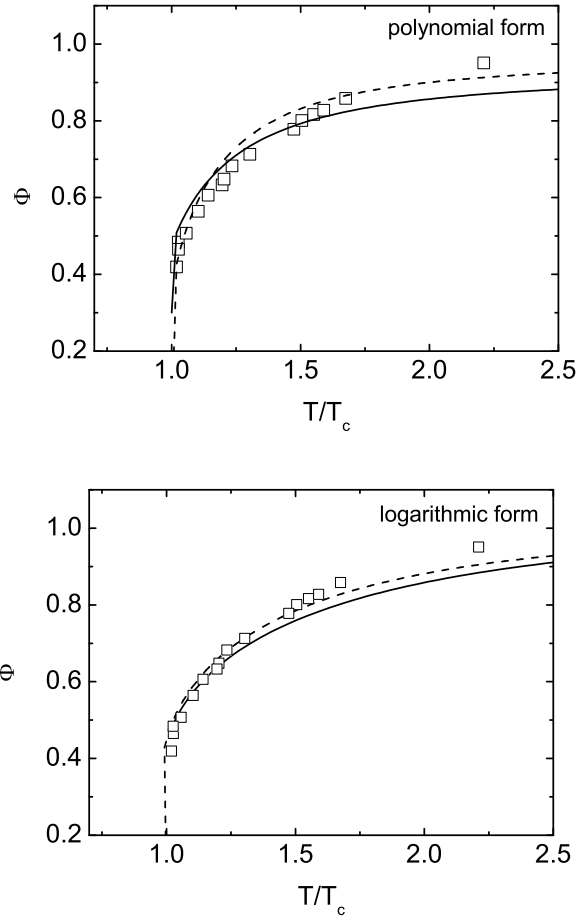


Рис. 8: Зависимость поля петли Полякова  $\Phi$  для полиномиальной (59) (верхний график) и логарифмической (60) (нижний график) форм эффективного потенциала. Данные решетки взяты из работы [106]. Сплошная и пунктирная линии соответствуют новым и старым значениям параметров соответственно.

аппроксимирующей функции потенциала, значения  $\Phi$ , соответствующие новым параметрам, находятся слегка ниже, чем значения  $\Phi$ , соответствующие старым. Что можно объяснить тем, что и сами значения давления на Рис.6 для старых и новых данных значительно отличаются.

Когда в системе глюонов появляется динамический кварк,  $Z_3$ -симметрия нарушается. И уже нельзя строго говорить о фазовом переходе - область перехода значительно сглаживается, однако значение петли Полякова по-прежнему остается индикатором фазы: когда  $\Phi \rightarrow 0$ , система находится в состоянии цветового конфайнмента, когда же  $\Phi \rightarrow$

1, происходит деконфайнмент.

### 2.1.2 Приближение среднего поля. Спектр масс

Кварковая модель с конфайнментом, построенная на объединении модели НИЛ с лагранжианом (13) и глюодинамики, определяемой свойствами петли Полякова описывает два основополагающих явления КХД: нарушение киральной симметрии и конфайнмент. Лагранжиан модели НИЛ с петлей Полякова в случае конечного химического потенциала будет иметь вид [48, 91]:

$$\mathcal{L}_{\text{PNJL}} = \bar{q} (i\gamma_\mu D^\mu - \hat{m}_0 - \gamma_0 \mu) q + G_s \left[ (\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau} q)^2 \right] - \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}; T). \quad (62)$$

$G_s$  - константа локального скалярно-псевдоскалярного четырехточечного взаимодействия кварковых полей  $q, \bar{q}$ .  $\vec{\tau}$  - матрицы Паули в пространстве ароматов,  $\hat{m}_0$  - диагональная матрица токовых масс кварков  $m_u^0 = m_d^0 = m_0$ ; кварковые поля привязываются к чисто-калибровочному сектору через ковариантную производную  $D^\mu = \partial^\mu - iA^\mu$  с  $A^\mu(x) = g\mathcal{A}_a^\mu \frac{\lambda_a}{2}$ , где  $\mathcal{A}_a^\mu$  - поля в чисто-калибровочной  $SU(3)$  теории и  $\lambda_a$  - матрицы Гелл-Манна,  $A^\mu = \delta_0^\mu A^0 = -i\delta_4^\mu A_4$  - калибровочные поля в калибровке Полякова.

В соответствии с процедурой адронизации, представленной в Главе 1 для модели Намбу-Иона-Лазинио, можно получить большой термодинамический потенциал в модели НИЛ с петлей Полякова. В формализме мнимого времени ( $\tau = it$  - мнимое время) вводится производящий функционал:

$$\mathcal{Z}[T, V, \mu] = \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int_v d^3x [\mathcal{L}_{\text{PNJL}}] \right\}, \quad (63)$$

который отличается от (31) только наличием множителя с  $\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}; T)$ , который не влияет на ход рассуждений:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[T, V, \mu] = & \int \mathcal{D}\sigma' \mathcal{D}\pi' \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \exp \left\{ \int d^4x \left[ \mathcal{L}'_{\text{PNJL}} - \frac{\sigma'^2 + \pi'^2}{4G_s} \right] \right\} \\ & \times \exp \left\{ - \int d^4x [\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}; T)] \right\}. \end{aligned} \quad (64)$$

Повторяя все рассуждения, описанные в первой главе, можно получить функциональный интеграл в приближении среднего поля:

$$\mathcal{Z}_{\text{MF}} = \exp \left\{ \int d^4x \left[ -\frac{\sigma_{\text{MF}}^2}{4G_s} \right] + \text{Tr} \ln S_{\text{MF}}^{-1}[m] - \frac{V}{T} \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}; T) \right\}. \quad (65)$$

Определяя большой термодинамический потенциал как

$$\Omega_{\text{MF}}(T, \mu) = -\frac{T}{V} \ln \mathcal{Z}_{\text{MF}}[T, V, \mu], \quad (66)$$

для модели НИЛ с петлей Полякова получаем:

$$\Omega_{\text{PNJL}} = \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}; T) + G_s \langle \bar{q}q \rangle^2 + \Omega_q, \quad (67)$$

с кварковой частью

$$\begin{aligned} \Omega_q &= -2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p - \\ &- 2N_f T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr}_c \left[ \ln(1 + L^\dagger e^{-\beta(E_p - \mu)}) + \ln(1 + L e^{-\beta(E_p + \mu)}) \right] \end{aligned} \quad (68)$$

и функциями

$$\begin{aligned} N_\Phi^+(E_p) &= \text{Tr}_c \left[ \ln(1 + L^\dagger e^{-\beta(E_p - \mu)}) \right] \\ &= \left[ 1 + 3 \left( \Phi + \bar{\Phi} e^{-\beta E_p^+} \right) e^{-\beta E_p^+} + e^{-3\beta E_p^+} \right], \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} N_\Phi^-(E_p) &= \text{Tr}_c \left[ \ln(1 + L e^{-\beta(E_p + \mu)}) \right] \\ &= \left[ 1 + 3 \left( \bar{\Phi} + \Phi e^{-\beta E_p^-} \right) e^{-\beta E_p^-} + e^{-3\beta E_p^-} \right], \end{aligned} \quad (70)$$

где  $E_p^\pm = E_p \mp \mu$ ,  $\beta = 1/T$  и энергия кварка определяется как  $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ .

Нарушение киральной симметрии происходит, когда термодинамический потенциал имеет минимум по отношению к параметру порядка кирального перехода (кварковый конденсат  $\langle \bar{q}q \rangle$ ). Так как  $\Phi, \bar{\Phi}$  являются параметрами порядка фазового перехода деконфайнмент, то они также должны минимизировать потенциал

$$\frac{\partial \Omega_{\text{MF}}}{\partial \langle \bar{q}q \rangle} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_{\text{MF}}}{\partial \Phi} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_{\text{MF}}}{\partial \bar{\Phi}} = 0, \quad (71)$$

откуда снова получается уже известное уравнение щели  $m = m_0 + 2G_s < \bar{q}q >$ . Динамика петли Полякова теперь принимается во внимание во всех основных уравнениях модели. С появлением изменений в ковариантной производной в лагранжиане (55), пропагатор кварка примет вид:

$$iS(p) = i \frac{1}{\hat{p} + \gamma_0(-iA_4) + M}, \quad (72)$$

где для токового кварка  $M = m_0$  и для "одетого" кварка  $M = m$ .

Аналогично уравнению (14), уравнение щели с новым пропагатором будет иметь вид:

$$m = m_0 - 2G_s \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \text{Tr}_c \text{Tr}_f \left\{ \frac{1}{\hat{p} + \gamma_0(-iA_4) - m} \right\}, \quad (73)$$

После взятия следа по Дираковским и ароматным индексам и выполнения суммирования Мацубары (42) с  $p_0 = i\omega_n - iA_{4cc}$ , где  $\omega_n = (2n + 1)\pi T$  - частота Мацубары, с учетом конечного химического потенциала, получается

$$\begin{aligned} m &= m_0 + 8N_f G_s m i T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\hat{p} + \gamma_0(-iA_4 + \mu))^2 - m^2} \\ &= m_0 + 8N_c N_f G_s m i \text{Tr}_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p} (1 - f_\phi[E^+] - f_\phi[E^-]), \end{aligned} \quad (74)$$

где  $E^\pm = E_p \mp (-iA_{4cc} + \mu)$  и  $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$  - энергия кварка, и суммирование по цвету приводит к появлению модифицированных функций Ферми:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_c \{f[E_p - (-iA_{4cc} + \mu)]\} &= \sum_{c=1}^{N_c} \frac{1}{e^{\beta(E_p - \mu)} e^{i\beta A_{4cc}} + 1} = \\ &= [(e^{\beta(E_p - \mu)} e^{i\beta A_{422}} + 1)(e^{\beta(E_p - \mu)} e^{i\beta A_{433}} + 1) \\ &+ (e^{\beta(E_p - \mu)} e^{i\beta A_{411}} + 1)(e^{\beta(E_p - \mu)} e^{i\beta A_{433}} + 1) \\ &+ (e^{\beta(E_p - \mu)} e^{i\beta A_{411}} + 1)(e^{\beta(E_p - \mu)} e^{i\beta A_{422}} + 1)] \times \\ &\times [(e^{\beta(E_p - \mu)} e^{i\beta A_{411}} + 1)(e^{\beta(E_p - \mu)} e^{i\beta A_{422}} + 1)(e^{\beta(E_p - \mu)} e^{i\beta A_{433}} + 1)]^{-1} = \\ &= N_c \frac{\bar{\Phi} e^{-\beta(E_p - \mu)} + 2\Phi e^{-2\beta(E_p - \mu)} + e^{-3\beta(E_p - \mu)}}{1 + 3(\bar{\Phi} + \Phi e^{-\beta(E_p - \mu)}) e^{-\beta(E_p - \mu)} + e^{-3\beta(E_p - \mu)}} = N_c f_\Phi^+(E_p - \mu). \end{aligned} \quad (75)$$



И, аналогично,

$$\begin{aligned} & \text{Tr}_c \{f[E_p + (-iA_{4cc} + \mu)]\} = \\ & = N_c \frac{\Phi e^{-\beta(E_p + \mu)} + 2\bar{\Phi} e^{-2\beta(E_p + \mu)} + e^{-3\beta(E_p + \mu)}}{1 + 3(\Phi + \bar{\Phi} e^{-\beta(E_p + \mu)})e^{-\beta(E_p + \mu)} + e^{-3\beta(E_p + \mu)}} = N_c f_{\bar{\Phi}}^-(E_p + \mu). \end{aligned} \quad (76)$$

В итоге

$$m = m_0 + 8G_s N_f N_f i m \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p} (1 - f_{\Phi}^+(E_p) - f_{\bar{\Phi}}^-(E_p)), \quad (77)$$

где  $f_{\Phi}^{\pm}(E_p)$  - модифицированные функции Ферми, определенные выше. Модель НИЛ можно рассматривать как предельный случай НИЛ с петлей Полякова, когда  $\Phi = \bar{\Phi} \rightarrow 1$ .

Уравнения масс мезонов (26), (27) тоже не изменят своей формы, но в интегралах  $I_1$  и  $I_2(k^2)$  (44) стандартные функции Ферми заменятся на модифицированные:

$$I_1 = \int \frac{p^2 dp}{4\pi^2} \frac{1}{E_p} (1 - f_{\Phi}^+(E_p) - f_{\bar{\Phi}}^-(E_p)), \quad (78)$$

$$I_2(k^2) = \int \frac{p^2 dp}{2\pi^2} \frac{1}{E(k^2 - 4E_p^2)} (1 - f_{\Phi}^+(E_p) - f_{\bar{\Phi}}^-(E_p)), \quad (79)$$

На Рис. 9 показаны спектры масс для модели НИЛ с петлей Полякова, соответствующие двум вариантам аппроксимации эффективного потенциала и двум наборам параметров из Таблицы 3. Видно, что в случае полиномиальной формы эффективного потенциала, результаты для старых и новых параметров отличаются сильнее, чем в случае логарифмической формы.

Параметр порядка фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент - поле Полякова  $\Phi$  и параметр порядка кирального фазового перехода - кварковый конденсат, нормированный к своему значению при нулевой температуре  $\langle \bar{q}q \rangle / \langle \bar{q}q \rangle_0$ , показаны на Рис.10 для двух эффективных потенциалов и двух наборов параметров. Видно, что появление динамического кварка приводит к смягчению наклона функции  $\Phi$  в области перехода в отличие от глюодинамики, показанной на Рис. 8. Из рисунка видно, что при низких температурах, когда поле

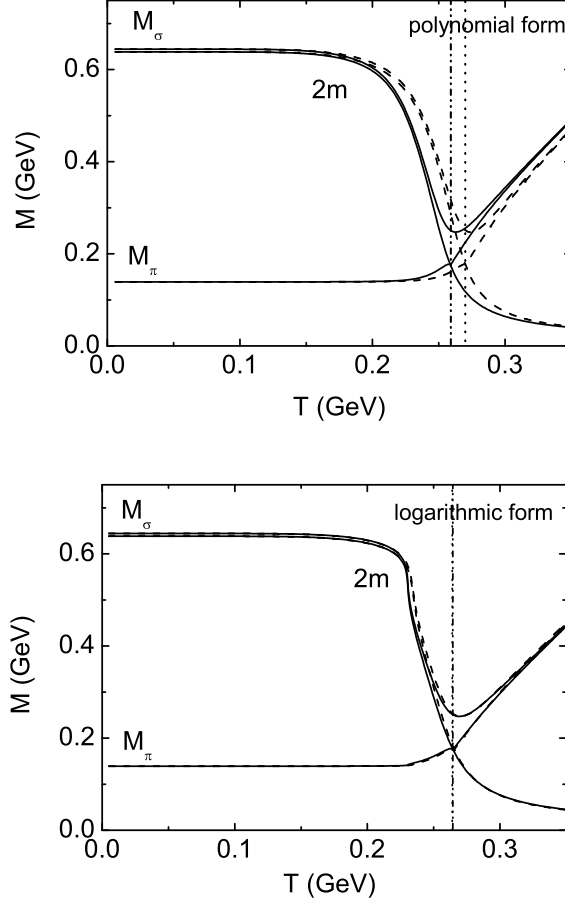


Рис. 9: Температурная зависимость масс кварков и мезонов для двух способов параметризации эффективного потенциала: старого и нового. Сплошной линией отмечены результаты для новых параметров потенциала, пунктирной - для старых. Вертикальные линии показывают  $T_{\text{Mott}}$ .

$\Phi \sim 0$ , в системе наблюдаются конфайнмент и  $Z_3$ -симметрия считается восстановленной. Но в то же время нарушенной является киральная симметрия, что связано с тем, что кварки, находящиеся в адронах имеют ненулевую конституентную массу. После переходной области масса кварка становится токовой, что приводит к частичному восстановлению киральной симметрии. А поле  $\Phi$  перестает быть нулевым, что приводит к нарушению  $Z_3$ -симметрии и, как следствие, к деконфайнменту. Исследования, проводимые в решеточной КХД показали, что эти переходы должны происходить при одинаковой температуре [107].

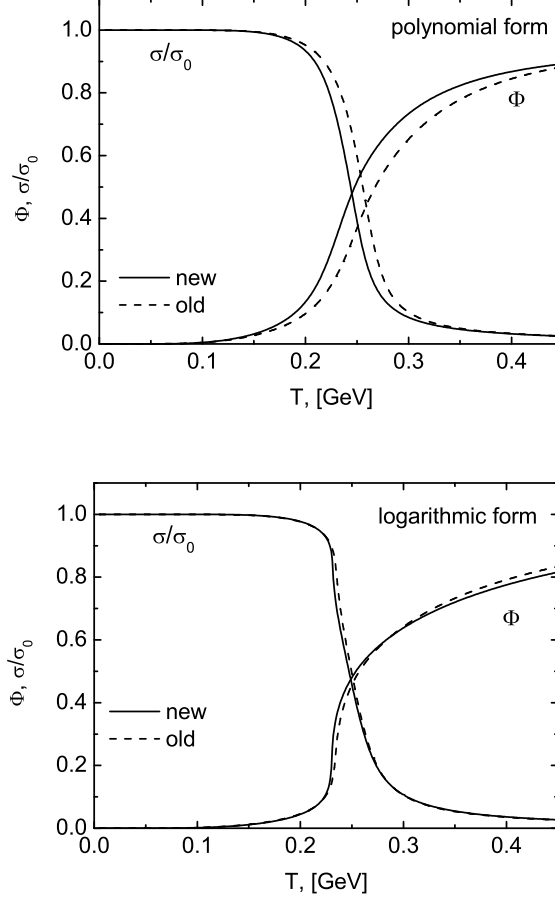


Рис. 10: Температурная зависимость нормированного кваркового конденсата и поля петли Полякова для двух способов параметризации потенциала: старого и нового. Обозначения те же, что и в Рис.9.

Линия кирального фазового перехода при низких температурах определяется как максимум производной  $\frac{\partial \langle \bar{q}q \rangle}{\partial T} \Big|_{\mu=const}$ . Точка фазового перехода от конфайнмента к деконфайнменту определяется как  $\max \frac{\partial \Phi}{\partial T} \Big|_{\mu=const}$  [48, 49]. При низких температурах, также как и в модели НИЛ, модель НИЛП демонстрирует кроссовер. С повышением химического потенциала при решении уравнения щели появляются 3 корня и определение линии фазового перехода указанным способом становится невозможным. Появление трех корней говорит о том, что в системе появился фазовый переход первого рода. Для изучения фазового перехода первого рода вводится понятие кварковой восприим-

чивости [108]

$$\frac{\chi_q(T, \mu)}{T^2} = \frac{\partial^2(p/T^4)}{\partial(\mu/T)^2} = \frac{\partial}{\partial(\mu/T)} (\rho/T^3). \quad (80)$$

Область фазового перехода первого рода заканчивается при температуре, когда  $\chi_q$  имеет ярко выраженный максимум - эта точка и будет критической конечной точкой. В области температур, ниже  $T_{\text{CEP}}$ , величина  $\chi_q$  как функция химического потенциала будет иметь разрыв. При температурах выше  $T_{\text{CEP}}$ , разрыв исчезнет и функция будет иметь слабовыраженный максимум. Поведение параметров порядка показано на Рис. 11

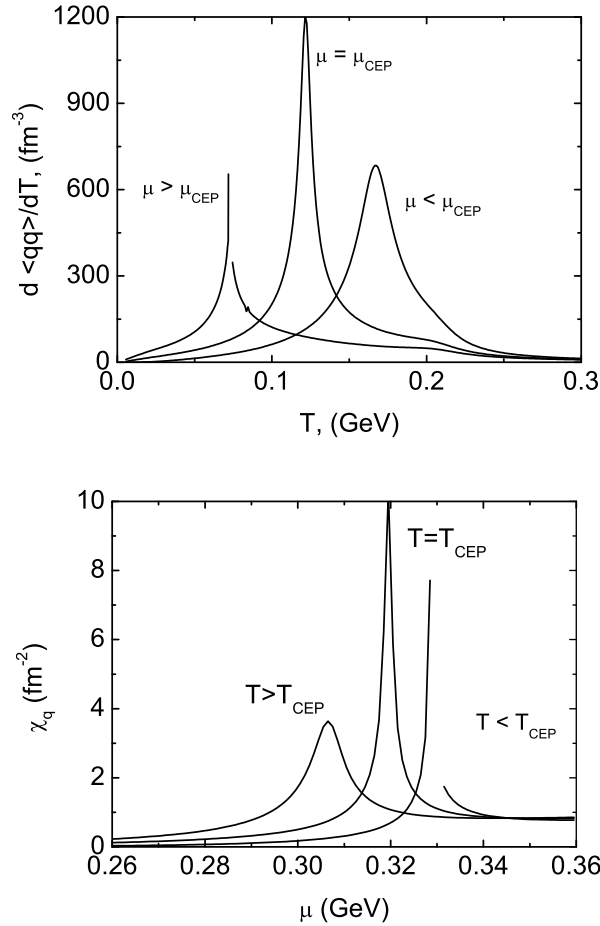


Рис. 11: Параметры порядка: кварковый конденсат (верхний график) и кварковая восприимчивость (нижний график) до критической конечной точки, вблизи нее и после.

На Рис.12 изображены фазовые диаграммы модели НИЛ с петлей

Полякова с эффективным потенциалом, выраженным через (59) и (60) со старыми и новыми параметрами из Таблицы 3 при значении  $T_0 = 0.27$  ГэВ. Здесь и далее в расчетах в рамках модели НИЛП мы будем использовать свободные параметры модели НИЛ, взятые из набора А Таблицы 1 и использовать регуляризацию обрезанием по трехмерному импульсу. Значения остальных параметров будут оговариваться.

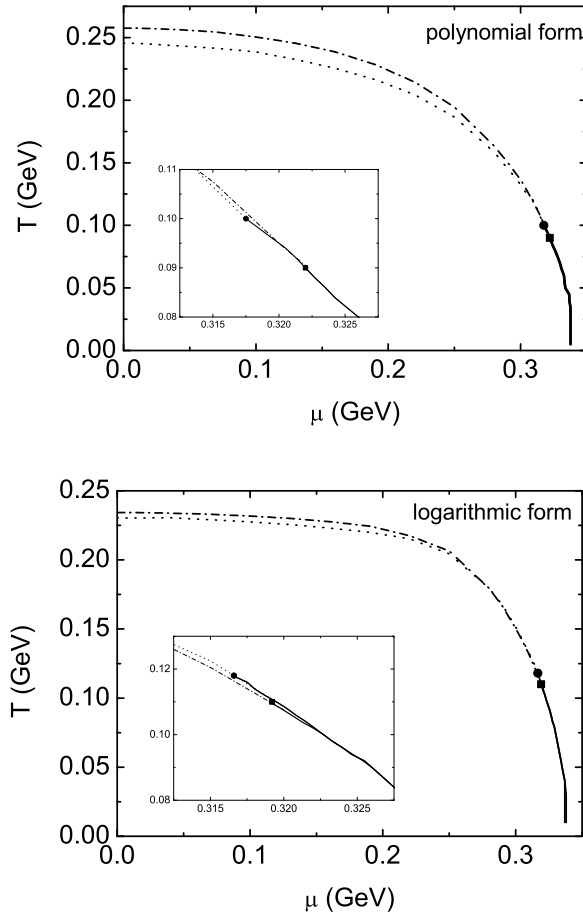


Рис. 12: Фазовая диаграмма модели НИЛ с петлей Полякова с полиномиальной (верхний график) и логарифмической (нижний график) формами аппроксимации потенциала. Сплошные линии показывают фазовый переход первого порядка, пунктирные и штрих-пунктирные линии - переход типа кроссовер.

Из рисунка видно, что критическая температура во всех случаях сильно завышена: при нулевом химическом потенциале переход происходит при температурах  $T_c = 0.2395, 0.253$  ГэВ для полиномиального эффективного потенциала и  $T_c = 0.23, 0.234$  ГэВ для логарифмиче-

ского, первая цифра соответствует новому ряду параметров, вторая - старому. Очевидно, что выбор параметров сильнее влияет на полиномиальный эффективный потенциал, но все же параметризация эффективного потенциала влияет на фазовую диаграмму меньше, чем вид выбранного эффективного потенциала. Как видно из рисунка, положение критической точки  $(T_{CER}, \mu_{CER})$  определяется как  $(0.118, 0.3166)$ ,  $(0.11, 0.3192)$  для логарифмического и  $(0.10, 0.3175)$ ,  $(0.09, 0.322)$  полиномиальных потенциалов, где первая пара координат относится к новому ряду параметров, а вторая - к старому. Видно, что введение новых параметров сильнее влияет на сдвиг критической конечной точки по химическому потенциалу, чем по температуре.

Проблема повышенного значения псевдокритической температуры в модели НИЛ с петлей Полякова (0.23-0.253 ГэВ против 0.19 ГэВ в НИЛ и 0.17 ГэВ в расчетах на решетке) обсуждалась в ранних работах по НИЛП [48, 49], где было предложено перенормировать температуру деконфайнмента  $T_0$  до значения 0.19 ГэВ. В результате действительно получается снижение температуры кирального фазового перехода до 0.18-0.19 ГэВ, но при этом она перестает совпадать с температурой деконфайнмента, определяемой через  $\max \frac{\partial \Phi}{\partial T}$ . В тех же работах было предложено определять псевдокритическую температуру перехода при нулевом химическом потенциале как среднее значение между температурой кирального перехода и температурой перехода к деконфайнменту. Но такой подход не приводит к исправлению ситуации с несовпадением температур двух фазовых переходов.

Положение критической конечной точки также вызывает большой исследовательский интерес, но определенное согласие о ее положении до сих пор не достигнуто. Поэтому возник вопрос: а существует ли критическая конечная точка? Так, если в модель добавляется векторное взаимодействие, можно подобрать такие параметры, когда область фазового перехода и критическая конечная точка исчезают.

## 2.2 Векторное взаимодействие

Включение векторного взаимодействия рассматривалось в рамках модели НИЛ в работах [59, 60] и в рамках модели НИЛ с петлей Поляко-

ва в работах [51, 61–66]. Векторное взаимодействие вводится в модель НИЛ с петлей Полякова добавлением слагаемого  $G_v(\bar{q}\gamma_\nu q)^2$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{PNJL}} = & \bar{q}(i\gamma_\mu D^\mu - \hat{m}_0 - \gamma_0\mu)q + G_s \left[ (\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2 \right] \\ & - G_v(\bar{q}\gamma_\nu q)^2 - \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}; T) . \end{aligned} \quad (81)$$

Все обозначения совпадают с обозначениями (55), (62),  $G_v$  - константа векторного взаимодействия.

Большой термодинамический потенциал в приближении среднего поля имеет следующий вид (его получение подробно описано в Приложении 1) [48, 91]:

$$\Omega(\Phi, \bar{\Phi}, m, T, \mu) = \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}; T) + G_s \langle \bar{q}q \rangle^2 + G_v \rho^2 + \Omega_q, \quad (82)$$

где  $\langle \bar{q}q \rangle$  - кварковый конденсат,  $\rho = \langle \bar{q}\gamma_0 q \rangle$  - плотность кварков, и кваковая часть

$$\begin{aligned} \Omega_q = & -2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \\ & - 2N_f T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [\ln N_\Phi^+(E_p) + \ln N_\Phi^-(E_p)] \end{aligned} \quad (83)$$

здесь функции  $N_\Phi^\pm$  отличаются от (69, 70) появлением нормированного химического потенциала  $\tilde{\mu}$ :

$$N_\Phi^+ = \left[ 1 + 3 \left( \Phi + \bar{\Phi} e^{-\beta E_p^+} \right) e^{-\beta E_p^+} + e^{-3\beta E_p^+} \right], \quad (84)$$

$$N_\Phi^- = \left[ 1 + 3 \left( \bar{\Phi} + \Phi e^{-\beta E_p^-} \right) e^{-\beta E_p^-} + e^{-3\beta E_p^-} \right], \quad (85)$$

где  $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  и  $E_p^\pm = E_p \mp \tilde{\mu}$ , а  $\tilde{\mu}$  связана с кварковым химическим потенциалом  $\mu$  и плотностью кварков как  $\tilde{\mu} = \mu - 2G_v \rho$ .

Для нахождения всех величин в приближении среднего поля, необходимо минимизировать  $\Omega$  относительно всех параметров, а именно:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \langle \bar{q}q \rangle} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \Phi} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\Phi}} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\mu}} = 0$$

Как и прежде,  $\frac{\partial \Omega}{\partial \langle \bar{q}q \rangle}$  приведет к уравнению щели

$$m = m_0 + 4G_s N_c N_f \int_\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_p} [1 - f_\Phi^+ - f_\Phi^-], \quad (86)$$

с нормированным значением химического потенциала  $\tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu} = \mu - 4G_v N_c N_f \int_{\Lambda} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_p} [f_{\Phi}^+ - f_{\Phi}^-] \quad (87)$$

и модифицированными функциями Ферми, также включающими нормированный химический потенциал

$$f^+ = \left[ \left( \bar{\Phi} + 2\Phi e^{-\beta E_p^+} \right) e^{-\beta E_p^+} + e^{-3\beta E_p^+} \right] / N_{\Phi}^+, \quad (88)$$

$$f^- = \left[ \left( \Phi + 2\bar{\Phi} e^{-\beta E_p^-} \right) e^{-\beta E_p^-} + e^{-3\beta E_p^-} \right] / N_{\Phi}^-, \quad (89)$$

где  $E_p^{\pm} = E_p \mp \tilde{\mu}$ .

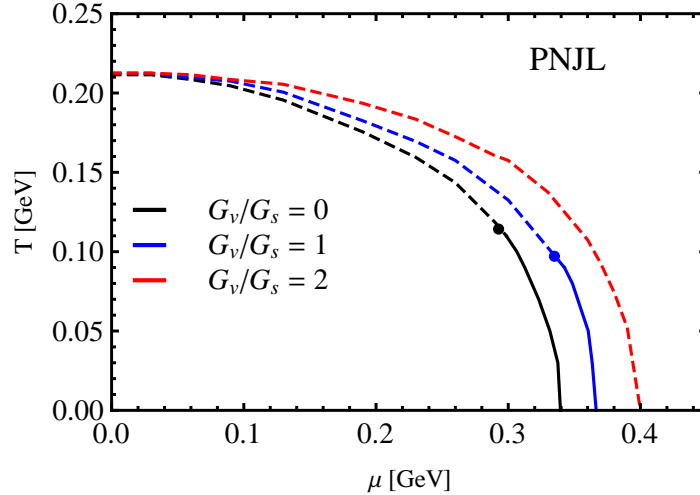


Рис. 13: Фазовая диаграмма модели НИЛ с петлей Полкова с векторным взаимодействием.

На Рис.13 показана фазовая диаграмма модели НИЛП с векторным взаимодействием. Эффективный потенциал выбран в полиномиальной форме, с параметрами из Таблицы 3, со свободными параметрами модели, соответствующими набору А из Таблицы 1 и параметром  $T_0 = 0.19$  ГэВ. Как говорилось выше, такая нормировка снижает критическую температуру фазового перехода при нулевом химическом потенциале, но приводит к тому, что киральный фазовый переход и деконфайнмент происходят при разных температурах. Это видно из Рис. 14, где изображены параметры порядка модели. Из Рис. 13 также видно, что с ростом константы векторного взаимодействия исчезает фазовый переход первого рода.



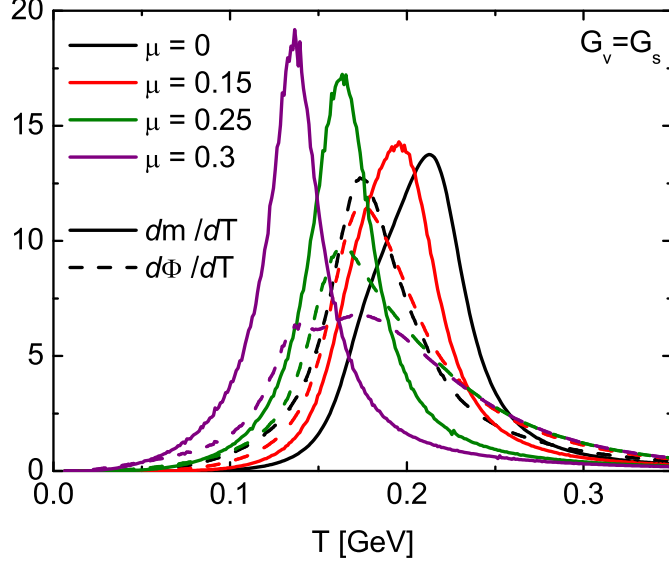


Рис. 14: Параметры порядка модели НИЛ с петлей Полкова с векторным взаимодействием при  $G_v = G_s$ . Сплошная линия отображает параметр порядка кирального фазового перехода, пунктирная - фазового перехода конфаинмент/деконфаинмент.

Четырехкварковое взаимодействие  $G_s$ , присутствующее в лагранжианах модели НИЛ и модели НИЛ с петлей Полякова можно рассматривать как диаграмму обмена глюоном между двумя кварками. Глюонное поле  $A_\nu$  и его временная компонента  $A_0$  связано с полем петли Полякова [109] и  $G_s$  можно заменить на эффективную вершину, зависящую от  $\Phi$ . Так как модель НИЛП удовлетворяет расширенной  $Z_3$ -симметрии<sup>1</sup>, можно ввести следующую феноменологическую зависимость для  $G_s(\Phi)$  [55]

$$\tilde{G}_s(\Phi) = G_s[1 - \alpha_1 \Phi \bar{\Phi} - \alpha_2(\Phi^3 + \bar{\Phi}^3)], \quad (90)$$

где параметры  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.2$  выбираются так, чтобы модель воспроизводила данные решеточной КХД при  $\mu = 0$ . Эта идея потом использовалась во многих работах [56, 57, 111] при исследовании структуры фазовой диаграммы без векторного взаимодействия. В работах

<sup>1</sup>В [110] было показано, что КХД кроме  $Z_3$ -симметричности обладает периодичностью относительно параметра  $\Theta_q$ :  $\Omega_{\text{QCD}}(\Theta_q) = \Omega_{\text{QCD}}(\Theta_q + \frac{2\pi k}{3})$ , где  $k, \mu_q = i\Theta_q T$ . Такая комбинация была названа расширенной  $Z_3$ -симметрией. В серии работ по НИЛП с мнимым химическим потенциалом было доказано, что модель НИЛП также удовлетворяет расширенной  $Z_3$ -симметрии.

[68, 112], впервые было предложено включить зависимость константы векторного взаимодействия от петли Полякова:

$$\tilde{G}_v(\Phi) = G_v[1 - \alpha_1\Phi\bar{\Phi} - \alpha_2(\Phi^3 + \bar{\Phi}^3)] \quad (91)$$

Чтобы соотношение констант  $\tilde{G}_v/\tilde{G}_s$  осталось независимым от  $\Phi$ , используются те же самые параметры  $\alpha_1, \alpha_2$  как и для  $\tilde{G}_s$ .

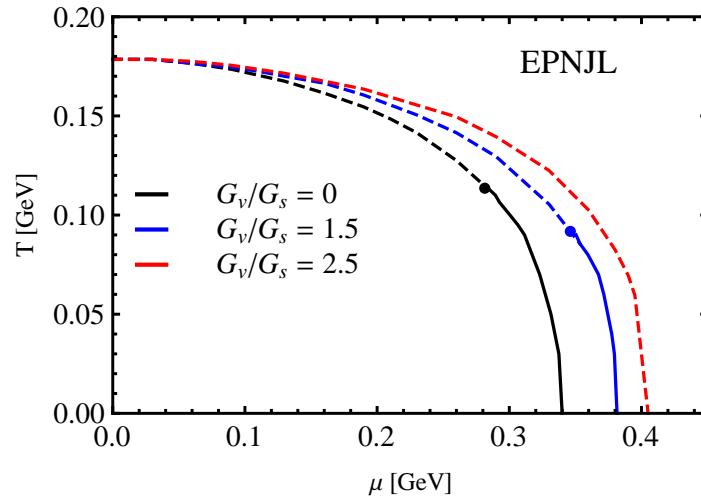


Рис. 15: Фазовая диаграмма модели НИЛ с петлей Полякова с векторным взаимодействием и константой векторного взаимодействия, зависящей от  $\Phi$ .

Такое усиление взаимодействия между кварками и глюонами приводит к тому, что при перенормировке параметра  $T_0$ , фазовые переходы происходят при одинаковой температуре, и значительно снижается температура фазового перехода при нулевом химическом потенциале. Это видно из Рис. 15, где изображена фазовая диаграмма и Рис. 16, где изображены параметры порядка. Из Рис.15 можно также заметить, что значение константы векторного взаимодействия, при котором исчезает фазовый переход первого рода для модели с константой векторного взаимодействия, зависящей от  $\Phi$  значительно выше, чем в случае, когда  $G_v, G_s = const$ .

КХД на решетке испытывает некоторую трудность в расчетах при конечном химическом потенциале. Это связано с так называемой ”проблемой знака” [113]. Для экстраполяции результатов, полученных при нулевом химическом потенциале, в область конечных химических потенциалов и определения положений критической конечной точки, было предложено ввести такую величину, как ”кривизна кроссовера”.

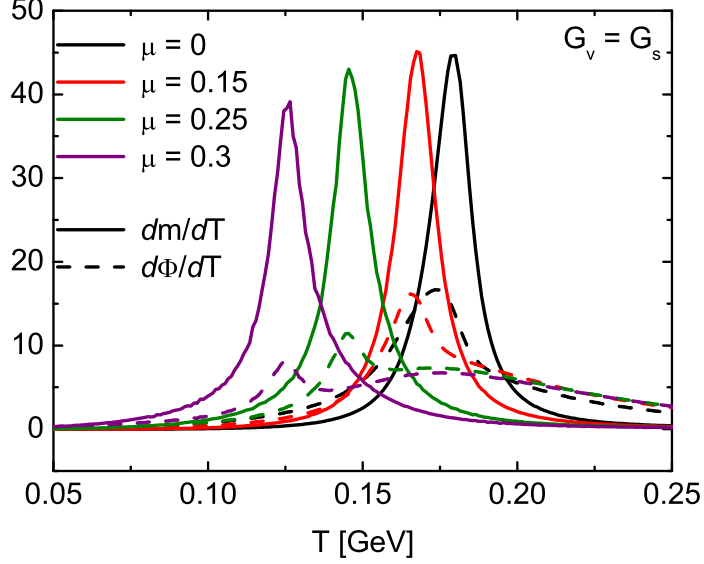


Рис. 16: Параметры порядка модели НИЛ с петлей Полкова с векторным взаимодействием при  $G_v = G_s$  и константой векторного взаимодействия, зависящей от  $\Phi$ . Сплошная линия отображает параметр порядка кирального фазового перехода, пунктирная - фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент.

Вводится она из соображений, что критические кривые, соответствующие всем физическим величинам (киральный конденсат, кварковая восприимчивость, восприимчивость странных кварков, петля Полякова) должны сойтись в одной точке - критической конечной точке.

$$\frac{T_c(\mu)}{T_c(0)} = 1 - k \left( \frac{\mu}{T_c(\mu)} \right)^2. \quad (92)$$

В решеточной КХД эту величину определяют различными способами: так, для случая (2+1) ароматов с помощью разложения в ряд Тейлора в [114] получено значение  $k = 0.059 \pm 0.020$ , извлечение значения из скейлинговых свойств кирального конденсата и киральной восприимчивости привело к результату  $k = 0.0089 \pm 0.0014$  и  $0.0066 \pm 0.002$  соответственно [113], а расчеты для мнимого химического потенциала показывают  $k = 0.0132 \pm 0.0018(0.003)$  [115]. К сожалению, данные для двух ароматов практически отсутствуют, наиболее точным можно считать результат для двух вырожденных фермионов, полученный в работе [116]  $k = 0.00563 \pm 0.00038$ . Так как в случае (2+1) ароматов

влиянием  $s$ -кварка на термодинамику системы можно пренебречь, так как при расчетах учитываются только химические потенциалы легких кварков, сравнение результатов можно считать целесообразным.

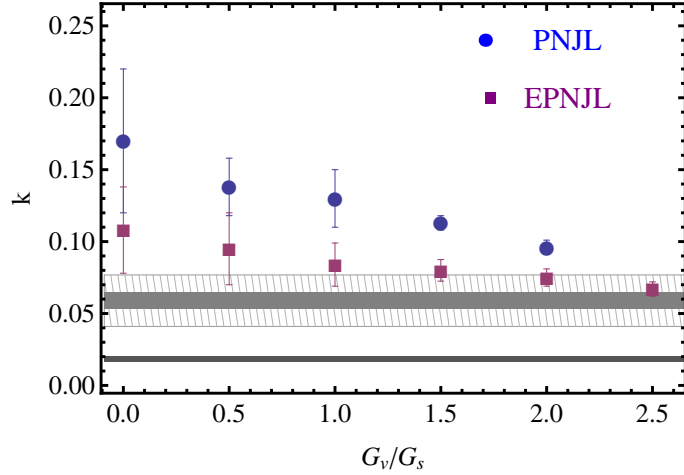


Рис. 17: Кривизна  $k$  кроссовера для моделей НИЛП и НИЛП с  $\Phi$ -зависимыми константами связи как функция  $G_v/G_s$ . Светло- и темно-серые полосы показывают результаты полученные в решеточной КХД для  $(2+1)$  числа ароматов в работах [113] and [117] соответственно. Широкая заштрихованная полоса соответствует результатам решеточной КХД с мнимым потенциалом [114].

Результаты вычисления кривизны кроссовера для модели НИЛП и модели НИЛП с константой связи, зависящей от петли Полякова представлены на Рис. 17 как функция  $G_v/G_s$ . Видно, что когда векторное взаимодействие отсутствует, результаты значительно превышают результаты, полученные решеточной КХД. При увеличении значения векторного взаимодействия кривизна кроссовера становится сравнимой с этими результатами. Особенно хорошо это видно для модели с константой скалярного взаимодействия, зависящей от  $\Phi$ .

### 2.3 Уравнения состояния кварковой материи

Термодинамика системы частиц описывается в терминах канонического ансамбля, который связан с гамильтонианом  $H$  следующим образом:

$$e^{-\beta V \Omega} = \text{Tr} e^{-\beta(H - \mu N)}, \quad (93)$$

где  $N$  оператор числа частиц,  $\mu$  - кварковый химический потенциал, а след  $\text{Tr}$  берется по дираковским, цветовым и ароматным индексам. Зная большой термодинамический потенциал  $\Omega$ , можно получить все остальные термодинамические величины: давление  $p$ , плотность энергии  $\varepsilon$ , плотность энтропии  $s$  и плотность числа частиц  $\rho$

$$p = -\frac{\Omega}{V}, \quad (94)$$

$$s = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_\mu, \quad (95)$$

$$\varepsilon = -p + Ts + \mu\rho, \quad (96)$$

$$\rho = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_T. \quad (97)$$

$$(98)$$

Выражения для термодинамического потенциала в приближении среднего поля были получены в этой главе и записываются как (185) для модели ПНИЛ и (82) для модели ПНИЛ с учетом векторного взаимодействия. В каждом из случаев можно выделить вакуумную часть

$$\Omega_{vac} = \frac{(m - m_0)^2}{4G} - 2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p. \quad (99)$$

Эта величина не исчезает, когда  $T \rightarrow 0$  и  $\mu \rightarrow 0$ . Следовательно, для того чтобы получить физическое значение термодинамического потенциала, которое соответствовало бы давлению, исчезающему при нулевых температуре и плотности,  $(T, \mu) = (0, 0)$ , необходимо перенормировать потенциал, извлекая из него вакуумную часть (99). Это приведет к следующему, физическому, определению давления:

$$\frac{p}{T^4} = \frac{p(T, \mu, m) - p(0, 0, m)}{T^4}. \quad (100)$$

На Рис. 18 слева приведено давление, полученное в модели НИЛП с различными формами потенциала (59), (60) со старыми (пунктирная линия) и новыми (сплошная) параметрами, приведенными в Таблице 3 при  $T_0 = 0.27$  ГэВ и  $\mu = 0$  ГэВ. Справа давление рассчитано в модели НИЛП с векторным взаимодействием с  $T_0 = 0.19$  ГэВ и старыми параметрами из Таблицы 3 с постоянными константами четырех-

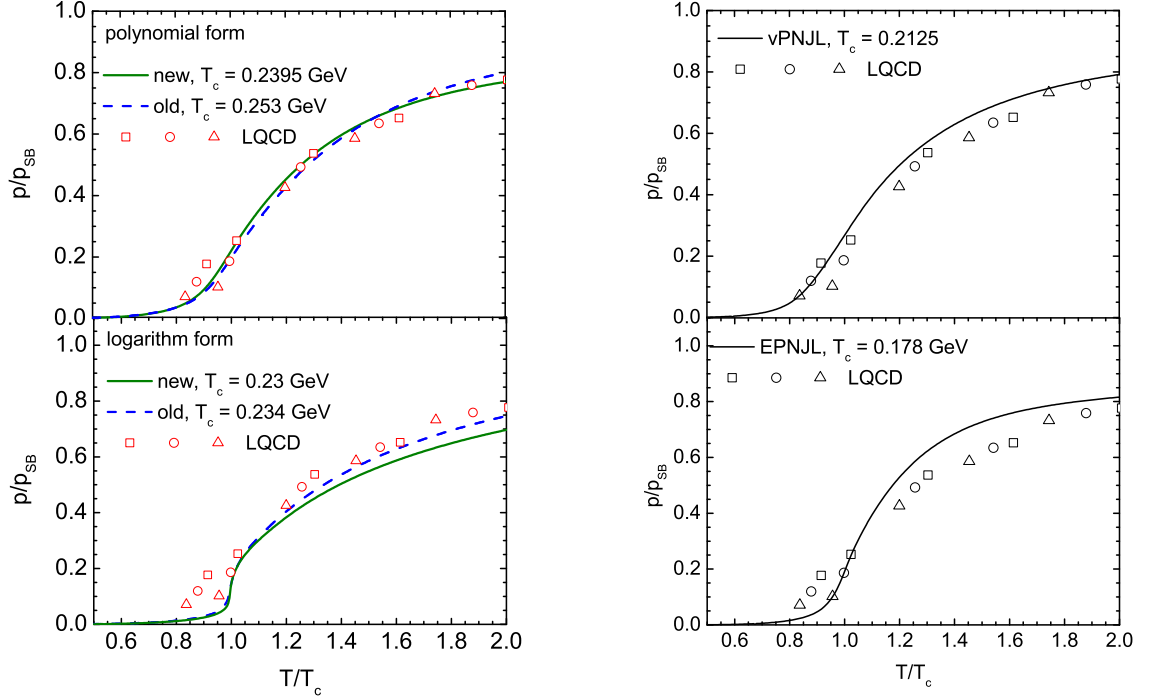


Рис. 18: Нормированное давление как функция температуры при  $\mu = 0$ . Решеточные данные для  $N_f = 2$  при  $\mu = 0$  взяты из [118]. Квадраты, окружности и треугольники соответствуют расчетам с  $N_t = 6$  с отношением масс псевдоскалярных и векторных мезонов  $m_{PS}/m_V = 0.65, 0.70$  и  $0.75$ , соответственно.

кваркового взаимодействия (правый верхний график) и в случае, когда константы взаимодействия зависят от  $\Phi$  (правый нижний график)

С ростом температуры давление стремится к так называемому пределу Стефана-Больцмана [86]

$$\frac{p_{SB}}{T^4} = (N_c^2 - 1) \frac{\pi^2}{45} + N_c N_f \frac{7\pi^2}{180} \simeq 4.053, \quad (101)$$

где первое и второе слагаемое соответствуют глюонному и кварковому вкладам, соответственно.

В связи с тем, что в нормированном давлении отсутствует прямая зависимость от плотности кварков, значение константы векторного взаимодействия при нулевом химическом потенциале не влияет на значение давления и результаты будут в точности совпадать с изображенными на Рис. 18.

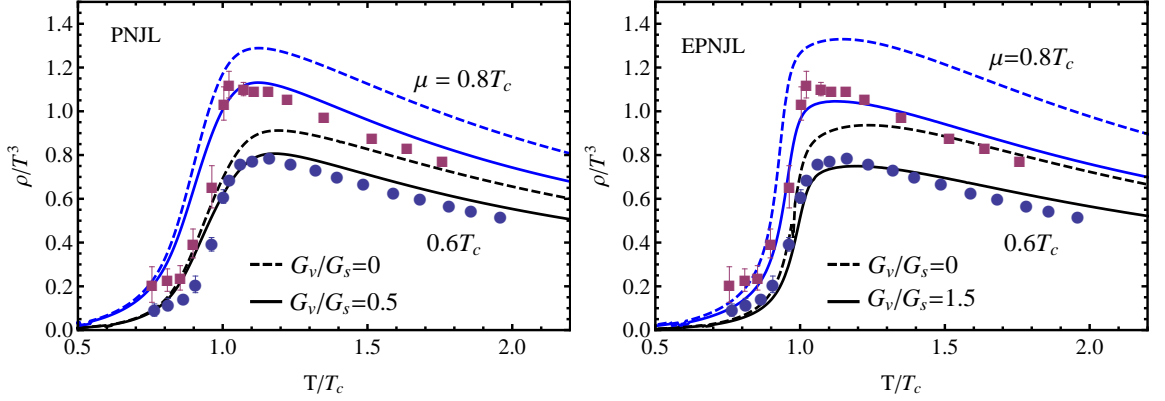


Рис. 19: Сравнение нормированной плотности кварков для модели НИЛП (PNJL) и НИЛП с  $G_v(\Phi)$  (EPNJL) для значений  $\mu = 0.6T_c$  и  $0.8T_c$  с результатами решетки [119]

Нормированная плотность кварков, напротив, сильно зависит от величины константы векторного взаимодействия, что видно на Рис. 19 для случаев с  $G_v = const$  и с  $G_v = \tilde{G}_v(\Phi)$  для  $T_0 = 0.19$  ГэВ. Видно, что результаты лучше совпадают при  $G_v = 0.5$  ГэВ для первого случая и при  $G_v = 1.5$  ГэВ для второго. Величина константы векторного взаимодействия оценивалась на основе данных решеточной КХД в модели НИЛП при мнимом химическом потенциале в [120] и а нелокальной модели НИЛП в [121]. В первой работе получено значение  $G_v/G_s = 0.8$ , а во второй  $G_v/G_s = 0.4$ .

Сравнение плотности кварков для модели НИЛП с двумя разными формами эффективного потенциала для новых и старых параметров, взятыми из Таблицы 3 с  $T_0 = 0.27$  ГэВ при  $\mu = 0.6T_c$  и  $0.8T_c$  с результатами решетки [119] представлено на Рис. 20. Видно, что данные, полученные на решетке воспроизводятся хорошо вне зависимости от параметров эффективного потенциала.

С ростом плотности кварков (или химического потенциала) возникает фазовый переход первого рода. Это выражается в появлении трех корней при решении уравнения щели (см. Рис.21). Уравнение состояния, в этом случае, для модели НИЛП и модели НИЛП с  $G_v = \tilde{G}_v(\Phi)$  показано на Рис.22 и Рис. 23.

Смешанная фаза, в которой сосуществуют кварковые и адронные степени свободы отображается прямой линией, связывающей две ветки, образующие треугольник в точке фазового перехода. Две крайние

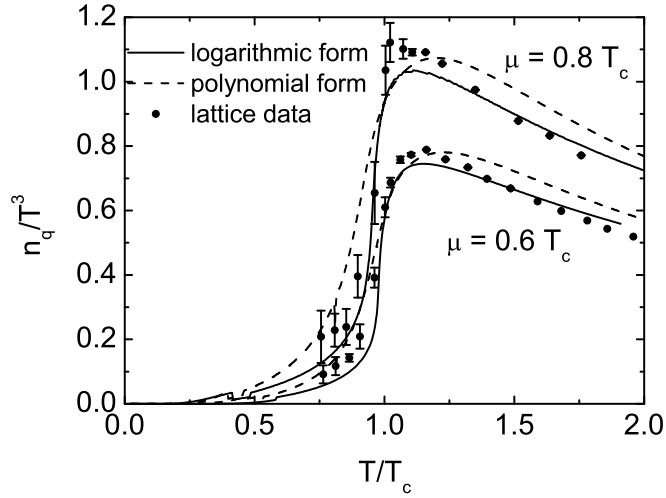


Рис. 20: Сравнение нормированной плотности кварков для модели НИЛП с двумя разными формами эффективного потенциала для новых и старых параметров при  $\mu = 0.6T_c$  и  $0.8T_c$  с результатами решетки [119]

точки этой линии соответствуют границам сосуществования фаз т.е. определяют границы термодинамически нестабильной области, в которой случайные флуктуации могут привести к появлению смеси двух фаз.

Фазовому переходу первого рода соответствует такая область энергий (температур) и/или плотностей, где производная давления по плотности кварков становится отрицательным. Сама граница области (спинодаль) определяется из условия, равенство нулю производной давление по плотности кварков. Это хорошо видно из Рис. 23, где граница спинодальной области показана точечной кривой. При сравнении Рис. 23 и Рис. 21 видно, что область нестабильности соответствует области, где  $\frac{\partial p}{\partial \mu} < 0$ . Стоит отметить, что с усилением векторного взаимодействия, область нестабильности уменьшается и фазовый переход первого рода становится слабее.

## 2.4 Влияние мезонных корреляций на уравнения состояния адронной материи

Все вычисления, приведенные до этого были выполнены в приближении среднего поля. Чтобы получить уравнение состояния кварк-



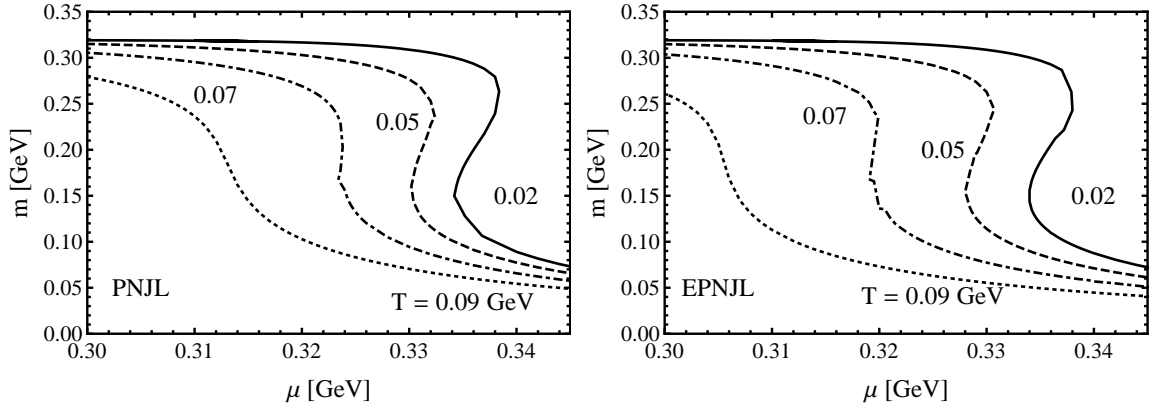


Рис. 21: Масса кварков как функция химического потенциала в нестабильной области для модели НИЛП и НИЛП с  $G_v(\Phi)$  для различных температур.

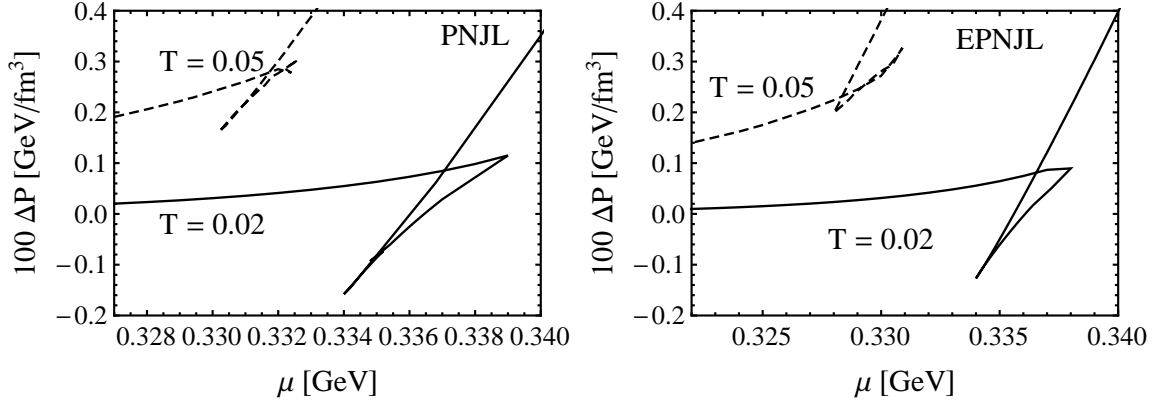


Рис. 22: Давление как функция химического потенциала для модели НИЛП и НИЛП с  $G_v(\Phi)$  для различных температур.

адронной системы [122], позволяющее описать вклад связанных состояний в термодинамику системы близ фазовых переходов, необходимо учесть ту часть функционального интеграла (63), отвечающую за флуктуации, которая обычно отбрасывается в приближении среднего поля

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}_{FL}[T, V, \mu] = & \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\vec{\pi} \exp \left\{ - \left[ \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \frac{2\sigma\sigma_{MF} + \sigma^2 + \vec{\pi}^2}{4G_s} \right] \right. \\
 & \left. + \text{Tr} \ln \left[ 1 - S_{MF}[m] (\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \vec{\pi}) \right] \right\}. \quad (102)
 \end{aligned}$$

Учет этого слагаемого позволит описать связанные состояния кварков и их влияние на термодинамику системы. Выражение (102) можно пе-

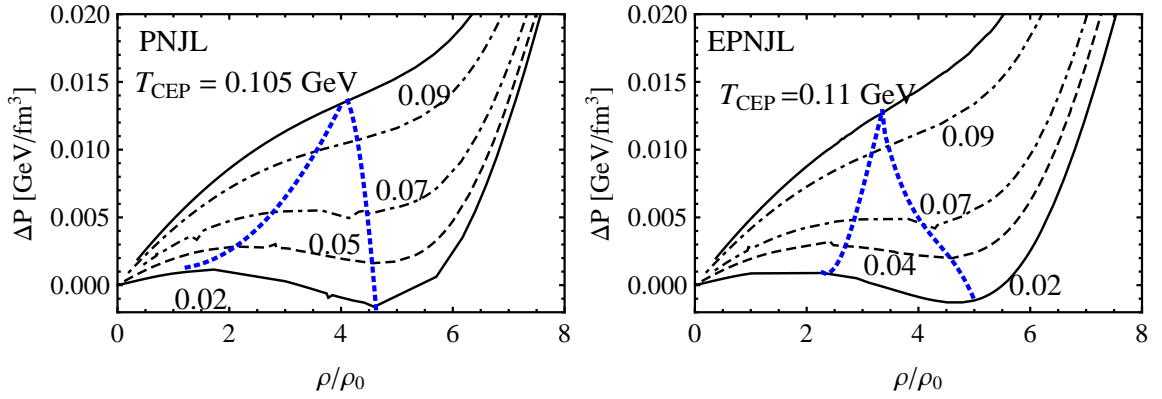


Рис. 23: Давление как функция плотности кварков для модели НИЛП и НИЛП с  $G_v(\Phi)$  для различных температур.

реписать в более очевидном виде, взяв во внимание разложение в ряд  $\ln(1-x) = -\sum_n \frac{x^n}{n!}$  и оставив два первых слагаемых:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln [1 - S_{\text{MF}}[m]\Sigma[\sigma, \pi]] &\simeq -\text{Tr} (S_{\text{MF}}\Sigma[\sigma, \pi]) - \\ &- \frac{1}{2}\text{Tr} (S_{\text{MF}}[m]\Sigma[\sigma, \pi]S_{\text{MF}}[m]\Sigma[\sigma, \pi]), \end{aligned} \quad (103)$$

где  $\Sigma[\sigma, \pi] = \sigma + i\gamma_5\tau\pi$ . Первое слагаемое после вычислений приводит к результату

$$\text{Tr} (S_{\text{MF}}\Sigma[\sigma, \pi]) = 4\frac{V}{T}\sigma \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \frac{m}{p^2 - m^2}, \quad (104)$$

что в точности компенсирует член  $\frac{2\sigma\sigma_{\text{MF}}}{2G_s}$  в (102). Второе слагаемое описывает собственно мезонные флуктуации и, по сути, может быть описано поляризационной петлей Рис.24.

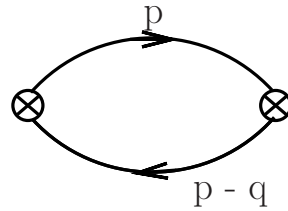


Рис. 24: Поляризационная петля.

Распишем второе слагаемое подробно

$$\begin{aligned} \text{Tr}(S_{\text{MF}}\Sigma[\sigma, \pi]S_{\text{MF}}\Sigma[\sigma, \pi]) &= \text{Tr}(S_{\text{MF}}\Sigma_\sigma S_{\text{MF}}\Sigma_\sigma + \\ &+ S_{\text{MF}}\Sigma_\sigma S_{\text{MF}}\Sigma_\pi + S_{\text{MF}}\Sigma_\pi S_{\text{MF}}\Sigma_\sigma + S_{\text{MF}}\Sigma_\pi S_{\text{MF}}\Sigma_\pi). \end{aligned}$$

Члены, содержащие и скалярное, и псевдоскалярное поле, в итоге, дают ноль (т.к.  $\text{Tr}_f \tau = 0$ ) и остаются только следующие слагаемые (все преобразования опущены)

$$\begin{aligned} &\text{Tr}(S_{\text{MF}}(p)\Sigma_\sigma S_{\text{MF}}(k)\Sigma_\sigma) = \\ &= 4\frac{V}{T}N_c N_f \sigma^2 T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{(i\omega_n - \mu)(i\omega_n - \mu - q_0) - \vec{p} \vec{k} + m^2}{((i\omega_n - \mu)^2 - m^2)((i\omega_n - \mu - q_0)^2 - m^2)} \\ &= -\sigma^2 \frac{V}{T} \Pi_\sigma(q_0, \vec{q}), \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned} &\text{Tr}(S_{\text{MF}}(p)\Sigma_\pi S_{\text{MF}}(k)\Sigma_\pi) = \\ &= 4\frac{V}{T}N_c N_f \pi^2 T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{(i\omega_n - \mu)(i\omega_n - \mu - q_0) - \vec{p} \vec{k} - m^2}{((i\omega_n - \mu)^2 - m^2)((i\omega_n - \mu - q_0)^2 - m^2)} \\ &= -\pi^2 \frac{V}{T} \Pi_\pi(q_0, \vec{q}). \end{aligned} \quad (106)$$

Теперь функциональный интеграл равен

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\text{MF}}^{(2)}[T, V, \mu] &= \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi \times \\ &\times \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d^3 x \left[ \frac{\sigma^2 + \pi^2}{4G_s} - \frac{1}{2} \sigma^2 \Pi_\sigma(q_0, \vec{q}) - \frac{1}{2} \pi^2 \Pi_\pi(q_0, \vec{q}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (107)$$

а после снятия интегрирования по внешним полям останется

$$\mathcal{Z}_{\text{FL}}^{(2)}[T, V, \mu] = [\det(D_\sigma^{-1})]^{-\frac{1}{2}} [\det(D_\pi^{-1})]^{-\frac{3}{2}} \quad (108)$$

$$(109)$$

с мезонным пропагатором

$$D_{\text{M}}^{-1} = \frac{1}{2G_s} - \Pi_{\text{M}}(q_0, \vec{q}). \quad (110)$$

Так как

$$[\det D_{\text{M}}^{-1}]^{-\frac{n}{2}} = \exp \left\{ -\frac{N}{2} \text{Tr} \ln D_{\text{M}}^{-1} \right\}, \quad (111)$$

где  $N = 1$  для  $\sigma$ -мезона и  $N = 3$  для пиона, получаем следующее выражение для термодинамического потенциала:

$$\Omega_{\text{FL}} = \frac{1}{2} \frac{T}{V} \text{Tr} \ln D_{\sigma}^{-1} + \frac{3}{2} \frac{T}{V} \text{Tr} \ln D_{\pi}^{-1}. \quad (112)$$

Логарифм пропагатора удобно переписать через спектральную функцию  $A_M^g(\omega, \vec{q})$  [123]:

$$\begin{aligned} \ln D_M^{-1} &= - \int_0^{G_s} dg \frac{1}{2g^2} \frac{1}{\frac{1}{2g} - \Pi_M(q_0, \vec{q})} = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{q_0 - \omega} \int_0^{G_s} \frac{dg}{2g^2} A_M^g(\omega, \vec{q}), \end{aligned} \quad (113)$$

здесь  $g$  - некий параметр, по которому проводится интегрирование и который несет смысл константы связи. Далее проводится аналитическое продолжение пропагатора на комплексную плоскость через небольшой сдвиг от действительной оси

$$\begin{aligned} \int_0^{G_s} \frac{dg}{2g^2} A_M^g(\omega, \vec{q}) &= -i \int_0^{G_s} \frac{dg}{2g^2} \left( S_M^g(\omega + i\eta, \vec{q}) - S_M^g(\omega - i\eta, \vec{q}) \right) \\ &= -i \ln \left( \frac{1 - 2G_s \Pi_M(\omega - i\eta, \vec{q})}{1 - 2G_s \Pi_M(\omega + i\eta, \vec{q})} \right). \end{aligned} \quad (114)$$

Аргумент логарифма определяет матрицу рассеяния  $\mathcal{S}_M(\omega, \vec{q})$  [124], которая, являясь комплексной функцией, может быть выражена через фазу:

$$\mathcal{S}_M = e^{2i\Phi_M} = \frac{1 - 2G_s \Pi_M(\omega - i\eta, \vec{q})}{1 - 2G_s \Pi_M(\omega + i\eta, \vec{q})}, \quad (115)$$

откуда

$$\int_0^{G_s} \frac{dg}{2g^2} A_M^g(\omega, \vec{q}) = -i \ln \mathcal{S}_M(\omega, \vec{q}) = 2\Phi_M(\omega, \vec{q}). \quad (116)$$

И, после подстановки последнего в (113), получается

$$\begin{aligned} \ln D_M^{-1} &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{q_0 - \omega} \int_0^{G_s} \frac{dg}{2g^2} A_M^g(\omega, \vec{q}) \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{q_0 - \omega} \Phi_M(\omega, \vec{q}). \end{aligned} \quad (117)$$

Подстановка этого выражения в (112) и вычисление следа приводит к результату

$$\begin{aligned}
\Omega_M^{(2)}(T, \mu) &= -\frac{N_M}{2} \frac{1}{2} \text{Tr} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\pi} \frac{1}{q_0 - \omega} \Phi_M(\omega, \vec{q}) = \\
&= -\frac{N_M}{2} T \sum_{q_0} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\pi} \frac{1}{q_0 - \omega} \Phi_M(\omega, \vec{q}) \\
&= -\frac{N_M}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\pi} f_B(\omega - \mu) \Phi_M(\omega, \vec{q}) \\
&= -\frac{N_M}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\pi} [-1 + f_B(\omega - \mu) + f_B(\omega + \mu)] \Phi_M(\omega, \vec{q}),
\end{aligned} \tag{118}$$

где  $f_B$  -распределительная функция Бозе-Эйнштейна, возникшая из суммы Матсубары по бозонным частотам  $q_0$ , обладающая свойством  $f_B(-\omega - \mu) = -1 + f_B(\omega + \mu)$ ,  $\Phi_M(-\omega, \vec{q}) = -\Phi_M(\omega, \vec{q})$  - фаза рассеяния. Применяя правило интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned}
\Omega_M^{(2)}(T, \mu) &= -\frac{N_M}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\pi} \frac{d}{d\omega} \times \\
&\times \left[ -\omega + \ln[1 - e^{\beta(\omega - \mu)}] + T \ln[1 - e^{\beta(\omega + \mu)}] \right] \Phi(\omega, \vec{q}) \\
&= -\frac{N_M}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\pi} \frac{d}{d\omega} \times \\
&\times \left[ -\omega + T \ln(1 - \ln[1 - e^{\beta(\omega - \mu)}]) + T \ln[1 - e^{\beta(\omega + \mu)}] \right] \frac{d\Phi_M(\omega, \vec{q})}{d\omega},
\end{aligned} \tag{119}$$

где сдвиг фаз  $\Phi_M(\omega, \vec{q})$  из (115)

$$\Phi_M = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 - 2G_s \Pi_M(\omega - i\eta, \vec{q})}{1 - 2G_s \Pi_M(\omega + i\eta, \vec{q})}. \tag{120}$$

Дальнейшая оценка давления будет заключаться в физической интерпретации и аналитическом описании свойств пропагатора  $1 - 2G_s \Pi_M(\omega, \vec{q})$ . Проиллюстрировать это можно с точки зрения простейшего предположения, что пропагатор имеет полюсное приближение

$$1 - 2G_s \Pi_M(\omega, \vec{q}) = (\omega^2 - E_M^2) \times g_{Mq}^2, \tag{121}$$

где  $E_M^2 = \vec{q}^2 + M_M^2$  энергия мезона и  $M_M$  - масса мезона. Тогда

$$\frac{d}{d\omega} \ln \frac{1 - 2G_s \Pi_M(\omega - i\eta, \vec{q})}{1 - 2G_s \Pi_M(\omega + i\eta, \vec{q})} = -2\pi i \delta(\omega - E_M), \quad (122)$$

а термодинамический потенциал

$$\Omega_M = \frac{N_M}{2} \int \frac{d^3q}{q} \left[ E_M + T \ln[1 - e^{-\beta(E_M - \mu)}] + T \ln[1 - e^{-\beta(E_M + \mu)}] \right]. \quad (123)$$

Такой потенциал может соответствовать системе невзаимодействующих мезонов [125].

Комбинируя вклад от связанных состояний, описываемых дельта-функцией и вклад от рассеянных состояний ( $\frac{d\Phi_M}{d\omega}$ ), можно получить обобщенное уравнение Бет-Уленбека. Массы связанных состояний и сдвиг фазы рассеяния в соответствующем канале зависят от среды рассеяния. Так, восстановление киральной симметрии приводит к тому, что масса кварка в области фазового перехода резко падает и становится близкой к токовой. При этом пионы становятся резонансными состояниями, которые можно описать комплексным полюсом  $q_0 = M_M - i\frac{\Gamma_M}{2}$ , где  $\Gamma_M$  - ширина резонансного состояния. Пренебрегая влиянием среды, можно вычислить влияние расширения мезонных резонансных состояний. Для этого вводится спектральная функция Брейта-Вигнера:

$$\frac{d\Phi_R(\omega, T)}{ds} = A_R(\omega, T) = a_R \frac{M_M \Gamma_M}{(\omega - M_M)^2 + (M_M \Gamma_M)^2}, \quad (124)$$

где  $a_R$  - нормировочный множитель, величина которого определяется из стандартного условия нормировки:

$$1 = \int_{-q^2}^{+\infty} d\omega A_R = a_R \int_{-q^2}^{+\infty} d\omega \frac{M_M \Gamma_M}{(\omega - M_M)^2 + (M_M \Gamma_M)^2}, \quad (125)$$

откуда

$$a_R = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2} + \text{arctg} \left( \frac{\vec{q}^2 + M_M^2}{M_M \Gamma_M} \right)}. \quad (126)$$

Ширина мезонов при температуре ниже  $T_{\text{Mott}}$  практически равна нулю, а при  $T > T_{\text{Mott}}$  становится конечной и описывает спектральное

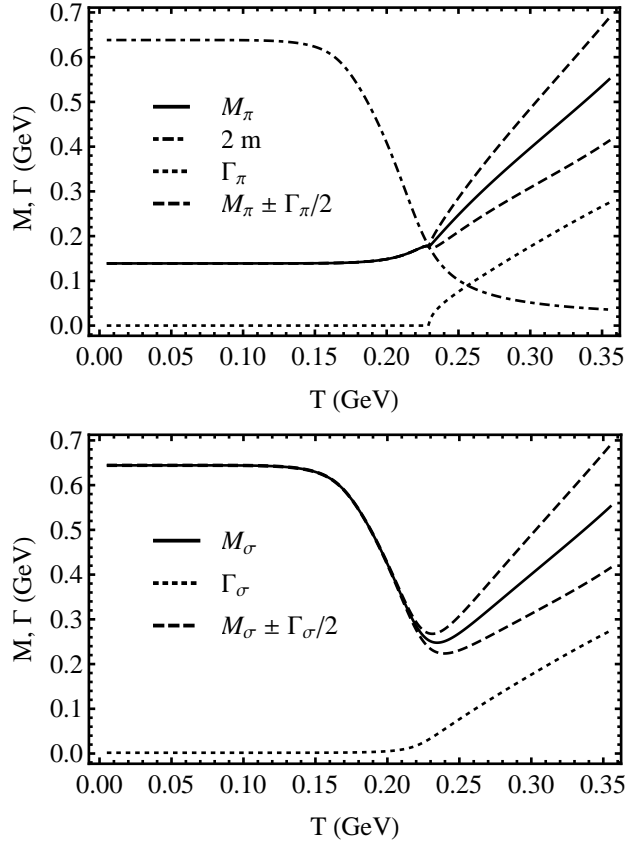


Рис. 25: Масса пиона,  $\sigma$ -мезона и двойная масса кварка как функции температуры в модели НИЛП при  $\mu = 0$ .

расширение резонансных состояний. Для определения величины  $\Gamma_M$  исходят из того, что поляризационную функцию можно аналитически продлить в комплексную плоскость (см. (114)). Далее, исходя из (26) и (27), получаем систему уравнений:

$$\text{Re}P_M = -\frac{\frac{1}{4G_s N_c N_f} - 2I_1}{|I_2(M_M + i\epsilon)|^2} \text{Re}I_2(M_M + i\epsilon), \quad (127)$$

$$\text{Im}P_M = -\frac{\frac{1}{4G_s N_c N_f} - 2I_1}{|I_2(M_M + i\epsilon)|^2} \text{Im}I_2(M_M + i\epsilon), \quad (128)$$

где  $\text{Re}P_M = M_\pi^2 - \frac{\Gamma_\pi^2}{4}$  для пиона и  $\text{Re}P_M = M_\sigma^2 - 4m^2 - \frac{\Gamma_\sigma^2}{4}$  для  $\sigma$ -мезона, а  $\text{Im}P_M = M_M \Gamma_M$  для обоих мезонов.

Поведение масс мезонов и значение их ширины в зависимости от температуры показано на Рис. 25. Из него видно, что сигма-мезон имеет ненулевую ширину даже при температурах ниже  $T_{\text{Mott}}$  но из-за того,

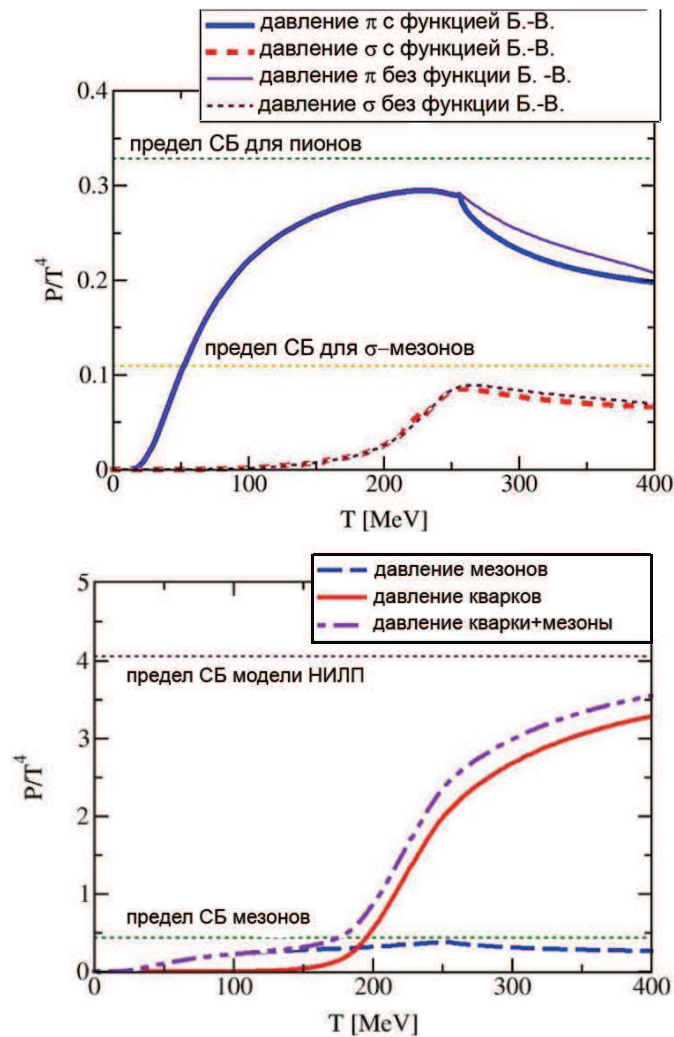


Рис. 26: Давление мезонов с и без учета спектрального расширения и рассеяния (верхний график) и сравнение давления мезонов и системы кварков в приближении среднего поля (нижний график) в модели НИЛП при  $\mu = 0$ . Символы "СБ" означают пределы Стефана-Больцмана.

что это значение близко к нулю,  $\sigma$ -мезон рассматривают как связанное состояние. Выше температуры  $T_{\text{Mott}}$  массы мезонов, а также их ширина быстро становятся одинаковыми. Это подтверждает восстановление киральной симметрии, когда  $\sigma$ -мезон и пион становятся киральными партнерами.

Зная все необходимые величины, подставляя их в (119), можно посчитать давление. На правой панели Рис. 26 представлено давление мезонов для невзаимодействующего пионного газа, так и давления с учетом спектрального расширения. Хорошо видно, что после темпера-



туры Мотта давление мезонов падает, что связано с плавлением связанных состояний. Сравнение давления мезонов и давления кварков, рассчитанного в приближении среднего поля показано на нижнем графике Рис. 26.

#### 2.4.1 Теорема Левинсона

Теорема Левинсона связывает сдвиг фазы рассеяния с количеством связанных состояний в системе. В интегральной форме она может быть записана как

$$\int_{4m^2}^{+\infty} d\omega \frac{d\Phi_M}{d\omega} = n\pi . \quad (129)$$

Выбранный как  $\frac{d\Phi_R(\omega, T)}{d\omega} = A_R(\omega, T)$  сдвиг фаз не удовлетворяет этому условию. Поэтому сдвиг фаз требуется разложить на составляющие: сдвиг фаз, отвечающий кварк-антикварковому рассеянию ( $\phi_{sc}$ ) и сдвиг фаз, вызванный корреляциями мезонов ( $\phi_R$ ) [124]. Так как сдвиг фаз выражается через выражение (120), а разложение поляризованных операторов мезонов на мнимую и действительную части производится

$$\Pi_M(q_0, \mathbf{0}) = 4N_c N_f I_1 - 2N_c N_f P_M (\text{Re}I_2 + i\text{Im}I_2), \quad (130)$$

используя некоторые преобразования, можно получить выражения для двух сдвигов фаз:

$$\begin{aligned} \Phi_M &= -\arctan \left[ \frac{2G_s P_M \text{Im}I_2}{1 - 2G_s I_1 + 2G_s P_M \text{Re} I_2} \right] = \\ &= -\arctan \left[ \frac{\frac{\text{Im}I_2}{\text{Re}I_2} - \frac{1-2G_s I_1}{2G_s |I_2|^2} \cdot \frac{\text{Im}I_2}{P_M + \frac{1-2G_s I_1}{2G_s |I_2|^2} \text{Re}I_2}}{1 + \frac{1-2G_s I_1}{2G_s |I_2|^2} \cdot \frac{\text{Im}I_2^2}{P_M \text{Re}I_2 + \frac{1-2G_s I_1}{2G_s |I_2|^2} \text{Re}I_2^2}} \right]. \end{aligned} \quad (131)$$

Откуда получается

$$\Phi_M = -\arctan \left( \frac{\text{Im}\tilde{I}_2}{\text{Re}\tilde{I}_2} \right) + \arctan \left( \frac{1 - 2G_s \tilde{I}_1}{2G_s |\tilde{I}_2|^2} \cdot \frac{\text{Im}\tilde{I}_2}{P_M + \frac{1-2G_s \tilde{I}_1}{2G_s |\tilde{I}_2|^2} \text{Re}\tilde{I}_2} \right) \quad (132)$$

где

$$\phi_{sc} = -\arctan\left(\frac{\text{Im}\tilde{I}_2}{\text{Re}\tilde{I}_2}\right) \quad (133)$$

и

$$\phi_R = \arctan\left(\frac{1 - 2G_s\tilde{I}_1}{2G_s|\tilde{I}_2|^2} \cdot \frac{\text{Im}\tilde{I}_2}{P_M + \frac{1-2G_s\tilde{I}_1}{2G_s|\tilde{I}_2|^2}\text{Re}\tilde{I}_2}\right). \quad (134)$$

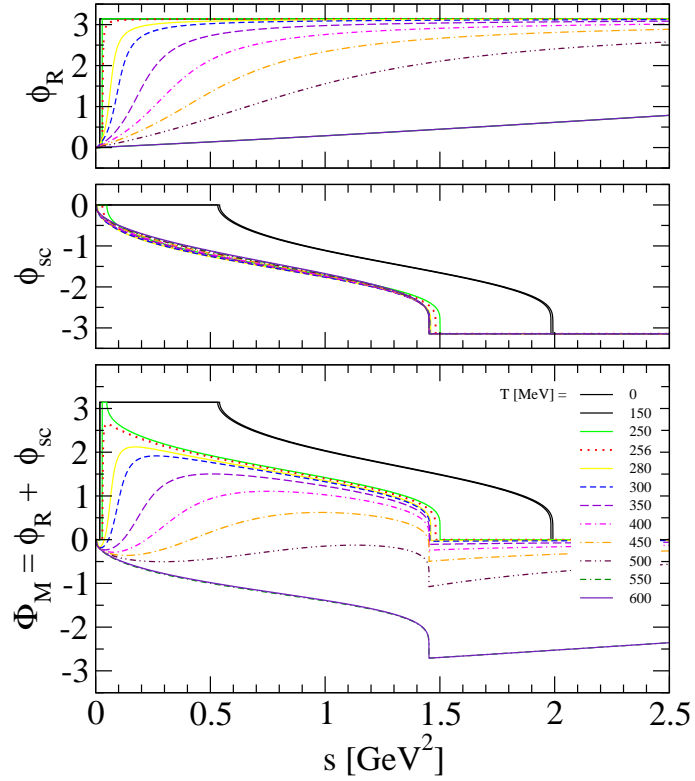


Рис. 27: Сдвиг фаз.

Вклад мезонных корреляций, очевидно, возникает при температурах, близких к критическим, когда  $T \geq T_{\text{Mott}}$  и может быть выражен через комбинацию дельта-функции и выражение сдвига фаз через спектральную функцию Брейта-Вигнера (124):

$$\frac{1}{\pi} \frac{d\Phi_M(\omega)}{d\omega} = \begin{cases} \delta(\omega - M_M^2) + \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\omega} \phi_{sc}(\omega), & T < T_{\text{Mott}}, \\ \frac{a_R}{\pi} \frac{\Gamma_M M_M}{(\omega - M_M^2)^2 + \Gamma_M^2 M_M^2} + \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\omega} \phi_{sc}(\omega), & T > T_{\text{Mott}}. \end{cases} \quad (135)$$

Результаты вычислений сдвига фаз ( $\Phi_M$ ) для пионов представлены на Рис. 27. На среднем и верхнем рисунках показаны сдвиг фаз для мезонных корреляций ( $\phi_R$ ) и сдвиг фаз, связанный с рассеянием кварков на кварках ( $\phi_{sc}$ ), полученные в выражениях (134) и (133) соответственно. Из верхнего графика рисунка видно, что при  $T < T_{\text{Mott}}$  пион является связанным состоянием, поэтому сдвиг фаз имеет скачок с 0 до  $\pi$ . При  $T > T_{\text{Mott}}$ , пион становится резонансным состоянием и сдвиг фаз приобретает плавный рост в области энергий от 0 до  $\sqrt{s} = M_\pi$  с 0 до  $\pi$ . При еще больших температурах, сдвиг фаз перестает достигать значения  $\pi$ , что объясняется отсутствием в системе связанных состояний. Фоновый сдвиг фаз связан с рассеянием кварков на кварках с промежуточным образованием пионов и  $\sigma$ -мезонов и при низких температурах имеет порог  $s = 2m$ . Видно, что с ростом температуры фоновый сдвиг фаз перестает меняться.

## 2.5 Выводы

Во второй главе диссертации проводится исследование конфайнмента кварков в модели НИЛ Намбу-Иона-Лазинио с петлей Полякова. Фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент моделируется введением эффективного потенциала, связанного с полем петли Полякова. В рамках данной модели предложено усилить взаимодействия между кварками и глюонами путем включения в модель констант взаимодействия, зависящих от поля петли Полякова. Внимание уделяется изучению структуры фазовой диаграммы адронного вещества.

- Проводится исследование влияния параметризации эффективного потенциала  $\mathcal{U}[\Phi, \bar{\Phi}; T]$  на термодинамические свойства возбужденной ядерной материи. Для этого разрабатывается метод аппроксимации эффективного потенциала по данным, полученным в решеточной КХД для чисто-калибровочного сектора и проводится пере-параметризация эффективного потенциала по новым решеточным данным.
- Проводится исследование лагранжиана модели НИЛП с векторным взаимодействием: проведена процедура адронизации и в приближении среднего поля, получены основные уравнения модели.

- Вводится зависимость констант взаимодействия (скалярного и векторного) от поля петли Полякова с целью усиления связи между кварковым и глюонным секторами.
- Проводится исследование лагранжиана модели НИЛП вне приближения среднего поля. Для этого проводится оценка части производящего функционала, отвечающей за флуктуации, исходя из которой получается выражение для давления мезонов в форме Бет-Уленбека. Рассмотрены два приближения сдвига фаз рассеяния: приближение дельта-функцией Дирака (случай невзаимодействующих адронов) и приближение спектральной функции Брейта-Вигнера (учет спектрального расширения мезонов при высоких температурах).

В главе показано:

- Термодинамика кварк-адронной системы, описываемая в рамках приближения среднего поля моделью НИЛП, зависит от выбора математической формы описания эффективного потенциала и способа его параметризации.
- Критическая температура фазового перехода при нулевом химическом потенциале в модели НИЛП сильно завышена по сравнению с данными решеточной КХД или даже модели НИЛ. Перенормировка параметра  $T_0$ , определяющего температуру фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент в решеточной КХД в отсутствие динамических кварков с 0.27 до 0.19 ГэВ приводит к снижению температуры фазового перехода при нулевом химическом потенциале, но при этом температура деконфайнмента и температура кирального фазового перехода, в противовес результатам решеточной КХД, перестают совпадать.
- Переопределение константы скалярного взаимодействия как функции поля петля Полякова приводит к тому, что при  $T_0 = 0.19$  ГэВ, температура фазового перехода становится ниже, чем в обычной НИЛП с тем же значением параметра  $T_0$  и, кроме того, обеспечивается полное совпадение температуры кирального фазового перехода и температуры деконфайнмента.

- Векторное взаимодействие в модели НИЛП, а также в модели НИЛП с константой скалярного взаимодействия, зависящего от  $\Phi$  приводит к тому, что с ростом величины векторного взаимодействия в системе область фазового перехода первого рода на плоскости  $(T, \mu)$  уменьшается, и вовсе исчезает.
- В Главе 2 проводится сравнение термодинамических величин и уравнений состояния, полученных в модели НИЛП с данными, полученными в решеточной КХД при нулевом химическом потенциале. Показано, что данные модели НИЛП с достаточной достоверностью воспроизводят данные решеточной КХД вне зависимости от выбора модификации модели.
- Показано как влияет включение давления мезонов на давление кварк-адронной вблизи фазового перехода. Показано, что выбранное приближение с использованием спектральной функции Брейта-Вигнера, показывает уменьшение давления мезонов вблизи температуры Мотта, что очевидно связано с плавлением связанных состояний и возникновением мезонных резонансов. Показана справедливость теоремы Левинсона для пиона.

### 3 Процессы рассеяния в плотной и горячей ядерной материи

С развитием ускорительной техники, актуальным стал вопрос моделирования эволюции столкновения тяжелых ионов: от начального столкновения ядер и образования струн, через фазу динамического деконфайнмента к кварк-глюонной плазме, а затем - к расширению и охлаждению образовавшейся системы, адронизации и последующим взаимодействиям образовавшихся адронов. Сложная ситуация эволюции столкновения тяжелых ионов может быть описана с точки зрения гидродинамики или кинетики. Динамика столкновения тяжелых ионов описывается, например, в рамках многофазовой транспортной модели (AMPT) [69] или партон-адронной струнной динамике (PHSD) [70–72]. Обе модели включают в себя описание эволюции кварк-глюонной системы как начальных условий и эволюцию конечной, адронной фазы, которые основаны на изучении процессов рассеяния конститuentов. Таким образом, ключевым моментом в исследовании динамики столкновения тяжелых ионов является изучение процессов рассеяния. Существует два типа реакций рассеяния: упругие и неупругие. Неупругие столкновения характерны для фазы перехода от кваркового газа к адронному газу. В частности, такие процессы характеризуют процесс адронизации кварк-антикварковой системы. После охлаждения и термализации системы, в ней происходят преимущественно упругие столкновения.

В этой главе диссертации будет сделан небольшой шаг в понимании взаимодействия между составляющими кварк-глюонной и адронной фаз: в рамках модели Намбу-Иона-Лазинио с петлей Полякова проведено исследование упругого рассеяния кварков на кварках и антикварках при конечных температурах, которое может играть большую роль в рамках изучения эволюции материи, рассеяния кварков на адронах и процесса адронизации. Будет проведен расчет полных и дифференциальных сечений упругого рассеяния кварков на кварках и антикварках. Оценка сечений рассеяния кварка на кварке и кварка на антикварке проводилась ранее в рамках модели НИЛ: например, в [126] расчет сечения рассеяния проводился в модели НИЛ с двумя

ароматами в киральном пределе ( $m_0 = 0$ ), а в [127] в  $SU(3)$  модели НИЛ. В модели НИЛ с петлей Полякова к кварк-кварковому взаимодействию добавляется глюонный конденсат, который также может влиять на процесс рассеяния.

Так как модель НИЛ с петлей Полякова описывает фазовый переход типа кроссовер, который является мягким переходом от кварк-глюонной фазы к адронной, в системе возможна ситуация, когда адроны и кварки существуют одновременно. Поэтому появляется возможность дать оценку взаимодействия между кварками/антикварками и пионами, которые являются доминирующими компонентами при столкновении тяжелых ядер.

### 3.1 Упругое рассеяние кварка на кварке и антикварке

В модели НИЛП с двумя ароматами можно говорить, по сути, о двух независимых реакциях (например,  $u\bar{u} \rightarrow u\bar{u}$  и  $u\bar{d} \rightarrow u\bar{d}$ ), а все остальные реакции изучать, исходя из принципов зарядовой, изоспиновой симметрии и кроссинг - симметрии. Как указано в работах [128, 129], в рамках модели НИЛ с двумя ароматами возможны два канала с образованием промежуточных мезонов (пиона и  $\sigma$ -мезона).

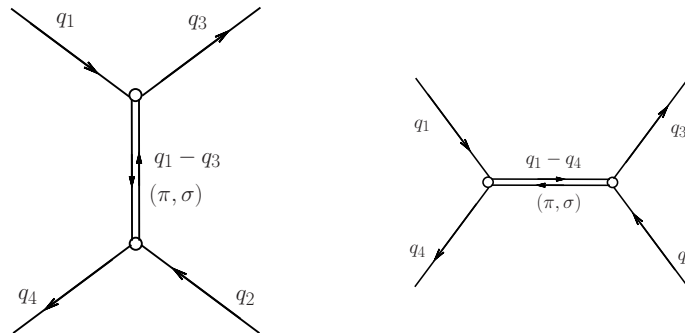


Рис. 28: Фейнмановские диаграммы процесса  $qq \rightarrow qq$

Диаграммы Фейнмана порядка  $1/N_c^2$  рассеяния кварка на кварке показаны на Рис. 28. Элементы матрицы рассеяния будут иметь

вид [129]

$$-iT_t = \bar{u}(q_3)\Gamma_\pi u(q_1)D_t^\pi \bar{u}(q_4)\Gamma_\pi u(q_2) + \bar{u}(q_3)\Gamma_\sigma u(q_1)D_t^\sigma \bar{u}(q_4)\Gamma_\sigma u(q_2), \quad (136)$$

$$-iT_u = \bar{u}(q_4)\Gamma_\pi u(q_1)D_u^\pi \bar{u}(q_3)\Gamma_\pi u(q_2) + \bar{u}(q_4)\Gamma_\sigma u(q_1)D_u^\sigma \bar{u}(q_3)\Gamma_\sigma u(q_2), \quad (137)$$

где  $\Gamma_\pi = i\gamma_5 g_{\pi qq} \tau^a$  и  $\Gamma_\sigma = \mathbf{1}$ . А  $u$  и  $t$  являются переменными Мандельштама. С учетом того, что полная амплитуда рассеяния вычисляется как  $|T_{qq}|^2 = \frac{1}{4N_c^2} \sum_c |T_t + T_u|^2$ , после всех преобразований получаются выражения для компонент:

$$|T_t|^2 = (|D_t^\sigma|^2(t - 4m^2)^2 + |D_t^\pi|^2 t^2), \quad (138)$$

$$|T_u|^2 = (|D_u^\sigma|^2(u - 4m^2)^2 + |D_u^\pi|^2 u^2), \quad (139)$$

$$\begin{aligned} T_t T_u^* &= -\frac{1}{2N_c} (D_t^\sigma D_u^\sigma (tu + 4m^2(u + t) - 16m^2) - D_t^\sigma D_u^\pi u(t - 4m^2) \\ &\quad - D_t^\pi D_u^\sigma t(u - 4m^2) + D_t^\pi D_u^\pi tu). \end{aligned} \quad (140)$$

В модели НИЛП мезонный пропагатор выглядит следующим образом:

$$D^M(k^2) = \frac{2iG}{1 - 2G\Pi_M(k^2)}, \quad (141)$$

где  $\Pi_M$  - соответствующий поляризационный оператор (20), (21). Однако можно использовать полюсное приближение, разложив  $D^M(k^2)$  вблизи  $M^2$ :

$$D^M(k^2) = \frac{g_{Mqq}^2}{k^2 - M^2}, \quad (142)$$

где  $M$  - масса мезона, константы связи  $g_{Mqq}$  определяются из (25), а  $k^2$  будет равным  $u$ ,  $t$ ,  $s$ , в зависимости от процесса. Такой выбор дает незначительное отклонение ( $\sim 5\%$ ) от выражения (141), но упрощает аналитические расчеты в модели с двумя ароматами (в то время, как в более сложной модели с тремя кварками выбор (141) предпочтительней).

Аналогичным образом определяются матричные элементы процесса рассеяния кварка на антикварке, диаграммы Фейнмана которого



показаны на Рис. 29 (можно также использовать принцип кроссинг-симметрии, и просто произвести замену  $t \leftrightarrow t, s \leftrightarrow u, u \leftrightarrow s$ ).

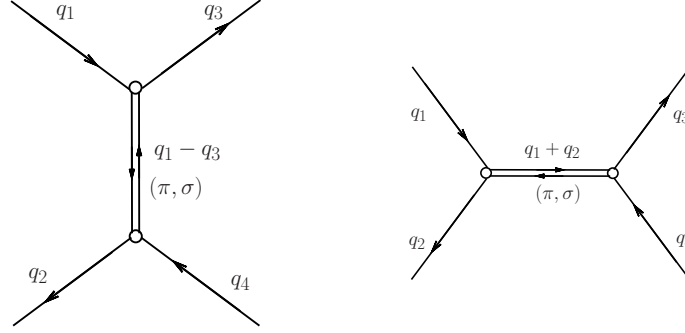


Рис. 29: Фейнмановские диаграммы процесса  $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$ .

Тогда

$$|T_t|^2 = (|D_t^\sigma|^2(t - 4m^2)^2 + |D_t^\pi|^2 t^2), \quad (143)$$

$$|T_s|^2 = (|D_s^\sigma|^2(s - 4m^2)^2 + |D_s^\pi|^2 s^2), \quad (144)$$

$$\begin{aligned} T_t T_s^* &= -\frac{1}{2N_c} (D_t^\sigma D_s^\sigma (ts + 4m^2(s + t) - 16m^2) - D_t^\sigma D_s^\pi s(t - 4m^2) \\ &\quad - D_t^\pi D_s^\sigma t(s - 4m^2) + D_t^\pi D_s^\pi ts) \end{aligned} \quad (145)$$

с мезонными пропагаторами, определяемыми из (142).

С учетом изоспиновых факторов, мы можем рассмотреть в модели НИЛП с двумя ароматами две независимых реакции рассеяния кварка на кварке:

$$uu \rightarrow uu \quad (dd \rightarrow dd), \quad (146)$$

$$ud \rightarrow ud \quad (du \rightarrow du),$$

где первая из них может проходить через  $t$  и  $u$  каналы, а вторая включает только  $u$ -канал. Пользуясь свойством кроссинг-симметрии, для рассеяния кварка на антикварке можно выделить три типа реакций:

$$\begin{aligned} u\bar{u} &\rightarrow u\bar{u} \quad (d\bar{d} \rightarrow d\bar{d}), \\ u\bar{d} &\rightarrow u\bar{d} \quad (d\bar{u} \rightarrow d\bar{u}), \\ u\bar{u} &\rightarrow d\bar{d}, \end{aligned} \quad (147)$$

где первая реакция протекает как в  $t$ , так и в  $s$ -канале, вторая - только в  $t$ -канале, и третья - только в  $s$ .

Дифференциальное сечение упругого рассеяния определяется по формуле

$$\frac{d\sigma_{el}}{dt} = \frac{|T|^2}{16\pi\lambda(s, m^2, m^2)}, \quad (148)$$

где  $\lambda(s, m^2, m^2) = (s - 4m^2)s$  в системе центра масс.

Проинтегрировав, можно получить полное сечение рассеяния:

$$\sigma_{el} = \frac{1}{16\pi\lambda(s, m^2)} \int_{t^-}^{t^+} dt |T|^2 (1 - f_F(\frac{\sqrt{s}}{2} \mp \mu)) (1 - f_F(\frac{\sqrt{s}}{2} \mp \mu)), \quad (149)$$

где для учета влияния среды рассеяния, вводится фактор  $f_F$ , вообще говоря, являющийся функцией распределения Ферми-Дирака для фермионов  $f_F = (1 + \exp(\beta x))^{-1}$ , где знак перед химическим потенциалом соответствует частицам и античастицам. Так как расчеты проводятся в модели НИЛ с петлей Полякова, функции Ферми будут заменены на модифицированные функции Ферми (75), (76). Пределы интегрирования для процесса рассеяния кварков в (149) соответственно равны  $t^+ = 0$  и  $t^- = 4m^2 - s$ . Кинематическая граница существования процесса рассеяния определяется условием  $s \geq 4m^2$  [130].

Все расчеты сечений проводились в системе центра масс, где переменные Мандельштама могут быть переписаны как  $t = -2p^{*2}(1 - \cos\Theta)$  и  $u = -2p^{*2}(1 + \cos\Theta)$  с

$$p^* = q_1^* = q_2^* = q_3^* = q_4^* = \frac{\lambda^{1/2}(s, m^2, m^2)}{2\sqrt{s}}. \quad (150)$$

Полные сечения упругого рассеяния кварка на кварке и кварка на антикварке для всех типов реакций показаны на Рис. 30. Результаты были получены в модели НИЛ с петлей Полякова с параметрами  $m_0 = 5.5$  МэВ,  $\Lambda = 0.639$  ГэВ,  $G = 5.227$  ГэВ<sup>-2</sup> и параметрами эффективного потенциала, взятыми из Таблицы 3, old. В связи с существованием в модели обрезания по трехмерному импульсу, было введено ограничение по энергии  $\sqrt{s} \leq 2\sqrt{\Lambda^2 + m^2} \sim 1.5$  ГэВ. Согласно изотопическим факторам, в реакциях типа  $uu \rightarrow uu$  ( $u\bar{u} \rightarrow u\bar{u}$ ) задействованы оба канала рассеяния, а в реакциях типа  $ud \rightarrow ud$  ( $u\bar{d} \rightarrow u\bar{d}$ ) только  $u(t^-)$ -каналы, т.о., влияние типа кварка сказывается только на величине полных сечений рассеяния ( $\sigma_{el}(uu) \sim 2.5\sigma_{el}(ud)$ ). Энергетическая зависимость сечений рассеяния сходна: они имеют максимум

при энергиях  $\sim 1$  ГэВ и температурах меньших  $T_{\text{Mott}}$ , который практически исчезает, когда температура превышает это значение. Также,

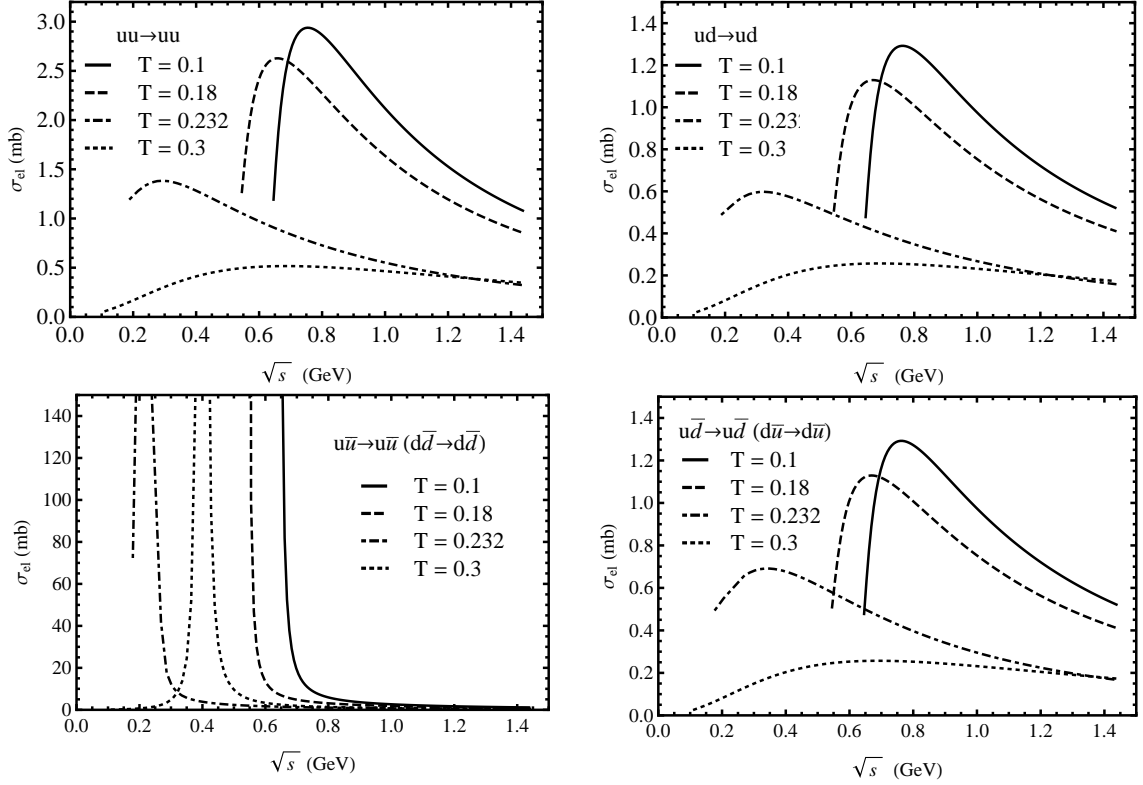


Рис. 30: Полное сечение реакций  $qq \rightarrow qq$  (верхние) и  $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$  (нижние) при различных температурах.

в силу кроссинг-симметрии, можно заметить, что  $u$ -канал рассеяния кварка на кварке и  $t$ -канал рассеяния кварка на антикварке идентичны, что можно увидеть на Рис. 30, где оба рисунка в правой части совпадают. Однако, в случае рассеяния кварка на антикварке одного аромата, полное сечение имеет резонансное поведение - резкий рост сечения когда энергия центра масс системы близка к массе  $\sigma$ -мезона  $\sqrt{s} \sim M_\sigma$ .

Сравнение результатов, полученных в нашей работе с результатами, других моделей, показано на Рис. 31. В работе [126] расчет сечения рассеяния проводился в модели НИЛ с двумя ароматами в киральном пределе ( $m_0 = 0$ ). В  $SU(3)$  модели НИЛ аналогичные расчеты проводились в работе [127]. Из рисунка видно, что сечение рассеяния, полученное в  $SU(3)$  модели значительно выше сечения, полученного в работах по  $SU(2)$ . Это связано с тем, что к распаду с  $\pi$ - и  $\sigma$ -промежуточными

состояниями, добавляются реакции с промежуточными  $\eta$ -,  $\eta'$ - и  $\sigma'$ -мезонами. Для температур, близких к  $T_{\text{Mott}}$ , значения для модели НИЛ и НИЛ с петлей Полякова близки, однако стоит принять во внимание разницу между значениями температуры Мотта в той и другой моделях.

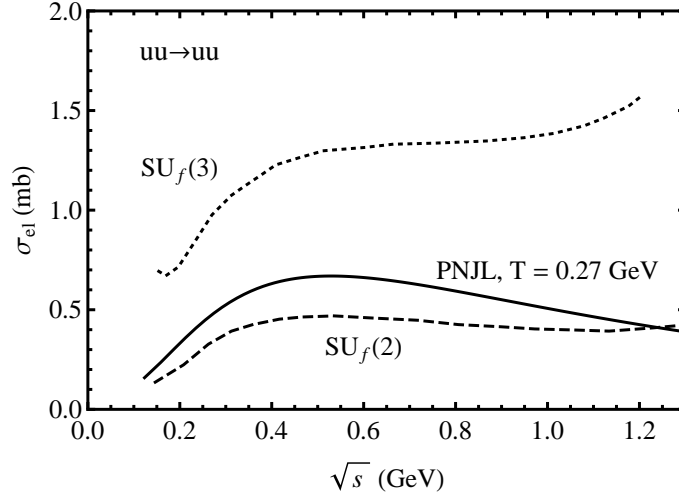


Рис. 31: Сравнение энергетических зависимостей полных сечений упругого рассеяния кварка на кварке на примере реакции  $uu \rightarrow uu$  при температурах выше  $T_{\text{Mott}}$  с результатами модели НИЛ  $SU_f(3)$  (точки) и  $SU_f(2)$  (пунктир), взятыми из работ [126, 127] соответственно. Результаты нашей работы показаны сплошной линией для  $T = 0.27$  ГэВ.

Дифференциальные сечения рассеяния для каждого типа реакций показано на Рис. 32. Видно, что при рассеянии кварков одного аромата угловое распределение практически изотропно и симметрично относительно рассеяния "вперед" и "назад". Угловое распределение кварков на кварках (антикварках) с различными ароматами также практически изотропно при углах рассеяния  $|\cos\Theta| \lesssim 0.8$  и показывает небольшое отклонение от изотропии при больших углах когда температура среды выше критической, при низких температурах отклонение от изотропии выражено сильнее.

### 3.2 Упругое рассеяние кварка на пионе

В моделях типа НИЛ с двумя ароматами существуют скалярный  $\sigma$ -мезон и три псевдоскалярных пиона. Фейнмановские диаграммы, соответствующие процессу рассеяния кварка на пионе показаны на рисунке

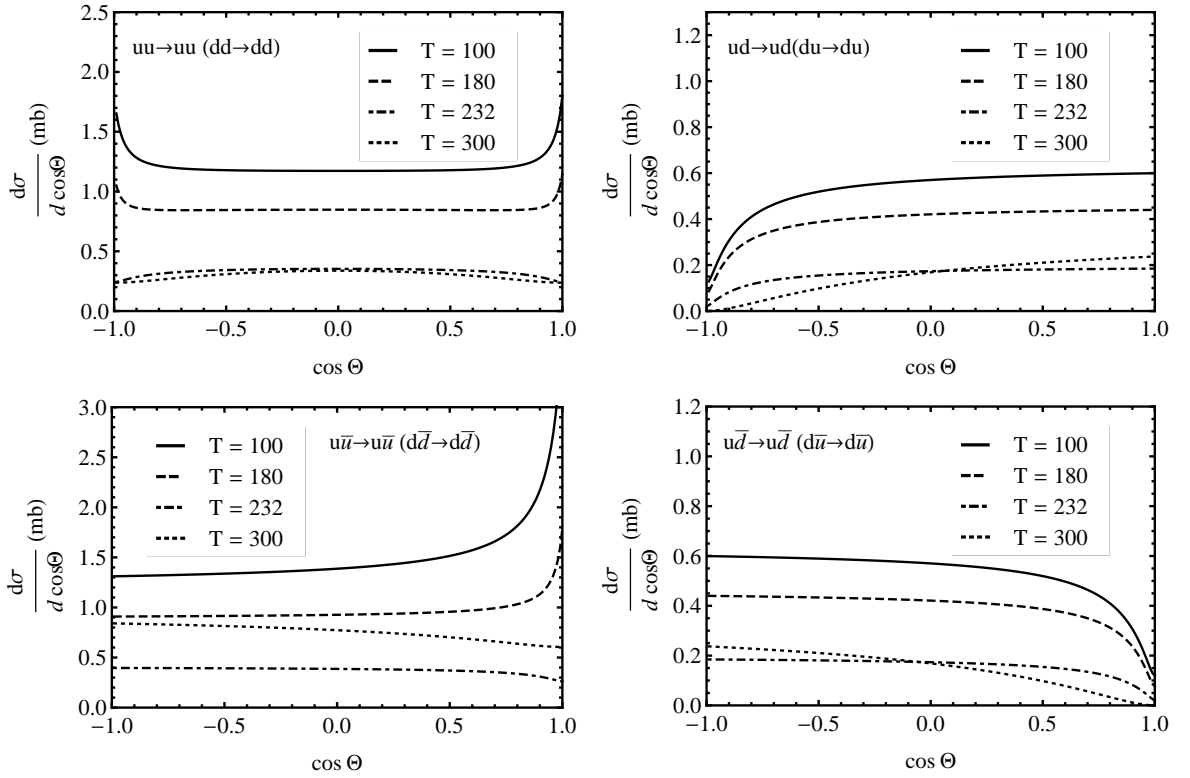


Рис. 32: Угловое распределение упругого рассеяния кварка на кварке (сверху) и кварка на антикварке (внизу) при  $\sqrt{s} = 1$  ГэВ для различных значений температуры.

Fig. 33. Третья диаграмма соответствует процессу с образованием  $\sigma$ -мезона в промежуточном канале, две другие - обмену кварком.

Амплитуда  $s$ -канала (первая диаграмма на Рис. 33) вычисляется как

$$\begin{aligned}
 -iT_1 &= \bar{u}(\mathbf{q}_2) g_2 (i\gamma_5) \frac{((\hat{q}_1 + \hat{p}_1) + m)}{s - m^2} (i\gamma_5) g_1 u(\mathbf{q}_1), \\
 iT_1^* &= u(\mathbf{q}_2) g_2 (i\gamma_5) \gamma_0 \frac{((\hat{q}_1 + \hat{p}_1) + m)^\dagger}{s - m^2} \gamma_0 (i\gamma_5) g_1 \bar{u}(\mathbf{q}_1),
 \end{aligned} \tag{151}$$

после проведения преобразований получаем

$$iT_1^* = -iu(\mathbf{q}_2) g_2 (i\gamma_5) \frac{((\hat{q}_1 + \hat{p}_1) + m)}{s - m^2} (i\gamma_5) g_1 \bar{u}(\mathbf{q}_1). \tag{152}$$

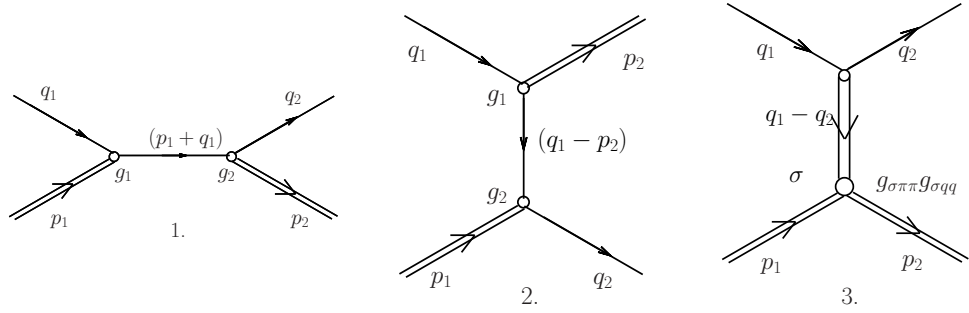


Рис. 33: Фейнмановские диаграммы рассеяния кварка пионом в  $s$ - и  $u$ - каналах (диаграммы 1 и 2) и  $t$ -канал (диаграмма 3), соответствующий рассеянию с образованием промежуточного  $\sigma$ -мезона.

Амплитуда для  $u$ -канала может быть получена заменой  $p_1 \rightarrow -p_2$ :

$$\begin{aligned}
 -iT_2 &= \bar{u}(\mathbf{q}_2)g_2(i\gamma_5)\frac{((\hat{q}_1 - \hat{p}_2) + m)}{u - m^2}(i\gamma_5)g_1u(\mathbf{q}_1), \\
 iT_2^* &= u(\mathbf{q}_2)g_2(i\gamma_5)\frac{((\hat{q}_1 - \hat{p}_2) + m)}{u - m^2}(i\gamma_5)g_1\bar{u}(\mathbf{q}_1).
 \end{aligned} \tag{153}$$

А для диаграммы, соответствующей рассеянию с промежуточным образованием  $\sigma$ -мезона

$$\begin{aligned}
 -iT_3 &= \bar{u}(q_2)\mathbf{1}u(q_2)\frac{1}{t - M_\sigma^2}g_1g_2, \\
 iT_3^* &= \bar{u}(q_2)(\gamma_0\mathbf{1}\gamma_0)u(q_2)\frac{1}{t - M_\sigma^2}g_1g_2.
 \end{aligned} \tag{154}$$

Полная амплитуда вычисляется как  $|T|^2 = f_c \sum_c |T_1 + T_2 + T_3|^2$ ,

где после всех преобразований получим:

$$T_1T_1^* = N_cK_s^2[M_\pi^4 - (s - m^2)(u - m^2)], \tag{155}$$

$$T_1T_2^* = T_2T_1^* = N_cK_sK_u[-M_\pi^4 + (s - m^2)(u - m^2)], \tag{156}$$

$$T_1T_3^* = T_3T_1^* = N_cK_sK_t[m(s - u)], \tag{157}$$

$$T_2T_2^* = N_cK_u^2[M_\pi^4 - (s - m^2)(u - m^2)], \tag{158}$$

$$T_3T_2^* = T_2T_3^* = -N_cK_uK_t[m(s - u)], \tag{159}$$

$$T_3T_3^* = N_cK_t^2(4m^2 - t), \tag{160}$$

где  $m, M_\pi, M_\sigma$  это массы кварка, пиона и  $\sigma$ -мезона соответственно. Суммирование по цветовым индексам зависит от типа реакции.

Пропагаторы  $K_s, K_u, K_t$  выбраны следующими:

$$K_s = \frac{g_{\pi qq}^2}{s - m^2}, \quad K_u = \frac{g_{\pi qq}^2}{u - m^2}, \quad K_t = \frac{g_{\sigma\pi\pi} g_{\sigma qq}}{t - M_\sigma^2}, \quad (161)$$

здесь константы  $g_{\pi qq}, g_{\sigma qq}$  определяются из (25), а константа связи  $g_{\sigma\pi\pi}$  определяется из распада  $\sigma \rightarrow \pi\pi$  [129, 131] как

$$g_{\sigma\pi\pi} = 2g_{\sigma qq} g_{\pi qq}^2 A_{\sigma\pi\pi}, \quad (162)$$

где  $A_{\sigma\pi\pi}$  - амплитуда процесса распада  $\sigma \rightarrow \pi\pi$ , который в низшем порядке возмущения описывается диаграммой, показанный на Рис. (34).

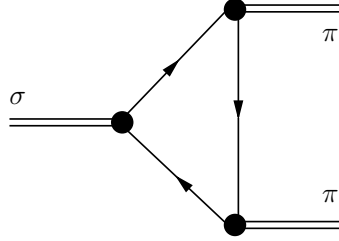


Рис. 34: Диаграмма Фейнмана процесса распада  $\sigma \rightarrow \pi\pi$ .

Амплитуда распада, соответствующая диаграмме, вычисляется как:

$$A_{\sigma\pi\pi} = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} Tr\{S(l) \Gamma_\pi S(l+p) \Gamma_\pi S(l)\}, \quad (163)$$

здесь  $\Gamma_\pi = i\gamma_5 \tau^a$ , функция Грина кварка  $S(q_i) = \frac{1}{\hat{q} - m}$ . После взятия следа и суммирования по цветовым и ароматным индексам, получается [131, 132]

$$A_{\sigma\pi\pi} = 2mN_c N_f \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{(1 - f^+(l) - f^-(l))}{2E_l} \times \frac{(\mathbf{l} \cdot \mathbf{p})^2 - (2M_\sigma^2 + 4M_\pi^2)(\mathbf{l} \cdot \mathbf{p}) + M_\sigma^2/2 - 2M_\sigma^2 E_l^2}{(M_\sigma^2 - 4E_l^2)((M_\pi^2 - 2(\mathbf{l} \cdot \mathbf{p}))^2 - M_\sigma^2 E_l^2)}. \quad (164)$$

Зная амплитуду распада, можно также определить ширину распада:

$$\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi} = \frac{3}{2} \frac{g_{\sigma\pi\pi}^2}{16\pi M_\sigma} \sqrt{1 - \frac{4M_\pi^2}{M_\sigma^2}}. \quad (165)$$

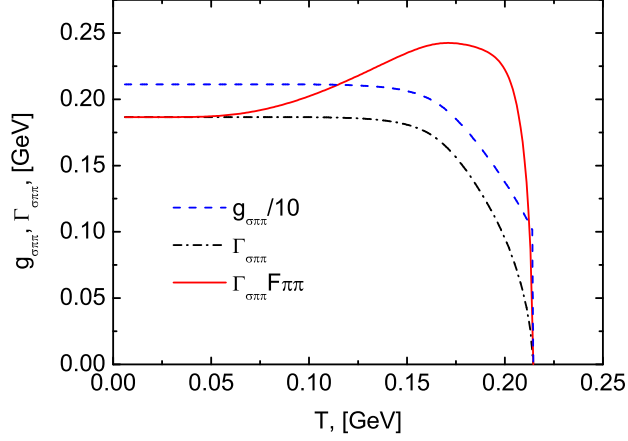


Рис. 35: Зависимость полной ширины распада  $\Gamma_{\sigma \rightarrow \pi\pi}$  (сплошная линия) и константы связи  $g_{\sigma\pi\pi}$  от температуры. Штрих-пунктирная линия показывает поведение полной ширины распада при включении статистики Бозе-Эйнштейна.

Так как в модели существуют три пиона и  $\sigma$ -мезон может распадаться как на нейтральные, так и на заряженные пионы, сохранение изоспина учтено фактором  $3/2$ . Кроме того, можно отметить, что кинематический фактор  $\sqrt{1 - \frac{4M_\pi^2}{M_\sigma^2}}$  имеет смысл только в области  $M_\sigma \geq 2M_\pi$ . Следовательно, можно говорить о границе, после которой распад  $\sigma$  перестает быть возможным и значения константы связи и ширины распада должны оборваться до нуля (что и видно из Рис.35). На рисунке также показана зависимость от температуры ширины распада, когда во внимание принято влияние статистики конечных состояний пионов, подчиняющихся закону распределения Бозе-Эйнштейна  $F_{\pi\pi} = (1 + f_B(\frac{m_\sigma}{2}))^2$ , где функция распределения бозонов определяется как  $f_B(x) = (e^{x/T} - 1)^{-1}$  [131, 132]. Видно, что вблизи температуры Мотта ширина распада начинает расти (за счет функции распределения), а затем также обрывается.

Полученная в результате расчетов константа связи  $g_{\sigma\pi\pi}$  равна примерно 2.1 ГэВ в вакууме и остается постоянно примерно до температуры  $T \leq 0.22$  ГэВ (при  $\mu = 0$ ) и затем обрывается, когда  $m_\sigma = 2m_\pi$ . Значение хорошо согласуется с экспериментальными значениями, полученными при изучении распада  $J/\psi$  в работе [133], где  $g_{\sigma\pi\pi} = 2.0_{-0.9}^{+0.3}$  ГэВ. Интересно отметить и результаты, полученные в других моделях:



согласно предсказаниям кварк-мезонной модели  $g_{\sigma\pi\pi} = 1.8$  ГэВ [134] и  $1.8_{-0.3}^{+0.5}$  ГэВ [135], а согласно линейной сигма-модели  $g_{\sigma\pi\pi} = 2.54 \pm 0.01$  GeV [136].

Изоспиновая и цветовая структура процессов рассеяния кварка на пионе, соответствующая диаграммам низших порядков представлена в Таблице 4.

Таблица 4: Изоспиновая и цветовая структура процессов рассеяния

Процесс	Изоспиновый фактор	Цветовой фактор $f_c$
$u\pi^0 \rightarrow u\pi^0$	$\frac{1}{2}K_s, \frac{1}{2}K_u, K_t$	$\left(1 + \frac{2}{N_c} + \frac{1}{N_c^2}\right)$
$\rightarrow d\pi^+$	$\frac{1}{\sqrt{2}}K_s, \frac{1}{\sqrt{2}}K_u, K_t$	$\left(1 + \frac{1}{N_c}\right)$
$u\pi^- \rightarrow u\pi^-$	$K_s, K_u, K_t$	$\left(1 + \frac{1}{N_c^2}\right)$
$\rightarrow d\pi^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}K_s, \frac{1}{\sqrt{2}}K_u, K_t$	$\left(1 + \frac{1}{N_c}\right)$
$d\pi^0 \rightarrow d\pi^0$	$\frac{1}{2}K_s, \frac{1}{2}K_u, K_t$	$\left(1 + \frac{2}{N_c} + \frac{1}{N_c^2}\right)$
$\rightarrow u\pi^-$	$\frac{1}{\sqrt{2}}K_s, \frac{1}{\sqrt{2}}K_u, K_t$	$\left(1 + \frac{1}{N_c}\right)$
$d\pi^+ \rightarrow d\pi^+$	$K_s, K_u, K_t$	$\left(1 + \frac{1}{N_c^2}\right)$
$\rightarrow u\pi^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}K_s, \frac{1}{\sqrt{2}}K_u, K_t$	$\left(1 + \frac{1}{N_c}\right)$

Кинематические переменные реакции  $qH \rightarrow qH$  (см. Рис. 33) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
s &= (q_1 + p_1)^2 = (q_2 + p_2)^2, \\
t &= (q_1 - q_2)^2 = (p_1 - p_2)^2, \\
u &= (q_1 - p_2)^2 = (q_2 - p_1)^2, \\
s + t + u &= 2M_\pi^2 + 2m^2.
\end{aligned} \tag{166}$$

Дифференциальное сечение определяется аналогично (148)

$$\frac{d\sigma_{el}}{dt} = \frac{|T|^2}{16\pi\lambda(s, m^2, M_\pi^2)}, \tag{167}$$

но теперь  $\lambda(s, m^2, M_\pi^2) = (s - (M_\pi + m)^2)(s - (M_\pi - m)^2)$ .

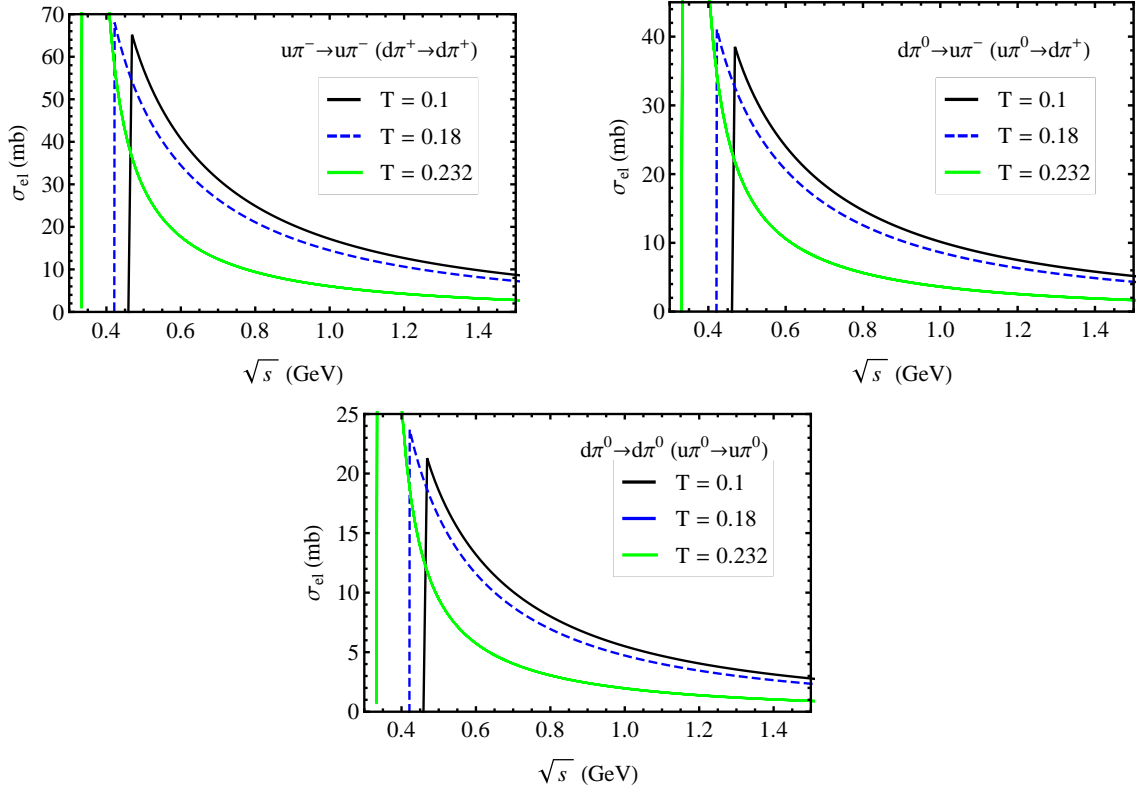


Рис. 36: Полное сечение упругого рассеяния  $qH \rightarrow qH$  как функция энергии в системе центра масс при разных значениях температуры.

Полное сечение упругого рассеяния:

$$\sigma_{\text{el}} = \frac{1}{16\pi\lambda(s, m^2, M_\pi^2)} \int_{t^-}^{t^+} dt |T|^2 (1 - f_F(E_q \mp \mu)) (1 + f_B(E_H \mp \mu)), \quad (168)$$

здесь  $E_q$ ,  $E_H$  соответствуют энергии кварка и адрона, функция распределения Бозе-Эйнштейна имеет вид  $f_B = (\exp(\beta x) - 1)^{-1}$  и пределы интегрирования определяются как

$$t^\pm = 2m^2 - \frac{1}{2s} \left\{ (s + m^2 - M_\pi^2)^2 \mp \lambda(s, m^2, M_\pi^2) \right\}. \quad (169)$$

Реакция рассеяния  $q\pi$  также имеет кинематические границы, определяемые из условия  $s > \max \{ (m + M_\pi)^2, (m - M_\pi)^2 \}$ .

Реакции рассеяния кварка на пионе по изоспину можно разбить

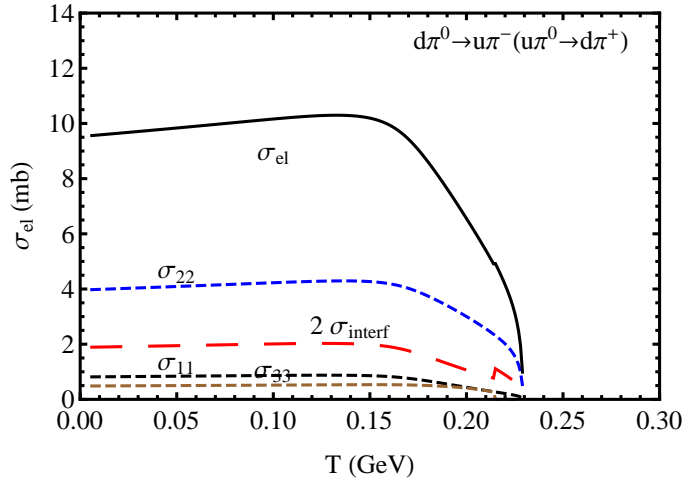


Рис. 37: Зависимость полного сечения от температуры при  $\sqrt{s} = 1$  ГэВ.

на три типа:

$$(u\pi^0 \rightarrow u\pi^0, d\pi^0 \rightarrow d\pi^0), \quad (170)$$

$$(u\pi^0 \rightarrow d\pi^+ \Leftrightarrow d\pi^+ \rightarrow u\pi^0, u\pi^- \rightarrow d\pi^0 \Leftrightarrow d\pi^0 \rightarrow u\pi^-), \quad (171)$$

$$(u\pi^- \rightarrow u\pi^-, d\pi^+ \rightarrow d\pi^+) \quad (172)$$

для каждого из них на Рис. 36 изображено полное сечение упругого рассеяния для трех значений температур. На Рис. 37 изображено полное сечение упругого рассеяния процесса  $d\pi^0 \rightarrow u\pi^-$  как функции температуры при  $\sqrt{s} = 1$  ГэВ. Из рисунков видно, что полное сечение имеет максимум на пороге  $\sqrt{s} = \sqrt{m^2 + M_\pi^2}$  и затем монотонно убывает с ростом энергии. При температуре, близкой к температуре Мотта все реакции показывают резонансное поведение.

Из температурной зависимости полного сечения упругого рассеяния при  $\sqrt{s} = 1$  ГэВ видно, что до  $T \sim 0.18$  ГэВ сечение рассеяния имеет небольшой рост и затем резко обрывается при  $T \sim T_{\text{Mott}}$ . Так как при температурах, больших температуры  $T_{\text{Mott}}$ , пион перестает быть связанным состоянием, и, говорить об упругом рассеянии становится не совсем правомерным, мы ограничили расчеты температурой  $T_{\text{Mott}}$ . На рисунке также показаны сечения рассеяния, отвечающие за отдельные каналы ( $\sigma_{11}$  - s,  $\sigma_{22}$  - u,  $\sigma_{33}$  - t), соответствующие отдельным диаграммам Рис. 33 и интерференционное слагаемое  $\sigma_{\text{interf}}$ . Из рисунка видно, что самое большое сечение рассеяния имеют реакции, протека-

ющие в  $u$ -канале, наименьшее - в канале с промежуточным образованием  $\sigma$ -мезона.

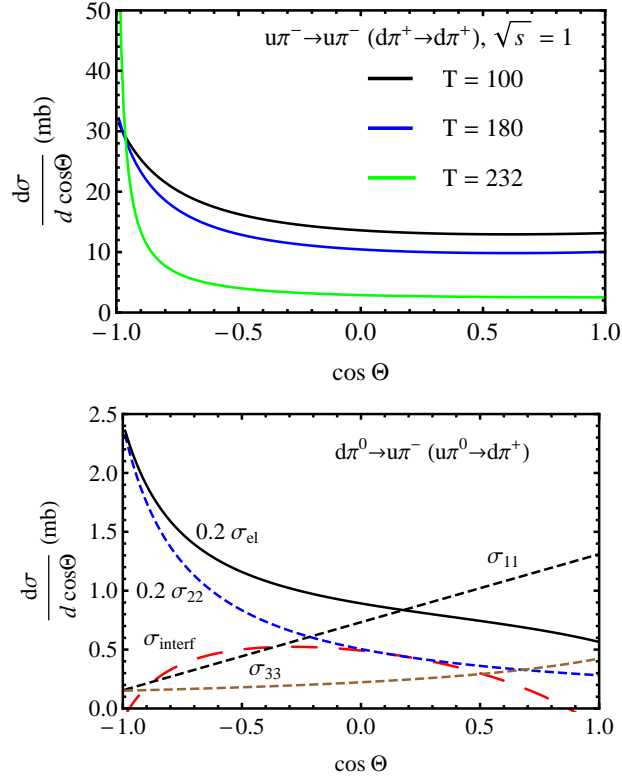


Рис. 38: Угловое распределение дифференциального сечения упругого рассеяния  $u\pi^- \rightarrow u\pi^-$  при энергии  $\sqrt{s} = 1$  ГэВ и различных значениях температуры и угловое распределение дифференциального сечения для различных каналов при энергии  $\sqrt{s} = 1$  ГэВ и температуре  $T = 0.1$  ГэВ для реакции  $d\pi^0 \rightarrow u\pi^-$ .

Дифференциальное сечение рассеяния кварка на пиона показано на Рис.38 для реакции  $u\pi^- \rightarrow u\pi^-$  при энергии  $\sqrt{s} = 1$  ГэВ при разных значениях температур. Видно, что дифференциальное сечение практически анизотропно с отклонениями при углах рассеяния ”назад”. Остальные реакции показывают аналогичное распределение по углам вылета и отличаются только величиной дифференциального сечения, поэтому здесь приводиться не будут. Для примера угловое распределение реакции  $d\pi^0 \rightarrow u\pi^-$  показано на нижнем графике того же рисунка с выделением угловых распределений всех составляющих диаграмм. Диаграмма  $u$ -канала обладает самым большим значением дифференциального сечения упругого рассеяния и показывает сильную анизотропию в области рассеяния ”назад”. Две другие диаграммы

показывают более выраженную анизотропию в направлении ”вперед”.

### 3.3 Выводы

В Главе 3 диссертации рассматривается применение модели НИЛ с петлей Полякова к изучению процессов, происходящих в горячей и плотной материи. Изучены процессы упругого рассеяния кварка на кварке и антикварке: построены полное и дифференциальное сечения реакций. Рассмотрено влияние аромата кварков на величину сечений рассеяния, проведено сравнение результатов с полученными ранее в других моделях. Была дана оценка полного и дифференциального сечений упругого рассеяния кварка на пионе. Для распада  $\sigma \rightarrow \pi\pi$  получены амплитуда и ширина распада, проведено сравнение с экспериментальными данными. Изучено поведение полного и дифференциального сечений упругого рассеяния кварка на пионах при конечных температурах вблизи фазового перехода, где предполагается сосуществование кварковой и адронной мод.

Полученные результаты могут быть использованы далее, например, при изучении транспортных свойств кварк-адронной системы. Так, для оценки вязкости можно использовать приближение среднего времени релаксации, которое можно оценить из полного сечения рассеяния кварков  $\tau_q^{-1} = \sum_i n_i \sigma_{qi}$  [137].

## Заключение

### Основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту

- В рамках эффективной модели Намбу-Иона-Лазинио при различных схемах регуляризации расходящихся интегралов рассмотрена структура фазовой диаграммы адронного вещества: показано существование кирального фазового перехода типа кроссовер при высоких температурах и кирального фазового перехода первого рода при низких температурах.
- В рамках эффективной кварковой модели с конфайнментом, основанной на объединении модели Намбу-Иона-Лазинио и динамики петли Полякова, описывающей глюонный сектор КХД показано, что:
  - термодинамические свойства кварк-адронной материи зависят от свойств эффективного потенциала, определяющего свойства конфайнмента кварков;
  - введение феноменологической зависимости константы четырехкваркового взаимодействия от параметра порядка деконфайнмента (поля петли Полякова) приводит качественному изменению структуры фазовой диаграммы;
  - векторное взаимодействие влияет на расположение критической конечной точки и на размер области, где происходит фазовый переход первого рода.
- Проведено обобщение модели НИЛ с петлей Полякова вне приближения среднего поля. Показано, что учет давления, возникающего в связи с корреляцией мезонов вблизи фазового перехода заметно влияет на давление системы в целом.
- Проведено исследование амплитуд упругого рассеяния кварков на кварках и антикварках при конечной температуре в рамках модели НИЛП. Впервые такой анализ выполнен для упругого рассеяния кварков на пионах. Изучены полное и дифференциальное

сечения процессов упругого рассеяния кварков на кварках и пионах при конечной температуре.

### **Научная новизна**

Научная новизна диссертационной работы заключается в том, что

- в рамках модели Намбу-Иона-Лазинио с петлей Полякова были изучены факторы, способные повлиять на положение критических точек на фазовой диаграмме адронной материи: предложена новая параметризация эффективного потенциала модели НИЛП, изучено влияние величины векторного взаимодействия и впервые предложено усилить связь между кварковым и калибровочным полями;
- показано, что мезонные корреляции дают видимый вклад в давление системы в области кирального фазового перехода. Подтверждено выполнение теоремы Левинсона для связанного состояния пиона;
- проведен аналитический и численный анализ полного и дифференциального сечений для процессов рассеяния кварка на кварке и антикварке, а также впервые кварка на пионе в рамках модели НИЛП при конечной температуре.

### **Практическая и научная ценность**

Диссертационная работа является теоретическим исследованием. Практическая ценность диссертационной работы состоит в применении разработанных методов к теоретическому изучению свойств адронной материи при конечных температуре и плотности и теоретическому предсказанию результатов для экспериментов по поиску кварк-глюонной плазмы. Результаты, полученные в диссертации могут быть использованы для планирования экспериментов NICA-MPD (Дубна, Россия).

### **Личный вклад автора**

В диссертации представлены положения и результаты, полученные при определяющем участии соискателя.

### **Благодарности**

В заключение автор хотела бы выразить искреннюю благодарность своим научным руководителям: Ю. Л. Калиновскому и В. Д. Тонееву за постановку задачи, постоянную помощь в работе, долгие обсуждения, огромное терпение и поддержку. Выражаю свою признательность Д. Блашке за постоянный интерес к моей работе, полезные замечания и интересные идеи.

Благодарю коллег рабочей группы за поддержку, и руководство Лаборатории Теоретической Физики им. Н.Н. Боголюбова - за предоставленную возможность для выполнения диссертационной работы



## Приложение 1: Приближение среднего поля модели НИЛП с векторным взаимодействием

Лагранжиан (81) модели НИЛ с петлей Полякова и векторным взаимодействием имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{PNJL}} = & \bar{q} (i\gamma_\mu D^\mu - \hat{m}_0) q + G_s \left[ (\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau}q)^2 \right] \\ & - G_v (\bar{q}\gamma_\nu q) - \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}; T) . \end{aligned} \quad (173)$$

В приближении мнимого времени вводится статистическая сумма ( $\tau = it$  - мнимое время)

$$\mathcal{Z}[T, V, \mu] = \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int_v d^3x [\mathcal{L}_{\text{PNJL}}] \right\} . \quad (174)$$

Воспользовавшись правилом:

$$\exp \left[ \int d^4x g (\bar{q}\mathcal{O}q)^2 \right] = N' \int D\phi \exp \left\{ \int d^4x \left( \frac{\phi^2}{4g} \pm \phi \bar{q}\mathcal{O}q \right) \right\} \quad (175)$$

где  $\mathcal{O}$  - оператор и  $g$  - константа связи, а  $N'$  - некоторая константа, которой можно пренебречь, можно переписать

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[T, V, \mu] = & N' N'' N''' \int \mathcal{D}\sigma' \mathcal{D}\pi' \mathcal{D}\phi' \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q \exp \left\{ \int d^4x \bar{q} S^{-1}[m_0] q \right\} \times \\ & \exp \left\{ - \int d^4x \left( \frac{\sigma'^2 + \pi'^2}{4G_s} + \frac{\phi'^2}{4G_v} \right) \right\} \exp \left\{ - \int d^4x (\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}; T)) \right\} \end{aligned} \quad (176)$$

где введено обозначение для пропагатора кварка

$$S^{-1}[m_0] = (i\gamma_\mu D^\mu - m_0 - \gamma_0 \mu - \gamma_\mu \phi'^\mu - \sigma' - \pi' i\gamma_5 \tau).$$

Введем поля как сумму среднего значения поля и его флуктуаций:  $\sigma' = \sigma + \sigma_{\text{MF}}$ ,  $\pi' = \pi + \pi_{\text{MF}}$ ,  $\gamma_\mu \phi'^\mu = \gamma_0 \phi^0 + \gamma_\nu \phi^\nu$ . При этом  $\pi_{\text{MF}} = 0$ ,  $\gamma_\nu \phi^\nu = 0$ . Подставляя это в выражение для  $S^{-1}[m_0]$ , пропагатор можно переписать как

$$S^{-1}[m] = (i\gamma_\mu D^\mu - m - \gamma_0 \tilde{\mu} - \sigma - \pi i\gamma_5 \tau),$$

где  $m = m_0 + \sigma_{\text{MF}}$ ,  $\tilde{\mu} = \mu + \phi^0$ . Так как введение новых полей приведет к смене переменных интегрирования, можно записать:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[T, V, \mu] &= \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q\mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\pi\mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int d^4x \left[ -\frac{(\sigma + \sigma_{\text{MF}})^2}{4G_s} - \frac{\phi^2}{4G_v} \right] \right\} \\ &\times \exp \left\{ \int d^4x \text{Tr} \ln S^{-1}[m] \right\} \exp \left\{ - \int d^4x \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}; T) \right\}. \end{aligned} \quad (177)$$

Теперь можно ввести пропагатор в приближении среднего поля:

$$S^{-1}[m] = S_{\text{MF}}^{-1}[m](1 - S_{\text{MF}}[m](\sigma + \pi i \gamma_5 \tau)), \quad (178)$$

$$S_{\text{MF}}^{-1}[m] = (i\gamma_\mu D^\mu - m - \gamma_0 \tilde{\mu}), \quad (179)$$

который в импульсном представлении имеет вид:

$$\begin{aligned} S_{\text{MF}}^{-1}[m] &= (i\gamma_\mu D^\mu - m - \gamma_0 \tilde{\mu}) = (\gamma_\mu p^\mu - \gamma_\mu (iA^\mu) - m - \gamma_0 \tilde{\mu}) \\ &= \gamma_0 p^0 - \gamma_0 (\tilde{\mu} + iA_4^{cc}) - \bar{\gamma} \bar{p} - m. \end{aligned} \quad (180)$$

Так как

$$\begin{aligned} \int d^4x \bar{q} S_{\text{MF}}^{-1}[m] q &= \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{ip'x} \bar{q}(p') S_{\text{MF}}^{-1}[m] q(p) e^{-ipx} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{q}(p) S_{\text{MF}}^{-1}[m] q(p), \end{aligned} \quad (181)$$

и

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int_v d^3x [\bar{q} S^{-1}[\sigma', \pi'] q] \right\} &= \\ = \det S^{-1} = \exp(\ln \det S^{-1}) = \exp(\text{Tr} \ln S^{-1}), \end{aligned} \quad (182)$$

можно снять интегрирование по всем полям, оставив только среднее поле:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\text{MF}}[T, V, \mu] &= \exp \left\{ \int d^4x \left[ -\frac{\sigma_{\text{MF}}^2}{4G_s} - \frac{\phi^2}{4G_v} \right] \right\} \exp \left\{ \text{Tr} \ln S_{\text{MF}}^{-1}[p, m] \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{V}{T} \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}; T) \right\}. \end{aligned} \quad (183)$$

Теперь, исходя из определения

$$\Omega_{\text{MF}}(T, \mu) = -\frac{T}{V} \ln \mathcal{Z}_{\text{MF}}[T, V, \mu], \quad (184)$$

получается выражение для термодинамического потенциала

$$\Omega_{\text{vPNJL}} = \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}; T) + G_s \langle \bar{q}q \rangle^2 + G_v \rho^2 + \Omega_q, \quad (185)$$

где  $\rho = \frac{\tilde{\mu} - \mu}{4G_v}$   $\sigma = \frac{m - m_0}{4G_s}$  и

$$\Omega_q = \frac{T}{V} \text{Tr} \ln S_{\text{MF}}^{-1}[p, m], \quad (186)$$

где  $\text{Tr}$  обозначает суммирование по дискретным и интегрирование по непрерывным индексам.

## Приложение 2: Действительная и мнимая части интеграла $I_2(k^2)$

Для вычисления мнимой и действительной части поляризационных операторов, требуется вычислить действительную и мнимую части интеграла  $I_2(k^2)$ . Рассмотрим интеграл в случае модели НИЛ, имея в виду, что суммирование по цвету в случае модели НИЛП приведет к появлению модифицированных функций Ферми. Интеграл имеет вид

$$I_2(k^2) = \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k_0^2 - E_1^2)((k_0 - p_0)^2 - E_2^2)} \quad (187)$$

где  $E_1 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_1^2}$  and  $E_2 = \sqrt{(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m_2^2}$ .

Распишем интеграл следующим образом

$$\begin{aligned} & \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_1 E_2} \left[ \left( \frac{1}{k_0 - E_1} - \frac{1}{k_0 - p_0 - E_2} \right) \frac{1}{E_1 - E_2 - p_0} \right. \\ & - \left( \frac{1}{k_0 - E_1} - \frac{1}{k_0 - p_0 + E_2} \right) \frac{1}{E_1 + E_2 - p_0} \\ & + \left( \frac{1}{k_0 + E_1} - \frac{1}{k_0 - p_0 - E_2} \right) \frac{1}{E_1 + E_2 + p_0} \\ & \left. - \left( \frac{1}{k_0 + E_1} - \frac{1}{k_0 - p_0 + E_2} \right) \frac{1}{E_1 - E_2 + p_0} \right] \quad (188) \end{aligned}$$

здесь  $p_0 = i\omega_n = i2n\pi T$  - бозонная частота и  $k_0 = i\nu_m = i(2m+1)\pi T$  - фермионная частота. И для слагаемых типа

$$\frac{1}{k_0 \pm p_0 \pm E_2}$$

применяется следующая замена:

$$\begin{aligned} T \sum_n \frac{1}{k_0 \pm p_0 \pm E_2} &= T \sum_n \frac{1}{i\omega_n \pm E'} = n_B(E') = \frac{1}{e^{\beta E'} - 1} \\ &= \frac{1}{e^{\pm\beta E'} e^{\pm i(2m+1)\pi} - 1} = -\frac{1}{e^{\pm\beta E'} + 1} = -f(\pm E'), \end{aligned}$$

и теперь можно записать

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_2E_1} \left[ \frac{1}{E_1 - E_2 - p_0} (f(E_2) + f(E_1)) \right. \\
& - \frac{1}{E_1 + E_2 - p_0} (f(E_1) + f(-E_2)) + \frac{1}{E_1 + E_2 + p_0} (f(-E_1) + f(E_2)) \\
& \left. - \frac{1}{E_1 - E_2 + p_0} (f(-E_1) + f(-E_2)) \right] \quad (189)
\end{aligned}$$

Сделаем следующее преобразование

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \frac{1}{2E_1} \left\{ \frac{1}{(E_1 - p_0)^2 - E_2^2} f(E_1) - \frac{1}{(E_1 + p_0)^2 - E_2^2} f(-E_1) \right\} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2E_2} \left\{ \frac{1}{(E_2 - p_0)^2 - E_1^2} f(-E_2) - \frac{1}{(E_2 + p_0)^2 - E_1^2} f(E_2) \right\} \right].
\end{aligned}$$

Назовем их по порядку  $B_1, B_2, B_3, B_4$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \frac{1}{(E_1 - p_0)^2 - E_2^2} f(E_1) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \frac{1}{p_0^2 - 2E_1p_0 + m_1^2 - m_2^2} f(E_1) = \quad (190)
\end{aligned}$$

Введем  $E_0 = \frac{p_0^2 + m_1^2 - m_2^2}{2p_0}$  и тогда

$$\dots = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1 2p_0} \frac{1}{E_1 - E_0} f(E_1) \quad (191)$$

Так как  $E_1 = \sqrt{k^2 + m_1^2}$ ,  $kdk = EdE$ , можно сделать замену переменных

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = 2\pi \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} = 2\pi \int_M^\infty \frac{kE_1 dE_1}{(2\pi)^3}, \quad (192)$$

где  $k = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$

$$2\pi \int_{m_1}^\infty \frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2} dE_1}{(2\pi)^3} \frac{-1}{4p_0} \frac{1}{E_1 - E_0} f(E_1). \quad (193)$$

Зададим массы частиц как комплексные переменные  $m_2^2 \rightarrow m_2^2 - i\epsilon$ ,  $m_1^2 \rightarrow m_1^2 - i\epsilon$  и используем следующую теорему

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\epsilon} = \frac{\mathcal{P}}{x - x_0} \mp i\pi f(x)\delta(x - x_0), \quad (194)$$

где  $\mathcal{P}$  означает главное значение интеграла в смысле Коши. Тогда

$$\begin{aligned} B_1 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi \int_{m_1}^{\infty} \frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2} dE_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_0^2 - 2E_1 p_0 + m_1^2 - m_2^2 - i\epsilon} f(E_1) = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi \int_{m_1}^{\infty} \frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2} dE_1}{(2\pi)^3} \frac{-1}{4p_0} \frac{1}{E_1 - E_0 - i\epsilon} f(E_1) = \\ &= 2\pi \mathcal{P} \int_M^{\infty} \frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2} dE_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_0^2 - 2E_1 p_0 + m_1^2 - m_2^2} f(E_1) + \\ &+ i\pi \times 2\pi \int_{m_1}^{\infty} \frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2} dE_1}{(2\pi)^3} \frac{-1}{4p_0} f(E_1) \delta(E_1 - E_0), \end{aligned}$$

где

$$\text{Re}B_1 = 2\pi \mathcal{P} \int_{m_1}^{\infty} \frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2} dE_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_0^2 - 2E_1 p_0 + m_1^2 - m_2^2} f(E_1) \quad (195)$$

и

$$\begin{aligned} \text{Im}B_1 &= \pi \times 2\pi \int_{m_1}^{\infty} \frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2} dE_1}{(2\pi)^3} \frac{-1}{4p_0} f(E_1) \delta(E_1 - E_0) \\ &= \pi \times 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2} dE_1}{(2\pi)^3} \frac{-1}{4p_0} f(E_1) \delta(E_1 - E_0) \Theta(E_1 - m_1) \\ &= -\frac{1}{16\pi p_0} \sqrt{E_0^2 - m_1^2} f(E_0) \Theta(E_0 - m_1). \end{aligned} \quad (196)$$

Аналогичным образом рассчитываем интеграл  $B_2$

$$\text{Re}B_2 = 2\pi \mathcal{P} \int_M^{\infty} \frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2} dE_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_0^2 + 2E_1 p_0 + m_1^2 - m_2^2} f(-E_1)$$

и

$$\text{Im}B_2 = \frac{1}{16\pi p_0} \sqrt{E_0^2 - m_1^2} f(E_0) \Theta(-E_0 - m_1). \quad (197)$$

Для вычисления интегралов  $B_3, B_4$  делаем аналогичную замену:  $E_2 = \sqrt{k^2 + m_2^2}$ ,  $kdk = EdE$  имея в виду, что  $k = \sqrt{E_2^2 - m_2^2}$

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = 2\pi \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} = 2\pi \int_m^\infty \frac{\sqrt{E_2^2 - m_2^2} E_2 dE_2}{(2\pi)^3}, \quad (198)$$

тогда для интегралов  $B_3$  и  $B_4$ , сделав замену  $E_0 = \frac{p_0^2 + m_2^2 - m_1^2}{2p_0}$  и, опустив подробности, получим:

$$\text{Re}B_3 = 2\pi\mathcal{P} \int_m^\infty \frac{\sqrt{E_2^2 - m_2^2} dE_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_0^2 - 2E_2 p_0 - m_1^2 + m_2^2} f(-E_2),$$

$$\begin{aligned} \text{Im}B_3 &= i\pi \times 2\pi \int_{-\infty}^\infty \frac{\sqrt{E_2^2 - m_2^2} dE_2}{(2\pi)^3} \frac{-1}{4p_0} f(-E_2) \delta(E_2 - E_0) \Theta(E_2 - m_2) \\ &= -\frac{1}{16\pi p_0} \sqrt{E_0^2 - m_2^2} f(-E_0) \Theta(E_0 - m_2). \end{aligned}$$

и

$$\text{Re}B_4 = 2\pi\mathcal{P} \int_m^\infty \frac{\sqrt{E_2^2 - m_2^2} dE_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_0^2 + 2E_2 p_0 - m_1^2 + m_2^2} f(E_2),$$

$$\begin{aligned} \text{Im}B_4 &= i\pi \times 2\pi \int_{-\infty}^\infty \frac{\sqrt{E_2^2 - m_2^2} dE_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{4p_0} f(E_2) \delta(E_2 + E_0) \Theta(E_2 - m_2) \\ &= \frac{1}{16\pi p_0} \sqrt{E_0^2 - m_2^2} f(-E_0) \Theta(-E_0 - m_2). \end{aligned}$$

## Список литературы

- [1] J. C. Collins, M. J. Perry, *Superdense matter: neutrons or asymptotically free quarks?* // Phys. Rev. Lett. 1975 V. 34, P. 1353-1356.
- [2] R. Vogt, *Ultrarelativistic Heavy-Ion Collisions* //Elsevier, 2007.
- [3] P. Braun-Munzinger and J. Stachel, *The quest for the quark-gluon plasma* // Nature 2007 V. 448, P. 302.
- [4] M. Gyulassy and L. McLerran, *New forms of QCD matter discovered at RHIC* // Nucl. Phys. A 2005 V. 750, P. 30-63.
- [5] W. Weise, *Nuclear chiral dynamics and phases of QCD* // arXiv:1201.0950.
- [6] И. И. Ройзен, Е. Л. Фейнберг, О. Д. Чернавская *Деконфайнмент цвета и субдронное вещество: фазовые состояния и роль конститuentных кварков* // УФН 2004, V. 174, P. 473-493.
- [7] D. Bailin and A. Love. *Superfluidity and superconductivity in relativistic fermion systems* // Phys. Rept. 1984 V. 107 P.325-385.
- [8] B. C. Barrois, *Superconducting quark matter* // Nucl. Phys. B, 1977 V. 129 P. 390-396.
- [9] M. G. Alford, A. Schmitt, K. Rajagopal, and T. Schafer, *Color superconductivity in dense quark matter* // Rev. Mod. Phys. 2008 V. 80 P. 1455-1515.
- [10] W. Greiner and A. Schäfer, *Quantum Chromodynamics. Theoretische Physik* // Springer-Verlag, 3rd edition, 1994.
- [11] D. J. Gross and F. Wilczek, *Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories* // Phys. Rev. Lett. 1973 V. 30(26) P. 1343-1346.
- [12] H. D. Politzer, *Reliable perturbative results for strong interactions?* // Phys. Rev. Lett. 1973 V. 30(26) P. 1346 - 1349.
- [13] S. Ejiri, *Lattice QCD at finite temperature* // Nucl. Phys. Proc. Suppl., 2009, V. 94, P. 19.



- [14] A. Bazavov et al. *The chiral and deconfinement aspects of the QCD transition* // Phys. Rev. D 2012 V. 85, 054503; [arXiv:1111.1710 [hep-lat]]
- [15] J. Kogut, et al., *Deconfinement and Chiral Symmetry Restoration at Finite Temperatures in  $SU(2)$  and  $SU(3)$  Gauge Theories* // Phys. Rev. Lett. 1983, V. 50, P. 393-396; *Quark and Gluon Latent Heats at the Deconfinement Phase Transition in  $SU(3)$  Gauge Theory* // Phys. Rev. Lett. 1983, V. 51, P. 869-872.
- [16] L. K. Wu, X. Q. Luo, H. S. Chen, *Phase structure of lattice QCD with two flavors of Wilson quarks at finite temperature and chemical potential* // Phys. Rev. D 2011, V. 76, P. 034505 (10 pages).
- [17] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity I,II* // Phys. Rev. 1961, V.122, P.345; V. 124, P. 246
- [18] M. Gell-Mann, M. Levi, *The axial vector current in beta decay* // Nuovo Cimento 1960, V.16, P.705-726.
- [19] T. Eguchi, *New approach to collective phenomena in superconductivity models* // Phys. Rev. D 1975 V. 14, P. 2755 (9 pages).
- [20] K. Kikkawa, *Quantum Corrections in Superconductor Models* // Prog. Theor. Phys. 1976 V. 56 (3), P. 947-955.
- [21] М. К. Волков и Д. Эберт, *Четырехкварковое взаимодействие как общий динамический источник модели векторной доминантности и  $a$ -модели* // ЯФ 1982, V. 36, P. 1265.
- [22] Ebert D. Volkov M. K., *Composite-Meson Model with Vector Dominance Based on  $U(2)$  Invariant Four-Quark Interactions* // Z. Phys. C 1983 V. 16, P. 205.
- [23] M. K. Volkov, *Meson Lagrangians in a superconductor quark model* *Annals of Physics* // 1984, V. 157, P. 282 -303.
- [24] М. К. Волков *Низкоэнергетическая физика мезонов в кварковой модели сверхпроводящего типа* // ЭЧАЯ 1986, V. 17, P. 433-471.

- [25] D. Ebert, H. Reinhardt, *Effective Chiral Hadron Lagrangian with anomalies and skyrme terms from quark flavour dynamics* // Nucl. Phys. B 1986 V. 271, P. 188-226.
- [26] H. Kleinert, *Hadronization of quark theories and a bilocal form of QED* // Phys. Lett. B, 1976 V. 62, P. 429-432. H. Kleinert
- [27] V. N. Pervushin, D. Ebert, *Spectrum of diquarks in two-dimensional chromodynamics* // Theor. Math. Phys. 1978 V.36, P. 759-765.
- [28] T. Hatsuda, T. Kunihiro, *Fluctuation effects in hot quark matter: Precursors of chiral transition at finite temperature* // Phys. Rev. Lett. 1985, V. 55, P.158 (1985).
- [29] T. Hatsuda, T. Kunihiro, *Character changes of pion and  $\sigma$ -meson at finite temperatures* // Phys. Lett. B 1987 V. 185, P. 304-309.
- [30] T. Kunihiro, *Effects of the  $U_A(1)$  anomaly on the quark condensates and meson properties at finite temperature* // Phys. Lett. B, 1989 V. 219, P. 363-368.
- [31] S. P. Klevansky, *The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics* // Rev. Mod. Phys. 1992, V. 64, P. 649-708.
- [32] V. Bernard, Ulf-G. Meissner, and I. Zahed, *Decoupling of the pion at finite temperature and density* // Phys. Rev. D 1987 V. 36, P. 819-823.
- [33] V. Bernard, Ulf-G. Meissner, and I. Zahed, *Properties of the scalar  $\sigma$  meson at finite density* // Phys. Rev. Lett. 1987 V. 59, P. 966-969.
- [34] C. V. Christov, E. Ruiz-Arriola, K. Goeke, *Meson properties and chiral transition at finite temperature and density in Nambu-Jona-Lasinio model with different regularization schemes* // Acta Phys. Pol. B. 1991 V. 22, P. 187-202.
- [35] J. Hüfner, S. P. Klevansky, P. Zhuang, *Thermodynamics of a quark plasma in the mean field* // Acta Phys. Pol. 1994 V. 25, P. 85-98.
- [36] Калиновский Ю. Л., Фризен А. В. *Свойства мезонов и критические точки в модели Намбу-Иона-Лазинио с различными схемами регуляризации* // Письма в ЭЧАЯ (в печати).

- [37] Ефимов Г.В., Иванов М.А., *Физика легких мезонов в кварковой модели с конфайнментом* // ЭЧАЯ 1989 V. 20, P. 1129.
- [38] A.A. Andrianov, D. Espriu, R. Tarrach *The extended chiral quark model and QCD* // Nucl. Phys. B 1998, V. 533, P. 429-472.
- [39] L. S. Celenza, Bo Huang, H. Wang, and C. M. Shakin, *Covariant confinement model for the study of the properties of light mesons* // Phys. Rev. C 1999, V. 60, P. 025202; Erratum Phys. Rev. C 1999 V. 60, P. 039901.
- [40] D.I. Dyakonov, V.Yu. Petrov, *A theory of light quarks in the instanton vacuum* // Nucl. Phys. B 1986 V. 272, P. 457-489.
- [41] M. Buballa, S. Krewald, *Meson masses in a chirally symmetric, covariant effective quark model without free quarks* // Phys. Lett. B 294, 19-22, (1992).
- [42] Аникин И.В., Дорохов А.Е., Томио Л., *Структура пиона в модели инстантонной жидкости* // ЭЧАЯ 2000, V. 31, P. 1023-1079.
- [43] A.M. Polyakov, *Thermal properties of gauge fields and quark liberation* // Phys. Lett. B 1978, V. 72, P. 477-480.
- [44] Peter N. Meisinger, Michael C. Ogilvie, *Chiral symmetry restoration and  $Z_N$  symmetry* // Phys. Lett. B 1996, V. 379, P. 163-168.
- [45] Peter N. Meisinger, Travis R. Miller, and Michael C. Ogilvie, *Phenomenological equations of state for the quark-gluon plasma* // Phys. Rev. D 2002, V. 65, P. 034009.
- [46] A. Mocsy, F. Sannino, and K. Tuominen, *Confinement versus Chiral Symmetry* // Phys. Rev. Lett. 2004 V. 92, P. 182302.
- [47] K. Fukushima, *Chiral effective model with the Polyakov loop* // Phys. Lett. B 2004 V. 591, P. 277-284.
- [48] C. Ratti, M. A. Thaler, and W. Weise, *Phases of QCD: Lattice thermodynamics and a field theoretical model* // Phys. Rev. D 2006 V. 73, P. 014019.

- [49] S. Rössner, C. Ratti, W. Weise, *Polyakov loop, diquarks and the two-flavour phase diagram* // Phys. Rev. D 2007 V.75, P. 034007.
- [50] P. Costa, H. Hansen, M. C. Ruivo, C. A. de Sousa, *How parameters and regularization affect the PNJL model phase diagram and thermodynamic quantities* // Phys.Rev.D 2010, V. 81, P. 016007.
- [51] K. Fukushima *Phase diagrams in the three-flavour Nambu-Jona-Lasinio model* // Phys. Rev. D 2008, V. 77, P. 114028.
- [52] G. Lugones, T. A. S. do Carmo, A. G. Grunfeld, and N. N. Scoccola, *Deconfinement transition in protoneutron stars: Analysis within the Nambu-Jona-Lasinio model* // Phys. Rev. D 2010 V. 81, P. 085012.
- [53] C. H. Lenzi, A. S. Schneider, C. Providencia, and R. M. Marinho, Jr. *Compact stars with a quark core within the Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model* // Phys. Rev. C 2010, V. 82, P. 015809.
- [54] V. Dexheimer, J. Steinheimer, R. Negreiros, and S. Schramm, *Hybrid stars in an  $SU(3)$  parity doublet model* // Phys. Rev. C 2013 V. 87, P. 015804.
- [55] Y. Sakai, T. Sasaki, H. Kouno, and M. Yahiro, *Entanglement between deconfinement transition and chiral symmetry restoration* // Phys. Rev. D 2010 V. 82, P. 076003.
- [56] Y. Sakai, T.Sasaki, H. Kouno, and M. Yahiro, *Equation of state in the PNJL model with the entanglement interaction* // arXiv:1104.2394.
- [57] M. C. Ruivo, P. Costa and C. A. de Suosa, *Effects of entanglement and instanton suppression at finite temperature in a  $SU(2)$  EPNJL model with anomaly* // Phys. Rev. D 2012, V. 86, P. 116007.
- [58] J. Sugano et al., *Determination of the strength of the vector-type four-quark interaction in the entanglement Polyakov-loop extended Nambu-Jona-Lasinio model* // Phys. Rev. D 2014 V. 90, P. 037901.
- [59] U. Vogl and W. Weise, *The Nambu and Jona-Lasinio model: Its implications for Hadrons and Nuclei* // Progr. Part. Nucl. Phys. 1991, V. 27, P. 195-272.

- [60] M. Buballa, *NJL-model analysis of dense quark matter* // Phys. Rep. 2005, V. 407, P. 205-376.
- [61] O. Loureno, M. Dutra, T. Frederico, A. Delfino, M. Malheiro, *Vector interaction strength in Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio models from hadron-quark phase diagrams* // Phys. Rev. D 2012 V. 85, P. 097504.
- [62] M. Dutra et al., *Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio phase diagrams and quarkyonic phase from order parameters* // Phys. Rev. D 2013 V. 88, P. 114013.
- [63] K. Fukushima, *Critical surface in hot and dense QCD with the vector interaction* // Phys. Rev. D 2008, V. 78, P. 114019.
- [64] Y. Sakai, K. Kashiwa, H. Kouno, M. Matsuzaki, and M. Yahiro, *Vector-type four-quark interaction and its impact on QCD phase structure* // Phys. Rev. D 2008 V. 78, P. 076007.
- [65] S. Carignano, D. Nickel, and M. Buballa, *Influence of vector interaction and Polyakov loop dynamics on inhomogeneous chiral symmetry breaking phases* // Phys. Rev. D 2010 V. 82, P. 054009.
- [66] J. Steinheimer, S. Schramm, *The problem of repulsive quark interactions: Lattice versus mean field models* // Phys. Lett. B 2011 V. 696, P. 257-261.
- [67] G. A. Contrera, A. G. Grunfeld, D. B. Blaschke, *Phase diagrams in nonlocal PNJL models constrained by Lattice QCD results* // Phys. Part. Nucl. Lett. 2014, V. 11, P. 342-351.
- [68] A. V. Friesen, Yu. L. Kalinovsky, V. D. Toneev *Impact of the vector interaction on the phase structure of QCD matter* // Int. J. Mod. Phys. A 2015 V. 30, P. 1550089 (18 pages).
- [69] Z.W. Lin, C.M. Ko, B.A. Li, B. Zhang and S. Pal, *Multiphase transport model for relativistic heavy ion collisions* // Phys. Rev. C 2005 V. 72, P. 064901.
- [70] W. Cassing, *From Kadanoff-Baym dynamics to off-shell parton transport* // Eur. Phys. J. ST 2009 V. 168, P. 3-87.

- [71] W. Cassing and E.L. Bratkovskaya, *Parton-Hadron-String Dynamics: an off-shell transport approach for relativistic energies* // Nucl. Phys. A 2009 V. 831 P. 215-242; arXiv:0907.5331
- [72] E.L. Bratkovskaya, W. Cassing, V.P. Konchakovski, O. Linnyk, *Parton-Hadron-String Dynamics at Relativistic Collider Energies* // Nucl.Phys. A 2011 V. 856, P. 162-182.
- [73] Р. Г. Джафаров, В.Е. Рочев, *Две регуляризации - две разные модели Намбу-Иона-Лазинио* // Препринт ИФВЭ 2004, 27. Протвино, 2004., 15 с.
- [74] Р. К. Джафаров, В. Е. Рочев, *Разложение среднего поля и мезонные эффекты в киральном конденсате модели Намбу-Иона-Лазинио с аналитической регуляризацией* // Препринт ИФВЭ 2003, 23, Протвино, 2003. 14 с.
- [75] W. Pauli, F. Villars, *On the invariant regularization in relativistic quantum theory* // Rev. Mod. Phys. 1949 V 21, P. 434-444.
- [76] W. Florkowski, *Description of hot compressed hadronic matter based on an effective chiral lagrangian* // Acta Phys.Polon. B 1997, V. 28, P. 2079-2205.
- [77] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Broken symmetries* // Phys. Rev. 1962 V. 127(3), P. 965-970.
- [78] M. L. Goldberger and S. B. Treiman, *Decay of the  $\Pi$  Meson* // Phys. Rev. 1958 V. 110, P. 1178.
- [79] M. Gell-Mann, R. J. Oakes, and B. Renner, *Behavior of Current Divergences under  $SU(3) \times SU(3)$*  // Phys. Rev. 1968 V. 175, P. 2195.
- [80] K. Nakamura et al. (Particle Data Group) *Review of particle Physics* // J. Phys. G 2010, V. 37, P. 075021.
- [81] M. Asakawa and K. Yazaki, *Chiral restoration at finite density and temperature* // Nucl. Phys. A 1989 V. 504, P. 668-684.
- [82] М. К. Волков, А.Е. Раджабов, *Модель Намбу- Иона- Лазинио и ее развитие* // УФН 2006 V. 176, P. 569.

- [83] К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер, *Квантовая теория поля* // Москва, "Мир" 1984.
- [84] Ishii et al. *Effective model to meson screening masses at finite temperature* // Phys. Rev. D, 2014, V. 89, P. 071901 (15 стр.).
- [85] L. Reinders, J. H. Rubinstein and S. Yazaki *Hadron properties from QCD sum rules* // Phys. Rep., 1985, V. 127, P.1-97.
- [86] A. V. Friesen, Yu. L. Kalinovsky, V. D. Toneev, *Effects of model parameters in thermodynamics of the PNJL model* // Int. J. Mod. Phys. A 2012, Vol. 27, P.1250013 (15 стр.).
- [87] M. Oertel, *Investigation of meson loop effects in the Nambu-Jona-Lasinio model* // arXiv:: hep-ph/0012224v1.
- [88] K. Kashiwa, H. Kouno, M. Matsuzaki, M. Yahiro, *Critical endpoint in the Polyakov-loop extended NJL model* // Phys. Let. B 2008, V. 662, P. 26-32.
- [89] T. Hatsuda, T. Kunihiro, *QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian* // Phys. Rep. 1994, V. 247, P.221 -367.
- [90] T. Hatsuda and T. Kunihiro, *QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian* // Phys. Rep. 1994, V. 27, P. 221-367.
- [91] H. Hansen et al., *Mesonic correlation functions at finite temperature and density in the Nambu-Jona-Lasinio model with Polyakov loop* // Phys. Rev. D 2007, V. 75, P. 065004.
- [92] G. Boyd et. al, *Thermodynamics of SU(3) lattice gauge theory* // Nucl. Phys. B 1996 V. 469, P. 419-444..
- [93] M. Panero, *Thermodynamics of the QCD Plasma and the Large-N Limit* // Phys. Rev. Lett 2009 V. 103, P. 232001.
- [94] S. Borsanyi et al. *Is there still any Tc mystery in lattice QCD? Results with physical masses in the continuum limit III* // JHEP 2010 V. 1009, P. 073.

- [95] P. de Forcrand, O. Philipsen, *The QCD phase diagram for small densities from imaginary chemical potential* // Nucl. Phys. B 2002, V. 642, P. 290-306.
- [96] M. D’Elia, M.-P. Lombardo, *Finite density QCD via an imaginary chemical potential* // Phys. Rev. D 67, 014505 (2003).
- [97] M. D’Elia, F. Di Renzo, and M.-P. Lombardo, *Strongly interacting quark-gluon plasma, and the critical behavior of QCD at imaginary  $\mu$*  // Phys. Rev. D 2007 V. 76, P.114509.
- [98] J. B. Kogut and D. K. Sinclair, *Finite temperature transition for 2-flavor lattice QCD at finite isospin density* // Phys. Rev. D 2004 V. 70, P. 094501.
- [99] P. Cea, L. Cosmai, M. D’Elia, Ch. Manneschi, and A. Papa, *Analytic continuation of the critical line: Suggestions for QCD* // Phys. Rev. D 2009 V. 80, P. 034501.
- [100] A. Wergieluk, D. Blaschke, Yu. L. Kalinovsky, A. Friesen, *Pion dissociation and Levinson’s theorem in hot PNJL quark matter* // Phys.Part.Nucl.Lett. 2013 V. 10, P. 660-668.
- [101] R. D. Pisarski, *Quark-gluon plasma as a condensate of  $Z(3)$  Wilson lines* // Phys. Rev. D 2000 V. 62, P. 111501.
- [102] R. D. Pisarski, *Notes on the Deconfining Phase Transition* // Published in "Cargese 2001, QCD perspectives on hot and dense matter", P. 353-384, hep-ph/0203271.
- [103] S. Rössner, T. Hell, C. Ratti, W. Weise, *The chiral loop and deconfinement crossover transition: PNJL model beyond mean field*, Nucl. Phys. A 2008 V. 814, P. 118.
- [104] B. J. Schaefer, J. M. Pawłowski and J. Wambach, *The Phase Structure of the Polyakov–Quark–Meson Model* // Phys. Rev. D 2007 V. 76, P. 074023.
- [105] P. N. Meissner, M. C. Ogilvie and T. R. Miller, *Gluon quasiparticles and the Polyakov loop* // Phys. Lett. B 2004 V. 585, 149.



- [106] F. Karsch, E. Laermann and A. Peikert, *Quark mass and flavour dependence of the QCD phase transition* // Nucl. Phys. B 2002 V. 605, P. 579.
- [107] F. Karsch, *Lattice results on QCD thermodynamics* // Nucl. Phys. A. 2002 V. 698, P. 199-206; F. Karsch, E. Laermann, A. Peikert, *The pressure in 2, 2+1 and 3 flavour QCD* // Phys. Lett. B 2000 V. 478, P. 447-455.
- [108] C. Ratti, S. Rössner and W. Weise, *Quark number susceptibilities: lattice QCD versus PNJL model* // Phys.Lett.B 2007 V, 649 P. 57-60; arXiv:hep-ph/0701091.
- [109] K. Kondo, *Toward a first-principle derivation of confinement and chiral-symmetry-breaking crossover transitions in QCD* // Phys.Rev. D 2010 V. 82, P. 065024.
- [110] A. Roberge, N. Weiss, *Gauge theories with imaginary chemical potential and the phases of QCD* // Nucl. Phys. B 1986 V. 275, P. 734-745.
- [111] M. Dutra et al., *Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio phase diagrams and quarkyonic phase from order parameters* // Phys. Rev. D 2013 V.88, P. 114013.
- [112] J. Sugano, J. Takahashi, M. Ishii, H. Kouno, M. Yahiro, *Determination of the strength of the vector-type four-quark interaction in the entanglement Polyakov-extended Nambu-Jona-Lasino model* // Phys. Rev. D 2014 V. 90, P. 037901.
- [113] G. Endrodi, Z. Fodor, S.D. Katz and K.K. Szabo, *The QCD phase diagram at nonzero quark density* // JHEP 2001 V. 1104, P. 001 - 012.
- [114] O. Kaczmarek et al., *Phase boundary for the chiral transition in (2+1)-flavor QCD at small values of the chemical potential* // Phys. Rev. D 2011 V. 83, P. 014504.
- [115] C. Bonati et al., *Curvature of the chiral pseudo-critical line in QCD* // arXiv:1410.5758.

- [116] P. de Forcrand and O. Philipsen, *The QCD phase diagram for small densities from imaginary chemical potential* // Nucl. Phys. B 2002 V. 642, P. 290-306.
- [117] P. Cea, L. Cosmai, and A. Papa, *Critical line of 2+1 flavor QCD* // Phys. Rev. D 2014 V.89, P. 074512.
- [118] A. Ali Khan et al., *Equation of state in finite-temperature QCD with two flavors of improved Wilson quarks* // Phys. Rev. D 2001, V.64, P. 074510.
- [119] C.R. Allton, et al., *Equation of state for two flavor QCD at nonzero chemical potential* // Phys. Rev. D 2003 V. 68, P. 014507.
- [120] Y. Sakai et al., *Determination of QCD phase diagram from the imaginary chemical potential region* // Phys. Rev. D 2009 V. 79, P. 096001.
- [121] K. Kashiva, T. Hell and W. Weise, *Impact of vector-current interactions on the QCD phase diagram* // arXiv:1212.4017.
- [122] E. Beth, G. E. Uhlenbeck, *The quantum theory of the non-ideal gas I. Deviations from the classical theory* // Physica 1936 V. 3, P. 729-745; 4, 915 (1937);
- [123] H. Abuki, *BCS/BEC crossover in Quark Matter and Evolution of its Static and Dynamic properties: From the atomic unitary gas to color superconductivity* // Nucl. Phys. A 2007 V. 791, P. 117-164.
- [124] J. Hufner, S. P. Klevansky, P. Zhuang and H. Voss, *Thermodynamics of a quark plasma beyond the mean field: A generalized Beth-Uhlenbeck approach* // Annals Phys. 1994 V. 234, P. 225-244.
- [125] J. L. Kapusta *Finite-Temperature Field Theory* // Cambridge, University Press Cambridge.
- [126] P. Zhuang, J. Hufner, S.P. Klevansky and L. Neise, *Transport properties of a quark plasma and critical scattering at the chiral phase transition* // Phys. Rev. D 1995 V. 51 P. 3728-3738.

- [127] P. Rehberg, S.P. Klevansky and J. Hüfner, *Hadronization in the  $SU(3)$  Nambu-Jona-Lasinio model* // Phys. Rev. C 1996 V. 53, P. 410-429.
- [128] P. Rehberg, S. Klevansky, J. Hüfner *Elastic scattering and transport coefficients for a quark plasma in  $SU(3)$  at finite temperatures* // Nucl. Phys. A 1996 V. 608, P. 356-388.
- [129] A.V Friesen, Yu.V. Kalinovsky, V.D. Toneev, *Quark scattering off quarks and hadrons* // Nucl. Phys. A 2014 V. 923, P. 1-18.
- [130] Е. Бюклинг, К. Каянти *Кинематика элементарных частиц* // Изд. "Мир", Москва 1975.
- [131] A. V. Friesen, Yu. L. Kalinovsky, V. D. Toneev, *Decay of a scalar  $\sigma$ -meson near the Critical End Point in the PNJL model* // Phys. Part. Nucl. Lett. 2012 V. 9 P. 1-6.
- [132] Zhuang P., Yang Z., *Sigma Decay at Finite Temperature and Density* // Chin. Phys. Lett. 2001. V. 18. P. 344-346; arxiv:nucl-th/0008041.
- [133] Wu N., *BES R measurements and  $J/\psi$  decays* // hep-ex/0104050.
- [134] Faessler A., Gutsche T., Ivanov M. A., Lyubovitskij V. E., Wang P., *Pion and sigma meson properties in a relativistic quark model* // Phys. Rev. D. 2003. V. 68. P. 014011 [arxiv:hep-ph/0304031]
- [135] Huo W, Zhang X, and Huang T,  *$\sigma$  meson in  $J/\psi$  decays* // Phys. Rev. D 2002 V. 65, P. 097505 [arXiv:hep-ph/0112025].
- [136] Dib C., Rosenfeld R., *Estimating sigma meson couplings from  $D \rightarrow 3\pi$  decays* // Phys. Rev. D. 2001. V. 63. P. 11750.
- [137] A.S. Khvorostukhin, V.D. Toneev, D.N. Voskresensky, *Viscosity coefficients for hadron and quark-gluon phases* // Nucl. Phys. A 2010, V. 845, P. 106-146.