ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

КОЗЫРЕВ
Николай Юрьевич

Расширенные суперсимметрии и их спонтанное нарушение в механике и теории протяженных объектов

01.04.02 – теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
Кривонос Сергей Олегович

Дубна – 2015

Оглавление

Введение

Суперсимметрия занимает исключительно значимое место в современной теоретической и математической физике, являясь как вероятным свойством предполагаемых реалистических моделей (расширений Стандартной модели, теорий великого объединения), так и необходимой симметрией теории суперструн. Известно применение использующих суперсимметрию методов для вычислений в квантовой механике и статистической физике, а также для решения сугубо математических задач [1].

Суперсимметричная механика нашла достаточно широкое применение при исследовании свойств суперсимметричных теорий. В ее рамках были найдены аналоги ряда задач теории поля (AdS/CFT-соответствие, спонтанное нарушение суперсимметрии), допускающие более полное исследование, чем в настоящее время возможно в многомерных случаях. Модели суперсимметричной механики могут представлять и самостоятельный интерес. К таковым относятся задачи о движении суперчастицы вблизи горизонта черных дыр и задачи о построении действия суперсимметричного аниона [2].

Одной из задач, которая может быть решена в рамках суперсимметричной механики, является задача о построении суперсимметричного аналога квантового эффекта Холла в пространствах высших размерностей. Эффект Холла на сфере $\mathbb{S}^4$ в $SU(2)$ магнитном поле был исследован в [3] и привлек внимание в связи с обнаруженными свойствами фермионной жидкости. В частности, в спектре возбуждений этой жидкости существует безмассовая частица со спином 2, что позволяет использовать данную систему как основу для модели квантовой гравитации. Привлекательность данной модели обеспечивает отсутствие расходимостей, связанное с дискретным характером фермионной жидкости. Жидкость с аналогичными свойствами на пространствах $\mathbb{CP}^n$ в $U(n)$ калибровочном поле была рассмотрена в работе [4]. Для построения суперсимметричного обобщения данных систем в первую очередь требуется построить суперсимметричную механику частиц на этих пространствах в присутствии соответствующих магнитных полей.

Суперсимметричная механика представляет интерес и при исследовании спонтанного нарушения суперсимметрии. Суперсимметричные одномерные системы рассматривались как в первых работах по изучению условий спонтанного нарушения, так и в дальнейшем - как источник относительно простых моделей, позволяющих понять способы построения суперполевых низкоэнергетических действий бран.

P-брану можно представить как (гипер)поверхность, погруженную в пространство-время большего числа измерений, и являющуюся решением уравнений соответствующей теории супергравитации. Своим присутствием брана спонтанно нарушает группу движений пространства, в которое она погружена, до симметрий собственного мирового объема. Флуктуации браны могут быть описаны с помощью эффективной теории поля, определенной на мировом объеме браны, и наследующей исходные симметрии пространства, в которое брана погружена. Такие симметрии (кроме симметрий мирового объема) нелинейно реализованы и спонтанно нарушены, а поля соответствующей теории - Голдстоуновские.

Суперсимметрия, если таковая изначально присутствовала, также оказывается спонтанно нарушенной. Как правило, в случае одиночных бран нарушается половина суперсимметрий, что сопровождается появлением такого же числа Голдстоуновских фермионов. При этом оказывается, что действие описывающей флуктуации браны теории поля может быть полностью зафиксировано требованием инвариантности относительно двух суперсимметрий - точной и спонтанно нарушенной - с одинаковым числом суперзарядов. Исходные поля бозонной браны и Голдстоуновские фермионы при этом принадлежат некоторому мультиплету ненарушенной суперсимметрии.

При построении суперсимметричных действий для бран в большинстве случаев используются суперполевые методы, что позволяет естественным образом учесть точную суперсимметрию теории. Очевидно, что постулировав некоторый суперполевой анзац для действия, можно использовать спонтанно нарушенную суперсимметрию как условие, способное зафиксировать его функциональную свободу. Менее тривиальный метод использования нарушенной суперсимметрии для фиксации действия состоит в том, что построить ее линейную реализацию. Действительно, во многих представляющих интерес случаях оказывается возможным в дополнение к исходным суперполям постулировать существование нескольких дополнительных с такими законами преобразования, чтобы вместе они образовывали мультиплет нарушенной суперсимметрии. Тогда оказывается, что вариация одного из дополнительных суперполей относительно нарушенной симметрии пропадает при интегрировании по суперпространству, так что данное композитное суперполе и оказывается искомым суперполевым лагранжианом.

Данные методы оказались достаточно успешными, особенно при исследовании систем с небольшим числом суперсимметрий, и были проверены как в рамках суперсимметричной механики [5], так и для систем высших размерностей [6–9]. Однако, построить таким способом суперполевые действия удалось не для всех представляющих интерес систем. Этому препятствуют не только технические трудности.

- В ряде случаев попытка построить ковариантные условия неприводимости приводит к соотношениям, включающим также уравнения движения, и условия неприводимости и уравнения движения оказывается невозможным разделить.

- Построение действия оказалось неалгоритмизованным. Так, в отличие от бозонных действий, которые можно ясным образом построить из форм Картана в рамках соответствующей нелинейной реализации, суперполевой лагранжиан не может быть связан с формами - он сдвигатся на полную дивергенцию при преобразованиях нарушенной суперсимметрии. Метод построения линейной реализации из нелинейной существует [11], но на практике его не всегда удается применить.

- Из суперполевого действие сложно получить компонентное. Это связано не только с определяющими мультиплет нелинейными условиями, но и тем, что существует множество способов определить фермионные компоненты. При неудачном определении можно получить длинный сложный “хвост” фермионных слагаемых без ясного геометрического смысла, дополняющий бозонное действие. При этом ничто в полученном действии не отражает тот факт, что оно имеет дополнительную симметрию.

То, что данные проблемы не нашли своего решения, обусловливает необходимость поиска иных подходов к действиям суперсимметричных бран. В частности, представляется перспективным отказаться от поиска суперполевого действия и формулировать действие в терминах компонент суперполей. Аргументом в пользу этого метода служат известные результаты Волкова и Акулова [10] о взаимодействиях Голдстоуновского фермиона. Они постулировали преобразования

$$\psi_\alpha \to \psi_\alpha + \zeta_\alpha,\ \bar\psi_{\dot\alpha} \to \bar\psi_{\dot\alpha} + \bar\zeta_{\dot\alpha},\ x^A \to x^A - \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\bar\zeta^{\dot\alpha}\left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot\alpha}\psi^\alpha - \bar\psi^{\dot\alpha}\left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot\alpha}\zeta^\alpha\right), \tag{1}$$

образующие супералгебру Пуанкаре, и построили инвариантное действие для Голдстоуновского фермиона

$$S_{GF} = \int d^4x \det E,\ E_A^B = \delta_A^B + \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\bar\psi^{\dot\alpha}\partial_A\psi^\alpha + \psi^\alpha\partial_A\bar\psi^{\dot\alpha}\right)\left(\sigma^B\right)_{\alpha\dot\alpha}, \tag{2}$$

Также ими было отмечено, что симметрия относительно (1) полностью определяет взаимодействие данного фермиона с материей. Таким образом, можно предполагать, что и в случае компонентных действий суперсимметричных бран при спонтанном нарушении половины суперсимметрий все фермионные слагаемые могут быть зафиксированы аналогичным требованием. Поскольку действие для них в бозонном пределе может быть найдено с помощью формализма нелинейных реализаций, структура полного суперсимметричного компонентного действия также ясна (полностью выяснить его таким образом нельзя, поскольку некоторые слагаемые могут исчезать бозонном пределе). После этого останется лишь проверить инвариантность действия относительно ненарушенной суперсимметрии.

Имеет смысл начать реализацию данной программы с суперсимметричной механики, чтобы выяснить ее возможные тонкости, достоинства и недостатки на относительно простых системах, а затем применить для исследования P-бран.

Настоящая диссертация преследует две цели.

Первой целью является является построение механик суперчастиц в искривленных пространствах и внешних (неабелевых) магнитных полях, интересных с точки зрения квантового эффекта Холла. Для достижения этой цели поставлены и решены следующие задачи

- Построение $SU(n+1)$ инвариантной $\mathbb{CP}^n$ механики во внешнем $U(n)$ магнитном поле, а также поиск представления ее гамильтониана в терминах генераторов ее симметрий;
- Построение суперсимметричной $\mathbb{CP}^3$ механики, допускающей гамильтонову редукцию к механике на сфере $\mathbb{S}^4$ без нарушения суперсимметрии, и ее обобщение до $\mathbb{CP}^{2k+1}$, редуцируемой до $\mathbb{HP}^k$.

Второй целью является разработка нового подхода к действиям со спонтанно нарушенной суперсимметрией и его практическое применение для построения действий суперчастиц и P-бран. В рамках этой программы решаются следующие задачи:

- Построение компонентного действия механики, основанной на $N=2$, $d=1$ киральном мультиплете, с дополнительной спонтанно нарушенной $N=2$ суперимметрией, помощью формализма нелинейных реализаций. Построение суперполевого действия и сравнение результатов применения обоих методов;
- Построение и исследование суперсимметричных механик с нарушениями высших суперсимметрий ($N=8 \to N=4$, $N=16 \to N=8$, ...)
- Построение $N=4 \to N=2$ действий с высшими производными (анион, частица с жесткостью [12, 13]);
- Построение действия мембраны в $D=5$ и доказательство его инвариантности относительно нарушенной и ненарушенной $N=2$, $d=3$ суперсимметрий;

- Вычисление действий, дуальных действию мембраны в $D = 5$ и содержащих электромагнитные поля в $d = 3$;
- Построение и доказательство инвариантности действий 3-бран в $D = 6, 8$ и мембраны в $D = 7$ относительно нарушенной и ненарушенной суперсимметрии с учетом полученного опыта.

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми.

Выполненное в диссертационной работе исследование $N = 2$ и $N = 4$ суперсимметричных механик частиц во внешних неабелевых калибровочных полях, создает основу для построения суперсимметричных обобщений квантового эффекта Холла. Это открывает возможности как для исследования проялений суперсимметрии в физике конденсированного состояния, так и для оценки влияния суперсимметрии в моделях квантовой гравитации, основанных на квантовом эффекте Холла. Кроме того, построенные квантово-механические системы представляют интерес и сами по себе, как системы, взаимодействия которых полностью фиксируется свойствами симметрии.

Исследования систем со спонтанным нарушением суперсимметрии, как суперчастиц, так и бран, проведенные в диссертационной работе, позволяют понять структуру действий этих систем, сформулированных в терминах компонент суперполей. Осуществленные построения позволяют сформулировать общий метод поиска компонентных действий бран, флуктуации которых описываются только скалярными полями, в ряде случаев оказывающийся более эффективным, чем распостраненные суперполевые методы. В частности, суперсимметричные действия мембраны в $D = 5, 7$ и 3-браны в $D = 8$, не были известны ни в терминах компонент, ни суперполей. Рассмотренные действия представляют интерес как для исследования низкоэнергетического предела и непертурбативных свойств теории струн и супергравитации, так и для дальнейшего поиска возможностей построения действий со спонтанным нарушением суперсимметрии, содержащих калибровочные поля. Построенные суперсимметричные действия для аниона и частицы с жесткостью могут найти применение в теории конденсированных сред.

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения.

В первой главе приводятся результаты исследования суперсимметричных механик частиц во внешнем калибровочном поле.

В первом разделе первой главы подробно рассмотрена механика частицы на пространствах $\mathbb{CP}^n$, а также ее обобщения, включающие $U(n)$ магнитные поля и суперсимметрию.

Доказано, что инвариантность относительно $SU(n{+}1)$ симметрии, имевшая место в бозонной механике, совместима с одновременным включением $U(n)$ магнитного поля и $N=4$, $d=1$ суперсимметрии, хотя и для этого требуется добавить токи, дополняющие алгебру изоспиновых токов $u(n)$ до $su(1,n)$. Явно построены генераторы, порождающие алгебру $su(n+1)$ с помощью скобки Дирака, в их терминах сформулирован гамильтониан.

Во втором разделе первой главы рассмотрена бозонная механика на пространстве $\mathbb{CP}^3$, ее формулировка как механики на сфере $\mathbb{S}^4 \sim \mathbb{HP}^1$ с внешним $SU(2)$-калибровочным полем, и гамильтонова редукция до свободной механики на $\mathbb{S}^4$. Показано, что возможно сформулировать $N=2$ суперсимметричную механику с аналогичными свойствами, которая, однако, отличается от стандартной $\mathbb{CP}^3$ суперсимметричной механики, основанной на киральных суперполях. Данные построения распостранены на системы на $\mathbb{CP}^{2n+1}$, редуцируемые к свободным $\mathbb{HP}^n$ механикам.

Во второй главе последовательно рассматриваются суперсимметричные механики частицы в трехмерном пространстве-времени, с частичным спонтанным нарушением $N=4$, $N=8$, $N=16$ высших суперсимметрий в $d=1$. С помощью метода нелинейных реализаций построены действия таких частиц в терминах компонент суперполей. Показано, что действия таких суперчастиц имеют универсальную структуру, во многом повторяющую бозонное действие, и инвариантны относительно нарушенной и ненарушенной суперсимметрий, а также нелинейно реализованной группы $SO(1,2)$. Кроме того, построено действие частицы в $D=5$ с 16 суперсимметриями, половина которых спонтанно нарушены. Во всех рассмотренных случаях фермионы входят в соответствующие лагранжианы лишь в виде комбинации $\mathcal{E}$, ковариантизующей производные $\partial_t \to \mathcal{D}_t = \mathcal{E}^{-1}\partial_t$ и меру интегрирования $dt \to dt\,\mathcal{E}$ относительно нарушенной суперсимметрии. Также построены $N=4$ суперсимметричные действия для аниона и частицы с жесткостью.

В третьей главе компонентный подход к действиям с частичным спонтанным нарушением суперсимметрии адаптирован для построения суперсимметричных действий бран в плоском пространстве-времени. С помощью данного метода построены действия мембран в $D=5$, $D=7$ и 3-бран в $D=6$, $D=8$, и доказана их инвариантность относительно нарушенной и ненарушенной суперсимметрий. Они обладают теми же основными чертами, что и действия в механике; наиболее существенным отличием оказывается наличие члена Весса-Зумино, сдвигающегося на полную дивергенцию при преобразованиях нарушенной суперсимметрии. Дуализацией из действия мембраны в $D=5$ получены действия, содержащие калибровочные поля, в том числе $N=4$, $d=3$ суперсимметричное действие для теории

Борна-Инфельда.

В Заключении подводятся итоги работы и приводятся результаты, выносимые на защиту.

Глава 1

Суперсимметричные механики частиц во внешнем калибровочном поле

1.1. Симметрии $N = 4$ суперсимметричной $\mathbb{CP}^n$ механики

1.1.1. Введение

Суперсимметричные нелинейные сигма-модели известны в течение многих лет [14–16]. Если скалярные поля являются координатами на некотором Кэлеровом пространстве, суперсимметричный лагранжиан может быть простым и компактным образом записан с помощью Кэлеровой метрики. В одном из наиболее простых случаев, одномерной $\mathbb{CP}^n$ модели [17], $N = 4$ суперзаряды в подходящем базисе имеют весьма простой вид [18–20]. Бозонные поля этой модели параметризуют пространство $\mathbb{CP}^n \sim SU(n+1)/U(n)$, а суперзаряды и гамильтониан инвариантны относительно действия группы $SU(n+1)$ [21].

Возникает естественный вопрос о введении дополнительных взаимодействий в суперсимметричную $\mathbb{CP}^n$ модель при сохранении $SU(n+1)$ симметрии. Наиболее очевидной возможностью такого рода является введение взаимодействия с неабелевыми калибровочными полями, принадлежащими алгебре $u(n)$. В бозонном случае такая система была предложена Карабали и Наиром, рассмотревшими квантовый эффект Холла на пространствах $\mathbb{CP}^n$ [4]; также были построены эффективные действия в объеме и на границе [22]. Возможность построения суперсимметричной версии данной системы не очевидна, поскольку во многих случаях дополнительное взаимодействие с внешним калибровочным полем приводит к так называемой “слабой алгебре суперсимметрии” [23].

Разработка $N = 4$ суперсимметричных расширений модели Карабали и Наира была начата в статье [24], в которой была построена $N = 4$ суперсимметричная механика, описывающая движение заряженной частицы по пространству $\mathbb{CP}^n$ в присутствии внешних $U(n)$ калибровочных полей. В отличие от $N = 4$ суперсимметричной механики на сфере $\mathbb{S}^4$ [25], обладающей лишь $SO(4)$ инвариантностью, $N = 4$ суперсимметричная механика на $\mathbb{CP}^n$ без калибровочных полей инвариантна относительно группы $SU(n+1)$, реализованной нелинейно. Поэтому необходимо знать, не разрушается ли полная группа симметрий $SU(n+1)$ при введении $U(n)$ внешних калибровочных полей в $N = 4$ суперсимметричную механику на $\mathbb{CP}^n$.

1.1.2. Предварительные замечания: бозонная $\mathbb{CP}^n$ механика

Лагранжев подход и метод нелинейных реализаций

Стандартная бозонная $\mathbb{CP}^n$ механика описывается $2n$ бозонными координатами $\{z^\alpha, \bar{z}_\alpha,\ \alpha = 1, \ldots, n\}$, зависящими от времени t, с действием

$$S_{CP^n} = \int dt \mathcal{L}_{CP^n} = \int dt\ g_\alpha{}^\beta\ \dot{z}^\alpha\ \dot{\bar{z}}_\beta, \tag{1.1}$$

где $g_\alpha{}^\beta$ - метрика Фубини-Штуди пространства $\mathbb{CP}^n$

$$g_\alpha{}^\beta = \frac{1}{(1 + z \cdot \bar{z})} \left[\delta_\alpha^\beta - \frac{\bar{z}_\alpha z^\beta}{(1 + z \cdot \bar{z})} \right], \quad z \cdot \bar{z} \equiv z^\alpha \bar{z}_\alpha. \tag{1.2}$$

$\mathbb{CP}^n$ механика является одним из простейших примеров моделей с нелинейно реализованной симметрией. Полной группой симметрий данной модели является группа $SU(n+1)$, при этом $U(n)$ подгруппа реализована линейно [21]. Таким образом, $\mathbb{CP}^n$ механика может быть может быть интерпретирована как σ-модель на фактор-пространстве $SU(n+1)/U(n)$. Ее можно полностью построить, исходя из этого определения.

Для построения механики на $\mathbb{CP}^n$ с помощью метода нелинейных реализаций имеет смысл выбрать такой базис в алгебре $su(n+1)$, в котором генераторы подалгебры $u(n)$ $\mathsf{J}_\alpha{}^\beta$ и генераторы, принадлежащие фактор-пространству $SU(n+1)/U(n)$ $\mathsf{R}_\alpha, \overline{\mathsf{R}}^\alpha$, выделены явно. Коммутационные соотношения алгебры $su(n+1)$ в этом базисе имеют вид

$$\begin{aligned} &\left[\mathsf{R}_\alpha, \overline{\mathsf{R}}^\beta\right] = 2\,\mathsf{J}_\alpha{}^\beta, \quad \left[\mathsf{J}_\alpha{}^\beta, \mathsf{J}_\gamma{}^\sigma\right] = \frac{1}{2}\left(\delta_\gamma^\beta \mathsf{J}_\alpha{}^\sigma - \delta_\alpha^\sigma \mathsf{J}_\gamma{}^\beta\right), \\ &\left[\mathsf{J}_\alpha{}^\beta, \mathsf{R}_\gamma\right] = \frac{1}{2}\left(\delta_\gamma^\beta \mathsf{R}_\alpha + \delta_\alpha^\beta \mathsf{R}_\gamma\right), \quad \left[\mathsf{J}_\alpha{}^\beta, \overline{\mathsf{R}}^\gamma\right] = -\frac{1}{2}\left(\delta_\alpha^\gamma \overline{\mathsf{R}}^\beta + \delta_\alpha^\beta \overline{\mathsf{R}}^\gamma\right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Генераторы удовлетворяют условиям эрмитового сопряжения

$$(\mathsf{R}_\alpha)^\dagger = \overline{\mathsf{R}}^\alpha, \quad \left(\mathsf{J}_\alpha{}^\beta\right)^\dagger = \mathsf{J}_\beta{}^\alpha. \tag{1.4}$$

Действие группы $SU(n+1)$ на фактор-пространстве $SU(n+1)/U(n)$ можно реализовать с помощью левого умножения

$$\begin{aligned} g &= e^{\mathrm{i}\left(x^\alpha \mathsf{R}_\alpha + \bar{x}_\alpha \overline{\mathsf{R}}^\alpha\right)} \in SU(n+1)/U(n) \Rightarrow \\ g_0\, g &= e^{\mathrm{i}\left(a^\alpha \mathsf{R}_\alpha + \bar{a}_\alpha \overline{\mathsf{R}}^\alpha\right)}\, e^{\mathrm{i}\left(x^\gamma \mathsf{R}_\gamma + \bar{x}_\gamma \overline{\mathsf{R}}^\gamma\right)} = e^{\mathrm{i}\left(x'^\alpha \mathsf{R}_\alpha + \bar{x}'_\alpha \overline{\mathsf{R}}^\alpha\right)}\, h, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где $h \in U(n)$. Получающиеся преобразования удобно записывать в стереографических координатах:

$$\begin{gathered} z^\alpha \equiv \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x \cdot \bar{x}}}{\sqrt{x \cdot \bar{x}}} x^\alpha, \quad \bar{z}^\alpha \equiv \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x \cdot \bar{x}}}{\sqrt{x \cdot \bar{x}}} \bar{x}^\alpha \Rightarrow \\ z'^\alpha = z^\alpha + a^\alpha + (z \cdot \bar{a}) z^\alpha, \quad \bar{z}'_\alpha = \bar{z}_\alpha + \bar{a}_\alpha + (a \cdot \bar{z}) \bar{z}_\alpha. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Можно проверить, что лагранжиан (1.1) инвариантен относительно преобразований (1.6).

Метод нелинейных реализаций позволяет построить объекты, ковариантные относительно преобразований (1.6). Ими являются формы Картана

$$g^{-1}\,dg = \mathrm{i}\,dz^{\alpha}\,e_{\alpha}{}^{\beta}\mathsf{R}_{\beta} + \mathrm{i}\,\overline{\mathsf{R}}^{\alpha}e_{\alpha}{}^{\beta}d\bar{z}_{\beta} + 2\left(z^{\alpha}\,\omega_{\beta}{}^{\gamma}d\bar{z}_{\gamma} - dz^{\gamma}\,\omega_{\gamma}{}^{\alpha}\bar{z}_{\beta}\right)\,\mathsf{J}_{\alpha}{}^{\beta}. \tag{1.7}$$

В принятых координатах тетрады $e_{\alpha}{}^{\beta}$ и $U(n)$-связности $\omega_{\alpha}{}^{\beta}$ на многообразии $\mathbb{CP}^{n}$ имеют вид [26]

$$e_{\alpha}{}^{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}}\left[\delta_{\alpha}^{\beta} - \frac{\bar{z}_{\alpha}z^{\beta}}{\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}\left(1+\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}\right)}\right], \tag{1.8}$$

$$\omega_{\alpha}{}^{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}\left(1+\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}\right)}\left[\delta_{\alpha}^{\beta} - \frac{\bar{z}_{\alpha}z^{\beta}}{2\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}\left(1+\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}\right)}\right]. \tag{1.9}$$

Тетрады $e_{\alpha}{}^{\beta}$ позволяют определить $SU(n+1)$ ковариантные производные “полей” $\{z^{\alpha},\bar{z}_{\alpha}\}$

$$\nabla_{t}z^{\alpha} = \dot{z}^{\beta}\,e_{\beta}{}^{\alpha}, \quad \nabla_{t}\bar{z}_{\alpha} = e_{\alpha}{}^{\gamma}\dot{\bar{z}}_{\gamma} \tag{1.10}$$

и $SU(n+1)$ инвариантный лагранжиан

$$\mathcal{L}_{CP^{n}} = \nabla_{t}z^{\alpha}\,\nabla_{t}\bar{z}_{\alpha} = g_{\alpha}{}^{\beta}\;\dot{z}^{\alpha}\,\dot{\bar{z}}_{\beta}\,, \tag{1.11}$$

который совпадает с (1.1).

Гамильтонов подход и магнитные поля

Достоинством рассмотренного лагранжева формализма является естественная связь с геометрическими построениями в фактор-пространстве. С точки зрения введения взаимодействия с внешними калибровочными полями, гамильтонов подход оказывается более удобным.

Канонический гамильтониан $\mathbb{CP}^{n}$ модели может быть получен преобразованием Лежандра из лагранжиана (1.1)

$$H = \bar{p}^{\alpha}\,\left(g^{-1}\right)_{\alpha}{}^{\beta}\,p_{\beta}\;, \tag{1.12}$$

где

$$\left(g^{-1}\right)_{\alpha}{}^{\beta} = (1+z\cdot\bar{z})\left[\delta_{\alpha}^{\beta} + \bar{z}_{\alpha}z^{\beta}\right], \tag{1.13}$$

а скобки Пуассона имеют стандартный вид

$$\{z^{\alpha},p_{\beta}\} = \delta_{\beta}^{\alpha}, \qquad \left\{\bar{z}_{\alpha},\bar{p}^{\beta}\right\} = \delta_{\alpha}^{\beta}\;. \tag{1.14}$$

Инвариантность гамильтониана $\mathbb{CP}^n$ модели относительно преобразований группы $SU(n+1)$ означает, что скобки гамильтониана (1.12) с токами

$$R_\alpha = p_\alpha + \bar z_\alpha \bar z_\beta \bar p^\beta,\ \overline{R}^\alpha = \bar p^\alpha + z^\alpha z^\beta p_\beta,\ J_\alpha{}^\beta = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(z^\beta p_\alpha - \bar z_\alpha \bar p^\beta\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\delta_\alpha^\beta\left(z^\gamma p_\gamma - \bar z_\gamma \bar p^\gamma\right) \tag{1.15}$$

равны нулю.

Данные токи образуют $su(n+1)$ алгебру относительно скобок Пуассона (1.14):

$$\begin{aligned} &\left\{R_\alpha, \overline{R}^\beta\right\} = 2\mathrm{i} J_\alpha{}^\beta, \quad \left\{J_\alpha{}^\beta, J_\gamma{}^\delta\right\} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\delta_\gamma^\beta\, J_\alpha{}^\delta - \delta_\alpha^\delta\, J_\gamma{}^\beta\right), \\ &\left\{J_\alpha{}^\beta, R_\gamma\right\} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\delta_\gamma^\beta\, R_\alpha + \delta_\alpha^\beta\, R_\gamma\right), \quad \left\{J_\alpha{}^\beta, \overline{R}^\gamma\right\} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\delta_\alpha^\gamma\, \overline{R}^\beta + \delta_\alpha^\beta\, \overline{R}^\gamma\right). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Более того, гамильтониан (1.12) совпадает с квадратичным оператором Казимира $su(n+1)$

$$\mathcal{C}_{su(n+1)} = R_\alpha\, \overline{R}^\alpha + 2 J_\alpha{}^\beta\, J_\beta{}^\alpha - \frac{2}{n+1} J_\alpha{}^\alpha\, J_\beta{}^\beta, \tag{1.17}$$

с учетом явного вида токов (1.15). Это - еще одно проявление $SU(n+1)$ инвариантности $\mathbb{CP}^n$ механики.

Взаимодействием, которое можно ввести в $\mathbb{CP}^n$ механику, не нарушив $SU(n+1)$ симметрию, является лишь взаимодействие с внешним магнитным полем. Введение инвариантного потенциала невозможно, поскольку невозможно построить инвариантную комбинацию переменных $\{z^\alpha, \bar z_\alpha\}$, преобразующихся как в (1.6). Более того, с учетом представления $\mathbb{CP}^n$ как фактор-пространства $SU(n+1)/U(n)$, внешние поля могут быть или абелевыми, связанными с $U(1)$ подгруппой группы стабильности $U(n)$, либо неабелевыми, соответствующими полной подгруппе стабильности.

Наиболее простым способом ввести взаимодействие с абелевым магнитным полем B можно, модифицировав $u(n)$ токи $J_\alpha{}^\beta$ (1.15)

$$\widetilde{J}_\alpha{}^\beta = J_\alpha{}^\beta + B\, \delta_\alpha^\beta. \tag{1.18}$$

Также можно сконструировать $SU(n+1)/U(n)$ токи $\{\widetilde{R}_\alpha, \widetilde{\overline{R}}^\alpha\}$, вместе с $\widetilde{J}_\alpha{}^\beta$ образующие алгебру $su(n+1)$ (1.16)

$$\widetilde{R}_\alpha = R_\alpha + \mathrm{i}B\, \bar z_\alpha, \qquad \widetilde{\overline{R}}^\alpha = \overline{R}^\alpha - \mathrm{i}B\, z^\alpha. \tag{1.19}$$

Очевидно, инвариантный гамильтониан можно определить как оператор Казимира (1.17), построенный из генераторов (1.19), (1.18):

$$H_{U(1)} = \widetilde{\bar p}^\alpha\, \left(g^{-1}\right)_\alpha{}^\beta\, \widetilde{p}_\beta + \frac{2n}{n+1}B^2, \tag{1.20}$$

где

$$\left\{\begin{array}{l} \widetilde{p}_\alpha = p_\alpha - \mathrm{i}B\,\frac{\bar{z}_\alpha}{1+z\cdot\bar{z}} \\ \\ \widetilde{\bar{p}}^\alpha = \bar{p}^\alpha + \mathrm{i}B\,\frac{z^\alpha}{1+z\cdot\bar{z}} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\widetilde{p}_\alpha, \widetilde{\bar{p}}^\beta\right\} = -2\mathrm{i}B g_\alpha{}^\beta. \tag{1.21}$$

Гамильтониан (1.20) описывает механику частицы на пространстве $\mathbb{CP}^n$, в присутствии однородного внешнего $U(1)$ магнитного поля.

Также существует возможность ввести осцилляторный потенциал, который, хотя и неминуемо разрушает $SU(n+1)$ до $U(n)$, тем не менее сохраняет точную решаемость и все симметрии $\mathbb{CP}^n$ осциллятора, в том числе скрытые, даже в присутствии постоянного магнитного поля [27].

Более интересный случай взаимодействия с внешним $U(n)$ калибровочным полем может быть рассмотрен по аналогии с абелевым случаем. Токи $u(n)$ $J_\alpha{}^\beta$ (1.15) можно модифицировать, введя дополнительные $u(n)$ токи:

$$\widetilde{J}_\alpha{}^\beta = J_\alpha{}^\beta + \hat{J}_\alpha{}^\beta. \tag{1.22}$$

Скобки $\hat{J}_\alpha{}^\beta$ с координатами и импульсами $\{z^\alpha, \bar{z}_\alpha, p_\alpha, \bar{p}^\alpha\}$ равны нулю, а скобки $\hat{J}_\alpha{}^\beta$ друг с другом воспроизводят алгебру $u(n)$ (1.16):

$$\left\{\hat{J}_\alpha{}^\beta, \hat{J}_\gamma{}^\delta\right\} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\delta_\gamma^\beta\;\hat{J}_\alpha{}^\delta - \delta_\alpha^\delta\;\hat{J}_\gamma{}^\beta\right). \tag{1.23}$$

Теперь можно восстановить токи $\widetilde{R}_\alpha$, $\widetilde{\overline{R}}^\alpha$, образующие, вместе с новыми $u(n)$ токами $\widetilde{J}_\alpha{}^\beta$ (1.22), алгебру $su(n+1)$. После небольших вычислений можно найти, что они имеют вид

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_\alpha &= R_\alpha + \frac{2\mathrm{i}}{\left(1+\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}\right)}\;\hat{J}_\alpha{}^\beta \bar{z}_\beta + \frac{\mathrm{i}}{\left(1+\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}\right)^2}\;\bar{z}_\alpha\; z^\beta \hat{J}_\beta{}^\gamma \bar{z}_\gamma, \\ \widetilde{\overline{R}}^\alpha &= \overline{R}^\alpha - \frac{2\mathrm{i}}{\left(1+\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}\right)}\;z^\beta \hat{J}_\beta{}^\alpha - \frac{\mathrm{i}}{\left(1+\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}\right)^2}\;z^\alpha\; z^\beta \hat{J}_\beta{}^\gamma \bar{z}_\gamma, \\ \widetilde{J}_\alpha{}^\beta &= -\frac{i}{2}\left\{\widetilde{R}_\alpha, \widetilde{\overline{R}}^\beta\right\} = J_\alpha{}^\beta + \hat{J}_\alpha{}^\beta. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Соответствующий гамильтониан снова можно определить как оператор Казимира (1.17), построенный из токов (1.24). В терминах z^α, p_α он имеет вид

$$H_{U(n)} = \widetilde{\bar{p}}^\alpha\;\left(g^{-1}\right)_\alpha{}^\beta\,\widetilde{p}_\beta + 2\;\hat{J}_\alpha{}^\beta\;\hat{J}_\beta{}^\alpha - \frac{2}{n+1}\;\hat{J}_\alpha{}^\alpha\;\hat{J}_\beta{}^\beta, \tag{1.25}$$

где теперь

$$\left\{\begin{array}{l} \widetilde{p}_\alpha = p_\alpha - 2\mathrm{i}\;\omega_\alpha{}^\beta\;\hat{J}_\beta{}^\gamma\;\bar{z}_\gamma \\ \\ \widetilde{\bar{p}}^\alpha = \bar{p}^\alpha + 2\mathrm{i}\;z^\gamma\;\hat{J}_\gamma{}^\beta\;\omega_\beta{}^\alpha \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\widetilde{p}_\alpha, \widetilde{\bar{p}}^\beta\right\} = -2\;\mathrm{i}\;e_\alpha{}^\mu\;e_\nu{}^\beta\;\hat{J}_\mu{}^\nu. \tag{1.26}$$

Тетрады ${e_\alpha}^\beta$ и $U(n)$ связности ${\omega_\alpha}^\beta$ на фактор-пространстве $SU(n+1)/U(n)$ определены формулами (1.8), (1.9) соответственно.

Редукция токов ${\hat{J}_\alpha}^\beta \to B\delta_\alpha^\beta$ приводит к рассмотренной ранее системе с абелевым внешним полем. Также стоит отметить, что гамильтониан (1.25) может быть записан как

$$H_{U(n)} = \widetilde{\bar{p}}^\alpha \, {\left(g^{-1}\right)_\alpha}^\beta \, \widetilde{p}_\beta + 2\, \mathcal{C}_{u(n)}. \tag{1.27}$$

Здесь

$$\mathcal{C}_{U(n)} = {\hat{J}_\alpha}^\beta \, {\hat{J}_\beta}^\alpha - \frac{1}{n+1} \, {\hat{J}_\alpha}^\alpha \, {\hat{J}_\beta}^\beta \tag{1.28}$$

- оператор Казимира алгебры $u(n)$, построенный из токов ${\hat{J}_\beta}^\alpha$. Очевидно, что скобки $\mathcal{C}_{U(n)}$ со всеми $su(n+1)$ токами (1.22), (1.24) равны нулю. Поэтому требованию $SU(n+1)$ симметрии удовлетворяет также гамильтониан

$$H(\gamma) = \widetilde{\bar{p}}^\alpha \, {\left(g^{-1}\right)_\alpha}^\beta \, \widetilde{p}_\beta + \gamma\, \mathcal{C}_{u(n)}, \tag{1.29}$$

где γ - произвольная действительная константа. Для того, чтобы выделить систему с некоторым значением γ на гамильтониан нужно накладывать дополнительные требования. Также систему можно редуцировать, придав оператору $\mathcal{C}_{u(n)}$ фиксированное значение.

Стоит отметить, что природа токов ${\hat{J}_\beta}^\alpha$ для приведенного построения абсолютно не важна. Требуется лишь то, чтобы они образовывали алгебру $u(n)$ (1.23), а скобки их с z^α, p_α, $\bar{z}_\alpha$, $\bar{p}^\alpha$ были равны нулю. Поэтому можно считать, что данные токи могут быть построены либо из дополнительных изоспиновых степеней свободы, либо из новых бозонных координат и сопряженных иимпульсов. В последнем случае можно построить систему, расширяющую стандартую $\mathbb{CP}^n$ механику.

1.1.3. $N=4$ суперсимметрия

В данном подразделе будут рассмотрены $N=4$ суперсимметричные расширения описанных механик на $\mathbb{CP}^n$ с внешними полями или без таковых.

Свободная $N=4$ суперсимметричная $\mathbb{CP}^n$ модель

Чтобы построить $N=4$ суперсимметричную версию $\mathbb{CP}^n$ механики, необходимо ввести $4n$ фермионных переменных $\{\psi_i^\alpha, \bar{\psi}_\alpha^i,\ i=1,2\}$ со скобками Дирака, дополняющими скобки

(1.14):

$$\left\{\psi_i^\alpha, \bar\psi^j_\beta\right\} = \mathrm{i}\delta_i^j \left(g^{-1}\right)_\beta{}^\alpha, \qquad \left\{p_\alpha, \bar p^\beta\right\} = -\mathrm{i}\left(g_\alpha{}^\beta g_\mu{}^\nu + g_\alpha{}^\nu g_\mu{}^\beta\right) \bar\psi^i_\nu \psi_i^\mu,$$
$$\left\{p_\alpha, \psi_i^\beta\right\} = -\tfrac{1}{(1+z\cdot\bar z)}\left[\bar z_\alpha \psi_i^\beta + \delta_\alpha^\beta\, \psi_i^\gamma \bar z_\gamma\right],$$
$$\left\{\bar p^\alpha, \bar\psi^i_\beta\right\} = -\tfrac{1}{(1+z\cdot\bar z)}\left[z^\alpha \bar\psi^i_\beta + \delta_\beta^\alpha\, z^\gamma \bar\psi^i_\gamma\right]. \tag{1.30}$$

Такой выбор скобок объясняется тем, что в соответствующем базисе четыре суперзаряда $Q^i, \overline{Q}_i$ имеют предельно простой вид [18–20]

$$Q^i = \bar p^\alpha\, \bar\psi^i_\alpha, \qquad \overline{Q}_i = \psi_i^\alpha\, p_\alpha. \tag{1.31}$$

Можно проверить, что относительно скобок (1.30), (1.14) суперзаряды $Q^i, \overline{Q}_i$ образуют алгебру $N=4$ суперсимметрии

$$\left\{Q^i, \overline{Q}_j\right\} = \mathrm{i}\delta^i_j H_{sCPn}, \qquad \left\{Q^i, Q^j\right\} = \left\{\overline{Q}_i, \overline{Q}_j\right\} = 0, \tag{1.32}$$

с гамильтонианом

$$H_{sCPn} = \bar p^\alpha\ \left(g^{-1}\right)_\alpha{}^\beta p_\beta + \frac{1}{4}\left(g_\mu{}^\alpha g_\rho{}^\sigma + g_\mu{}^\sigma g_\rho{}^\alpha\right) \bar\psi_{\alpha\, i} \bar\psi^i_\sigma\, \psi^{\rho\, j} \psi_j^\mu. \tag{1.33}$$

$SU(2)$ индекс здесь можно поднимать и опускать с помощью $SU(2)$-инвариантного тензора $\varepsilon_{ij},\ \varepsilon_{ij}\varepsilon^{jk} = \delta_i^k,\ \varepsilon_{12} = \varepsilon^{21} = 1,\ A_i = \varepsilon_{ij}A^j, A^i = \varepsilon^{ij}A_j$.

Стоит отметить, что для $N=4$ суперсимметричной $\mathbb{CP}^n$ механики существует простое суперполевое действие. Чтобы выписать его, требуется ввести $2n$ киральных суперполей $\boldsymbol{z}^\alpha,\ \bar{\boldsymbol{z}}_\alpha$ в суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,4)} = \left\{t, \theta_i, \bar\theta^i\right\}, i = 1, 2$

$$D^i \boldsymbol{z}^\alpha = 0, \quad \overline{D}_i \bar{\boldsymbol{z}}_\alpha = 0, \qquad \alpha = 1 \ldots n. \tag{1.34}$$

с компонентным составом

$$z^\alpha = \boldsymbol{z}^\alpha|, \quad \psi_i^\alpha = \overline{D}_i \boldsymbol{z}^\alpha|_{\theta\to 0}, \quad A^\alpha = \overline{D}^i \overline{D}_i \boldsymbol{z}^\alpha|_{\theta\to 0}, \bar z_\alpha = \bar{\boldsymbol{z}}_\alpha|, \quad \bar\psi^i_\alpha = D^i \bar{\boldsymbol{z}}_\alpha|_{\theta\to 0}, \quad \overline{A}_\alpha = D^i D_i \bar{\boldsymbol{z}}_\alpha|_{\theta\to 0}.$$

Тогда механика с нужным бозонным пределом может быть воспроизведена действием

$$S = \int dt\, d^4\theta\, \ln\left[1 + \boldsymbol{z}^\alpha \bar{\boldsymbol{z}}_\alpha\right]. \tag{1.35}$$

Из него также могут быть получены скобки Дирака (1.30) и гамильтониан (1.33).

Можно заметить, что $SU(n+1)$ инвариантность действия $N=4$ суперсимметричной $\mathbb{CP}^n$ механики достаточно просто установить, оперируя именно суперполями. Пусть $SU(n{+}1)$ преобразования суперполей имеют вид

$$\delta \boldsymbol{z}^\alpha = a^\alpha + \boldsymbol{z}^\alpha\left(\boldsymbol{z}^\beta \bar a_\beta\right), \quad \delta \bar{\boldsymbol{z}}_\alpha = \bar a_\alpha + \bar{\boldsymbol{z}}_\alpha\left(a^\beta \bar{\boldsymbol{z}}_\beta\right). \tag{1.36}$$

Они, очевидно, имеют правильный бозонный предел и совместимы с условиями киральности (1.34). Тогда $\delta(\boldsymbol{z}^\alpha \bar{\boldsymbol{z}}_\alpha) = (1 + \boldsymbol{z}^\alpha \bar{\boldsymbol{z}}_\alpha)(a^\beta \bar{\boldsymbol{z}}_\beta + \bar{a}_\beta \boldsymbol{z}^\beta)$, и вариация суперполевого лагранжиана $\delta \ln\left[1 + \boldsymbol{z}^\alpha \bar{\boldsymbol{z}}_\alpha\right] = a^\beta \bar{\boldsymbol{z}}_\beta + \bar{a}_\beta \boldsymbol{z}^\beta$ пропадает при интегрировании по всему суперпространству.

Токи, скобка которых с гамильтонианом (1.33) равна нулю, и образующие $su(n+1)$ алгебру (1.16), могут быть построены и в суперсимметричном случае:

$$\begin{aligned}
R_\alpha &= p_\alpha + \bar{z}_\alpha \bar{z}_\beta \bar{p}^\beta - \frac{\mathrm{i}}{(1 + z \cdot \bar{z})^2} \left(\bar{z}_\alpha \psi^\beta_i \bar{\psi}^i_\beta + \bar{z}_\beta \psi^\beta_i \bar{\psi}^i_\alpha - \frac{2}{1 + z \cdot \bar{z}} \bar{z}_\alpha \bar{z}_\beta z^\gamma \psi^\beta_i \bar{\psi}^i_\gamma \right), \\
\overline{R}^\alpha &= \bar{p}^\alpha + z^\alpha z^\beta p_\beta + \frac{\mathrm{i}}{(1 + z \cdot \bar{z})^2} \left(z^\alpha \psi^\beta_i \bar{\psi}^i_\beta + z^\beta \psi^\alpha_i \bar{\psi}^i_\beta - \frac{2}{1 + z \cdot \bar{z}} z^\alpha \bar{z}_\beta z^\gamma \psi^\beta_i \bar{\psi}^i_\gamma \right), \\
J_\alpha{}^\beta &= -\frac{\mathrm{i}}{2} \left\{ R_\alpha, \overline{R}^\beta \right\}.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Такой результат ожидаем, с учетом того, что суперсимметричная механика $SU(n+1)$ инвариантна. Несколько менее очевидно, что скобки суперзарядов (1.31) с данными токами также равны нулю,

$$\left\{ R_\alpha, Q^i \right\} = \left\{ \overline{R}^\alpha, Q^i \right\} = 0, \quad \left\{ R_\alpha, \overline{Q}_i \right\} = \left\{ \overline{R}^\alpha, \overline{Q}_i \right\} = 0. \tag{1.38}$$

Другое существенное наблюдение состоит в том, что (1.33) совпадает с оператором Казимира алгебры $su(n+1)$ (1.37):

$$H_{sCPn} = R_\alpha \, \overline{R}^\alpha + 2 J_\alpha{}^\beta \, J_\beta{}^\alpha - \frac{2}{n+1} J_\alpha{}^\alpha \, J_\beta{}^\beta, \tag{1.39}$$

Таким образом, $N = 4$ суперсимметричная $\mathbb{CP}^n$ механика обладает теми же основными симметриями, что и ее бозонная основа. Существенное отличие состоит в том, что в суперсимметричной системе токи $su(n+1)$ (1.37) содержат также и фермионные степени свободы.

$N = 4$ суперсимметричная $\mathbb{CP}^n$ модель с $U(n)$ магнитным полем

Ввести взаимодействие с калибровочными полями в $\mathbb{CP}^n$ механику, сохранив $N = 4$ суперсимметрию, можно, если использовать набор токов $\{\mathcal{R}_\alpha, \overline{\mathcal{R}}^\alpha, \mathcal{J}_\alpha{}^\beta\}$, образующих алгебру $su(1,n)$ [24]:

$$\begin{aligned}
&\left\{ \mathcal{R}_\alpha, \overline{\mathcal{R}}^\beta \right\} = -2\mathrm{i} \mathcal{J}_\alpha{}^\beta, \qquad \left\{ \mathcal{J}_\alpha{}^\beta, \mathcal{J}_\gamma{}^\delta \right\} = \frac{\mathrm{i}}{2} \left(\delta^\beta_\gamma \, \mathcal{J}_\alpha{}^\delta - \delta^\delta_\alpha \, \mathcal{J}_\gamma{}^\beta \right), \\
&\left\{ \mathcal{J}_\alpha{}^\beta, \mathcal{R}_\gamma \right\} = \frac{\mathrm{i}}{2} \left(\delta^\beta_\gamma \, \mathcal{R}_\alpha + \delta^\beta_\alpha \, \mathcal{R}_\gamma \right), \quad \left\{ \mathcal{J}_\alpha{}^\beta, \overline{\mathcal{R}}^\gamma \right\} = -\frac{\mathrm{i}}{2} \left(\delta^\gamma_\alpha \, \overline{\mathcal{R}}^\beta + \delta^\beta_\alpha \, \overline{\mathcal{R}}^\gamma \right).
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Чтобы определить суперзаряды данной механики, достаточно потребовать, чтобы они образовывали $N = 4$ супералгебру Пуанкаре (1.32). Данные суперзаряды были найдены в работе [24]:

$$\mathcal{Q}^i = \bar{p}^\alpha \bar{\psi}^i_\alpha + 2\mathrm{i}\; z^\gamma \mathcal{J}_\gamma{}^\beta \omega_\beta{}^\alpha \bar{\psi}^i_\alpha + \mathrm{i}\, \psi^{i\,\alpha} e_\alpha{}^\beta \mathcal{R}_\beta, \quad \overline{\mathcal{Q}}_i = \psi^\alpha_i p_\alpha - 2\mathrm{i}\, \psi^\alpha_i \omega_\alpha{}^\beta \mathcal{J}_\beta{}^\gamma \bar{z}_\gamma + \mathrm{i}\, \overline{\mathcal{R}}^\beta e_\beta{}^\alpha \bar{\psi}_{i\,\alpha}. \tag{1.41}$$

Здесь ${e_\alpha}^\beta$ и ${\omega_\alpha}^\beta$ - тетрада и $U(n)$-связность на пространстве $\mathbb{CP}^n \sim SU(n+1)/U(n)$, определенные формулами (1.8) и (1.9) соответственно.

Суперзаряды (1.41) действительно образуют $N=4$, $d=1$ суперcharacterалгебру Пуанкаре относительно скобки Дирака:

$$\begin{aligned} & \left\{\mathcal{Q}^i, \mathcal{Q}^j\right\} = 0, \quad \left\{\overline{\mathcal{Q}}_i, \overline{\mathcal{Q}}_j\right\} = 0, \quad \left\{\mathcal{Q}^i, \overline{\mathcal{Q}}_j\right\} = \mathrm{i}\mathcal{H}, \\ \mathcal{H} \;\; = \;\; & \left(\bar{p}\, g^{-1}\, p\right) - 2\mathrm{i}\left[\left(\bar{p}\, g^{-1}\, \omega\, \mathcal{J} \bar{z}\right) - \left(z\, \mathcal{J}\, \omega\, g^{-1}\, p\right)\right] + \left(\overline{\mathcal{R}}\, \mathcal{R}\right) + \\ & +4\left(z\, \mathcal{J}\, \omega\, g^{-1}\, \omega\, \mathcal{J}\, \bar{z}\right) - 2\, \left(\psi_i\, e\, \mathcal{J}\, e\, \bar{\psi}^i\right) + \frac{1}{4}\, \left({g_\mu}^\alpha {g_\rho}^\sigma + {g_\mu}^\sigma {g_\rho}^\alpha\right) \bar{\psi}_{\alpha\, i} \bar{\psi}^i_\sigma\, \psi^{\rho\, j} \psi^\mu_j . \end{aligned} \qquad (1.42)$$

Одним из наиболее необычных свойств данной механики является то, что для введения взаимодействия с $u(n)$ токами потребовалось дополнять суперзаряды (1.41) и гамильтониан (1.42) токами, образующими $su(1,n)$ алгебру (1.40). Если предположить, что получившийся гамильтониан является $su(n+1)$ инвариантным, скобки соответствующих $su(n+1)$ токов с суперзарядами должны быть равны нулю. (Как имеет место без внешнего магнитного поля.) Эти новые токи, помимо бозонных и фермионных степеней свободы $\mathbb{CP}^n$ механики, могут содержать только $u(n)$ токи ${\mathcal{J}_\alpha}^\beta$. Построить $su(n+1)$ токи, используя координаты, импульсы и полный $su(1,n)$ набор токов, включая $\{\mathcal{R}_\alpha, \overline{\mathcal{R}}^\beta\}$, оказывается попросту невозможно. Поэтому гамильтониан (1.42) не может быть оператором Казимира какой-либо алгебры $su(n+1)$ и должен иметь более сложную структуру. Чтобы понять природу (1.42), можно переписать слагаемое $\overline{\mathcal{R}}\mathcal{R}$ в (1.42) через оператор Казимира $su(1,n)$ $\mathcal{C}_{su(1,n)}$:

$$\overline{\mathcal{R}}^\alpha\, \mathcal{R}_\alpha = \mathcal{C}_{su(1,n)} + \left(2{\mathcal{J}_\alpha}^\beta\; {\mathcal{J}_\beta}^\alpha - \frac{2}{n+1}{\mathcal{J}_\alpha}^\alpha\; {\mathcal{J}_\beta}^\beta\right), \qquad (1.43)$$

$$\mathcal{C}_{su(1,n)} = \overline{\mathcal{R}}^\alpha\, \mathcal{R}_\alpha - 2{\mathcal{J}_\alpha}^\beta\; {\mathcal{J}_\beta}^\alpha + \frac{2}{n+1}{\mathcal{J}_\alpha}^\alpha\; {\mathcal{J}_\beta}^\beta. \qquad (1.44)$$

Таким образом, генераторы $\{\mathcal{R}_\alpha, \overline{\mathcal{R}}^\beta\}$, принадлежащие в фактор-пространству $SU(1,n)/U(n)$, входят в гамильтониан только через оператор $\mathcal{C}_{su(1,n)}$. Все прочие слагаемые содержат только $u(n)$ токи ${\mathcal{J}_\alpha}^\beta$. Поэтому можно ожидать, что гамильтониан (1.42) является суммой двух операторов Казимира

$$\mathcal{H} = \widetilde{\mathcal{C}}_{su(n+1)}\left(z, p, \psi, \mathcal{J}\right) + \mathcal{C}_{su(1,n)}, \qquad (1.45)$$

где $\widetilde{\mathcal{C}}_{su(n+1)}\left(z, p, \psi, \mathcal{J}\right)$ должен быть построен только из координат, импульсов и $u(n)$ токов ${\mathcal{J}_\alpha}^\beta$.

Найти $su(n+1)$ токи, скобки которых с суперзарядами (1.41) равны нулю, помогает следующее наблюдение. Единственная возможность построить нужные токи подалгебры $u(n)$

- взять прямую сумму генераторов

$$\widetilde{J}_\alpha{}^\beta = J_\alpha{}^\beta + \mathcal{J}_\alpha{}^\beta. \tag{1.46}$$

Ток $J_\alpha{}^\beta$ здесь тот же, что и в суперсимметричном случае без магнитного поля (1.37). Структура генераторов из фактор-пространства $SU(n+1)/U(n)$ сложнее. Чтобы найти их, можно построить наиболее общий анзац, удовлетворяющий условию $U(n)$ симметрии

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_\alpha &= R_\alpha + \mathrm{i}\, f_1\, \mathcal{J}_\alpha{}^\beta \bar{z}_\beta + \mathrm{i}\, f_2\, \bar{z}_\alpha\, z^\beta \mathcal{J}_\beta{}^\gamma \bar{z}_\gamma + \mathrm{i}\, f_3\, \bar{z}_\alpha \mathcal{J}_\beta{}^\beta, \\ \overline{\widetilde{R}}{}^\alpha &= \overline{R}{}^\alpha - \mathrm{i}\, f_1\, z^\beta \mathcal{J}_\beta{}^\alpha - \mathrm{i}\, f_2\, z^\alpha\, z^\beta \mathcal{J}_\beta{}^\gamma \bar{z}_\gamma - \mathrm{i}\, f_3\, z^\alpha \mathcal{J}_\beta{}^\beta. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Входящие в эту формулу токи $\{R_\alpha, \overline{R}{}^\alpha\}$ определены в (1.37), а произвольные функции f_1, f_2, f_3 зависят только от $(z \cdot \bar{z})$.

Потребовав, чтобы токи (1.47) удовлетворяли соотношению $su(n+1)$ алгебры $\left\{\widetilde{R}_\alpha, \overline{\widetilde{R}}{}^\beta\right\} = 2\mathrm{i}\widetilde{J}_\alpha{}^\beta$, можно найти, что

$$f_1 = \frac{2}{\left(1+\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}\right)}, \quad f_2 = \frac{1}{\left(1+\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}\right)^2}, \quad f_3 = 0. \tag{1.48}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_\alpha &= R_\alpha + \frac{2\mathrm{i}}{\left(1+\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}\right)}\, \mathcal{J}_\alpha{}^\beta \bar{z}_\beta + \frac{\mathrm{i}}{\left(1+\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}\right)^2}\, \bar{z}_\alpha\, z^\beta \mathcal{J}_\beta{}^\gamma \bar{z}_\gamma, \\ \overline{\widetilde{R}}{}^\alpha &= \overline{R}{}^\alpha - \frac{2\mathrm{i}}{\left(1+\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}\right)}\, z^\beta \mathcal{J}_\beta{}^\alpha - \frac{\mathrm{i}}{\left(1+\sqrt{1+z\cdot\bar{z}}\right)^2}\, z^\alpha\, z^\beta \mathcal{J}_\beta{}^\gamma \bar{z}_\gamma, \\ \widetilde{J}_\alpha{}^\beta &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\left\{\widetilde{R}_\alpha, \overline{\widetilde{R}}{}^\beta\right\} = J_\alpha{}^\beta + \mathcal{J}_\alpha{}^\beta. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Скобки генераторов (1.49) с суперзарядами $\{\mathcal{Q}^i, \overline{\mathcal{Q}}_i\}$ и гамильтонианом (1.42) равны нулю, причем (1.42) имеет предсказанную структуру (1.45). Таким образом, $N = 4$ суперсимметричная $\mathbb{CP}^n$ механика в присутствии внешних $U(n)$ полей обладает $SU(n+1)$ симметрией, генерируемой токами (1.49). Как и в бозонном случае, структура $su(1,n)$ токов $\{\mathcal{R}_\alpha, \overline{\mathcal{R}}{}^\alpha, \mathcal{J}_\alpha{}^\beta\}$ (1.40) не сказывается на всех приведенных построениях. Поскольку скобка оператора Казимира $\mathcal{C}_{su(1,n)}$ со всеми рассматриваемыми величинами равна нулю, можно также редуцировать систему, придав $\mathcal{C}_{su(1,n)}$ фиксированное значение.

1.1.4. Выводы

Построение и доказательство $SU(n+1)$ инвариантности $N = 4$ суперсимметричной механики частицы на пространстве $\mathbb{CP}^n$ во внешнем $U(n)$ калибровочном поле [24] открывает возможность использования этой модели для анализа роли суперсимметрии в квантовом эффекте Холла на пространстве $\mathbb{CP}^n$. Это - одно из наиболее интересных приложений полученных результатов.

Стоит также заметить, что в данном исследовании использовалась интерпретация $\mathbb{CP}^n$ как фактор-пространства $SU(n+1)/U(n)$, что позволяло относительно просто и наглядно описывать $SU(n+1)$ симметрию соответствующей σ-модели. Однако в частных случаях существуют и другие представления. В частности, $\mathbb{CP}^{2k+1}$ может быть интерпретирована как фактор - пространство $Sp(k+1)/U(1)\times Sp(k)$ [28], что открывает возможность ввести $U(1)\times Sp(k)$ неабелевы внешние поля и рассмотреть соответствующие суперсимметричные расширения. Также представляет интерес исследование квантового эффекта Холла на пространстве $\mathbb{CP}^{2k+1}$ в присутствии неабелевых $U(1)\times Sp(k)$ внешних полей.

Результаты, описанные в данном разделе, были опубликованы в работе [29].

1.2. Суперсимметричные механики на расслоениях $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{CP}^3 \to \mathbb{S}^4$, $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{CP}^{2n+1} \to \mathbb{HP}^n$

1.2.1. Введение

Механика частицы, движущейся по многообразию M, может обладать дополнительными особенностями, отражающими специфические свойства M. Так, если M допускает расслоение, $F \to M \to B$, где M расслаивается над базой B со слоями F, можно ввести специальную систему координат, которая будет описывать M в терминах координат на многообразиях B и F. В кинетической энергии частицы, рассматриваемой в этой системе координат, можно выделить части, описываемые координатами на только на базе и только на слое. Если расслоение нетривиально (т.е. пространство M не является произведением базы и слоя), то появляются дополнительные слагаемые. Они пропорциональны скоростям и, следовательно, описывают взаимодействие с некоторым, возможно неабелевым, магнитным полем.

Среди механик на пространствах, допускающих расслоение, известна механика на $\mathbb{CP}^3$. Расслоение имеет вид $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{CP}^3 \to \mathbb{S}^4$, где $\mathbb{CP}^3$ - расслоенное пространство, $\mathbb{S}^4$ - база и $\mathbb{S}^2$ - слой. Данная механика допускает гамильтонову редукцию: в гамильтоновом формализме импульсы, сопряженные координатам на $\mathbb{S}^2$, входят в гамильтониан только через комбинации (токи), образующие $su(2)$ алгебру относительно скобки Пуассона. Таким образом, возможно редуцировать механику на $\mathbb{CP}^3$, либо объявив оператор Казимира, построенный из этих токов, константой, либо положив $su(2)$ токи равными нулю [28], причем последний способ приводит к механике свободной частицы на $\mathbb{S}^4$. Данный раздел посвящен построению такой $N = 2$ суперсимметричной версии данной механики, которая будет допускать аналогичную гамильтонову редукцию, а также обобщению данного построения на случай расслоения $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{CP}^{2k+1} \to \mathbb{HP}^k$ и механик на кватернионных проективных пространствах $\mathbb{HP}^n$ с $SU(2)$ магнитным полем.

Принятое решение ограничиться рассмотрением $N = 2$ суперсимметричных механик связано с тем, что $N = 4$ суперсимметричные механики на пространствах $\mathbb{HP}^n$ нам не известны, и, по-видимому, не существуют из-за отсутствия у $\mathbb{HP}^n$ необходимой комплексной структуры. Поэтому имеет смысл ограничиться $N = 2$ суперсимметрией и при построении редуцируемой суперсимметричной механики и на $\mathbb{CP}^3$, являющейся основой будущих обобщений, хотя $N = 4$ суперсимметричная механика на $\mathbb{S}^4$ известна [30, 31].

Бозонная механика на расслоении $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{CP}^3 \to \mathbb{HP}^1$ и ее гамильтонова редукция были рассмотрены в работе [28], и имеет смысл кратко изложить эти построения.

Лагранжиан частицы на $\mathbb{CP}^3$, записанный в стандартных стереографических координатах, имеет вид

$$\mathcal{L}_{CP3} = g^{\alpha}{}_{\beta} \dot{z}^{\beta} \dot{\bar{z}}_{\alpha}, \qquad g^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{\delta^{\alpha}{}_{\beta}}{1 + z^{\gamma}\bar{z}_{\gamma}} - \frac{z^{\alpha}\bar{z}_{\beta}}{\left(1 + z^{\gamma}\bar{z}_{\gamma}\right)^2}, \tag{1.50}$$

где $g^{\alpha}{}_{\beta}$ - метрика Фубини-Штуди на $\mathbb{CP}^3$. Любая из координат z^{α} задает карту на комполексном многообразии $\mathbb{S}^2$; пусть таковой является $z_3 \equiv u$. Тогда, если ввести координаты w_a, $\bar{w}^a$ с помощью соотношений

$$\begin{aligned} z^1 &= \bar{w}^1 - \bar{u}\, w_2, \qquad & z^2 &= -\bar{w}^2 - \bar{u}\, w_1, \\ \bar{z}_1 &= w_1 - u\, \bar{w}^2, \qquad & \bar{z}_2 &= -w_2 - u\, \bar{w}^1, \end{aligned} \tag{1.51}$$

то бозонный лагранжиан (1.50) в терминах w_a, $\bar{w}^a$, u, $\bar{u}$ примет вид

$$\mathcal{L}_{CP3} = \frac{\dot{w}_a \dot{\bar{w}}^a}{\left(1 + w \cdot \bar{w}\right)^2} + \frac{\left(\dot{u} - \mathcal{A}\right)\left(\dot{\bar{u}} - \bar{\mathcal{A}}\right)}{\left(1 + u\bar{u}\right)^2}, \tag{1.52}$$

где

$$\mathcal{A} = \frac{w_a \dot{w}^a - u\left(w_a \dot{\bar{w}}^a - \dot{w}_a \bar{w}^a\right) + u^2 \bar{w}_a \dot{\bar{w}}^a}{1 + w \cdot \bar{w}}. \tag{1.53}$$

Соответствующий канонический гамильтониан,

$$\mathcal{H}_{CP3} = \left(1 + w \cdot \bar{w}\right)^2 P^a \overline{P}_a + \left(T\overline{T} - U^2\right), \tag{1.54}$$

где

$$P^a = p^a + \frac{U\, \bar{w}^a - T\, w^a}{1 + w \cdot \bar{w}}, \qquad \overline{P}_a = \bar{p}_a - \frac{U\, w_a - \overline{T}\, \bar{w}_a}{1 + w \cdot \bar{w}} \tag{1.55}$$

и

$$T = p_u + \bar{u}^2 \bar{p}_u, \qquad \overline{T} = \bar{p}_u + u^2 p_u, \qquad U = u p_u - \bar{u}\bar{p}_u, \tag{1.56}$$

обладает интересным свойством: координаты $\{u, \bar{u}\}$ и сопряженные импульсы $\{p_u, \bar{p}_u\}$ входят в гамильтониан только через токи $T, \overline{T}$ и U. Относительно стандартных скобок Пуассона

$$\{w_a, p^b\} = \delta_a^b, \qquad \{\bar{w}^b, \bar{p}_a\} = \delta_a^b, \qquad \{u, p_u\} = 1, \qquad \{\bar{u}, \bar{p}_u\} = 1 \tag{1.57}$$

эти токи образуют алгебру $su(2)$

$$\{U,\ T\} = T, \qquad \{U,\ \overline{T}\} = -\overline{T}, \qquad \{T, \overline{T}\} = -2U. \tag{1.58}$$

Хотя данная алгебра $su(2)$ не задает симметрию системы, скобка соответствующего оператора Казимира

$$\mathcal{C}_{su(2)} = T\overline{T} - U^2 \tag{1.59}$$

с гамильтонианом (1.54) равна нулю, и поэтому $\mathcal{C}_{su(2)}$ может считаться константой m.

Другая возможность состоит в том, чтобы одновременно положить T, $\overline{T}$, U равными нулю. Скобки T, $\overline{T}$, U друг с другом и с гамильтонианом (1.54) хотя и не равны нулю, но снова порождают величины, пропорциональные T, $\overline{T}$, U, и поэтому осуществить самосогласованную редукцию $\{T,\ \overline{T},\ U\} \to 0$ возможно. В результате получится гамильтониан частицы на сфере $\mathbb{S}^4$.

Стоит отметить, что в работе [28] неявно использовалось важное свойство представлений $\mathbb{CP}^3$ как фактор-пространства: наряду с часто используемым представлением из ряда $\mathbb{CP}^k \sim SU(k+1)/U(k)$ также имеет место представление $\mathbb{CP}^3 \sim SO(5)/U(2)$. Такое представление и позволяет найти способ переписать стандартные комплексные координаты на $\mathbb{CP}^3$ $\{z^\alpha, \bar{z}_\alpha \,|\, \alpha = 1, 2, 3\}$, преобразующиеся по фундаментальному представлению $SU(3)$, через координаты $\{w_a, \bar{w}^a \,|\, a = 1, 2\}$ и $\{u, \bar{u}\}$, образующие соответственно дублет и синглет $SU(2)$, и описывающие $\mathbb{S}^4$ и $\mathbb{S}^2$.

Чтобы $N{=}2$ суперсимметричное расширение механики на $\mathbb{CP}^3$ допускало гамильтонову редукцию без нарушения суперсимметрии, координаты $\mathbb{S}^2$ и сопряженные импульсы должны входить в суперзаряды (и, следовательно, гамильтониан) только через $su(2)$ токи (1.56). Поиск системы с такими суперзарядами лучше начать с $N{=}2$ суперсимметричной механики, не осложненной дополнительными степенями свободы, т.е. с механики на $\mathbb{S}^2$.

1.2.2. N=2 суперсимметричная механика на сфере $\mathbb{S}^2$

Стандартный подход

В стандартном описании N=2 суперсимметричной механики на $\mathbb{S}^2$ используются киральные суперполя. В компонентном гамильтоновом формализме данная механика описывается бозонными координатами $\{u, \bar{u}\}$, сопряженными им импульсами $\{p_u, \bar{p}_u\}$, а также фермионами $\{\xi, \bar{\xi}\}$ со скобками Дирака

$$\left\{\xi, \bar{\xi}\right\} = \mathrm{i}. \tag{1.60}$$

Тогда несложно проверить, что суперзаряды

$$Q_{chS^2} = (1+u\bar{u})\, p_u \bar{\xi}, \qquad \overline{Q}_{chS^2} = (1+u\bar{u})\, \bar{p}_u \xi, \tag{1.61}$$

образуют N=2, $d=1$ супералгебру Пуанкаре

$$\{Q_{chS^2}, Q_{chS^2}\} = \left\{\overline{Q}_{chS^2}, \overline{Q}_{chS^2}\right\} = 0, \qquad \left\{Q_{chS^2}, \overline{Q}_{chS^2}\right\} = \mathrm{i} H_{chS^2} \tag{1.62}$$

с гамильтонианом

$$H_{chS^2} = (1+u\bar{u})^2 \Big(p_u - \mathrm{i}\frac{\bar{u}\xi\bar{\xi}}{1+u\bar{u}}\Big)\Big(\bar{p}_u + \mathrm{i}\frac{u\xi\bar{\xi}}{1+u\bar{u}}\Big). \tag{1.63}$$

Также можно проверить, что скобка суперзарядов (1.61) и гамильтониана (1.63) с $su(2)$ генераторами

$$\tilde{T} = p_u + \bar{u}^2 \bar{p}_u + \mathrm{i}\bar{u}\xi\bar{\xi}, \qquad \tilde{\overline{T}} = \bar{p}_u + u^2 p_u - \mathrm{i}u\xi\bar{\xi}, \qquad \tilde{U} = u p_u - \bar{u}\bar{p}_u - \mathrm{i}\xi\bar{\xi} \tag{1.64}$$

равна нулю, и, более того, гамильтониан оказывается оператором Казимира алгебры $su(2)$, построенной из этих генераторов:

$$H_{chS^2} = \tilde{\mathcal{C}}_{su(2)} = \tilde{T}\tilde{\overline{T}} - \tilde{U}^2. \tag{1.65}$$

Очевидно, что суперзаряды (1.61) не могут быть записаны в терминах только $su(2)$ токов (1.64). Таким образом, стандартная N=2 суперсимметричная механика на $\mathbb{S}^2$ не может быть частью редуцируемой нужным образом механики на $\mathbb{CP}^3$.

Расширенная механика

Подходящий, и, по-видимому, единственный, способ построить N=2 суперсимметричную механику на $\mathbb{S}^2$ с требуемыми свойствами состоит в рассмотрении большего числа фермионных координат. Так, если дополнить пару фермионных координат $\{\xi, \bar{\xi}\}$ еще двумя $\{\eta, \bar{\eta}\}$ со скобками

$$\{\eta, \bar{\eta}\} = \mathrm{i}, \tag{1.66}$$

то можно проверить, что суперзаряды

$$Q_{S^2} = T\bar{\xi} + U\eta - \mathrm{i}\eta\xi\bar{\xi}, \qquad \overline{Q}_{S^2} = \overline{T}\xi - U\bar{\eta} + \mathrm{i}\bar{\eta}\xi\bar{\xi}, \tag{1.67}$$

построенные из бозонных токов (1.56), также образуют $N{=}2$, $d = 1$ супералгебру Пуанкаре (1.62), но уже с другим гамильтонианом

$$\left\{Q_{S^2}, \overline{Q}_{S^2}\right\} = \mathrm{i}H_{S^2}, \quad H_{S^2} = \mathcal{C}_{su(2)} = T\,\overline{T} - U^2 = (1 + u\bar{u})^2\, p_u \bar{p}_u, \tag{1.68}$$

не содержащим фермионов вовсе. Именно такая механика и требуется для дальнейших построений.

Можно заметить, что (1.68) совпадает с гамильтонианом $N{=}4$ суперсимметричной механики на $\mathbb{S}^2$, построенной с помощью нелинейного кирального мультиплета [32, 33]. Данное сходство не случайно: можно указать два дополнительных суперзаряда

$$S_{S^2} = T\bar{\eta} - U\xi + \mathrm{i}\xi\eta\bar{\eta}, \qquad \overline{S}_{S^2} = \overline{T}\eta + U\bar{\xi} - \mathrm{i}\bar{\xi}\eta\bar{\eta}, \tag{1.69}$$

которые образуют $N{=}2$ супералгебру Пуанкаре

$$\left\{S_{S^2}, \overline{S}_{S^2}\right\} = \mathrm{i}H_{S^2}, \quad H_{S^2} = \mathcal{C}_{su(2)} = T\,\overline{T} - U^2. \tag{1.70}$$

Поскольку скобки S_{S^2}, $\overline{S}_{S^2}$ с Q_{S^2} и $\overline{Q}_{S^2}$ в (1.67) равны нулю, вместе они образуют $N{=}4$, $d = 1$ супералгебру Пуанкаре. Таким образом, данная расширенная механика - уже известная $N{=}4$ суперсимметричная механика на $\mathbb{S}^2$ [32, 33], лишь сформулированная с помощью общих бозонных $N{=}2$ суперполей.

1.2.3. Новая $N{=}2$ суперсимметричная механика на $\mathbb{CP}^3$

Для того, чтобы построить суперсимметричную механику на $\mathbb{CP}^3$, предварительно необходимо сформулировать механику на $\mathbb{S}^4$. Поскольку к ней не предъявляется дополнительных требований, достаточно использовать обычную киральную механику на $\mathbb{S}^4$, описываемую бозонными компонентами $\{w_a,\, \bar{w}^a\}$, сопряженными импульсами $\{p^a,\, \bar{p}_a\}$ и фермионами $\{\psi_a, \bar{\psi}^a = (\psi_a)^\dagger\}$ со скобками

$$\left\{w_a, p^b\right\} = \delta_a^b, \quad \left\{\bar{w}^b, \bar{p}_a\right\} = \delta_a^b, \quad \left\{\psi_a, \bar{\psi}^b\right\} = \mathrm{i}\delta_a^b, \quad (\psi_a)^\dagger = \bar{\psi}^a. \tag{1.71}$$

(здесь $a, b, \ldots = 1, 2$.)

Суперзаряды, воспроизводящие необходимую механику на $\mathbb{S}^4$, имеют вид

$$Q_{S^4} = (1 + w\cdot\bar{w})\, p^a\psi_a - \mathrm{i}\, \psi_a\bar{w}^a\, \psi_b\bar{\psi}^b, \quad \overline{Q}_{S^4} = (1 + w\cdot\bar{w})\, \bar{p}_a\bar{\psi}^a + \mathrm{i}\, w_a\bar{\psi}^a\, \psi_b\bar{\psi}^b \tag{1.72}$$

Первое слагаемое в них определяется необходимостью обеспечить нужный бозонный предел гамильтониана, второе - замкнутостью алгебры.

Тогда можно выписать суперзаряды, образующие $N=2$, $d=1$ суперaлгебру Пуанкаре

$$\left\{Q_{CP^3},Q_{CP^3}\right\}=\left\{\overline{Q}_{CP^3},\overline{Q}_{CP^3}\right\}=0,\qquad \left\{Q_{CP^3},\overline{Q}_{CP^3}\right\}=\mathrm{i}H_{CP^3} \tag{1.73}$$

и способные воспроизвести гамильтониан с нужным бозонным пределом (1.54). Они имеют вид

$$\begin{aligned} Q_{CP^3} &= (1+w\cdot\bar{w})\,P^a\psi_a-\mathrm{i}\,\psi_a\bar{w}^a\,\psi_b\bar{\psi}^b+\alpha\left(T\bar{\xi}+U\eta-\mathrm{i}\,\eta\,\xi\bar{\xi}\right)+\\ &\quad +\mathrm{i}\psi_a w^a\eta\xi-\tfrac{\mathrm{i}}{\alpha}\psi_a\psi^a\xi-\mathrm{i}\psi_a\bar{w}^a\xi\bar{\xi}, \qquad (1.74)\\ \overline{Q}_{CP^3} &= (1+w\cdot\bar{w})\,\overline{P}_a\bar{\psi}^a+\mathrm{i}\,w_a\bar{\psi}^a\,\psi_b\bar{\psi}^b+\alpha\left(\overline{T}\xi-U\bar{\eta}+\mathrm{i}\,\bar{\eta}\,\xi\bar{\xi}\right)-\\ &\quad -\mathrm{i}\bar{w}_a\bar{\psi}^a\bar{\eta}\bar{\xi}-\tfrac{\mathrm{i}}{\alpha}\bar{\psi}_a\bar{\psi}^a\bar{\xi}+\mathrm{i}w_a\bar{\psi}^a\xi\bar{\xi}, \qquad (1.75) \end{aligned}$$

где модифицированные импульсы $\{P^a,\overline{P}_a\}$ определены соотношениями (1.55), и α - действительный параметр.

Гамильтониан в алгебре (1.73) с учетом всех фермионных слагаемых имеет вид

$$\begin{aligned} H_{CP^3} &= (1+w\cdot\bar{w})^2\left(P^a-\mathrm{i}A^a\right)\left(\overline{P}_a+\mathrm{i}\overline{A}_a\right)+\\ &\quad +\alpha^2\left(T+\tfrac{\mathrm{i}}{\alpha}B\right)\left(\overline{T}-\tfrac{\mathrm{i}}{\alpha}\overline{B}\right)-\alpha^2\left(U+\tfrac{\mathrm{i}}{2\alpha^2}B_u\right)^2+H_{4f}. \qquad (1.76) \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} A^a &= \frac{1}{1+w\cdot\bar{w}}\left(\tfrac{2}{\alpha}\psi^a\xi+w^a\xi\eta+\bar{w}^a(\xi\bar{\xi}+\psi_b\bar{\psi}^b)-2\bar{w}^b\psi_b\bar{\psi}^a\right),\\ \overline{A}_a &= \frac{1}{1+w\cdot\bar{w}}\left(\tfrac{2}{\alpha}\bar{\psi}_a\bar{\xi}+\bar{w}_a\bar{\xi}\bar{\eta}+w_a(\xi\bar{\xi}+\psi_b\bar{\psi}^b)+2w_b\bar{\psi}^b\psi_a\right),\\ B &= \bar{w}^a\bar{\psi}_a\eta,\qquad \overline{B}=w_a\psi^a\bar{\eta},\qquad B_u=2\psi_a\bar{\psi}^a-\alpha w_a\psi^a\xi-\alpha\bar{w}^a\bar{\psi}_a\bar{\xi}, \qquad (1.77) \end{aligned}$$

а четырехфермионный член имеет вид

$$\begin{aligned} H_{4f} &= \left(\alpha w_a\psi^a\xi+\alpha\bar{w}^a\bar{\psi}_a\bar{\xi}+2w_a\bar{w}^a\psi_b\bar{\psi}^b-2\bar{w}^a\psi_a w_b\bar{\psi}^b\right)\eta\bar{\eta}+\\ &\quad \left(\tfrac{3}{2}\bar{w}^a\psi_a w_b\bar{\psi}^b-\tfrac{3}{2}w_a\bar{w}^a\psi_b\bar{\psi}^b-2\psi_a\bar{\psi}^a\right)\xi\bar{\xi}+ \qquad (1.78)\\ &\quad \left(-\xi\bar{\eta}-\tfrac{3}{2\alpha}w_b\bar{\psi}^b\xi+\tfrac{1}{\alpha}\bar{w}^b\bar{\psi}_b\bar{\eta}\right)\psi_a\psi^a+\left(\bar{\xi}\eta+\tfrac{3}{2\alpha}\bar{w}^b\psi_b\bar{\xi}+\tfrac{1}{\alpha}w_b\psi^b\eta\right)\bar{\psi}^a\bar{\psi}_a+\\ &\quad +\tfrac{1}{\alpha^2}(1-2\alpha^2+\alpha^2 w\cdot\bar{w})\,\psi_a\bar{\psi}^a\,\psi_b\bar{\psi}^b. \end{aligned}$$

Бозонная часть гамильтониана H (1.76)

$$H_{bos}=(1+w\cdot\bar{w})^2\,P^a\overline{P}_a+\alpha^2\left(T\overline{T}-U^2\right) \tag{1.79}$$

совпадает с собственно гамильтонианом на $\mathbb{CP}^3$ и оператором Казимира $\mathcal{C}_{su(4)}$ при $\alpha = 1$. Значение $\alpha{=}\sqrt{2}$ соответствует оператору Казимира $so(5)$.

Можно предположить, что редукция данной системы, по аналогии с бозонным случаем, имеет вид

$$\left\{T, \overline{T}, U, \eta, \bar{\eta}, \xi, \bar{\xi}\right\} \;\rightarrow\; 0 \tag{1.80}$$

Такая редукция приводит к суперзарядам

$$Q_{red} = (1 + w \cdot \bar{w})\, p^a \psi_a - \mathrm{i}\, \psi_a \bar{w}^a\, \psi_b \bar{\psi}^b, \qquad \overline{Q}_{red} = (1 + w \cdot \bar{w})\, \bar{p}_a \bar{\psi}^a + \mathrm{i}\, w_a \bar{\psi}^a\, \psi_b \bar{\psi}^b, \tag{1.81}$$

в точности совпадающими с суперзарядами механики на сфере $\mathbb{S}^4$ (1.72). Редуцированный тем же условием гамильтониан

$$H_{red} = (1 + w \cdot \bar{w})^2 \left(p^a_w - \mathrm{i}\hat{A}^a\right) \left(\overline{p}_{wa} + \mathrm{i}\hat{\overline{A}}_a\right) + (-2 + w \cdot \bar{w})\; \psi_a \bar{\psi}^a\, \psi_b \bar{\psi}^b, \tag{1.82}$$

где

$$\hat{A}^a = \frac{1}{1 + w \cdot \bar{w}} \left(\bar{w}^a \psi_b \bar{\psi}^b - 2\bar{w}^b \psi_b \bar{\psi}^a\right), \qquad \hat{\overline{A}}_a = \frac{1}{1 + w \cdot \bar{w}} \left(w_a \psi_b \bar{\psi}^b + 2 w_b \bar{\psi}^b \psi_a\right), \tag{1.83}$$

удовлетворяет соотношению $\left\{Q_{red}, \overline{Q}_{red}\right\} = \mathrm{i} H_{red}$. Таким образом, редукция (1.80) приводит к $N{=}2$ суперсимметричной механике на сфере $\mathbb{S}^4$.

1.2.4. Суперполевое описание

Компонентный лагранжиан

Перед тем, как строить суперполевое действие, полезно восстановить компонентный лагранжиан из гамильтониана (1.76) при $\alpha{=}1$. Для этого необходимо осуществить преобразование Лежандра бозонных переменных и добавить кинетические члены фермионов, приводящие к принятым ранее скобкам Дирака (1.60), (1.66) и (1.71). Получающийся лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} L = \frac{\dot{w}_a \dot{\bar{w}}^a}{(1 + w \cdot \bar{w})^2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\dot{\psi}_a \bar{\psi}^a - \psi_a \dot{\bar{\psi}}^a\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\dot{\xi}\bar{\xi} - \xi\dot{\bar{\xi}}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\dot{\eta}\bar{\eta} - \eta\dot{\bar{\eta}}\right) + \\ + \mathrm{i} A^a \dot{w}_a - \mathrm{i}\bar{A}_a \dot{\bar{w}}^a + \frac{(\dot{u} + \Lambda)(\dot{\bar{u}} + \bar{\Lambda})}{(1 + u\bar{u})^2} - B\bar{B} - \frac{B_u^2}{4} - H_{4f}, \end{aligned} \tag{1.84}$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{(w^a - u\bar{w}^a)\, \dot{w}_a + (u w_a - u^2 \bar{w}_a)\, \dot{\bar{w}}^a}{1 + w \cdot \bar{w}} - \mathrm{i}\left(B u^2 - \bar{B} - u B_u\right), \\ \bar{\Lambda} &= \frac{(\bar{u}^2 w^a + \bar{u}\bar{w}^a)\, \dot{w}_a - (\bar{u} w_a + \bar{w}_a)\, \dot{\bar{w}}^a}{1 + w \cdot \bar{w}} - \mathrm{i}\left(B - \bar{B}\bar{u}^2 + \bar{u} B_u\right). \end{aligned} \tag{1.85}$$

Поскольку на гамильтоновом уровне наиболее нетривиальным элементом построений было введение степеней свободы на $\mathbb{S}^2$, имеет смысл начать обсуждение суперполевого действия с формулировки механики на $\mathbb{S}^2$ в суперполях.

Суперполевое действие для механики на $\mathbb{S}^2$

Как уже отмечалось, киральные суперполя недостаточны для описания требуемой механики на сфере $\mathbb{S}^2$. Необходимы два общих, не ограниченных N=2 суперполя $\{\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}}\}$, а анзац для действия нужно принять в виде

$$S_{S2} = -\int dt d\theta d\bar\theta \left(F_1 D\boldsymbol{u}\bar D\bar{\boldsymbol{u}} + F_2 D\bar{\boldsymbol{u}}\bar D\boldsymbol{u} \right). \tag{1.86}$$

Здесь F_1, F_2 - некоторые произвольные функции $\boldsymbol{u}\cdot\bar{\boldsymbol{u}}$.

Суперполя $\{\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}}\}$ содержат компоненты

$$\begin{gathered} u = \boldsymbol{u}|, \quad \bar u = \bar{\boldsymbol{u}}|, \quad A = \tfrac{1}{2}\left[D, \bar D\right]\boldsymbol{u}|, \quad \bar A = \tfrac{1}{2}\left[D, \bar D\right]\bar{\boldsymbol{u}}|, \\ \hat\xi = i\bar D\bar{\boldsymbol{u}}|, \quad \hat{\bar\xi} = iD\boldsymbol{u}|, \quad \hat\eta = iD\bar{\boldsymbol{u}}|, \quad \hat{\bar\eta} = i\bar D\boldsymbol{u}|, \end{gathered} \tag{1.87}$$

где $|$ обозначает предел $\theta, \bar\theta \to 0$.

Функции F_1 и F_2 в (1.86) должны быть выбраны так, чтобы после интегрирования по θ, $\bar\theta$ и исключения вспомогательных полей был воспроизведен компонентный лагранжиан

$$\mathcal{L}_{S^2} = \frac{\dot u\dot{\bar u}}{(1+u\bar u)^2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\dot\xi\bar\xi - \xi\dot{\bar\xi}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\dot\eta\bar\eta - \eta\dot{\bar\eta}\right). \tag{1.88}$$

Его можно получить, взяв в (1.84) предел $\{w_a, \psi_a\} \to 0$.

Лагранжиан (1.88) сформулирован в терминах фермионов $\{\xi, \bar\xi, \eta, \bar\eta\}$, и для сравнения с (1.86) необходимо определить их связь с $\{\hat\xi, \hat{\bar\xi}, \hat\eta, \hat{\bar\eta}\}$. Соотношения для фермионов следуют из сравнения законов преобразования u, $\bar u$, полученных из суперполевых соображений и генерированных суперзарядами (1.67):

$$\hat\xi = \sqrt{2}(\xi + \bar u\bar\eta), \qquad \hat{\bar\xi} = \sqrt{2}(\bar\xi + u\eta), \qquad \hat\eta = -\sqrt{2}(\bar u\eta - \bar u^2\bar\xi), \qquad \hat{\bar\eta} = \sqrt{2}(u\bar\eta - u^2\xi). \tag{1.89}$$

Выполнив в (1.86) интегрирования по θ, $\bar\theta$ и исключив вспомогательные поля, можно найти анзац для компонентного лагранжиана

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \;=\;& \left[F_1 + F_2 - \frac{(F_1 - F_2)^2}{F_1 + F_2}\right]\dot u\dot{\bar u} + \mathrm{i}F_1\left(\dot{\hat\xi}\hat{\bar\xi} - \hat\xi\dot{\hat{\bar\xi}}\right) + \mathrm{i}F_2\left(\dot{\hat\eta}\hat{\bar\eta} - \hat\eta\dot{\hat{\bar\eta}}\right) - \\ & -\mathrm{i}(\dot u\bar u - u\dot{\bar u})\left(F_1'\hat\xi\hat{\bar\xi} + F_2'\hat\eta\hat{\bar\eta}\right) + \left(F_1' + u\bar u F_1'' + F_2' + u\bar u F_2''\right)\hat\xi\hat{\bar\xi}\hat\eta\hat{\bar\eta} + \\ & +\mathrm{i}\left[F_1' - F_2' - \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2}(F_1' + F_2')\right]\left(u\dot u\hat\eta\hat\xi - \bar u\dot{\bar u}\hat{\bar\xi}\hat{\bar\eta}\right). \end{aligned} \tag{1.90}$$

После перехода к фермионам (1.89) можно проверить, что (1.90) совпадает с (1.88), если функции F_1 и F_2 даются выражениями

$$4\,F_1 = \frac{1}{1+u\bar{u}}, \qquad 4\,F_2 = \frac{1}{u\bar{u}\,(1+u\bar{u})}. \tag{1.91}$$

Таким образом, суперполевой лагранжиан для механики на $\mathbb{S}^2$, воспроизводящий необходимый компонентный (1.88), имеет вид

$$S_{S^2} = -\frac{1}{4}\int dt d\theta d\bar{\theta}\left[\frac{D\boldsymbol{u}\bar{D}\bar{\boldsymbol{u}}}{1+\boldsymbol{u}\bar{\boldsymbol{u}}} + \frac{D\bar{\boldsymbol{u}}\bar{D}\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}\bar{\boldsymbol{u}}(1+\boldsymbol{u}\bar{\boldsymbol{u}})}\right]. \tag{1.92}$$

Можно предположить, что существуют другие возможности написать суперполевой лагранжиан, поскольку в (1.86) под интеграл можно добавить слагаемые

$$F_3\,\boldsymbol{u}^2 D\bar{\boldsymbol{u}}\bar{D}\bar{\boldsymbol{u}}, \qquad F_4\,\bar{\boldsymbol{u}}^2 D\boldsymbol{u}\bar{D}\boldsymbol{u}, \qquad \mathrm{i}F_5\,(\dot{\boldsymbol{u}}\bar{\boldsymbol{u}} - \dot{\bar{\boldsymbol{u}}}\boldsymbol{u}). \tag{1.93}$$

Данное усложение не приводит к существенно новому представлению для лагранжиана. Чтобы воспроизвести (1.88), необходимо принять $F_3 = F_4 = 0$, а члены с F_5 могут быть полностью воспроизведены (1.90) соответствующей модификацией F_1 и F_2.

Полное суперполевое действие

Сформулировав суперполевой лагранжиан для $N{=}2$ механики на сфере $\mathbb{S}^2$, достаточно просто расширить его до лагранжиана системы на $\mathbb{CP}^3$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{CP^3sf} \;=\; & -\frac{1}{4}\left[\frac{D\boldsymbol{w}_a\bar{D}\bar{\boldsymbol{w}}^a}{(1+\boldsymbol{w}\cdot\bar{\boldsymbol{w}})^2} + \frac{(Du + M^aD\boldsymbol{w}_a)(\bar{D}\bar{\boldsymbol{u}} + \bar{M}_a\bar{D}\bar{\boldsymbol{w}}^a)}{1+\boldsymbol{u}\bar{\boldsymbol{u}}} + \right.\\ & \left. + \frac{(D\bar{\boldsymbol{u}} + N^aD\boldsymbol{w}_a)(\bar{D}\boldsymbol{u} + \bar{N}_a\bar{D}\bar{\boldsymbol{w}}^a)}{\boldsymbol{u}\bar{\boldsymbol{u}}(1+\boldsymbol{u}\bar{\boldsymbol{u}})}\right]\end{aligned} \tag{1.94}$$

где

$$M^a = \frac{\boldsymbol{w}^a - \boldsymbol{u}\bar{\boldsymbol{w}}^a}{1+\boldsymbol{w}\cdot\bar{\boldsymbol{w}}}, \qquad N^a = \frac{\bar{\boldsymbol{u}}^2\boldsymbol{w}^a + \bar{\boldsymbol{u}}\bar{\boldsymbol{w}}^a}{1+\boldsymbol{w}\cdot\bar{\boldsymbol{w}}}. \tag{1.95}$$

Именно такой лагранжиан диктуется известным бозонным пределом. Он приводит к полному компонентному лагранжиану (1.84) после соответствующего выбора физических компонент

$$\hat{\xi} = \mathrm{i}(D\boldsymbol{u} + M^aD\boldsymbol{w}_a)|, \qquad \hat{\eta} = \mathrm{i}(D\bar{\boldsymbol{u}} + N^aD\boldsymbol{w}_a)|, \qquad \psi_a = \frac{\mathrm{i}D\boldsymbol{w}_a}{\sqrt{2}(1+\boldsymbol{w}\cdot\bar{\boldsymbol{w}})}| \tag{1.96}$$

и переобозначений (1.89).

1.2.5. Расслоение $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{CP}^{2n+1} \to \mathbb{HP}^n$ и механика на кватернионных проективных пространствах

Расслоение $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{CP}^3 \to \mathbb{S}^4$ является первым в ряду $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{CP}^{2n+1} \to \mathbb{HP}^n$, при этом $\mathbb{S}^4$ - первое из кватернионных проективных пространств $\mathbb{HP}^1$. Поскольку структура взаимодействия определяется пространством $\mathbb{S}^2$ и во многом повторяет известную по механике на $\mathbb{CP}^3$ [34], естественно распостранить методы, разработанные при исследовании $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{CP}^3 \to \mathbb{S}^4$, и на данный случай. Представляется достаточным построить суперзаряды механики частицы на пространстве $\mathbb{HP}^n$, расширить их уже известными суперзарядами механики на $\mathbb{S}^2$ и членами взаимодействия, а затем убедиться, что они приводят к редуцируемой механике.

Бозонная механика на $\mathbb{HP}^n$

Кватернионное проективное пространство может быть определено как фактор-пространство

$$\mathbb{HP}^n \sim \frac{Sp(n+1)}{Sp(1) \times Sp(n)} \tag{1.97}$$

Очевидно, данное пространство имеет действительную размерность $4n$, а координаты на нем преобразуются однородно компактными симплектическими группами $Sp(n)$ и $Sp(1) \sim SU(2)$. Повторяя обозначения, использованные для $\mathbb{S}^4$, их естественно выбрать в виде $w_a,\ \bar{w}^a = (w_a)^\dagger$, а индекс $a = 1, \ldots 2n$ можно опускать и поднимать с помощью $Sp(n)$ инвариантного тензора

$$(\Omega_{ab}) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.98}$$

Поскольку наиболее важным для последующих построений является гамильтониан, предпочтительно получить его непосредственно из определения. С учетом того, что бозонный гамильтониан должен быть инвариантен относительно полной группы $Sp(n+1)$, и имеющегося опыта построения гамильтонианов частиц на пространствах $\mathbb{CP}^n$, можно предположить, что гамильтониан совпадает с оператором Казимира алгебры $sp(n+1)$.

Приняв для координат $w_a,\ \bar{w}^a$ и сопряженных им импульсов $p^a,\ \bar{p}_a$ стандартные скобки Пуассона,

$$\left\{w_a, p^b\right\} = \delta_a{}^b,\ \{\bar{w}^a, \bar{p}_b\} = \delta_b{}^a, \tag{1.99}$$

можно определить токи $sp(1)$ и $sp(n)$:

$$\begin{aligned} sp(1): \qquad & L_0 = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(p^a w_a - \bar{p}_a \bar{w}^a\right), \quad L_+ = \mathrm{i}\bar{w}^a p_a, \quad L_- = \mathrm{i} w_a \bar{p}^a, \\ sp(n): \qquad & L_{ab} = w_a p_b + w_b p_a - \bar{w}_a \bar{p}_b - \bar{w}_b \bar{p}_a. \end{aligned} \tag{1.100}$$

Скобки этих токов воспроизводят алгебры $sp(1)$ и $sp(n)$

$$\begin{gathered} \{L_0, L_+\} = \mathrm{i}L_+, \quad \{L_0, L_-\} = -\mathrm{i}L_-, \quad \{L_+, L_-\} = 2\mathrm{i}L_0, \\ \{L_{ab}, L_{cd}\} = -\Omega_{ad}L_{bc} - \Omega_{bc}L_{ad} - \Omega_{bd}L_{ac} - \Omega_{ac}L_{bd}. \end{gathered} \tag{1.101}$$

Генераторы J_a, $\overline{J}^b$ из фактор-пространства $Sp(n+1)/Sp(n) \times Sp(1)$ должны преобразовываться по представлению $sp(1)$ и $sp(n)$, а их скобка замыкаться на $sp(1)$ и $sp(n)$. Анзац для них можно принять в виде

$$\begin{aligned} J_a &= f_1 \bar{p}_a + f_2 w_b p^b \cdot w_a + f_3 \bar{p}^b w_b \cdot \bar{w}_a + f_4 \bar{w}^b \bar{p}_b \cdot w_a, \\ \overline{J}^a &= f_1 p_a + f_2 \bar{w}^b \bar{p}_b \cdot \bar{w}^a + f_3 p_b \bar{w}^b \cdot w^a + f_4 w_b p^b \cdot \bar{w}^a. \end{aligned} \tag{1.102}$$

Функции здесь зависят от $w_c \bar{w}^c$. Поскольку импульсы можно переопределить, сохранив скобки Пуассона $p^a \to p^a + f \cdot \bar{w}^a$, $\bar{p}_a \to \bar{p}_a + f \cdot w_a$, можно считать, что $f_4 = 0$. Тогда оказывается, что для получения правильных соотношений алгебры функции должны быть постоянными, причем $f_3 = -f_2$. Окончательно можно принять

$$\begin{aligned} J_a &= \bar{p}_a + w_b p^b \cdot w_a - w_b \bar{p}^b \cdot \bar{w}_a, \\ \overline{J}^a &= p^a + \bar{w}^b \bar{p}_b \cdot \bar{w}^a - \bar{w}^b p_b \cdot w^a. \end{aligned} \tag{1.103}$$

Скобки этих генераторов между собой и с токами $sp(1)$, $sp(n)$ (1.100) имеют вид

$$\begin{gathered} \{L_{ab}, J_c\} = -\Omega_{ac}J_b - \Omega_{bc}J_a, \quad \left\{L_{ab}, \overline{J}^c\right\} = \delta_a{}^c \overline{J}_b + \delta_b{}^c \overline{J}_a, \\ \{L_0, J_a\} = -\tfrac{\mathrm{i}}{2} J_a, \quad \{L_+, J_a\} = \mathrm{i}\overline{J}_a, \quad \{L_-, J_a\} = 0, \\ \left\{L_0, \overline{J}^a\right\} = \tfrac{\mathrm{i}}{2}\overline{J}^a, \quad \left\{L_+, \overline{J}^a\right\} = 0, \quad \left\{L_-, \overline{J}^a\right\} = \mathrm{i}J^a, \\ \{J_a, J_b\} = 2\mathrm{i}\Omega_{ab}L_-, \quad \left\{\overline{J}^a, \overline{J}^b\right\} = 2\mathrm{i}\Omega^{ab}L_+, \quad \left\{J_a, \overline{J}^b\right\} = L_a{}^b - 2\mathrm{i}\delta_a{}^b L_0. \end{gathered} \tag{1.104}$$

Из них можно построить квадратичный оператор, скобка которого со всеми токами J_a, $\overline{J}^a$, L_{ab}, L_0, L_+, L_- равна нулю:

$$H_{HPbos} = J_a \overline{J}^a + \frac{1}{4} L_{ab} L^{ab} + 2\left(L_+ L_- + L_0^2\right) \equiv \left(g^{-1}\right)_a{}^b p^a \bar{p}_b, \quad \left(g^{-1}\right)_a{}^b = \left(\delta_a{}^b + w_a \bar{w}^b + w^b \bar{w}_a\right). \tag{1.105}$$

При обращении $\left(g^{-1}\right)_a{}^b$ получается правильная метрика на $\mathbb{HP}^n$

$$g_a{}^b = \frac{\delta_a{}^b}{1 + w_c \bar{w}^c} - \frac{w_a \bar{w}^b + w^b \bar{w}_a}{\left(1 + w_c \bar{w}^c\right)^2}. \tag{1.106}$$

$N=2$ **суперсимметричная механика на** $\mathbb{HP}^n$

Чтобы иметь возможность построить суперсимметричную версию механики на $\mathbb{HP}^n$, необходимо дополнить бозонные координаты фермионами. Минимальный набор фермионов отвечает киральным $N=2$ суперполям, аналогичным тем, что использовались ранее для описания механики на $\mathbb{S}^4$. Их можно выбрать в виде ψ_a, $\bar\psi^a$ со скобкой Дирака $\left\{\psi_a,\bar\psi^b\right\}=\mathrm{i}\delta_a{}^b$.

Чтобы построить суперзаряды, достаточно написать анзац, совместный с явной $Sp(n)$ симметрией, и определить функции в нем, исходя из того, что $\{Q,Q\}=0$, а бозонная часть $\{Q,\overline{Q}\}$ пропорциональна (1.105). Анзац для суперзаряда имеет вид

$$\begin{aligned} Q_{HPanz} &= F_1 p^a\psi_a + F_2 p^a w_a\cdot\bar w^b\psi_b + F_3 p^a\bar w_a\cdot w^b\psi_b + \\ &+\mathrm{i}F_4\psi_a\psi^a\cdot\bar w^b\bar\psi_b + \mathrm{i}F_5\bar w^a\psi_a\cdot\psi_b\bar\psi^b + \mathrm{i}F_6\bar w^a\psi_a\cdot w_b\psi^b\cdot\bar w^c\bar\psi_c. \end{aligned} \tag{1.107}$$

Данный суперзаряд удовлетворяет также естественным дополнительным условиям: при преобразованиях $\psi_a\to\psi_a e^{\mathrm{i}\alpha}$ он умножается на фазу $Q\to Qe^{i\alpha}$. При других вращениях он инертен: $\psi_a\to\psi_a e^{\mathrm{i}\beta}$, $w_a\to w_a e^{\mathrm{i}\beta}$, $p^a\to p^a e^{-\mathrm{i}\beta}$. Эти свойства должны иметь место, если обратиться к суперполям: поле $\boldsymbol{w}_a$, первой компонентой которого является w_a, а второй - ψ_a, можно умножить на фазу $e^{\mathrm{i}\beta}$, при этом координаты суперпространства и суперзаряды никак не будут затронуты. Преобразование же с α никак не меняет $\boldsymbol{w}_a$, но преобразует $\theta\to\theta e^{-\mathrm{i}\alpha}$, и, следовательно, $\psi_a\to\psi_a e^{\mathrm{i}\alpha}$ и $Q\to Qe^{i\alpha}$.

В анзаце отсутствует слагаемое $\bar w^a\bar p_a\cdot\bar w^b\psi_b$, удовлетворяющее перечисленным выше свойствам. Его отсутствие объясняется тем, что у него нет аналога в механике на $\mathbb{S}^4$.

Условия $\{Q,Q\}=0$, $\{Q,\overline{Q}\}|_{bos}\sim H_{HPbos}$ после некоторых вычислений действительно позволяют определить функции $F_1,\ldots,F_6$:

$$\begin{gathered} F_1=\sqrt{1+w\cdot\bar w},\quad F_2=-F_3=\frac{\sqrt{1+w\cdot\bar w}}{1+\sqrt{1+w\cdot\bar w}},\quad F_4=\frac{1}{1+\sqrt{1+w\cdot\bar w}}, \\ F_5=\frac{1}{2}\frac{w\cdot\bar w}{(1+\sqrt{1+w\cdot\bar w})^2},\quad F_6=\frac{3}{2(1+\sqrt{1+w\cdot\bar w})^2}. \end{gathered} \tag{1.108}$$

Тогда суперзаряд Q_{HP^n}, который может быть сформулирован с их помощью, имеет вид

$$\begin{aligned} Q_{HP^n} &= \sqrt{1+w\cdot\bar w}p^a\psi_a + \frac{\sqrt{1+w\cdot\bar w}}{1+\sqrt{1+w\cdot\bar w}}\left(p^a w_a\cdot\bar w^b\psi_b - p^a\bar w_a\cdot w^b\psi_b\right) + \\ &+\frac{\mathrm{i}\psi_a\psi^a\cdot\bar w^b\bar\psi_b}{1+\sqrt{1+w\cdot\bar w}} + \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{w_c\bar w^c\cdot\bar w^a\psi_a\cdot\psi_b\bar\psi^b + 3\bar w^a\psi_a\cdot w_b\psi^b\cdot\bar w^c\bar\psi_c}{(1+\sqrt{1+w\cdot\bar w})^2}. \end{aligned} \tag{1.109}$$

Соответствующий суперсимметричный гамильтониан $H_{HP^n}=-\mathrm{i}\left\{Q_{HP^n},\overline{Q}_{HP^n}\right\}$ имеет вид

$$H_{HP^n}=\left(g^{-1}\right)_a{}^b\left(p^a-\mathrm{i}A^a\right)\left(\bar p_b+\mathrm{i}\overline{A}_a\right)+H_{HP4f}, \tag{1.110}$$

где

$$\begin{aligned} A^a \;\; = \;\; & -\frac{\psi^a \cdot \bar{w}^b \bar{\psi}_b \left(2+\sqrt{1+w\cdot\bar{w}}\right)}{\sqrt{1+w\cdot\bar{w}}\left(1+\sqrt{1+w\cdot\bar{w}}\right)} - \frac{\bar{w}^b \psi_b \cdot \bar{\psi}^a}{\sqrt{1+w\cdot\bar{w}}\left(1+\sqrt{1+w\cdot\bar{w}}\right)} - \frac{\bar{w}^a \cdot \psi_b \bar{\psi}^b}{2\left(1+w\cdot\bar{w}\right)} + \\ & + \frac{\bar{w}^a \cdot w_b \psi^b \cdot \bar{w}^c \bar{\psi}_c \left(3+2\sqrt{1+w\cdot\bar{w}}\right)}{2\left(1+w\cdot\bar{w}\right)\left(1+\sqrt{1+w\cdot\bar{w}}\right)^2} + \frac{\bar{w}^a \cdot \bar{w}^b \psi_b \cdot w_c \bar{\psi}^c}{2\left(1+w\cdot\bar{w}\right)\left(1+\sqrt{1+w\cdot\bar{w}}\right)^2} + \qquad (1.111) \\ & + \frac{w^a \cdot \bar{w}^b \psi_b \cdot \bar{w}^c \bar{\psi}_c \left(2+\sqrt{1+w\cdot\bar{w}}\right)}{\left(1+w\cdot\bar{w}\right)\left(1+\sqrt{1+w\cdot\bar{w}}\right)^2}, \end{aligned}$$

а пропорциональный четвертой степени фермионов член H_{HP4f} слишком сложен, чтобы выписывать его явно.

Взаимодействие с внешним $SU(2)$ полем

Суперзаряды механики на сфере $\mathbb{S}^4$ могут быть модифицированы таким образом, чтобы включить взаимодействие с внешним $SU(2)$ магнитным полем специального вида (при этом получается механика, эквивалентная суперсимметричной механике на $\mathbb{CP}^3$). Для этого необходимо заменить в суперзарядах (1.72) импульсы (1.55)

$$\begin{gathered} p^a \to P^a = p^a + \frac{U\;\bar{w}^a - T\;w^a}{1+w\cdot\bar{w}}, \qquad \bar{p}_a \to \overline{P}_a = \bar{p}_a - \frac{U\;w_a - \overline{T}\;\bar{w}_a}{1+w\cdot\bar{w}}, \\ T = p_u + \bar{u}^2 \bar{p}_u, \qquad \overline{T} = \bar{p}_u + u^2 p_u, \qquad U = u p_u - \bar{u}\bar{p}_u, \qquad (1.112) \end{gathered}$$

добавить известные суперзаряды на $\mathbb{S}^2$ и дополнительные трехфермионные члены. Вид этих членов, содержащих фермионы $\mathbb{S}^2$ механики ξ, $\bar{\xi}$, η, $\bar{\eta}$, определяется требованием, чтобы суперзаряды образовывали $N{=}2$, $d=1$ суперsuccalгебру Пуанкаре относительно скобок Дирака.

Суперзаряды механики на $\mathbb{HP}^n$ могут быть модифицированы аналогичным образом. Импульсы должны быть заменены в соответствии с (1.55), а суперзаряд затем - дополнен новыми трехфермионными членами. Поскольку они содержат меньше фермионов ψ_a, чем трехфермионные члены Q_{HP^n} и должны сводиться к уже известным в случае $\mathbb{HP}^1 \sim \mathbb{S}^4$, допустимых слагаемых немного:

$$\mathrm{i}\Phi_1 \psi_a w^a \eta \xi, \quad \mathrm{i}\Phi_2 \psi_a \psi^a \xi, \quad \mathrm{i}\Phi_3 \bar{w}^a \psi_a \cdot w^b \psi_b, \quad \mathrm{i}\Phi_4 \psi_a \bar{w}^a \xi \bar{\xi}. \qquad (1.113)$$

Алгебру Пуанкаре оказывается возможным замкнуть, и получающиеся суперзаряды имеют вид

$$\begin{aligned} Q_{CP^{2n+1}} \;\; = \;\; & \sqrt{1+w\cdot\bar{w}}P^a\psi_a + \frac{\sqrt{1+w\cdot\bar{w}}}{1+\sqrt{1+w\cdot\bar{w}}}\left(P^a w_a \cdot \bar{w}^b \psi_b - P^a \bar{w}_a \cdot w^b \psi_b\right) + \\ & + \frac{\mathrm{i}\psi_a \psi^a \cdot \bar{w}^b \bar{\psi}_b}{1+\sqrt{1+w\cdot\bar{w}}} + \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{w_c \bar{w}^c \cdot \bar{w}^a \psi_a \cdot \psi_b \bar{\psi}^b + 3\bar{w}^a \psi_a \cdot w_b \psi^b \cdot \bar{w}^c \bar{\psi}_c}{(1+\sqrt{1+w\cdot\bar{w}})^2} + \qquad (1.114) \\ & + \alpha\left(T\bar{\xi} + U\eta - \mathrm{i}\,\eta\,\xi\bar{\xi}\right) + \mathrm{i}\psi_a w^a \eta\xi - \tfrac{\mathrm{i}}{\alpha}\psi_a\psi^a\xi - \mathrm{i}\psi_a \bar{w}^a \xi\bar{\xi}. \end{aligned}$$

Ясно, что члены со взаимодействием повторяют уже известные из предыдущих построений. Гамильтониан также модифицируется аналогичным образом:

$$\begin{aligned} H_{CP^{2n+1}} &= \left(g^{-1}\right)_a{}^b \left(P^a - \mathrm{i}\tilde{A}^a\right)\left(\overline{P}_b + \mathrm{i}\tilde{\overline{A}}_b\right) + \\ &\quad + \alpha^2 \left(T + \tfrac{\mathrm{i}}{\alpha}B\right)\left(\overline{T} - \tfrac{\mathrm{i}}{\alpha}\overline{B}\right) - \alpha^2\left(U + \tfrac{\mathrm{i}}{2\alpha^2}B_u\right)^2 + \tilde{H}_{P4f}. \end{aligned} \tag{1.115}$$

Здесь P^a определены в (1.55), а

$$\begin{aligned} \tilde{A}^a &= A^a - \frac{2\xi}{\alpha}\left(\frac{\psi^a}{\sqrt{1+w\cdot\bar{w}}} - \frac{\bar{w}^a\cdot w_b\psi^b + w^a\cdot\bar{w}^b\psi_b}{(1+w\cdot\bar{w})\left(1+\sqrt{1+w\cdot\bar{w}}\right)^2}\right) + \frac{\bar{w}^a\xi\bar{\xi} + w^a\xi\eta}{1+w\cdot\bar{w}}, \\ \tilde{H}_{P4f} &= H_{HP4f} + \left(\frac{3}{2}\xi\bar{\xi} - 2\eta\bar{\eta}\right)\left(w_a\psi^a\bar{w}^b\bar{\psi}_b\right) - 2\xi\bar{\xi}\psi_a\bar{\psi}^a + \\ &\quad + \frac{3}{\alpha}\left(\xi w_a\psi^a - \bar{\xi}\bar{w}^a\bar{\psi}_a\right)\psi_b\bar{\psi}^b - \frac{1}{\alpha}\left(\bar{\eta}\psi_a\psi^a\cdot\bar{w}^b\bar{\psi}_b - \eta w_a\psi^a\cdot\bar{\psi}^b\bar{\psi}_b\right) - \\ &\quad - \alpha\eta\bar{\eta}\left(\bar{\xi}\bar{w}^a\bar{\psi}_a + \xi w_a\psi^a\right) + \bar{\xi}\eta\bar{\psi}^a\bar{\psi}_a - \xi\bar{\eta}\psi_a\psi^a. \end{aligned} \tag{1.116}$$

Выражения для B, $\overline{B}$, B_u аналогичны известным в частном случае $\mathbb{S}^4$ (1.77)

$$B = \bar{w}^a\bar{\psi}_a\eta, \qquad \overline{B} = w_a\psi^a\bar{\eta}, \qquad B_u = 2\psi_a\bar{\psi}^a - \alpha w_a\psi^a\xi - \alpha\bar{w}^a\bar{\psi}_a\bar{\xi}. \tag{1.117}$$

Очевидно, все дополнительные члены пропадают, если положить T, $\overline{T}$, U, ξ, $\bar{\xi}$, η, $\bar{\eta} \to 0$. Таким образом, и в данном случае редукция оказывается возможной и приводит к $N = 2$ суперсимметричной механике частицы в пространстве $\mathbb{HP}^n$. Также можно отметить, что бозонный гамильтониан совпадает с построенным ранее [34].

1.2.6. Выводы

Возможность построить суперсимметричную механику частицы на пространствах $\mathbb{HP}^n$, в том числе на $\mathbb{S}^4$, содержащую взаимодействие с внешним $SU(2)$ магнитным полем, открывает путь к исследованию суперсимметричных обобщений квантового эффекта Холла на этих пространствах. Стоит, однако, отметить, что данные механики не наследуют полной группы симметрий механики на $\mathbb{HP}^n$. В них ненарушенными остаются лишь линейно реализованная группа $SU(2) \times Sp(n)$, и возможность представить гамильтониан как оператор Казимира алгебры $sp(n+1)$ принципиально отсутствует. Таким образом, способ построения спектров гамильтониана, использованный в [3, 4], оказывается неприменимым для данного случая.

Основные результаты, описанные в данном разделе, были опубликованы в работе [35].

Глава 2

Суперсимметричные механики частиц со спонтанным нарушением суперсимметрии

В данной главе будет обсуждаться применение метода нелинейных реализаций для построения действий релятивистских частиц с частичным спонтанным нарушением суперсимметрии.

Метод нелинейных реализаций позволяет по заданной алгебре систематически строить нелинейные законы преобразования полей, отвечающие алгебре, и инвариантные дифференциальные формы. В свою очередь, формы могут использоваться для наложения инвариантных условий на поля и как источники частей лагранжиана и инвариантных уравнений движения. Это делает формализм нелинейных реализаций одним из наиболее эффективным способов работы с теориями со спонтанным нарушением симметрии, поскольку часть симметрий в таких теориях нелинейно реализована [36, 37].

Суперсимметричная релятивистская частица является одной из самых простых систем, в которых часть суперсимметрий спонтанно нарушена. Это позволяет использовать эту систему для разработки и совершенствования методов исследования теорий со спонтанно нарушенной суперсимметрией - P-бран и теорий Борна-Инфельда.

2.1. Построение действия релятивистской частицы с точки зрения нелинейных реализаций

Теория релятивистской частицы, рассматриваемая как теория поля в одномерном пространстве-времени, являет собой пример теории со спонтанным нарушением симметрии. Действительно, некоторая мировая линия, помещенная в пространство-время, нарушает его группу симметрий (группу Пуанкаре) до подгруппы, сохраняющей данную мировую линию. В эту подгруппу входят сдвиги во времени и пространственные вращения вокруг мировой линии.

Применение метода нелинейных реализаций к построению действия релятивистской частицы можно рассмотреть на примере частицы в (2+1)-мерном пространстве-времени.

Исходным пунктом формализма нелинейных реализаций является алгебра симметрий предполагаемой теории. В случае релятивистской частицы в (2+1) пространстве-времени таковой является алгебра Пуанкаре в $D=3$

$$
\begin{aligned}
[M_{AB}, M_{CD}] &= \mathrm{i}\left(-\eta_{AC}M_{BD} + \eta_{BC}M_{AD} - \eta_{BD}M_{AC} + \eta_{AD}M_{BC}\right); \\
[M_{AB}, P_C] &= \mathrm{i}\left(-\eta_{AC}P_B + \eta_{BC}P_A\right),
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где $\eta = \mathrm{diag}(1,-1,-1)$, M_{AB}, P_C - эрмитовы генераторы Лоренцевых вращений и пространственно-временных трансляций. Удобно переписать ее в одномерных обозначениях:

$$
\begin{gathered}
T = M_{1,0} + \mathrm{i}M_{2,0},\ \overline{T} = M_{1,0} - \mathrm{i}M_{2,0},\ J = M_{1,2} \Rightarrow \\
[J,T] = T,\ \left[J,\overline{T}\right] = -\overline{T},\ \left[T,\overline{T}\right] = -2J, \\
P = P_0,\ Z = P_2 + \mathrm{i}P_1,\ \overline{Z} = P_2 + \mathrm{i}P_1 \Rightarrow \\
\left\{\begin{array}{l} [J,Z] = Z, \\ \left[J,\overline{Z}\right] = -\overline{Z}, \end{array}\right.
\quad
\left\{\begin{array}{l} [T,P] = -Z, \\ \left[T,\overline{Z}\right] = -2P, \end{array}\right.
\quad
\left\{\begin{array}{l} \left[\overline{T},P\right] = \overline{Z}, \\ \left[\overline{T},Z\right] = 2P, \end{array}\right.
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

Элемент фактор-пространства можно определить как

$$
g = e^{\mathrm{i}tP}\ e^{\mathrm{i}(qZ+\bar{q}\overline{Z})}\ e^{\mathrm{i}(\Lambda T+\overline{\Lambda T})}.
\tag{2.3}
$$

Генератор J был оставлен в подгруппе стабильности, поскольку предполагается, что соответствующая симметрия $q \to q e^{\mathrm{i}\alpha}$, $\bar{q} \to \bar{q} e^{-\mathrm{i}\alpha}$ линейно реализована. Здесь q, $\bar{q}$, Λ, $\overline{\Lambda}$ рассматриваются как Голдстоуновские поля, зависящие от t, при этом q, $\bar{q}$ будут отождествляться с координатами частицы.

Задание элемента фактор-пространства (2.3) позволяет вычислить законы преобразования полей и времени. С учетом структуры (2.3), эти преобразования удобно реализовать с помощью левого умножения; тогда для нахождения законов преобразования требуется вычислить произведение экспонент $g_0 g = g'h$, где h принадлежит подгруппе стабильности. Так, вычисляя $e^{\mathrm{i}(aZ+\bar{a}\overline{Z})}g = e^{\mathrm{i}tP}e^{\mathrm{i}[(q+a)Z+(\bar{q}+\bar{a})\overline{Z}]}e^{\mathrm{i}(\Lambda T+\overline{\Lambda T})}$, можно найти закон преобразования

$$
\delta_Z q = a,\ \delta_{\overline{Z}}\bar{q} = \bar{a}.
\tag{2.4}
$$

Очевидно, что действие, инвариантное относительно таких преобразований, может зависеть только от производных q, что и имеет место в случае релятивистской частицы. Более существенными оказываются законы преобразования, связанные с генераторами T, $\overline{T}$. Вычисляя произведение $e^{\mathrm{i}(bT+\bar{b}\overline{T})}g$, можно получить

$$
\delta t = -2\mathrm{i}\left(b\bar{q} - \bar{b}q\right), \qquad \delta q = -\mathrm{i}b\,t, \qquad \delta\bar{q} = \mathrm{i}\bar{b}\,t, \qquad \delta\lambda = b - \bar{b}\lambda^2, \qquad \delta\bar{\lambda} = \bar{b} - b\bar{\lambda}^2.
\tag{2.5}
$$

Здесь введена стереографическая проекция

$$
\lambda = \Lambda\frac{\mathrm{th}\sqrt{\Lambda\overline{\Lambda}}}{\sqrt{\Lambda\overline{\Lambda}}},\ \bar{\lambda} = \overline{\Lambda}\frac{\mathrm{th}\sqrt{\Lambda\overline{\Lambda}}}{\sqrt{\Lambda\overline{\Lambda}}}.
\tag{2.6}
$$

Также по элементу g можно вычислить формы Картана:

$$g^{-1}dg = \mathrm{i}\omega_P P + \mathrm{i}\omega_Z Z + \mathrm{i}\bar{\omega}_Z \overline{Z} + \mathrm{i}\omega_T T + \mathrm{i}\bar{\omega}_T \overline{T} + \mathrm{i}\omega_J J. \tag{2.7}$$

Эти формы имеют достаточно простой вид

$$\begin{gathered}
\omega_P = \frac{\left(1+\lambda\bar{\lambda}\right)dt + 2\mathrm{i}\left(\lambda d\bar{q} - \bar{\lambda}dq\right)}{1-\lambda\bar{\lambda}}, \\
\omega_Z = \frac{dq - \lambda^2 d\bar{q} + \mathrm{i}\lambda dt}{1-\lambda\bar{\lambda}}, \qquad \bar{\omega}_Z = \frac{d\bar{q} - \bar{\lambda}^2 dq - \mathrm{i}\bar{\lambda}dt}{1-\lambda\bar{\lambda}}, \\
\omega_T = \frac{d\lambda}{1-\lambda\bar{\lambda}}, \qquad \bar{\omega}_T = \frac{d\bar{\lambda}}{1-\lambda\bar{\lambda}}, \qquad \omega_J = \mathrm{i}\frac{\lambda d\bar{\lambda} - d\lambda\bar{\lambda}}{1-\lambda\bar{\lambda}},
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Если бы g был элементом группы, формы $\omega = g^{-1}dg$ были бы инвариантны относительно левого умножения. В данном случае формы преобразуются при действии генераторов T, $\overline{T}$ по представлению группы $U(1)$ как

$$\begin{gathered}
\delta\omega_P = 0,\ \delta\omega_Z = (b\bar{\lambda} - \bar{b}\lambda)\omega_Z,\ \delta\bar{\omega}_Z = -(b\bar{\lambda} - \bar{b}\lambda)\bar{\omega}_Z, \\
\delta\omega_T = (b\bar{\lambda} - \bar{b}\lambda)\omega_T,\ \delta\bar{\omega}_T = -(b\bar{\lambda} - \bar{b}\lambda)\bar{\omega}_T,\ \delta\omega_J = \mathrm{i}(b\, d\bar{\lambda} - \bar{b}\, d\lambda).
\end{gathered} \tag{2.9}$$

Как и следовало ожидать на основании общих результатов формализма нелинейных реализаций, формы, связанные с генераторами фактор-пространства преобразуются однородно, а форма ω_J претерпевает сдвиг $\sim h^{-1}dh$ при преобразованиях (2.5).

Пользуясь тем, что форма ω_P инвариантна, а ω_Z, $\bar{\omega}_Z$, ω_T, $\bar{\omega}_T$ преобразуются однородно, можно наложить инвариантное условие на поля. Имеет смысл наложить условия $\omega_Z = 0$, $\bar{\omega}_Z = 0$, что приводит к следующему соотношению:

$$\omega_Z = 0 \Rightarrow \dot{q} = -\mathrm{i}\frac{\lambda}{1+\lambda\bar{\lambda}},\ \bar{\omega}_Z = 0 \Rightarrow \dot{\bar{q}} = \mathrm{i}\frac{\bar{\lambda}}{1+\lambda\bar{\lambda}}. \tag{2.10}$$

Таким образом, можно считать независимыми лишь часть полей - параметров фактор-пространства. Это - проявление общего результата, известного как обратный эффект Хиггса [38].

С учетом условий (2.10), форма ω_P (2.8) может быть упрощена:

$$\omega_P = \frac{1-\lambda\bar{\lambda}}{1+\lambda\bar{\lambda}}dt. \tag{2.11}$$

Поскольку исходная форма ω_P инвариантна относительно преобразований фактор-пространства (2.7), и переписана с помощью ковариантных условий, интеграл от нее также инвариантен и может рассматриваться как действие

$$S_0 = -m_0 \int \omega_P = -m_0 \int dt\sqrt{1 - 4\dot{q}\dot{\bar{q}}}. \tag{2.12}$$

Можно непосредственно проверить, что вариация (2.12) относительно преобразований (2.5) равна нулю.

Таким образом, метод нелинейных реализаций позволяет построить инвариантное действие, зависящее только от первых производных координат частицы. Стоит отметить, что, поскольку из него следуют уравнения движения $\ddot{q} = 0$, $\ddot{\bar{q}} = 0$, условия $\omega_T = 0$, $\bar{\omega}_T = 0$ с учетом (2.10) можно рассматривать как ковариантные уравнения движения, соответствующие действию (2.12).

Формам ω_T, $\bar{\omega}_T$, ω_J может быть придан и иной смысл. С их помощью можно сформулировать действия, зависящие от вторых производных координат по времени, инвариантные относительно группы Пуанкаре в трехмерии. Таковыми являются действия для аниона и частицы с жесткостью, которые будут рассмотрены в конце главы.

2.2. Общие замечания о построении суперсимметричных действий с помощью нелинейных реализаций

Основным предметом рассмотрения в данном и дальнейших разделах являются суперсимметричные действия для частиц, сформулированные в терминах компонент суперполей, с исключенными вспомогательными полями. Такой выбор объясняется тем, что метод нелинейных реализаций неприменим непосредственно к построению суперполевых действий. Суперполевые лагражианы, как правило, не являются инвариантами относительно пространственно-временных симметрий, а сдвигаются на полную производную по координатам суперпространства. В методе же нелинейных реализаций не возникает объектов с такими свойствами.

Преимуществом суперполевых действий является то, что они обеспечивают явную реализацию суперсимметрии. Суперполевые действия со спонтанным нарушением суперсимметрии могут быть построены различными методами:

- Построение линейной реализации дополнительной суперсимметрии, при этом суперполевой лагранжиан оказывается компонентой соответствующего линейного мультиплета [7, 9, 39],
- Построение анзаца для суперполевого действия и проверка его инвариантности относительно дополнительной нелинейно реализованной суперсимметрии.

Применение таких методов, однако, часто сталкивается с серьезными трудностями, особенно в случае высших суперсимметрий. Рассматриваемый метод нелинейных реализаций оказывается способным обойти значительную часть этих трудностей, и позволяет построить действие полностью, в замкнутом виде, и проверить его инвариантность. Полученное действие может быть сформулировано достаточно простым и компактным способом с помощью структур, появляющихся в ходе применения метода нелинейных реализаций. Как будет видно в дальнейшем, построенные действия будут иметь достаточно универсальный характер и во многом повторять известные бозонные действия.

Поскольку спонтанное нарушение глобальной суперсимметрии с необходимостью сопровождается появлением Голдстоуновского фермиона, параметрами при суперзарядах нарушенной суперсимметрии в фактор-пространстве являются фермионные суперполя.

2.3. Введение суперсимметрии с точки зрения нелинейных реализаций и действие для частицы с нарушением $N=4 \to N=2$

В данном разделе будет построено суперсимметричное действие для частицы в трехмерном пространстве-времени, инвариантное относительно преобразований $N=2,\, d=3$ суперcharacterалгебры Пуанкаре. Такое построение содержит минимум вычислительных трудностей и при этом позволяет проиллюстрировать суть предлагаемого метода. В дальнейшем оно будет обобщено и включит, с одной стороны, слагаемые с высшими производными по времени, с другой - расширенные $N>4$ суперсимметрии.

Алгебра, рассматриваемая в данном разделе - $N=2,\, d=3$ супералгебра Пуанкаре, которая может быть переформулирована как $N=4,\, d=1$ супералгебра, расширенная двумя центральными зарядами. Супер態алгебру удобнее формулировать в спинорных обозначениях. Для этого нужно ввести σ-матрицы специального вида

$$\sigma^0_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^1_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

связывающие симметричные спиноры и векторы $SO(1,2)$. Спинорные индексы можно поднимать и опускать с помощью антисимметричного ϵ-тензора $\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta,\ \psi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta$, где $\epsilon_{12} = \epsilon^{21} = 1,\ \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha$. Матрицы σ^A удовлетворяют тождествам

$$\begin{gathered} \left(\sigma^A\right)_{\alpha\beta}\left(\sigma^B\right)^{\alpha\beta} = 2\eta^{AB}, \qquad \left(\sigma^A\right)_{\alpha\beta}\left(\sigma_A\right)_{\gamma\delta} = \epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta} + \epsilon_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\delta}, \\ \left(\sigma^A\right)_{\alpha\gamma}\left(\sigma^B\right)^{\gamma\beta} = \eta^{AB}\delta^\beta_\alpha + \epsilon^{ABC}\left(\sigma_C\right)^\beta_\alpha, \qquad \epsilon_{012} = 1. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Тогда можно ввести определения

$$\begin{aligned} M_{AB}=\epsilon_{ABC}M^{C} \Leftrightarrow M_{C}=\frac{1}{2}\epsilon_{ABC}M^{AB},\\ V_{\alpha\beta}=2\left(\sigma^{A}\right)_{\alpha\beta}V_{A} \Leftrightarrow V^{A}=\frac{1}{4}\left(\sigma^{A}\right)_{\alpha\beta}V^{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

где V - некоторый вектор (M^A или P^A).

В этом базисе коммутационные соотношения $D=3$ алгебры Пуанкаре имеют вид

$$\begin{aligned} \left[M_{\alpha\beta},M_{\gamma\delta}\right]=\mathrm{i}\left(\epsilon_{\alpha\gamma}M_{\beta\delta}+\epsilon_{\beta\gamma}M_{\alpha\delta}+\epsilon_{\beta\delta}M_{\alpha\gamma}+\epsilon_{\alpha\delta}M_{\beta\gamma}\right),\\ \left[M_{\alpha\beta},P_{\gamma\delta}\right]=\mathrm{i}\left(\epsilon_{\alpha\gamma}P_{\beta\delta}+\epsilon_{\beta\gamma}P_{\alpha\delta}+\epsilon_{\beta\delta}P_{\alpha\gamma}+\epsilon_{\alpha\delta}P_{\beta\gamma}\right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Коммутационные соотношения (2.16) могут быть расширены с помощью спинорных генераторов до $N=2$, $d=3$ супералгебры Пуанкаре

$$\left[M_{\alpha\beta},Q_{\gamma}\right]=\mathrm{i}\left(\epsilon_{\alpha\gamma}Q_{\beta}+\epsilon_{\beta\gamma}Q_{\alpha}\right),\ \left[M_{\alpha\beta},\overline{Q}_{\gamma}\right]=\mathrm{i}\left(\epsilon_{\alpha\gamma}\overline{Q}_{\beta}+\epsilon_{\beta\gamma}\overline{Q}_{\alpha}\right),\ \left\{Q_{\alpha},\overline{Q}_{\beta}\right\}=2P_{\alpha\beta}. \tag{2.17}$$

Используя определения генераторов $T,\ \overline{T},\ J,\ P,\ Z,\ \overline{Z}$ (2.2) и соотношения (2.15), можно найти выражения для $T,\ \overline{T},\ J,\ P,\ Z,\ \overline{Z}$ в терминах генераторов со спинорными индексами $M_{\alpha\beta}$, $P_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} T=\frac{1}{4}\left(M_{11}-M_{22}-2\mathrm{i}M_{12}\right),\quad \overline{T}=\frac{1}{4}\left(M_{11}-M_{22}+2\mathrm{i}M_{12}\right),\quad J=\frac{1}{4}\left(M_{11}+M_{22}\right),\\ P=\frac{1}{4}\left(P_{11}+P_{22}\right),\quad Z=\frac{1}{4}\left(P_{11}-P_{22}-2\mathrm{i}P_{12}\right),\quad \overline{Z}=\frac{1}{4}\left(P_{11}-P_{22}+2\mathrm{i}P_{12}\right). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Суперзаряды можно ввести таким образом, чтобы получить стандартную супералгебру в $d=1$, расширенную центральными зарядами:

$$Q=\frac{1}{2}\left(Q_1-\mathrm{i}Q_2\right),\quad S=\frac{1}{2}\left(\overline{Q}_1-\mathrm{i}\overline{Q}_2\right),\quad \overline{Q}=\frac{1}{2}\left(\overline{Q}_1+\mathrm{i}\overline{Q}_2\right),\quad \overline{S}=\frac{1}{2}\left(Q_1+\mathrm{i}Q_2\right). \tag{2.19}$$

(Анти)коммутационные соотношения получающейся $N=4$, $d=1$ супералгебры Пуанкаре непосредственно обобщают (2.2):

$$\begin{aligned} &\left[J,T\right]=T,\ \left[J,\overline{T}\right]=-\overline{T},\ \left[T,\overline{T}\right]=-2J,\\ &\left\{\begin{array}{l}\left[J,Z\right]=Z,\\ \left[J,\overline{Z}\right]=-\overline{Z},\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l}\left[T,P\right]=-Z,\\ \left[T,\overline{Z}\right]=-2P,\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l}\left[\overline{T},P\right]=\overline{Z},\\ \left[\overline{T},Z\right]=2P,\end{array}\right.\\ &\left\{Q,\overline{Q}\right\}=2P,\ \left\{S,\overline{S}\right\}=2P,\quad \left\{Q,S\right\}=2Z,\ \left\{\overline{Q},\overline{S}\right\}=2\overline{Z},\\ &\left[J,Q\right]=\tfrac{1}{2}Q,\quad \left[J,\overline{Q}\right]=-\tfrac{1}{2}\overline{Q},\quad \left[T,\overline{Q}\right]=-S,\quad \left[\overline{T},Q\right]=\overline{S},\\ &\left[J,S\right]=\tfrac{1}{2}S,\quad \left[J,\overline{S}\right]=-\tfrac{1}{2}\overline{S},\quad \left[T,\overline{S}\right]=-Q,\quad \left[\overline{T},S\right]=\overline{Q}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Тогда соответствующий элемент фактор-пространства можно постулировать как:

$$g = e^{\mathrm{i}tP}\; e^{\theta Q + \bar\theta\overline{Q}}\; e^{\boldsymbol{\psi} S + \bar{\boldsymbol{\psi}}\overline{S}}\; e^{\mathrm{i}\left(\mathbf{q}Z + \bar{\mathbf{q}}\overline{Z}\right)}\; e^{\mathrm{i}\left(\boldsymbol{\Lambda}T + \overline{\boldsymbol{\Lambda}}\overline{T}\right)}. \tag{2.21}$$

Здесь $\mathbf{q}$, $\bar{\mathbf{q}}$, $\boldsymbol{\psi}$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}$, $\boldsymbol{\Lambda}$, $\overline{\boldsymbol{\Lambda}}$ рассматриваются как суперполя, зависящие от координат суперпространства $t,\ \theta,\ \bar\theta$. Выбранная параметризация обладает следующими преимуществами [40]:

- Преобразования, задаваемые генераторами P, Q, затрагивают только $t,\ \theta$ и являются стандартной реализацией $d = 1$ суперсимметрии в суперпространстве;
- Преобразования, генерируемые Z, реализованы лишь как сдвиги $\mathbf{q}$, и действие будет зависеть от $q = \mathbf{q}|_{\theta\to 0}$ только через производные;
- $\boldsymbol{\psi}$ под действием генераторов S преобразуется как голдстоуновский фермион.

Элемент фактор-пространства позволяет вычислить законы преобразования $g_0 g = g'h$ и формы Картана $g^{-1}dg$. Наиболее интересными представляются ненарушенная суперсимметрия $g_0 = \exp\{\epsilon Q + \bar\epsilon\overline{Q}\}$, спонтанно нарушенная суперсимметрия $g_0 = \exp\{\varepsilon S + \bar\varepsilon\overline{S}\}$ и преобразования автоморфизмов $g_0 = \exp\{\mathrm{i}\left(bT + \bar b\overline{T}\right)\}$:

- $g_0 = e^{\epsilon Q + \bar\epsilon\overline{Q}} \Rightarrow \left\{\delta\theta = \epsilon,\ \delta\bar\theta = \bar\epsilon,\ \delta t = \mathrm{i}\left(\epsilon\bar\theta + \bar\epsilon\theta\right)\right.,$
- $g_0 = e^{\varepsilon S + \bar\varepsilon\overline{S}} \Rightarrow \left\{\ \delta t = \mathrm{i}\left(\varepsilon\bar{\boldsymbol{\psi}} + \bar\varepsilon\boldsymbol{\psi}\right),\ \delta\boldsymbol{\psi} = \varepsilon,\ \delta\bar{\boldsymbol{\psi}} = \bar\varepsilon, \delta\mathbf{q} = 2\mathrm{i}\varepsilon\theta,\ \delta\bar{\mathbf{q}} = 2\mathrm{i}\bar\varepsilon\bar\theta,\right.$
- $g_0 = e^{i\left(bT + \bar b\overline{T}\right)} \Rightarrow \begin{cases} \delta t = -2\mathrm{i}\left(b\bar{\mathbf{q}} - \bar b\mathbf{q}\right) + 2b\bar\theta\bar{\boldsymbol{\psi}} - 2\bar b\theta\boldsymbol{\psi},\ \delta\theta = -\mathrm{i}b\bar{\boldsymbol{\psi}},\ \delta\bar\theta = \mathrm{i}\bar b\boldsymbol{\psi}, \\ \delta\mathbf{q} = b\left(-\mathrm{i}t - \theta\bar\theta + \boldsymbol{\psi}\bar{\boldsymbol{\psi}}\right),\ \delta\boldsymbol{\psi} = -\mathrm{i}b\bar\theta, \\ \delta\bar{\mathbf{q}} = \bar b\left(\mathrm{i}t - \theta\bar\theta + \boldsymbol{\psi}\bar{\boldsymbol{\psi}}\right),\ \delta\bar{\boldsymbol{\psi}} = \mathrm{i}\bar b\theta, \\ \delta\boldsymbol{\lambda} = b - \bar b\boldsymbol{\lambda}^2,\ \delta\bar{\boldsymbol{\lambda}} = \bar b - b\bar{\boldsymbol{\lambda}}^2. \end{cases}$

Как и в бозонном случае (2.6), здесь введены стереографические проекции

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Lambda}\frac{\operatorname{th}\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}}{\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}},\ \bar{\boldsymbol{\lambda}} = \overline{\boldsymbol{\Lambda}}\frac{\operatorname{th}\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}}{\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}}. \tag{2.22}$$

Формы Картана имеют вид

$$\begin{aligned} g^{-1}dg \ &= \ \mathrm{i}\omega_P P + \mathrm{i}\omega_Z Z + \mathrm{i}\bar\omega_Z\overline{Z} + \mathrm{i}\omega_T T + \mathrm{i}\bar\omega_T\overline{T} + \mathrm{i}\omega_J J + \\ &\quad +(\omega_Q)Q + (\bar\omega_Q)\overline{Q} + (\omega_S)S + (\bar\omega_S)\overline{S} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
\omega_P = \frac{\left(1+\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}\right)\triangle t + 2\mathrm{i}\left(\boldsymbol{\lambda}\triangle\bar{\mathbf{q}} - \bar{\boldsymbol{\lambda}}\triangle\mathbf{q}\right)}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}, \\
\omega_Z = \frac{\triangle\mathbf{q} - \boldsymbol{\lambda}^2\triangle\bar{\mathbf{q}} + \mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}\triangle t}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}},\ \omega_Z = \frac{\triangle\bar{\mathbf{q}} - \bar{\boldsymbol{\lambda}}^2\triangle\mathbf{q} - \mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\lambda}}\triangle t}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}, \\
\omega_T = \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}, \qquad \bar{\omega}_T = \frac{d\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}, \qquad \omega_J = \mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\lambda}d\bar{\boldsymbol{\lambda}} - d\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}, \\
\omega_Q = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}}\left[d\theta + \mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}\, d\bar{\boldsymbol{\psi}}\right], \qquad \bar{\omega}_Q = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}}\left[d\bar{\theta} - \mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\lambda}}\, d\boldsymbol{\psi}\right], \\
\omega_S = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}}\left[d\boldsymbol{\psi} + \mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}\, d\bar{\theta}\right], \qquad \bar{\omega}_S = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}}\left[d\bar{\boldsymbol{\psi}} - \mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\lambda}}\, d\theta\right].
\end{gathered} \tag{2.23}$$

Здесь введены обозначения

$$\triangle t = dt - \mathrm{i}\left(\theta d\bar{\theta} + \bar{\theta}d\theta + \boldsymbol{\psi}d\bar{\boldsymbol{\psi}} + \bar{\boldsymbol{\psi}}d\boldsymbol{\psi}\right),\ \triangle\mathbf{q} = d\mathbf{q} - 2\mathrm{i}\boldsymbol{\psi}d\theta,\ \triangle\bar{\mathbf{q}} = d\bar{\mathbf{q}} - 2\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\psi}}d\bar{\theta}. \tag{2.24}$$

Подформы $\triangle t$, $\triangle\mathbf{q}$, $\triangle\bar{\mathbf{q}}$ инвариантны относительно обеих суперсимметрий (также, как и $d\boldsymbol{\psi}$, $d\theta$). Можно заметить, что модификация бозонных форм (2.8) в присутствии суперсимметрии заключается лишь в замене дифференциалов dt, dq, $d\bar{q}$ на соответствующие инвариантные подформы (2.24).

В суперпространстве t, θ, $\bar{\theta}$ можно определить ковариантные производные по антикоммутирующим переменным. “Обычные” ковариантные производные можно построить, если вместо подформы $\triangle t$ воспользоваться $\tilde{\triangle}t = dt - \mathrm{i}\left(\theta d\bar{\theta} + \bar{\theta}d\theta\right)$, инвариантной лишь относительно ненарушенной суперсимметрии. Тогда, переписывая дифференциал произвольной функции через dt, $d\theta$, $d\bar{\theta}$, с одной стороны, и через $\tilde{\triangle}t$, $d\theta$, $d\bar{\theta}$, с другой, можно получить тождество

$$dF = dt\frac{\partial F}{\partial t} + d\theta\frac{\partial F}{\partial\theta} + d\bar{\theta}\frac{\partial F}{\partial\bar{\theta}} = \tilde{\triangle}t\partial_t F + d\theta DF + d\bar{\theta}\overline{D}F. \tag{2.25}$$

Коэффициенты при dt, $d\theta$, $d\bar{\theta}$ позволяют определить, что

$$D = \frac{\partial}{\partial\theta} - \mathrm{i}\bar{\theta}\partial_t,\ \overline{D} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \mathrm{i}\theta\partial_t,\ D^2 = \overline{D}^2 = 0,\ \left\{D, \overline{D}\right\} = -2\mathrm{i}\partial_t. \tag{2.26}$$

Имеет смысл, однако, определить и более сложные производные, ковариантные относительно обеих суперсимметрий. Раскладывая дифференциал произвольной функции по формам $\triangle t$, $d\theta$, $d\bar{\theta}$,

$$\begin{gathered}
dF = \triangle t\nabla_t F + d\theta\nabla F + d\bar{\theta}\overline{\nabla}F = \tilde{\triangle}t\partial_t F + d\theta DF + d\bar{\theta}\overline{D}F \Rightarrow \\
\nabla_t = E^{-1}\partial_t,\ E = 1 + \mathrm{i}\left(\dot{\boldsymbol{\psi}}\bar{\boldsymbol{\psi}} + \dot{\bar{\boldsymbol{\psi}}}\boldsymbol{\psi}\right),\ E^{-1} = 1 - \mathrm{i}\left(\nabla_t\boldsymbol{\psi}\bar{\boldsymbol{\psi}} + \nabla_t\bar{\boldsymbol{\psi}}\boldsymbol{\psi}\right), \\
\nabla = D - \mathrm{i}\left(\bar{\boldsymbol{\psi}}D\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\psi}D\bar{\boldsymbol{\psi}}\right)\nabla_t = D - \mathrm{i}\left(\bar{\boldsymbol{\psi}}\nabla\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\psi}\nabla\bar{\boldsymbol{\psi}}\right)\partial_t, \\
\overline{\nabla} = \overline{D} - \mathrm{i}\left(\bar{\boldsymbol{\psi}}\overline{D}\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\psi}\overline{D}\bar{\boldsymbol{\psi}}\right)\nabla_t = \overline{D} - \mathrm{i}\left(\bar{\boldsymbol{\psi}}\overline{\nabla}\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\psi}\overline{\nabla}\bar{\boldsymbol{\psi}}\right)\partial_t.
\end{gathered} \tag{2.27}$$

Два эквивалентных представления производных по антикоммутирующим переменным возникают, так как дифференциалы полей $\boldsymbol{\psi}$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}$ в $\triangle t$ могут быть раскрыты как в терминах $\tilde{\triangle} t$, так и в терминах $\triangle t$.

Алгебра этих производных существенно сложнее алгебры D, $\overline{D}$:

$$\begin{gathered}
\left\{\nabla, \overline{\nabla}\right\} = -2\mathrm{i}\left(1 + \nabla\boldsymbol{\psi}\overline{\nabla}\bar{\boldsymbol{\psi}} + \overline{\nabla}\boldsymbol{\psi}\nabla\bar{\boldsymbol{\psi}}\right)\nabla_t, \\
\{\nabla, \nabla\} = -4\mathrm{i}\nabla\bar{\boldsymbol{\psi}}\nabla\boldsymbol{\psi}\nabla_t, \quad \left\{\overline{\nabla}, \overline{\nabla}\right\} = -4\mathrm{i}\overline{\nabla}\bar{\boldsymbol{\psi}}\overline{\nabla}\boldsymbol{\psi}\nabla_t, \\
[\nabla_t, \nabla] = -2\mathrm{i}\left(\nabla\bar{\boldsymbol{\psi}}\nabla_t\boldsymbol{\psi} + \nabla\boldsymbol{\psi}\nabla_t\bar{\boldsymbol{\psi}}\right)\nabla_t, \quad \left[\nabla_t, \overline{\nabla}\right] = -2\mathrm{i}\left(\overline{\nabla}\bar{\boldsymbol{\psi}}\nabla_t\boldsymbol{\psi} + \overline{\nabla}\boldsymbol{\psi}\nabla_t\bar{\boldsymbol{\psi}}\right)\nabla_t.
\end{gathered} \tag{2.28}$$

Условия обратного эффекта Хиггса (2.10) могут быть наложены и в суперсимметричном случае:

$$\begin{aligned}
\omega_Z = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \nabla_t\mathbf{q} = -\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\lambda}}{1 + \boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}},\ \nabla\mathbf{q} + 2\mathrm{i}\boldsymbol{\psi} = 0, \overline{\nabla}\mathbf{q} = 0, \qquad (2.29) \\
\bar{\omega}_Z = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \nabla_t\bar{\mathbf{q}} = \mathrm{i}\frac{\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{1 + \boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}},\ \overline{\nabla}\bar{\mathbf{q}} + 2\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\psi}} = 0, \nabla\bar{\mathbf{q}} = 0.
\end{aligned}$$

Эти условия связывают не только $\nabla_t\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\lambda}$, но и $\nabla\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\psi}$, а также требуют, чтобы $\mathbf{q}$, $\bar{\mathbf{q}}$ удовлетворяли обобщенным киральным условиям.

Алгебра ковариантных производных позволяет установить связь между производными суперполей $\boldsymbol{\psi}$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}$ и $\nabla_t\mathbf{q}$, $\nabla_t\bar{\mathbf{q}}$, а также найти дополнительные условия на $\boldsymbol{\psi}$, являющиеся следствием связей (2.29). Так, действуя ∇ на $\nabla\mathbf{q} + 2\mathrm{i}\boldsymbol{\psi} = 0$, можно получить:

$$\nabla^2\mathbf{q} + 2\mathrm{i}\nabla\boldsymbol{\psi} = 0 \ \Rightarrow 2\mathrm{i}\nabla\boldsymbol{\psi}\left(1 - \nabla\bar{\boldsymbol{\psi}}\nabla_t\mathbf{q}\right) = 0. \tag{2.30}$$

Таким образом, $\nabla\boldsymbol{\psi} = 0$. Действуя на то же условие $\overline{\nabla}$,

$$\overline{\nabla}\nabla\mathbf{q} + 2\mathrm{i}\overline{\nabla}\boldsymbol{\psi} = 0 \ \Rightarrow \overline{\nabla}\boldsymbol{\psi} = (1 + \nabla\bar{\boldsymbol{\psi}}\overline{\nabla}\boldsymbol{\psi})\nabla_t\mathbf{q}, \tag{2.31}$$

умножая результат на сопряженый ему и решая получившееся квадратное уравнение относительно $\nabla\bar{\boldsymbol{\psi}}\overline{\nabla}\boldsymbol{\psi}$, можно найти

$$\overline{\nabla}\boldsymbol{\psi} = \frac{2\nabla_t\mathbf{q}}{1 + \sqrt{1 - 4\nabla_t\mathbf{q}\nabla_t\bar{\mathbf{q}}}} = -\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}. \tag{2.32}$$

Поскольку все спинорные производные $\boldsymbol{\psi}$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}$ могут быть выражены через $\nabla_t\mathbf{q}$, $\nabla_t\bar{\mathbf{q}}$, обобщенные киральные условия действительно выделяют неприводимый мультиплет $N = 2$, $d = 1$ суперсимметрии.

Стоит отметить, что полученные условия приводят также к упрощению алгебры ковариантных производных. Полный список условий и обновленная алгебра имеют вид:

$$\begin{gathered}
\overline{\nabla}\mathbf{q}=0,\ \nabla\bar{\mathbf{q}}=0,\ \boldsymbol{\psi}=\tfrac{\mathrm{i}}{2}\nabla\mathbf{q},\ \bar{\boldsymbol{\psi}}=\tfrac{\mathrm{i}}{2}\overline{\nabla}\bar{\mathbf{q}},\\
\nabla\boldsymbol{\psi}=\overline{\nabla}\bar{\boldsymbol{\psi}}=0,\ \overline{\nabla}\boldsymbol{\psi}=\tfrac{2\nabla_t\mathbf{q}}{1+\sqrt{1-4\nabla_t\mathbf{q}\nabla_t\bar{\mathbf{q}}}}=-\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda},\ \nabla\bar{\boldsymbol{\psi}}=\tfrac{2\nabla_t\bar{\mathbf{q}}}{1+\sqrt{1-4\nabla_t\mathbf{q}\nabla_t\bar{\mathbf{q}}}}=\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\lambda}},\\
\nabla_t\mathbf{q}=-\mathrm{i}\tfrac{\boldsymbol{\lambda}}{1+\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}},\ \nabla_t\bar{\mathbf{q}}=\mathrm{i}\tfrac{\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{1+\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}\leftrightarrow\boldsymbol{\lambda}=2\mathrm{i}\tfrac{\nabla_t\mathbf{q}}{1+\sqrt{1-4\nabla_t\mathbf{q}\nabla_t\bar{\mathbf{q}}}},\ \bar{\boldsymbol{\lambda}}=-2\mathrm{i}\tfrac{\nabla_t\bar{\mathbf{q}}}{1+\sqrt{1-4\nabla_t\mathbf{q}\nabla_t\bar{\mathbf{q}}}},\\
\nabla^2=\overline{\nabla}^2=0,\ \left\{\nabla,\overline{\nabla}\right\}=-2\mathrm{i}\left(1+\overline{\nabla}\boldsymbol{\psi}\nabla\bar{\boldsymbol{\psi}}\right)\nabla_t,\\
\left[\nabla_t,\nabla\right]=-2\mathrm{i}\nabla\bar{\boldsymbol{\psi}}\nabla_t\boldsymbol{\psi}\nabla_t,\ \left[\nabla_t,\overline{\nabla}\right]=-2\mathrm{i}\overline{\nabla}\boldsymbol{\psi}\nabla_t\bar{\boldsymbol{\psi}}\nabla_t.
\end{gathered}\tag{2.33}$$

Компоненты, которые описывают мультиплет, могут быть выбраны различным образом; в данном случае, поскольку $\boldsymbol{\psi}=\frac{\mathrm{i}}{2}\nabla\mathbf{q}$, имеет смысл определить их как

$$q=\mathbf{q}|_{\theta\to0},\ \bar{q}=\bar{\mathbf{q}}|_{\theta\to0},\quad \psi=\boldsymbol{\psi}|_{\theta\to0},\ \bar{\psi}=\bar{\boldsymbol{\psi}}|_{\theta\to0}.\tag{2.34}$$

Такое определение выгодно отличается от обычно применяемого $D\mathbf{q}|_{\theta\to0}$ значительно более простым законом преобразования относительно спонтанно нарушенной суперсимметрии.

Спонтанно нарушенная суперсимметрия оказывает весьма существенное влияние на структуру действия. Так, из инвариантности действия относительно сдвигов переменных q, $\bar{q}$ следует, что действие может зависеть лишь от их первых производных. (Такого вывода о ψ, $\bar{\psi}$ сделать нельзя, так как одновременно со сдвигом ψ преобразуется t). Законы преобразования q и $\dot{q}$ в активной форме имеют вид

$$q'(t)-q(t)\equiv\delta^\star_S q=-\mathrm{i}\left(\varepsilon\bar{\psi}+\bar{\varepsilon}\psi\right)\dot{q}\Rightarrow\delta^\star_S\dot{q}=-\mathrm{i}\left(\varepsilon\dot{\bar{\psi}}+\bar{\varepsilon}\dot{\psi}\right)\dot{q}-\mathrm{i}\left(\varepsilon\bar{\psi}+\bar{\varepsilon}\psi\right)\ddot{q}.\tag{2.35}$$

Очевидно, закон преобразования $\dot{q}$ оказывается существенно отличен от закона преобразования q, и при переходе к неактивным преобразованиям $\delta_S f=\delta^\star_S f+\delta_S t\cdot\dot{f}$ производная q уже не будет инвариантной. Однако появившуюся неинвариантность можно скомпенсировать, введя ковариантную производную, действующую на компоненты. Исходя из инвариантности $\nabla_t\mathbf{q}$, можно предположить, что и в компонентном случае $\mathcal{E}=E|_{\theta\to0}=1+\mathrm{i}\left(\dot{\psi}\bar{\psi}+\dot{\bar{\psi}}\psi\right)$ может обеспечить ковариантность производной. Действительно, вычисляя соответсвующие законы преобразования,

$$\delta^\star_S\mathcal{E}=-\mathrm{i}\partial_t\left[\left(\varepsilon\bar{\psi}+\bar{\varepsilon}\psi\right)\mathcal{E}\right],\quad \mathcal{D}_t=\mathcal{E}^{-1}\partial_t\ \Rightarrow\ \delta^\star_S\mathcal{D}_t q=-\mathrm{i}\left(\varepsilon\bar{\psi}+\bar{\varepsilon}\psi\right)\partial_t\mathcal{D}_t q.\tag{2.36}$$

Очевидно, $\mathcal{D}_t q$ инвариантен относительно неактивных преобразований, а значит, также инвариантна произвольная функция $F\left(\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar{q}\right)$. Более того, активная вариация $\mathcal{E}F\left(\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar{q}\right)$ является полной производной

$$\delta^\star_S\left[\mathcal{E}F\left(\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar{q}\right)\right]=-\mathrm{i}\partial_t\left[\left(\varepsilon\bar{\psi}+\bar{\varepsilon}\psi\right)\mathcal{E}F\left(\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar{q}\right)\right].\tag{2.37}$$

Таким образом, требование инвариантности относительно спонтанно нарушенной суперсимметрии определяет способ, которым фермионы входят в лагранжиан. Это же требование ограничивает произвол анзаца функцией одной действительной переменной.

Несмотря на то, что бозонный предел лагранжиана известен (2.12), полностью фиксировать функциональный произвол только с его помощью не представляется возможным. Это связано с тем, что при сдвиге F на константу анзац для лагранжиана $\mathcal{E}F(\mathcal{D}_tq\,\mathcal{D}_t\bar{q})$ сдвигается на $\mathrm{const}\cdot\mathcal{E}$, сводящийся к независящей от полей const в бозонном пределе. Можно лишь утверждать, что $F\sim\alpha+\sqrt{1-4\mathcal{D}_tq\mathcal{D}_t\bar{q}}$.

Искомое действие для частицы также должно быть инвариантно относительно ненарушенной суперсимметрии. Законы преобразования компонент $q,\ \bar{q},\ \psi,\ \bar{\psi}$ относительно точной суперсимммметрии можно вычислить с помощью формулы

$$\delta^\star_Q f=\delta^\star_Q\mathbf{f}|_{\theta\to0}=-\epsilon D\mathbf{f}|_{\theta\to0}-\bar{\epsilon}\overline{D}\mathbf{f}|_{\theta\to0}. \tag{2.38}$$

Также, поскольку из условий (2.33) известны ∇-производные полей, удобно записывать закон преобразования как

$$\begin{gathered}\delta^\star_Q f=-\epsilon\nabla\mathbf{f}|_{\theta\to0}-\bar{\epsilon}\overline{\nabla}\mathbf{f}|_{\theta\to0}-H\dot{f},\\ H=\mathrm{i}\left[\epsilon\boldsymbol{\psi}\nabla\bar{\boldsymbol{\psi}}+\bar{\epsilon}\bar{\boldsymbol{\psi}}\overline{\nabla}\boldsymbol{\psi}\right]|_{\theta\to0}=2\mathrm{i}\frac{\epsilon\psi\mathcal{D}_t\bar{q}-\bar{\epsilon}\bar{\psi}\mathcal{D}_tq}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_tq\mathcal{D}_t\bar{q}}}.\end{gathered} \tag{2.39}$$

Преобразования физических переменных $\left(q,\ \bar{q},\ \psi,\ \bar{\psi}\right)$ и их существенных комбинаций $(\mathcal{E},\ \mathcal{D}_tq,\ \mathcal{D}_t\bar{q})$ имеют вид

$$\begin{aligned}&\delta^\star_Q q=2\mathrm{i}\epsilon\psi-H\dot{q},\ \delta^\star_Q\psi=-2\bar{\epsilon}\frac{\mathcal{D}_tq}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_tq\mathcal{D}_t\bar{q}}}-H\dot{\psi},\\ &\delta^\star_Q\bar{q}=2\mathrm{i}\bar{\epsilon}\bar{\psi}-H\dot{\bar{q}},\ \delta^\star_Q\bar{\psi}=-2\epsilon\frac{\mathcal{D}_t\bar{q}}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_tq\mathcal{D}_t\bar{q}}}-H\dot{\bar{\psi}},\\ &\delta^\star_Q\mathcal{D}_tq=2\mathrm{i}\epsilon\mathcal{D}_t\psi-4\mathrm{i}\frac{\epsilon\mathcal{D}_t\psi\mathcal{D}_t\bar{q}+\bar{\epsilon}\mathcal{D}_t\bar{\psi}\mathcal{D}_tq}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_tq\mathcal{D}_t\bar{q}}}\mathcal{D}_tq-H\partial_t\mathcal{D}_tq,\\ &\delta^\star_Q\mathcal{D}_t\bar{q}=2\mathrm{i}\bar{\epsilon}\mathcal{D}_t\bar{\psi}-4\mathrm{i}\frac{\epsilon\mathcal{D}_t\psi\mathcal{D}_t\bar{q}+\bar{\epsilon}\mathcal{D}_t\bar{\psi}\mathcal{D}_tq}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_tq\mathcal{D}_t\bar{q}}}\mathcal{D}_t\bar{q}-H\partial_t\mathcal{D}_t\bar{q},\\ &\delta^\star_Q\mathcal{E}=-\partial_t\left[\mathcal{E}H\right]+4\mathrm{i}\mathcal{E}\frac{\epsilon\mathcal{D}_t\psi\mathcal{D}_t\bar{q}+\bar{\epsilon}\mathcal{D}_t\bar{\psi}\mathcal{D}_tq}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_tq\mathcal{D}_t\bar{q}}}.\end{aligned} \tag{2.40}$$

С помощью этих преобразований можно вычислить вариацию анзаца лагранжиана $\mathcal{L}_4\ =\ \mathcal{E}F(\mathcal{D}_tq\mathcal{D}_t\bar{q})$:

$$\delta^\star_Q\mathcal{L}_4=-\partial_t\left[H\mathcal{L}_4\right]+2\mathrm{i}\left(\epsilon\dot{\psi}\mathcal{D}_t\bar{q}+\bar{\epsilon}\dot{\bar{\psi}}\mathcal{D}_tq\right)\left[F'+\frac{2F-4F'\mathcal{D}_tq\mathcal{D}_t\bar{q}}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_tq\mathcal{D}_t\bar{q}}}\right]. \tag{2.41}$$

(здесь штрих обозначает дифференцирование по $\mathcal{D}_tq\mathcal{D}_t\bar{q}$). Первое слагаемое в данной вариации является полной производной (чем объяснется выбор записи преобразований (2.39)), второе равно нулю, когда $F \sim 1 + \sqrt{1 - 4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}}$. Такая функция вполне согласуется с ожидаемой в бозонном пределе. Таким образом, можно выписать действие, инвариантное относительно ненарушенной и спонтанно нарушенной суперсимметрии, и имеющее требуемый бозонный предел (2.12):

$$S_4 = \int dt \mathcal{L}_4 = -m_0 \int dt \mathcal{E} \left[1 + \sqrt{1 - 4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}} \right], \quad \mathcal{E} = 1 + \left(\dot{\psi}\bar{\psi} + \dot{\bar{\psi}}\psi \right). \tag{2.42}$$

Также с фактор-пространством (2.21) связаны преобразования автоморфизмов T, $\overline{T}$. Их можно переписать для компонент $f = \mathbf{f}|_{\theta \to 0}$ в активной форме:

$$\begin{aligned} \delta^\star_T f &= \delta_T \mathbf{f}|_{\theta\to 0} - \delta t \partial_t \mathbf{f}|_{\theta\to 0} - \left(\delta\theta D\mathbf{f} + \delta\bar{\theta}\overline{D}\mathbf{f} \right)|_{\theta\to 0} = \\ &= \delta_T \mathbf{f}|_{\theta\to 0} + \mathrm{i} \left(b\bar{\psi}\nabla\mathbf{f} - \bar{b}\psi\overline{\nabla}\mathbf{f} \right)|_{\theta\to 0} + G\dot{f}, \\ G &= 2\mathrm{i} \left(b\bar{q} - \bar{b}q \right) + 2\psi\bar{\psi} \frac{b\mathcal{D}_t\bar{q} + \bar{b}\mathcal{D}_t q}{1 + \sqrt{1 - 4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}}}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Тогда преобразования компонент q, $\bar{q}$, ψ, $\bar{\psi}$, а также $\mathcal{E}$ и ковариантных производных имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta^\star_T q &= -\mathrm{i}bt - b\psi\bar{\psi} + G\dot{q}, \ \delta^\star_T \psi = \frac{-2\mathrm{i}\bar{b}\psi\mathcal{D}_t q}{1 + \sqrt{1 - 4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}}} + G\dot{\psi}, \\ \delta^\star_T \mathcal{D}_t q &= -\mathrm{i}b\mathcal{E}^{-1} - b\mathcal{E}^{-1}\partial_t \left(\psi\bar{\psi} \right) - 2\mathrm{i} \left(\bar{b}\mathcal{D}_t q - b\mathcal{D}_t\bar{q} \right) \mathcal{D}_t q + \\ &+ 2\mathrm{i} \left(\mathcal{E} - 1 \right) \frac{\bar{b}\mathcal{D}_t q - b\mathcal{D}_t \bar{q}}{1 + \sqrt{1 - 4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}}} \mathcal{D}_t q + 2\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \left(\psi\bar{\psi} \right) \frac{\bar{b}\mathcal{D}_t q + b\mathcal{D}_t \bar{q}}{1 + \sqrt{1 - 4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}}}, \\ \delta^\star_T \mathcal{E} &= -2\mathrm{i} \left(b\dot{\bar{q}} - \bar{b}\dot{q} \right) - 2\partial_t \left(\psi\bar{\psi} \right) \frac{b\mathcal{D}_t\bar{q} + \bar{b}\mathcal{D}_t q}{1 + \sqrt{1 - 4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}}} - \\ &- 2\mathrm{i}(\mathcal{E} - 1) \frac{\bar{b}\mathcal{D}_t q - b\mathcal{D}_t \bar{q}}{1 + \sqrt{1 - 4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}}} + \partial_t \left[G\mathcal{E} \right]. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Таким образом, можно выписать закон преобразования для анзаца лагранжиана. Собирая члены с тремя различными комбинациями параметров преобразования, можно получить

$$\begin{aligned} \delta^\star_T \left[\mathcal{E} F(\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}) \right] &= \partial_t \left[G\mathcal{E} F(\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}) \right] + \\ &+ 2\mathrm{i} \left(\bar{b}\mathcal{D}_t q - b\mathcal{D}_t \bar{q} \right) \left[\frac{2F}{1 + \sqrt{1 - 4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}}} + F' \sqrt{1 - 4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}} \right] - \\ &- \partial_t \left(\psi\bar{\psi} \right) \left(b\mathcal{D}_t \bar{q} + \bar{b}\mathcal{D}_t q \right) \left[\frac{2F}{1 + \sqrt{1 - 4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}}} + F' \sqrt{1 - 4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}} \right] + \\ &+ 2\mathrm{i}\mathcal{E} \left(\bar{b}\mathcal{D}_t q - b\mathcal{D}_t \bar{q} \right) \frac{\sqrt{1 - 4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}}}{1 + \sqrt{1 - 4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}}} \left[F - 2\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q} F' \right]. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Первое слагаемое в этой вариации является полной производной; слагаемое с $\mathcal{E} \left(\bar{b}\mathcal{D}_t q - b\mathcal{D}_t \bar{q} \right) = \left(\bar{b}\dot{q} - b\dot{\bar{q}} \right)$ может быть таковой, если коэффициент при нем - константа. Другие два слагаемых должны быть обращены в ноль выбором функции F. Условия, следующие из коэффициентов при $\partial_t \left(\psi\bar{\psi} \right) \left(b\mathcal{D}_t \bar{q} + \bar{b}\mathcal{D}_t q \right)$ и $\left(\bar{b}\mathcal{D}_t q - b\mathcal{D}_t \bar{q} \right)$ совпадают, и функция

F должна удовлетворять двум соотношениям

$$\frac{2F}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar q}} + F'\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar q} = 0,$$
$$\frac{\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar q}}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar q}}\left[F - 2\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar q F'\right] = \text{const}. \tag{2.46}$$

То, что нетривиальное решение двух уравнений существует, неочевидно. Тем не менее, известная функция $F \sim 1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar q}$ удовлетворяет обоим уравнениям. Вариация лагранжиана, определяющего действие (2.42), имеет вид

$$\delta^{\star}_{T}\mathcal{L}_4 = \partial_t\left[G\mathcal{L}_4\right] - 2\mathrm{i}m_0(\bar b \dot q - b\dot{\bar q}). \tag{2.47}$$

Таким образом, действие (2.42), фиксированное инвариантностью относительно суперсимметрий, инвариантно также и относительно автоморфизмов. Преобразования, связанные с T, $\overline{T}$, несколько сложнее (2.40): в отличие от ненарушенной суперсимметрии, в данном случае не удается записать преобразования так, чтобы заранее отделить часть, свертывающуюся в полную производную. Поэтому, с точки зрения фиксации действия, ненарушенная суперсимметрия удобнее. Кроме того, преобразования автоморфизмов отсутствуют в теориях Борна-Инфельда, так что инвариантность относительно Q- и S-суперсимметрий будет рассматриваться как основное требование к действию.

Стоит отметить, что в данном случае можно сконструировать и суперполевое действие.

Лагранжиан релятивистской частицы в низшем приближении пропорционален $\dot q\dot{\bar q}$. Такие слагаемые воспроизводятся свободным действием для $N=2$, $d=1$ кирального мультиплета, если не учитывать все нелинейности в условиях и производных:

$$S_{free} \sim \int dt d\theta d\bar\theta D q \overline{D}\bar q. \tag{2.48}$$

Тогда можно предположить, что нужное релятивистское действие может быть воспроизведено интегралом вида

$$S_{4sf} = \int dt d\theta d\bar\theta \mathbf{F}(\nabla_t \mathbf{q} \nabla_t \bar{\mathbf{q}})\boldsymbol{\psi}\bar{\boldsymbol{\psi}}. \tag{2.49}$$

Бозонный предел такого действия может быть вычислен, если учесть, что обе производные, следующие из $d\theta d\bar\theta \to D\overline{D}$, должны действовать на $\boldsymbol{\psi}\bar{\boldsymbol{\psi}}$ (иначе в действии останутся фермионы). Более того, в бозонном пределе $\overline{D}\boldsymbol{\psi} = \overline{\nabla}\boldsymbol{\psi}$. Таким образом,

$$S_{4sf}|_{bos} = \int dt d\theta d\bar\theta \mathbf{F}(\nabla_t \mathbf{q} \nabla_t \bar{\mathbf{q}})\boldsymbol{\psi}\bar{\boldsymbol{\psi}}|_{bos} \to \int dt \frac{4\dot q\dot{\bar q}}{\left(1+\sqrt{1-4\dot q\dot{\bar q}}\right)^2}F. \tag{2.50}$$

Очевидно, при $\mathbf{F} = 1 + \sqrt{1 - 4\nabla_t \mathbf{q} \nabla_t \bar{\mathbf{q}}}$ лагранжиан сводится к $1 - \sqrt{1 - 4\dot{q}\dot{\bar{q}}}$, т.е. к лагранжиану релятивистской частицы (с точностью до константы, благодаря которой лагранжиан пропорционален $\dot{q}\dot{\bar{q}}$ в низшем приближении). Точное вычисление интеграла приводит к действию

$$\begin{aligned} S_4 &= \int dt \left[1 - \sqrt{1 - 4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}} - \mathrm{i}\left(1 + \sqrt{1 - 4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}}\right)\left(\dot{\psi}\bar{\psi} + \dot{\bar{\psi}}\psi\right)\right] = \\ &= \int dt \left[2 - \mathcal{E}\left(1 + \sqrt{1 - 4\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Таким образом, суперполевое действие приводит к нужному лагранжиану (с точностью до константы), и можно быть уверенным, что оно, как и компонентное, также инвариантно относительно спонтанно нарушенной суперсимметрии. Однако, суперполевое действие, в отличие от компонентного, не имеет структуры, делающей его инвариантность относительно нарушенной суперсимметрии очевидной (например, оно не является интегралом от произведения форм Картана).

2.4. Уравнения движения для суперчастицы со спонтанным нарушением суперсимметрии $N = 4 \to N = 2$ и формы Картана

Действие для частицы в $2+1$ - пространстве-времени, сформулированное ранее, имеет нетривиальное свойство: оно зависит от фермионов только через комбинацию $\mathcal{E} = 1 + \mathrm{i}\left(\dot{\psi}\bar{\psi} + \dot{\bar{\psi}}\psi\right)$, ковариантизующей меру интегрирования $dt\,\mathcal{E}$ и производные бозонных полей $\mathcal{D}_t = \mathcal{E}^{-1}\partial_t$, и при доказательстве его инвариантности относительно ненарушенной и спонтанно нарушенной суперсимметрии непосредственно использовались лишь трансформационные свойства объекта $\mathcal{E}$. Данное обстоятельство может рассматриваться как признак того, что существуют обобщения исходного действия на высшие суперсимметрии.

Существенной особенностью системы со спотнанно нарушенной $N = 4$, $d = 1$ суперсимметрией является то, что компоненты, описывающие ее, принадлежат к киральному мультиплету $N = 2$, $d = 1$ суперсимметрии, в котором отсутствуют вспомогательные поля. Однако, они присутствуют киральных мультиплетах $N = 4$, $d = 1$ и $N = 8$, $d = 1$ суперсимметрии, которым будут принадлежать компоненты в естественных обобщениях действия (2.42), описывающих нарушения суперсимметрии $N = 8 \to N = 4$ и $N = 16 \to N = 8$. Таким образом, для последовательного обобщения действия (2.42) необходим способ строить уравнения движения для вспомогательных полей.

Для поиска этих уравнений является существенным то, что уравнения движения, следующие из бозонного действия (2.12) $\ddot{q} = 0$, $\ddot{\bar{q}} = 0$, могут быть инвариантным образом переформулированы как $\omega_T = 0$, $\bar{\omega}_T = 0$ (2.9). Естественным представляется искать ковариантные уравнения движения суперсимметричных систем также в виде условий на формы Картана.

Вначале нужно вычислить уравнения движения, следующие из лагранжиана (2.42). Из вариации действия с учетом того, что оно зависит от ψ, $\dot{\psi}$ через $\mathcal{E}$, следует

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mathcal{D}_t q}{\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar{q}}}\right]=0,\ \dot{\psi}\frac{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar{q}}}{\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar{q}}}+\frac{\partial}{\partial t}\left[\psi\frac{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar{q}}}{\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar{q}}}\right]=0. \tag{2.52}$$

Очевидно, первое уравнение (и комплексно сопряженное ему) требуют, что $\partial_t\mathcal{D}_t q = 0$. Тогда из второго $\dot{\psi} = 0$. Таким образом, (2.52) эквивалентны $\ddot{q} = 0$, $\ddot{\bar{q}} = 0$, $\dot{\psi} = 0$, $\dot{\bar{\psi}} = 0$.

Формы Картана для частицы с $N = 4 \to N = 2$ суперсимметрией, с учетом упрощений (2.33), имеют вид:

$$\omega_S=\frac{d\boldsymbol{\psi}+\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}\,d\bar{\theta}}{\sqrt{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}}=\frac{\triangle t\nabla_t\boldsymbol{\psi}+d\theta\nabla\boldsymbol{\psi}+d\bar{\theta}\left(\overline{\nabla}\boldsymbol{\psi}+\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}\right)}{\sqrt{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}}\to\triangle t\frac{\nabla_t\boldsymbol{\psi}}{\sqrt{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}}. \tag{2.53}$$

Очевидно, что $\omega_S|_{\theta\to 0} = 0$ эквивалентно $\dot{\psi} = 0$. Форма ω_T разлагается на проекции аналогичным образом:

$$\omega_T=\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}=\frac{\triangle t\nabla_t\boldsymbol{\lambda}+d\theta\nabla\boldsymbol{\lambda}+d\bar{\theta}\overline{\nabla}\boldsymbol{\lambda}}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}\to\triangle t\frac{\nabla_t\boldsymbol{\lambda}}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}+2d\theta\frac{1+\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}\nabla_t\psi. \tag{2.54}$$

Проекция при $d\bar{\theta}$ исчезает, так как $\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{i}\overline{\nabla}\boldsymbol{\psi}$ и, следовательно, $\overline{\nabla}\boldsymbol{\lambda} \to 0$. По той же причине $\nabla\boldsymbol{\lambda} \sim \nabla_t\boldsymbol{\psi}$, и ковариантные компонентные уравнения, эквивалентные $\ddot{q} = 0$, $\ddot{\bar{q}} = 0$, $\dot{\psi} = 0$, $\dot{\bar{\psi}} = 0$, имеют вид $\omega_T|_{\theta\to 0} = 0$, $\bar{\omega}_T|_{\theta\to 0} = 0$, $\omega_S|_{\theta\to 0} = 0$, $\bar{\omega}_S|_{\theta\to 0} = 0$.

Также существенно, что $\nabla_t \sim \{\nabla, \overline{\nabla}\}$ и поэтому из $\dot{\boldsymbol{\psi}} = 0$ следует $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0$. Таким образом, суперполевые уравнения $\omega_S = 0$, $\bar{\omega}_S = 0$ могут рассматриваться как основные.

Можно ожидать, что необходимые уравнения могут быть получены из форм при генераторах нарушенной суперсимметрии и в более общих случаях.

2.5. Действие для частицы со спонтанным нарушением $N=8 \to N=4$

Супералгебру с бозонной подалгеброй (2.2), восемью суперзарядами и двумя центральными зарядами можно постулировать в виде

$$\begin{gathered}
\left[T,\overline{T}\right]=-2J,\ [J,T]=T,\ \left[J,\overline{T}\right]=-\overline{T},\ [J,Z]=Z,\ \left[J,\overline{Z}\right]=-\overline{Z},\\
[T,P]=-Z,\ \left[T,\overline{Z}\right]=-2P,\ \left[\overline{T},P\right]=\overline{Z},\ \left[\overline{T},Z\right]=2P;\\
\left\{Q^a,\overline{Q}_b\right\}=2\delta^a_bP,\ \left\{S^a,\overline{S}_b\right\}=2\delta^a_bP,\ \left\{Q^a,S^b\right\}=2\epsilon^{ab}Z,\ \left\{\overline{Q}_a,\overline{S}_b\right\}=-2\epsilon_{ab}\overline{Z};\\
[J,Q^a]=\tfrac{1}{2}Q^a,\quad \left[J,\overline{Q}_a\right]=-\tfrac{1}{2}\overline{Q}_a,\quad \left[T,\overline{Q}_a\right]=S_a,\quad \left[\overline{T},Q^a\right]=\overline{S}^a,\\
[J,S^a]=\tfrac{1}{2}S^a,\quad \left[J,\overline{S}_a\right]=-\tfrac{1}{2}\overline{S}_a,\quad \left[T,\overline{S}_a\right]=-Q_a,\quad \left[\overline{T},S^a\right]=-\overline{Q}^a.
\end{gathered}\tag{2.55}$$

Здесь индексы $a,b=1,2$ принадлежат спинорному представлению $SU(2)$.

Элемент фактор-пространства

$$g=e^{\mathrm{i}tP}e^{\mathrm{i}(\mathbf{q}Z+\bar{\mathbf{q}}\overline{Z})}e^{\theta_aQ^a+\bar\theta^a\overline{Q}_a}e^{\boldsymbol{\psi}_aS^a+\bar{\boldsymbol{\psi}}^a\overline{S}_a}e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{\Lambda}T+\overline{\boldsymbol{\Lambda}T})}\tag{2.56}$$

позволяет вычислить законы преобразования $g_0g=g'h$ относительно суперсимметрий Q, S и автоморфизмов T, $\overline{T}$

- $g_0=e^{\epsilon_aQ^a+\bar\epsilon^a\overline{Q}_a}\Rightarrow \delta t=\mathrm{i}\left(\epsilon_a\bar\theta^a+\bar\epsilon^a\theta_a\right),\ \delta\theta_a=\epsilon_a,\ \delta\bar\theta^a=\bar\epsilon^a;$
- $g_0=e^{\varepsilon_aS^a+\bar\varepsilon^a\overline{S}_a}\Rightarrow \{\delta t=\mathrm{i}\left(\varepsilon_a\bar{\boldsymbol{\psi}}^a+\bar\varepsilon^a\boldsymbol{\psi}_a\right),\ \delta\boldsymbol{\psi}_a=\varepsilon_a,\ \delta\bar{\boldsymbol{\psi}}^a=\bar\varepsilon^a,\ \delta\mathbf{q}=2\mathrm{i}\varepsilon^a\theta_a,\ \delta\bar{\mathbf{q}}=2\mathrm{i}\bar\varepsilon^a\bar\theta_a;$
- $g_0=e^{\mathrm{i}(bT+\overline{bT})}\Rightarrow\begin{cases}\delta t=2\mathrm{i}(\bar b\,\mathbf{q}-b\,\bar{\mathbf{q}})+2\left(b\,\bar\theta^a\bar{\boldsymbol{\psi}}_a-\bar b\,\theta_a\boldsymbol{\psi}^a\right);\\ \delta q=-\mathrm{i}b\,t+b\,\left(\boldsymbol{\psi}_a\bar{\boldsymbol{\psi}}^a-\theta_a\bar\theta^a\right),\ \delta\bar q=\mathrm{i}\bar b\,t+\bar b\,\left(\boldsymbol{\psi}_a\bar{\boldsymbol{\psi}}^a-\theta_a\bar\theta^a\right),\\ \delta\theta_a=\mathrm{i}b\,\bar{\boldsymbol{\psi}}_a,\ \delta\bar\theta^a=\mathrm{i}\bar b\,\boldsymbol{\psi}^a,\ \delta\boldsymbol{\psi}_a=-\mathrm{i}b\,\bar\theta_a,\ \delta\bar{\boldsymbol{\psi}}^a=-\mathrm{i}\bar b\,\theta^a,\\ \delta\boldsymbol{\lambda}=b\,-\bar b\,\boldsymbol{\lambda}^2,\ \delta\bar{\boldsymbol{\lambda}}=\bar b\,-b\,\bar{\boldsymbol{\lambda}}^2.\end{cases}$

Здесь $\boldsymbol{\lambda}$ связаны с $\boldsymbol{\Lambda}$ соотношениями (2.22).

Из (2.56) также следуют формы Картана

$$g^{-1}dg=\mathrm{i}\omega_PP+\mathrm{i}\omega_ZZ+\mathrm{i}\bar\omega_Z\overline{Z}+(\omega_Q)_aQ^a+(\bar\omega_Q)^a\overline{Q}_a+(\omega_S)_aS^a+(\bar\omega_S)^a\overline{S}_a+\mathrm{i}\omega_TT+\mathrm{i}\bar\omega_T\overline{T}\Rightarrow$$

$$\begin{gathered}
\omega_P=\tfrac{1}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}\left[\left(1+\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}\right)\triangle t+2\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}\triangle\bar{\mathbf{q}}-\bar{\boldsymbol{\lambda}}\triangle\mathbf{q}\right],\\
\omega_Z=\tfrac{1}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}\left[\triangle\mathbf{q}-\boldsymbol{\lambda}^2\triangle\bar{\mathbf{q}}+\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}\triangle t\right],\qquad \bar\omega_Z=\tfrac{1}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}\left[\triangle\bar{\mathbf{q}}-\bar{\boldsymbol{\lambda}}^2\triangle\mathbf{q}-\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\lambda}}\triangle t\right],\\
\omega_T=\tfrac{d\boldsymbol{\lambda}}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}},\qquad \bar\omega_T=\tfrac{d\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}},\qquad \omega_J=\mathrm{i}\tfrac{\boldsymbol{\lambda}d\bar{\boldsymbol{\lambda}}-d\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}},\\
(\omega_Q)_a=\tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}}\left[d\theta_a-\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}d\bar{\boldsymbol{\psi}}_a\right],\qquad (\bar\omega_Q)^a=\tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}}\left[d\bar\theta^a-\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\lambda}}d\boldsymbol{\psi}^a\right],\\
(\omega_S)_a=\tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}}\left[d\boldsymbol{\psi}_a+\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}d\bar\theta_a\right],\qquad (\bar\omega_S)^a=\tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}}\left[d\bar{\boldsymbol{\psi}}^a+\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\lambda}}d\theta^a\right].
\end{gathered}\tag{2.57}$$

Бозонные формы (2.8) и в этом случае обобщаются заменой дифференциалов $dt \to \triangle t,\ d\mathbf{q} \to \triangle\mathbf{q},\ d\bar{\mathbf{q}} \to \triangle\bar{\mathbf{q}}$, где

$$\begin{gathered}\triangle t = dt - \mathrm{i}\left(\bar\theta^a d\theta_a + \theta_a d\bar\theta^a + \bar{\boldsymbol{\psi}}^a d\boldsymbol{\psi}_a + \boldsymbol{\psi}_a d\bar{\boldsymbol{\psi}}^a\right),\\ \triangle\mathbf{q} = d\mathbf{q} - 2\mathrm{i}\boldsymbol{\psi}^a d\theta_a,\ \triangle\bar{\mathbf{q}} = d\bar{\mathbf{q}} - 2\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\psi}}^a d\bar\theta_a.\end{gathered} \tag{2.58}$$

Ковариантные производные определяются соотношением

$$\begin{gathered}dF = dt\tfrac{\partial F}{\partial t} + d\theta_a\tfrac{\partial F}{\partial\theta_a} + d\bar\theta^a\tfrac{\partial F}{\partial\bar\theta^a} \equiv \triangle t\nabla_t F + d\theta_a\nabla^a F + d\bar\theta^a\overline{\nabla}_a F \Rightarrow\\ D^a = \tfrac{\partial}{\partial\theta_a} - \mathrm{i}\bar\theta^a\partial_t,\ \overline{D}_a = \tfrac{\partial}{\partial\bar\theta^a} - \mathrm{i}\theta_a\partial_t,\\ \nabla^a = D^a - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}_c D^a\bar\psi^c + \bar{\boldsymbol{\psi}}^c D^a\boldsymbol{\psi}_c\right)\nabla_t = D^a - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}_c\nabla^a\bar{\boldsymbol{\psi}}^c + \bar{\boldsymbol{\psi}}^c\nabla^a\boldsymbol{\psi}_c\right)\partial_t,\\ \overline{\nabla}_a = \overline{D}_a - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}_c\overline{D}_a\bar{\boldsymbol{\psi}}^c + \bar{\boldsymbol{\psi}}^c\overline{D}_a\boldsymbol{\psi}_c\right)\nabla_t = \overline{D}_a - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}_c\overline{\nabla}_a\bar{\boldsymbol{\psi}}^c + \bar{\boldsymbol{\psi}}^c\overline{\nabla}_a\boldsymbol{\psi}_c\right)\partial_t,\\ \nabla_t = E^{-1}\partial_t,\ E = 1 - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}_c\dot{\bar{\boldsymbol{\psi}}}^c + \bar{\boldsymbol{\psi}}^c\dot{\boldsymbol{\psi}}_c\right),\ E^{-1} = 1 + \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}_c\nabla_t\bar{\boldsymbol{\psi}}^c + \bar{\boldsymbol{\psi}}^c\nabla_t\psi_c\right).\end{gathered} \tag{2.59}$$

Коммутационные соотношения этих производных имеют вид

$$\begin{gathered}\left\{D^a,\, D^b\right\} = \left\{\overline{D}_a,\, \overline{D}_b\right\} = 0,\ \left\{D^a,\, \overline{D}_b\right\} = -2\mathrm{i}\delta^a_b\partial_t,\\ \left\{\nabla^a, \nabla^b\right\} = -2\mathrm{i}\left(\nabla^a\boldsymbol{\psi}_c\nabla^b\bar{\boldsymbol{\psi}}^c + \nabla^a\bar{\boldsymbol{\psi}}^c\nabla^b\boldsymbol{\psi}_c\right)\nabla_t,\\ \left\{\overline{\nabla}_a, \overline{\nabla}_b\right\} = -2\mathrm{i}\left(\overline{\nabla}_a\boldsymbol{\psi}_c\overline{\nabla}_b\bar{\boldsymbol{\psi}}^c + \overline{\nabla}_a\bar{\boldsymbol{\psi}}^c\overline{\nabla}_b\boldsymbol{\psi}_c\right)\nabla_t,\\ \left[\nabla_t, \nabla^a\right] = -2\mathrm{i}\left(\nabla_t\boldsymbol{\psi}_c\nabla^a\bar{\boldsymbol{\psi}}^c + \nabla_t\bar{\boldsymbol{\psi}}^c\nabla^a\boldsymbol{\psi}_c\right)\nabla_t,\\ \left[\nabla_t, \overline{\nabla}_a\right] = -2\mathrm{i}\left(\nabla_t\boldsymbol{\psi}_c\overline{\nabla}_a\bar{\boldsymbol{\psi}}^c + \nabla_t\bar{\boldsymbol{\psi}}^c\overline{\nabla}_a\boldsymbol{\psi}_c\right)\nabla_t,\\ \left\{\nabla^a, \overline{\nabla}_b\right\} = -2\mathrm{i}\delta^a_b\nabla_t - 2\mathrm{i}\left(\nabla^a\boldsymbol{\psi}_c\overline{\nabla}_b\bar{\boldsymbol{\psi}}^c + \nabla^a\bar{\boldsymbol{\psi}}^c\overline{\nabla}_b\boldsymbol{\psi}_c\right)\nabla_t.\end{gathered} \tag{2.60}$$

Ранее накладывавшиеся условия $\omega_Z = 0,\ \bar\omega_Z = 0$ и в данном случае приводят к связям между суперполями и условиям киральности:

$$\begin{gathered}\nabla_t\mathbf{q} = -\mathrm{i}\tfrac{\boldsymbol{\lambda}}{1+\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}},\ \nabla_t\bar{\mathbf{q}} = \mathrm{i}\tfrac{\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{1+\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}},\\ \nabla^a\bar{\mathbf{q}} = 0,\ \overline{\nabla}_a\mathbf{q} = 0,\ \nabla^a\mathbf{q} + 2\mathrm{i}\boldsymbol{\psi}^a = 0,\ \overline{\nabla}_a\bar{\mathbf{q}} - 2\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\psi}}_a = 0.\end{gathered} \tag{2.61}$$

Как и в случае нарушения $N = 4 \to N = 2$, из этих условий и алгебры производных следуют дополнительные соотношения. Так, из $\nabla^a\bar{\mathbf{q}} = 0$ следует, что $\left\{\nabla^a, \nabla^b\right\}\bar{\mathbf{q}} = 0$, и, поскольку $\nabla_t\bar{\mathbf{q}} \neq 0$, $-2\mathrm{i}\left(\nabla^a\boldsymbol{\psi}_c\nabla^b\bar{\boldsymbol{\psi}}^c + \nabla^a\bar{\boldsymbol{\psi}}^c\nabla^b\boldsymbol{\psi}_c\right) = 0$ и $\left\{\nabla^a, \nabla^b\right\} = 0$. Тогда, из действия этим антикоммутатором на $\mathbf{q}$ следует

$$\left\{\nabla^a, \nabla^b\right\}\mathbf{q} = -2\mathrm{i}\left(\nabla^a\boldsymbol{\psi}^b + \nabla^b\boldsymbol{\psi}^a\right) = 0 \Rightarrow \nabla^a\boldsymbol{\psi}^b = -\epsilon^{ab}\mathbf{A},\ \overline{\nabla}_a\bar{\boldsymbol{\psi}}_b = -\epsilon_{ab}\overline{\mathbf{A}}. \tag{2.62}$$

С учетом (2.62) правой части антикоммутатора $\left\{\nabla^a, \nabla^b\right\}$ можно получить, что

$$\nabla^{(a}\boldsymbol{\psi}_c\nabla^{b)}\bar{\boldsymbol{\psi}}^c = 0,\ \nabla^a\boldsymbol{\psi}_c = \delta^a_c\mathbf{A} \Rightarrow \nabla^{(b}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a)} = 0,\ \nabla^a\bar{\boldsymbol{\psi}}^b = \epsilon^{ab}\mathbf{B},\ \overline{\nabla}_a\boldsymbol{\psi}_b = -\epsilon_{ab}\overline{\mathbf{B}}. \tag{2.63}$$

Переменные $\mathbf{A}$, $\overline{\mathbf{A}}$, $\mathbf{B}$, $\overline{\mathbf{B}}$ не являются независимыми. Выражения $\left\{\nabla^a,\, \overline{\nabla}_b\right\}\mathbf{q}$, $\left\{\nabla^a,\, \overline{\nabla}_b\right\}\bar{\mathbf{q}}$, упрощенные с учетом (2.62), (2.63), приводят к

$$\overline{\mathbf{B}} = \left(1 + \mathbf{A}\overline{\mathbf{A}} + \mathbf{B}\overline{\mathbf{B}}\right)\nabla_t\mathbf{q},\ \mathbf{B} = \left(1 + \mathbf{A}\overline{\mathbf{A}} + \mathbf{B}\overline{\mathbf{B}}\right)\nabla_t\bar{\mathbf{q}}. \tag{2.64}$$

Эти уравнения имеют решение:

$$\overline{\mathbf{B}} = \frac{2(1+\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}})\nabla_t\mathbf{q}}{1+\sqrt{1-4(1+\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}})\nabla_t\mathbf{q}\nabla_t\bar{\mathbf{q}}}}. \tag{2.65}$$

Таким образом, и в данном случае условия киральности задают неприводимый мультиплет с двумя вспомогательными полями, в качестве которых разумно выбрать $A = \mathbf{A}|_{\theta\to 0}$, $\overline{A} = \overline{\mathbf{A}}|_{\theta\to 0}$. Они непосредственно обобщают вспомогательные поля обычного кирального мультиплета $D^aD_a\mathbf{q}|_{\theta\to 0}$, $\overline{D}_a\overline{D}^a\bar{\mathbf{q}}|_{\theta\to 0}$.

С помощью соотношений (2.62), (2.63) можно переписать формы $(\omega_S)_a$, $(\bar{\omega}_S)^a$:

$$(\omega_S)_a = \frac{\triangle t\nabla_t\boldsymbol{\psi}_a + d\bar{\theta}_a\left(\overline{\mathbf{B}} + \mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}\right) + d\theta_a\mathbf{A}}{\sqrt{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}},\ (\bar{\omega}_S)^a = \frac{\triangle t\nabla_t\bar{\boldsymbol{\psi}}^a + d\bar{\theta}^a\overline{\mathbf{A}} - d\theta_a\left(\mathbf{B} - \mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\lambda}}\right)}{\sqrt{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}}. \tag{2.66}$$

Данные формы существенно отличаются от форм (2.53) наличием проекций при $d\theta^a$, $d\bar{\theta}_a$. Так как ковариантные уравнения движения для частицы с нарушением суперсимметрии $N = 4 \to N = 2$ имеют вид $\omega_S = 0$, $\bar{\omega}_S = 0$, можно предположить, что уравнения вспомогательных полей даются именно этими проекциями: $A = 0$, $\overline{A} = 0$.

Получаемые уравнения самосогласованы: при $A = 0$, $\theta \to 0$

$$\nabla_t\mathbf{q}|_{\theta\to 0} = \frac{\overline{B}}{1+B\overline{B}},\ \overline{B} = -\mathrm{i}\lambda \ \Rightarrow\ \nabla_t\mathbf{q}|_{\theta\to 0} = -\mathrm{i}\frac{\lambda}{1+\lambda\bar{\lambda}}, \tag{2.67}$$

что также следует из $\omega_Z = 0$, $\bar{\omega}_Z = 0$.

Стоит отметить, что наложение условий $\omega_S|_{d\theta} = 0$, $\omega_S|_{d\bar{\theta}} = 0$ приводит к аналогичным результатам: $\nabla^a\boldsymbol{\psi}^b = 0, \overline{\nabla}_b\boldsymbol{\psi}_a = -\mathrm{i}\epsilon_{ab}\boldsymbol{\lambda}$. Хотя при использовании таких условий не видно, что симметричные по a, b части $\nabla^a\boldsymbol{\psi}^b$ и $\overline{\nabla}_a\boldsymbol{\psi}_b$ равны нулю в силу кинематических, а не динамических условий, это не меняет конечного результата и не сказывается на вычислении законов преобразования. Поэтому имеет смысл использовать условия $\omega_S|_{d\theta} = 0$, $\omega_S|_{d\bar{\theta}} = 0$, не выделяя вспомогательные поля явно.

Поскольку уравнения движения для вспомогательных полей известны, можно сформулировать действие и доказать его инвариантность относительно ненарушенной и спонтанно нарушенной суперсимметрий.

Компоненты и ковариантную производную, действующую на них, можно определить соотношениями

$$
\begin{aligned}
& q = \mathbf{q}|_{\theta\to 0},\ \bar q = \bar{\mathbf{q}}|_{\theta\to 0}, \quad \psi_a = \boldsymbol{\psi}_a|_{\theta\to 0},\ \bar\psi^a = \bar{\boldsymbol{\psi}}^a|_{\theta\to 0}, \\
& \mathcal{D}_t = \mathcal{E}^{-1}\partial_t, \quad \mathcal{E} = 1 + \mathrm{i}\left(\dot\psi_c\bar\psi^c + \dot{\bar\psi}^c\psi_c\right),
\end{aligned}
\tag{2.68}
$$

аналогичными использованным в случае частицы с $N=4\to N=2$ суперсимметрией.

Тогда преобразования S-суперсимметрии компонент $\delta^\star_S f| = \delta_S f| - \delta_S t\dot f|$ и их ковариантных производных могут быть записаны как

$$
\begin{aligned}
& \delta^\star_S q = -\mathrm{i}\left(\varepsilon_b\bar\psi^b + \bar\varepsilon^b\psi_b\right)\dot q,\ \delta^\star_S\bar q = -\mathrm{i}\left(\varepsilon_b\bar\psi^b + \bar\varepsilon^b\psi_b\right)\dot{\bar q}, \\
& \delta^\star_S\psi_a = \varepsilon_a - \mathrm{i}\left(\varepsilon_b\bar\psi^b + \bar\varepsilon^b\psi_b\right)\dot\psi_a,\ \delta^\star_S\bar\psi^a = \bar\varepsilon^a - \mathrm{i}\left(\varepsilon_b\bar\psi^b + \bar\varepsilon^b\psi_b\right)\dot{\bar\psi}^a, \\
& \delta^\star_S\mathcal{D}_t q = -\mathrm{i}\left(\varepsilon_b\bar\psi^b + \bar\varepsilon^b\psi_b\right)\partial_t\mathcal{D}_t q,\ \delta^\star_S\mathcal{D}_t\bar q = -\mathrm{i}\left(\varepsilon_b\bar\psi^b + \bar\varepsilon^b\psi_b\right)\partial_t\mathcal{D}_t\bar q, \\
& \delta^\star_S\mathcal{E} = -\mathrm{i}\partial_t\left[\left(\varepsilon_b\bar\psi^b + \bar\varepsilon^b\psi_b\right)\mathcal{E}\right].
\end{aligned}
\tag{2.69}
$$

Они не зависят от наложенных уравнений движения.

Соотношения (2.69) повторяют преобразования (2.35), (2.36) с учетом замены $\varepsilon\bar\psi + \bar\varepsilon\psi \to \varepsilon_b\bar\psi^b + \bar\varepsilon^b\psi_b$. Очевидно, анзац для лагранжиана и в этом случае имеет вид $\mathcal{E}F\left(\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar q\right)$.

Преобразования ненарушенной суперсимметрии всех компонент следуют из

$$
\delta^\star_Q\mathbf{f}|_{\theta\to 0} = -\left(\epsilon_c D^c + \bar\epsilon^c\overline{D}_c\right)\mathbf{f}|_{\theta\to 0} = -\left(\epsilon_c\nabla^c + \bar\epsilon^c\overline{\nabla}_c\right)\mathbf{f}|_{\theta\to 0} - H\cdot\partial_t\mathbf{f}|_{\theta\to 0}.
\tag{2.70}
$$

С учетом уравнений движения для вспомогательных полей

$$
A = 0,\ \overline{A} = 0,\ B = \frac{2\mathcal{D}_t\bar q}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar q}},\ \overline{B} = \frac{2\mathcal{D}_t q}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar q}},
\tag{2.71}
$$

величина H может приведена к виду

$$
\begin{aligned}
H &= +\mathrm{i}\bar\epsilon^b\left(\bar{\boldsymbol{\psi}}^c\overline{\nabla}_b\boldsymbol{\psi}_c + \boldsymbol{\psi}_c\overline{\nabla}_b\bar{\boldsymbol{\psi}}^c\right)|_{\theta,A,\overline{A}\to 0} + \mathrm{i}\epsilon_b\left(\bar{\boldsymbol{\psi}}^c\nabla^b\boldsymbol{\psi}_c + \boldsymbol{\psi}_c\nabla^b\bar{\boldsymbol{\psi}}^c\right)|_{\theta,A,\overline{A}\to 0} = \\
&= -2\mathrm{i}\frac{\epsilon^c\psi_c\mathcal{D}_t\bar q - \bar\epsilon_c\bar\psi^c\mathcal{D}_t q}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar q}}.
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

Преобразования существенных переменных и их комбинаций имеют вид

$$
\begin{aligned}
& \delta^\star_Q q = -2\mathrm{i}\epsilon^a\psi_a - H\dot q,\ \delta^\star_Q\psi_a = \frac{-2\bar\epsilon_a\mathcal{D}_t q}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar q}} - H\dot\psi_a, \\
& \delta^\star_Q\bar q = 2\mathrm{i}\bar\epsilon_a\bar\psi^a - H\dot{\bar q},\ \delta^\star_Q\bar\psi^a = \frac{2\epsilon^a\mathcal{D}_t\bar q}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar q}} - H\dot{\bar\psi}^a, \\
& \delta^\star_Q\mathcal{D}_t q = -2\mathrm{i}\epsilon^a\mathcal{D}_t\psi_a + 4\mathrm{i}\mathcal{D}_t q\frac{\epsilon^c\mathcal{D}_t\psi_c\mathcal{D}_t\bar q - \bar\epsilon_c\mathcal{D}_t\bar\psi^c\mathcal{D}_t q}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar q}} - H\partial_t\mathcal{D}_t q, \\
& \delta^\star_Q\mathcal{D}_t\bar q = 2\mathrm{i}\bar\epsilon_a\mathcal{D}_t\bar\psi^a + 4\mathrm{i}\mathcal{D}_t\bar q\frac{\epsilon^c\mathcal{D}_t\psi_c\mathcal{D}_t\bar q - \bar\epsilon_c\mathcal{D}_t\bar\psi^c\mathcal{D}_t q}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar q}} - H\partial_t\mathcal{D}_t\bar q, \\
& \delta^\star_Q\mathcal{E} = -\partial_t\left[\mathcal{E}H\right] - 4\mathrm{i}\frac{\epsilon^c\dot\psi_c\mathcal{D}_t\bar q - \bar\epsilon_c\dot{\bar\psi}^c\mathcal{D}_t q}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar q}}.
\end{aligned}
\tag{2.73}
$$

Они, очевидно, весьма схожи с преобразованиями (2.40). В соответствии с (2.73) вариация анзаца лагранжиана $\mathcal{L}_8 = \mathcal{E}F(\mathcal{D}_t q \mathcal{D}_t \bar{q})$ также схожа с (2.41)

$$\delta^\star_Q \mathcal{L}_8 = -\partial_t \left[\mathcal{E}HF\right] - 2\mathrm{i}\left(\epsilon^a \dot{\psi}_a \mathcal{D}_t\bar{q} - \bar{\epsilon}_a \dot{\bar{\psi}}^a \mathcal{D}_t q\right)\left[\frac{2F - 4F'\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar{q}}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar{q}}} + F'\right]. \tag{2.74}$$

Второе слагаемое, не являющееся полной производной, исчезает, если $F \sim 1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar{q}}$. Таким образом, действие имеет такую же структуру, что и действие для частицы с $N=4 \to N=2$ суперсимметрией (2.42)

$$S_8 = -m_0 \int dt\mathcal{E}\left[1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar{q}}\right],\ \mathcal{E} = 1 + \mathrm{i}\left(\dot{\psi}_c\bar{\psi}^c + \dot{\bar{\psi}}^c\psi_c\right). \tag{2.75}$$

Можно предположить, что действие, зафиксированное инвариантностью относительно двух суперсимметрий (2.75), также инвариантно и относительно автоморфизмов T, $\overline{T}$ из (2.56). Используя преобразования суперполей и t, θ_a, $\bar{\theta}^a$ в фактор-пространстве, а также соотношения на массовой поверхности (2.71), можно вычислить соответствующие преобразования компонент:

$$\begin{aligned}
\delta^\star_T \mathbf{f}|_{\theta\to0} &= \delta_T\mathbf{f}|_{\theta\to0} - \delta t\partial_t\mathbf{f}|_{\theta\to0} - \left(\delta\theta_a D^a\mathbf{f} + \delta\bar{\theta}^a\overline{D}_a\mathbf{f}\right)|_{\theta\to0} = \\
&= \delta_T\mathbf{f}|_{\theta\to0} - \delta t\partial_t\mathbf{f}|_{\theta\to0} - \delta\theta_a\nabla^a\mathbf{f}|_{\theta\to0} - \delta\bar{\theta}^a\overline{\nabla}_a\mathbf{f}|_{\theta\to0} - \\
&\quad -\mathrm{i}\delta\theta_a\left(\psi_b\nabla^a\bar{\psi}^b + \bar{\psi}^b\nabla^a\psi_b\right)\partial_t\mathbf{f}|_{\theta\to0} - \mathrm{i}\delta\bar{\theta}^a\left(\psi_b\overline{\nabla}_a\bar{\psi}^b + \bar{\psi}^b\overline{\nabla}_a\psi_b\right)\partial_t\mathbf{f}|_{\theta\to0} = \\
&= \delta_T\mathbf{f}|_{\theta\to0} - \mathrm{i}b\bar{\psi}_a\nabla^a\mathbf{f}|_{\theta\to0} - \mathrm{i}\bar{b}\psi^a\overline{\nabla}_a\mathbf{f}|_{\theta\to0} + G\dot{\mathbf{f}}|_{\theta\to0}, \\
G &= 2\mathrm{i}\left(b\bar{q} - \bar{b}q\right) + 2\psi_a\bar{\psi}^a\frac{b\mathcal{D}_t\bar{q} + \bar{b}\mathcal{D}_t q}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar{q}}}.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Тогда можно выписать преобразования компонент q, $\bar{q}$, ψ, $\bar{\psi}$, а также существенных элементов действия:

$$\begin{aligned}
\delta^\star_T q &= -\mathrm{i}bt - b\psi_a\bar{\psi}^a + G\dot{q},\ \delta^\star_T\psi_a = \frac{-2\mathrm{i}\bar{b}\psi_a\mathcal{D}_t q}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar{q}}} + G\dot{\psi}_a, \\
\delta^\star_T\mathcal{D}_t q &= -\mathrm{i}b\mathcal{E}^{-1} - b\mathcal{E}^{-1}\partial_t\left(\psi_a\bar{\psi}^a\right) - 2\mathrm{i}\left(\bar{b}\mathcal{D}_t q - b\mathcal{D}_t\bar{q}\right)\mathcal{D}_t q + \\
&\quad +2\mathrm{i}\left(\mathcal{E}-1\right)\frac{\bar{b}\mathcal{D}_t q - b\mathcal{D}_t\bar{q}}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar{q}}}\mathcal{D}_t q + 2\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\left(\psi_a\bar{\psi}^a\right)\frac{\bar{b}\mathcal{D}_t q + b\mathcal{D}_t\bar{q}}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar{q}}}, \\
\delta^\star_T\mathcal{E} &= -2\mathrm{i}\left(b\dot{\bar{q}} - \bar{b}\dot{q}\right) - 2\partial_t\left(\psi_a\bar{\psi}^a\right)\frac{b\mathcal{D}_t\bar{q} + \bar{b}\mathcal{D}_t q}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar{q}}} - \\
&\quad -2\mathrm{i}(\mathcal{E}-1)\frac{\bar{b}\mathcal{D}_t q - b\mathcal{D}_t\bar{q}}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar{q}}} + \partial_t\left[G\mathcal{E}\right].
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Вариация лагранжиана, определяющего действие (2.75), относительно этих преобразований имеет вид

$$\delta^\star_T\mathcal{L}_8 = \partial_t\left[G\mathcal{L}_8\right] - 2\mathrm{i}m_0(\bar{b}\dot{q} - b\dot{\bar{q}}). \tag{2.78}$$

Таким образом, действие (2.75) инвариантно также и относительно автоморфизмов.

2.6. Действие для частицы со спонтанным нарушением $N=16 \to N=8$

Алгебра $d=1$-суперсимметрии с двумя центральными зарядами и 16 суперзарядами может быть постулирована в виде

$$\begin{gathered}
\left[T,\overline{T}\right]=-2J,\ [J,T]=T,\ \left[J,\overline{T}\right]=-\overline{T},\ [J,Z]=Z,\ \left[J,\overline{Z}\right]=-\overline{Z},\\
[T,P]=-Z,\ \left[T,\overline{Z}\right]=-2P,\ \left[\overline{T},P\right]=\overline{Z},\ \left[\overline{T},Z\right]=2P; \qquad (2.79)\\
\left\{Q^{ia},\overline{Q}_{jb}\right\}=2\delta^a_b\delta^i_jP,\ \left\{S^{ia},\overline{S}_{jb}\right\}=2\delta^a_b\delta^i_jP,\quad \left\{Q^{ia},S^{jb}\right\}=2\epsilon^{ij}\epsilon^{ab}Z,\ \left\{\overline{Q}_{ia},\overline{S}_{jb}\right\}=2\epsilon_{ij}\epsilon_{ab}\overline{Z},\\
\left[J,Q^{ia}\right]=\tfrac{1}{2}Q^{ia},\quad \left[J,\overline{Q}_{ia}\right]=-\tfrac{1}{2}\overline{Q}_{ia},\quad \left[T,\overline{Q}_{ia}\right]=-S_{ia},\quad \left[\overline{T},Q^{ia}\right]=\overline{S}^{ia},\\
\left[J,S^{ia}\right]=\tfrac{1}{2}S^{ia},\quad \left[J,\overline{S}_{ia}\right]=-\tfrac{1}{2}\overline{S}_{ia},\quad \left[T,\overline{S}_{ia}\right]=-Q_{ia},\quad \left[\overline{T},S^{ia}\right]=\overline{Q}^{ia},
\end{gathered}$$

Соответствующий элемент фактор пространства, непосредственно обобщающий предыдущие (2.21), (2.56)

$$g=e^{\mathrm{i}tP}e^{\theta_{ia}Q^{ia}+\bar\theta^{ia}\overline{Q}_{ia}}e^{\mathrm{i}\left(\mathbf{q}Z+\bar{\mathbf{q}}\overline{Z}\right)}e^{\boldsymbol{\psi}_{ia}S^{ia}+\bar{\boldsymbol{\psi}}^{ia}\overline{S}_{ia}}e^{\mathrm{i}\left(\boldsymbol{\Lambda}T+\overline{\boldsymbol{\Lambda}T}\right)}. \qquad (2.80)$$

Тогда можно вычислить преобразования координат фактор-пространства $g_0\cdot g=g'\cdot h$ относительно суперсимметрий и автоморфизмов

- $g_0=e^{\epsilon_{ia}Q^{ia}+\bar\epsilon^{ia}\overline{Q}_{ia}} \Rightarrow \delta t=\mathrm{i}\left(\epsilon_{ia}\bar\theta^{ia}+\bar\epsilon^{ia}\theta_{ia}\right),\ \delta\theta_{ia}=\epsilon_{ia},\ \delta\bar\theta^{ia}=\bar\epsilon^{ia};$
- $g_0=e^{\varepsilon_{ia}S^{ia}+\bar\varepsilon^{ia}\overline{S}_{ia}} \Rightarrow \begin{cases}\delta t=\mathrm{i}\left(\varepsilon_{ia}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{ia}+\bar\varepsilon^{ia}\boldsymbol{\psi}_{ia}\right),\ \delta\boldsymbol{\psi}_{ia}=\varepsilon_{ia},\ \delta\bar{\boldsymbol{\psi}}^{ia}=\bar\varepsilon^{ia},\\ \delta\mathbf{q}=2\mathrm{i}\varepsilon^{ia}\theta_{ia},\ \delta\bar{\mathbf{q}}=2\mathrm{i}\bar\varepsilon_{ia}\bar\theta^{ia};\end{cases}$
- $g_0=e^{\mathrm{i}(bT+\overline{bT})} \Rightarrow \begin{cases}\delta t=2\mathrm{i}(\bar b\,\mathbf{q}-b\,\bar{\mathbf{q}})+2\left(b\,\bar\theta^{ia}\bar{\boldsymbol{\psi}}_{ia}-\bar b\,\theta_{ia}\boldsymbol{\psi}^{ia}\right);\\ \delta q=-\mathrm{i}b\,t+b\,\left(\boldsymbol{\psi}_{ia}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{ia}-\theta_{ia}\bar\theta^{ia}\right),\ \delta\bar q=\mathrm{i}\bar b\,t+\bar b\,\left(\boldsymbol{\psi}_{ia}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{ia}-\theta_{ia}\bar\theta^{ia}\right),\\ \delta\theta_{ia}=-\mathrm{i}b\,\bar{\boldsymbol{\psi}}_{ia},\ \delta\bar\theta^{a}=\mathrm{i}\bar b\,\boldsymbol{\psi}^{ia},\ \delta\boldsymbol{\psi}_{ia}=-\mathrm{i}b\,\bar\theta_{ia},\ \delta\bar{\boldsymbol{\psi}}^{ia}=\mathrm{i}\bar b\,\theta^{ia},\\ \delta\boldsymbol{\lambda}=b\,-\bar b\,\boldsymbol{\lambda}^2,\ \delta\bar{\boldsymbol{\lambda}}=\bar b\,-b\,\bar{\boldsymbol{\lambda}}^2.\end{cases}$

Здесь также введены стереографические проекции (2.22).

Разложение формы Картана $\omega_{16}=g^{-1}dg$ по проекциям при генераторах определяется соотношением

$$\begin{aligned}
\omega_{16} \;=\;& \mathrm{i}\omega_P P+\mathrm{i}\omega_Z Z+\mathrm{i}\bar\omega_Z\overline{Z}+\mathrm{i}\omega_T T+\mathrm{i}\bar\omega_T\overline{T}+\\
&+(\omega_Q)_{ia}Q^{ia}+(\bar\omega_Q)^{ia}\overline{Q}_{ia}+(\omega_S)_{ia}S^{ia}+(\bar\omega_S)^{ia}\overline{S}_{ia}. \qquad (2.81)
\end{aligned}$$

Проекции имеют вид

$$\begin{gathered}
\omega_P = \frac{\left(1+\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}\right)\triangle t + 2\mathrm{i}\left(\boldsymbol{\lambda}\triangle\bar{\mathbf{q}} - \bar{\boldsymbol{\lambda}}\triangle\mathbf{q}\right)}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}},\\
\omega_Z = \frac{\triangle\mathbf{q} - \boldsymbol{\lambda}^2\triangle\bar{\mathbf{q}} + \mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}\triangle t}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}, \qquad \bar{\omega}_Z = \frac{\triangle\bar{\mathbf{q}} - \bar{\boldsymbol{\lambda}}^2\triangle\mathbf{q} - \mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\lambda}}\triangle t}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}},\\
\omega_T = \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}, \qquad \bar{\omega}_T = \frac{d\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}, \qquad \omega_J = \mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\lambda}d\bar{\boldsymbol{\lambda}} - d\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}, \qquad (2.82)\\
(\omega_Q)_{ia} = \frac{d\theta_{ia} + \mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}d\bar{\boldsymbol{\psi}}_{ia}}{\sqrt{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}}, \qquad (\bar{\omega}_Q)^{ia} = \frac{d\bar{\theta}^{ia} - \mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\lambda}}d\boldsymbol{\psi}^{ia}}{\sqrt{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}},\\
(\omega_S)_a = \frac{d\boldsymbol{\psi}_{ia} + \mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}d\bar{\theta}_{ia}}{\sqrt{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}}, \qquad (\bar{\omega}_S)^{ia} = \frac{d\bar{\boldsymbol{\psi}}^{ia} - \mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\lambda}}d\theta^{ia}}{\sqrt{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}}.
\end{gathered}$$

Подформы $\triangle t$, $\triangle\mathbf{q}$, $\triangle\bar{\mathbf{q}}$, появляющиеся при модификации бозонных форм в присутствии генераторов суперсимметрии,

$$\begin{gathered}
\triangle t = dt - \mathrm{i}\left(\bar{\theta}^{ia}d\theta_{ia} + \theta_{ia}d\bar{\theta}^{ia} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{ia}d\boldsymbol{\psi}_{ia} + \boldsymbol{\psi}_{ia}d\bar{\boldsymbol{\psi}}^{ia}\right),\\
\triangle\mathbf{q} = d\mathbf{q} + 2\mathrm{i}\boldsymbol{\psi}^{ia}d\theta_{ia},\ \triangle\bar{\mathbf{q}} + 2\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{ia}d\bar{\theta}_{ia} \qquad (2.83)
\end{gathered}$$

инвариантны относительно Q- и S-суперсимметрий, как и $d\theta_{ia}$, $d\bar{\theta}^{ia}$, $d\boldsymbol{\psi}_{ia}$, $d\bar{\boldsymbol{\psi}}^{ia}$, и позволяют определить ковариантные производные

$$\begin{gathered}
D^{ia} = \tfrac{\partial}{\partial\theta_{ia}} - \mathrm{i}\bar{\theta}^{ia}\partial_t,\ \overline{D}_{ia} = \tfrac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{ia}} - \mathrm{i}\theta_{ia}\partial_t, \qquad (2.84)\\
\nabla^{ia} = D^{ia} - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}_{kc}D^{ia}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{k\gamma} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc}D^{ia}\boldsymbol{\psi}_{kc}\right)\nabla_t = D^{ia} - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}_{kc}\nabla^{ia}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc}\nabla^{ia}\boldsymbol{\psi}_{kc}\right)\partial_t,\\
\overline{\nabla}_{ia} = \bar{D}_{ia} - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}_{kc}\overline{D}_{ia}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc}\overline{D}_{ia}\boldsymbol{\psi}_{kc}\right)\nabla_t = \overline{D}_{ia} - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}_{kc}\overline{\nabla}_{ia}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc}\overline{\nabla}_{i\alpha}\boldsymbol{\psi}_{kc}\right)\partial_t,\\
\nabla_t = E^{-1}\partial_t,\ E = 1 - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}_{kc}\dot{\bar{\boldsymbol{\psi}}}^{kc} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc}\dot{\boldsymbol{\psi}}_{kc}\right),\ E^{-1} = 1 + \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}_{kc}\nabla_t\bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc}\nabla_t\boldsymbol{\psi}_{kc}\right).
\end{gathered}$$

Коммутационные соотношения этих производных имеют вид

$$\begin{gathered}
\left\{D^{ia}, D^{jb}\right\} = 0,\ \left\{\overline{D}_{ia}, \overline{D}_{jb}\right\} = 0,\ \left\{D^{ia}, \overline{D}_{jb}\right\} = -2\mathrm{i}\delta^i_j\delta^a_b\partial_t,\\
\left\{\nabla^{ia}, \nabla^{jb}\right\} = -2\mathrm{i}\left(\nabla^{ia}\boldsymbol{\psi}_{kc}\nabla^{jb}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc} + \nabla^{ia}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc}\nabla^{jb}\boldsymbol{\psi}_{kc}\right)\nabla_t,\\
\left\{\overline{\nabla}_{ia}, \overline{\nabla}_{jb}\right\} = -2\mathrm{i}\left(\overline{\nabla}_{ia}\boldsymbol{\psi}_{kc}\overline{\nabla}_{jb}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc} + \overline{\nabla}_{ia}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc}\overline{\nabla}_{jb}\boldsymbol{\psi}_{kc}\right)\nabla_t, \qquad (2.85)\\
\left[\nabla_t, \nabla^{ia}\right] = -2\mathrm{i}\left(\nabla_t\boldsymbol{\psi}_{kc}\nabla^{ia}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc} + \nabla_t\bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc}\nabla^{ia}\boldsymbol{\psi}_{kc}\right)\nabla_t,\\
\left[\nabla_t, \overline{\nabla}_{ia}\right] = -2\mathrm{i}\left(\nabla_t\boldsymbol{\psi}_{kc}\overline{\nabla}_{ia}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc} + \nabla_t\bar{\boldsymbol{\psi}}^{k\gamma}\overline{\nabla}_{i\alpha}\boldsymbol{\psi}_{k\gamma}\right)\nabla_t,\\
\left\{\nabla^{ia}, \overline{\nabla}_{jb}\right\} = -2\mathrm{i}\delta^a_b\delta^i_j\nabla_t - 2\mathrm{i}\left(\nabla^{ia}\boldsymbol{\psi}_{kc}\overline{\nabla}_{jb}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc} + \nabla^{ia}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc}\overline{\nabla}_{jb}\boldsymbol{\psi}_{kc}\right)\nabla_t.
\end{gathered}$$

Требование $\omega_Z = 0$, $\bar{\omega}_Z = 0$ приводит к связям:

$$\begin{gathered}
\omega_Z = 0 \Rightarrow \nabla_t\mathbf{q} = -\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\lambda}}{1+\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}},\ \overline{\nabla}_{ia}\mathbf{q} = 0, \nabla^{ia}\mathbf{q} - 2\mathrm{i}\boldsymbol{\psi}^{ia} = 0,\\
\bar{\omega}_Z = 0 \Rightarrow \nabla_t\bar{\mathbf{q}} = \mathrm{i}\frac{\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{1+\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}},\ \nabla^{ia}\bar{\mathbf{q}} = 0,\ \overline{\nabla}_{ia}\bar{\mathbf{q}} - 2\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\psi}}_{ia} = 0. \qquad (2.86)
\end{gathered}$$

Эти условия формально схожи с (2.29), (2.61), которые накладывались на суперполя при рассмотрении частиц с $N = 4 \to N = 2$ и $N = 8 \to N = 4$ суперсимметрией. Однако имеется весьма существенное различие: (2.86) недостаточны, чтобы определить неприводимый мультиплет $N = 8$, $d = 1$ суперсимметрии. Данная особенность не связана с дополнительной спонтанно нарушенной суперсимметрией, поскольку и обычные киральные условия $D^{ia}\bar{\mathbf{q}} = 0$, $\overline{D}_{ia}\mathbf{q} = 0$ недостаточны [41].

Неприводимый киральный мультиплет $N = 8$, $d = 1$ суперсимметрии может быть выделен наложением условий второго порядка по производным, дополняющих условия киральности: $D^{ia}D^j_a\mathbf{q} = \overline{D}^{ia}\overline{D}^j_a\bar{\mathbf{q}}$, $D^{ia}D^b_i\mathbf{q} = \overline{D}^{ia}\overline{D}^b_i\bar{\mathbf{q}}$. При этом $M^{ij} = D^{ia}D^j_a\mathbf{q}|_{\theta\to 0}$, $N^{ab} = D^{ia}D^b_i\mathbf{q}|_{\theta\to 0}$ - шесть действительных вспомогательных полей $N = 8$, $d = 1$ кирального мультиплета. Естественно искать обобщение условия действительности в виде

$$\nabla^{(ia}\boldsymbol{\psi}^{j)}_a = \overline{\nabla}^{(ia}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{j)}_a,\ \nabla^{i(a}\boldsymbol{\psi}^{b)}_i = \overline{\nabla}^{i(a}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{b)}_i \tag{2.87}$$

(с учетом связи $\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\psi}_{ia}$). Однако, такое условие не следует из форм Картана, и его инвариантность относительно преобразований фактор-пространства (2.80) совершенно неочевидна. В первую очередь это относится к преобразованиям автоморфизмов T, $\overline{T}$.

Трудность, связанную с условием действительности, можно обойти, не прибегая к анализу преобразований равенств (2.87). Так, источником информации об уравнениях движения вспомогательных полей являются проекции форм Картана $(\omega_S)_{ia}$, $(\bar{\omega}_S)^{ia}$ при $d\theta_{ia}$, $d\bar{\theta}^{ia}$. Из них следует, что на уравнениях движения

$$\begin{aligned}
&\nabla^{jb}\boldsymbol{\psi}_{ia}|_{\theta\to 0} = 0,\ \left(\overline{\nabla}_{jb}\boldsymbol{\psi}_{ia} + \mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}\epsilon_{ij}\epsilon_{ab}\right)|_{\theta\to 0} = 0,\\
&\overline{\nabla}_{jb}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{ia}|_{\theta\to 0} = 0,\ \left(\nabla^{jb}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{ia} - \mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\lambda}}\epsilon^{ij}\epsilon^{ab}\right)|_{\theta\to 0} = 0.
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Очевидно, что объекты $\nabla^{jb}\boldsymbol{\psi}_{ia}|_{\theta\to 0}$, $\overline{\nabla}_{jb}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{ia}|_{\theta\to 0}$, которые должны быть связаны друг с другом условием действительности, требуется приравнять к нулю на уравнениях движения. Таким образом, необходимости искать условие действительности явно не возникает. Главная функция уравнений движения вспомогательных полей в используемом методе - определять законы преобразования, а для этого не требуется знать, какие именно степени свободы в выражениях $\nabla^{jb}\boldsymbol{\psi}_{ia}|_{\theta\to 0}$, $\overline{\nabla}_{jb}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{ia}|_{\theta\to 0}$ приходятся на вспомогательные поля, какие - используются, чтобы наложить условие неприводимости.

Также имеет смысл убедиться, что (2.88) не находится в противоречии с алгеброй производных (2.85), которая ранее служила источником связи $\overline{\nabla}\boldsymbol{\psi}$ и $\nabla_t\mathbf{q}$. Так, раскрывая антикоммутатор $\left\{\nabla^{ia},\overline{\nabla}_{jb}\right\}$, можно получить

$$\left\{\nabla^{ia},\overline{\nabla}_{jb}\right\}\mathbf{q}|_{\theta\to0}=-2\mathrm{i}\delta^a_b\delta^i_j\nabla_t\mathbf{q}|_{\theta\to0}-2\mathrm{i}\left(\nabla^{ia}\boldsymbol{\psi}_{kc}\overline{\nabla}_{jb}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc}+\nabla^{ia}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{kc}\overline{\nabla}_{jb}\boldsymbol{\psi}_{kc}\right)\nabla_t\mathbf{q}|_{\theta\to0}\Rightarrow$$
$$-2\boldsymbol{\lambda}|_{\theta\to0}\delta^a_b\delta^i_j=-2\mathrm{i}\delta^a_b\delta^i_j\left(1+\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}\right)\nabla_t\mathbf{q}|_{\theta\to0},\tag{2.89}$$

что является тождеством с учетом (2.86).

Так как уравнения движения для вспомогательных полей установлены, можно определить компоненты, сформулировать их преобразования Q и S-суперсимметрий и доказать инвариантность действия относительно них.

Необходимые компоненты и ковариантная производная по времени, действующая на компоненты, имеют вид

$$q=\mathbf{q}|_{\theta\to0},\ \bar{q}=\bar{\mathbf{q}}|_{\theta\to0},\quad \psi_a=\boldsymbol{\psi}_a|_{\theta\to0},\ \bar{\psi}^a=\bar{\boldsymbol{\psi}}^a|_{\theta\to0},$$
$$\mathcal{E}=E|_{\theta\to0}=1+\mathrm{i}\left(\dot{\psi}_{ia}\bar{\psi}^{ia}+\dot{\bar{\psi}}^{ia}\psi_{ia}\right),\ \mathcal{D}_t=\mathcal{E}^{-1}\partial_t.\tag{2.90}$$

Активные преобразования этих компонент относительно S-суперсимметрии

$$\delta^\star_S q=-\mathrm{i}\left(\varepsilon_{kc}\bar{\psi}^{kc}+\bar{\varepsilon}^{kc}\psi_{kc}\right)\dot{q},\ \delta^\star_S\psi_{ia}=\varepsilon_{ia}-\mathrm{i}\left(\varepsilon_{kc}\bar{\psi}^{kc}+\bar{\varepsilon}^{kc}\psi_{kc}\right)\dot{\psi}_{ia},$$
$$\delta^\star_S\mathcal{E}=-\mathrm{i}\partial_t\left[\left(\varepsilon_{kc}\bar{\psi}^{kc}+\bar{\varepsilon}^{kc}\psi_{kc}\right)\mathcal{E}\right],\ \delta^\star_S\mathcal{D}_tq=-\mathrm{i}\left(\varepsilon_{kc}\bar{\psi}^{kc}+\bar{\varepsilon}^{kc}\psi_{kc}\right)\partial_t\mathcal{D}_tq\tag{2.91}$$

гарантируют, что $\mathcal{E}F(\mathcal{D}_tq\mathcal{D}_t\bar{q})$ - анзац для лагранжиана, инвариантный относительно спонтанно нарушенной суперсимметрии.

Преобразования Q-суперсимметрии, вполне аналогичные рассмотренным ранее (2.40), (2.73)

$$\delta^\star_Q q=2\mathrm{i}\epsilon_{ia}\psi^{ia}-H\dot{q},\ \delta^\star_Q\psi_{ia}=-\frac{2\bar{\epsilon}_{ia}\mathcal{D}_tq}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_tq\mathcal{D}_t\bar{q}}}-H\dot{\psi}_{ia},$$
$$\delta^\star_Q\mathcal{D}_tq=2\mathrm{i}\epsilon_{ia}\mathcal{D}_t\psi^{ia}-4\mathrm{i}\mathcal{D}_tq\frac{\epsilon_{ia}\mathcal{D}_t\psi^{ia}\mathcal{D}_t\bar{q}+\bar{\epsilon}^{ia}\mathcal{D}_t\bar{\psi}_{ia}\mathcal{D}_tq}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_tq\mathcal{D}_t\bar{q}}},\tag{2.92}$$
$$\delta^\star_Q\mathcal{E}=-\partial_t\left[H\mathcal{E}\right]+4\mathrm{i}\frac{\epsilon_{ia}\dot{\psi}^{ia}\mathcal{D}_t\bar{q}+\bar{\epsilon}^{ia}\dot{\bar{\psi}}_{ia}\mathcal{D}_tq}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_tq\mathcal{D}_t\bar{q}}},\ H=2\mathrm{i}\frac{\epsilon_{ia}\psi^{ia}\mathcal{D}_t\bar{q}+\bar{\epsilon}^{ia}\bar{\psi}_{ia}\mathcal{D}_tq}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_tq\mathcal{D}_t\bar{q}}},$$

оставляют инвариантным действие

$$S_{16}=-m_0\int dt\mathcal{E}\left(1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_tq\mathcal{D}_t\bar{q}}\right),\ \mathcal{E}=1+\mathrm{i}\left(\dot{\psi}_{ia}\bar{\psi}^{ia}+\dot{\bar{\psi}}^{ia}\psi_{ia}\right).\tag{2.93}$$

Естественно ожидать, что действие (2.93), как и (2.42), (2.75) инвариантно относительно преобразований автоморфизмов. Преобразования компонент относительно T, $\overline{T}$ для произвольных компонент имеют вид

$$\begin{aligned}\delta^\star_T\mathbf{f}|_{\theta\to0}&=\delta_T\mathbf{f}|_{\theta\to0}-\delta t\partial_t\mathbf{f}|_{\theta\to0}-\left(\delta\theta_{ia}D^{ia}\mathbf{f}+\delta\bar{\theta}^{ia}\overline{D}_{ia}\mathbf{f}\right)|_{\theta\to0}=\\&=\delta_T\mathbf{f}|_{\theta\to0}+\mathrm{i}b\bar{\psi}_{ia}\nabla^{ia}\mathbf{f}|_{\theta\to0}-\mathrm{i}\bar{b}\psi^{ia}\overline{\nabla}_{ia}\mathbf{f}|_{\theta\to0}+G\dot{\mathbf{f}}|_{\theta\to0},\\G&=2\mathrm{i}\left(b\bar{q}-\bar{b}q\right)+2\psi_{ia}\bar{\psi}^{ia}\frac{b\mathcal{D}_t\bar{q}+\bar{b}\mathcal{D}_tq}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_tq\mathcal{D}_t\bar{q}}}.\end{aligned}\tag{2.94}$$

Здесь использованы уравнения движения вспомогательных полей (2.88). Из этих формул следуют вариации используемых переменных q, ψ, $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}_t q$:

$$\begin{aligned}
\delta^\star_T q &= -\mathrm{i}bt - b\psi_a\bar\psi^a + G\dot q,\ \delta^\star_T\psi_{ia} = \frac{-2\mathrm{i}\bar b\psi_{ia}\mathcal{D}_t q}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar q}} + G\dot\psi_a,\\
\delta^\star_T\mathcal{D}_t q &= -\mathrm{i}b\mathcal{E}^{-1} - b\mathcal{E}^{-1}\partial_t\left(\psi_{ia}\bar\psi^{ia}\right) - 2\mathrm{i}\left(\bar b\mathcal{D}_t q - b\mathcal{D}_t\bar q\right)\mathcal{D}_t q + \\
&\quad +2\mathrm{i}\left(\mathcal{E}-1\right)\frac{\bar b\mathcal{D}_t q - b\mathcal{D}_t\bar q}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar q}}\mathcal{D}_t q + 2\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\left(\psi_{ia}\bar\psi^{ia}\right)\frac{\bar b\mathcal{D}_t q + b\mathcal{D}_t\bar q}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar q}},\\
\delta^\star_T\mathcal{E} &= -2\mathrm{i}\left(b\dot{\bar q} - \bar b\dot q\right) - 2\partial_t\left(\psi_{ia}\bar\psi^{ia}\right)\frac{b\mathcal{D}_t\bar q + \bar b\mathcal{D}_t q}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar q}} - \\
&\quad -2\mathrm{i}(\mathcal{E}-1)\frac{\bar b\mathcal{D}_t q - b\mathcal{D}_t\bar q}{1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar q}} + \partial_t\left[G\mathcal{E}\right].
\end{aligned} \tag{2.95}$$

Вариация лагранжиана $\mathcal{L}_{16} = -m_0\mathcal{E}\left(1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar q}\right)$ относительно этих преобразований является полной производной по времени:

$$\delta^\star_T\mathcal{L}_{16} = \partial_t\left[G\mathcal{L}_{16}\right] - 2\mathrm{i}m_0(\bar b\dot q - b\dot{\bar q}). \tag{2.96}$$

Таким образом, инвариантность относительно автоморфизмов имеет место и для действия (2.93).

2.7. Дополнительные суперсимметрии

Приемы, использованные при построении действия для частицы с $N=16\to N=8$ суперсимметрией, позволяют предположить, что возможно сформулировать действие для частицы в (2+1)-пространстве-времени с еще большим количеством суперсимметрий. Действительно, алгебра (2.79) допускает расширение до $N=4\cdot 2^n$:

$$\begin{gathered}
\left[T,\overline{T}\right] = -2J,\ [J,T]=T,\ \left[J,\overline{T}\right] = -\overline{T},\ [J,Z]=Z,\ \left[J,\overline{Z}\right] = -\overline{Z},\\
[T,P] = -Z,\ \left[T,\overline{Z}\right] = -2P,\ \left[\overline{T},P\right] = \overline{Z},\ \left[\overline{T},Z\right] = 2P;\\
\left\{Q^{i_1i_2i_3\cdots},\overline{Q}_{j_1j_2j_3\ldots}\right\} = 2\delta^{i_1}_{j_1}\delta^{i_2}_{j_2}\delta^{i_3}_{j_3}\ldots P,\ \left\{S^{i_1i_2i_3\cdots},\overline{S}_{j_1j_2j_3\ldots}\right\} = 2\delta^{i_1}_{j_1}\delta^{i_2}_{j_2}\delta^{i_3}_{j_3}\ldots P,\\
\left\{Q^{i_1i_2i_3\cdots},S^{j_1j_2j_3\cdots}\right\} = 2\epsilon^{i_1j_1}\epsilon^{i_2j_2}\epsilon^{i_3j_3}\ldots Z,\ \left\{\overline{Q}_{i_1i_2i_3\ldots},\overline{S}_{j_1j_2j_3\ldots}\right\} = 2(-1)^n\epsilon_{i_1j_1}\epsilon_{i_2j_2}\epsilon_{i_3j_3}\ldots\overline{Z},\\
\left[J,Q^{i_1i_2i_3\cdots}\right] = \tfrac{1}{2}Q^{i_1i_2i_3\cdots},\quad \left[J,\overline{Q}_{i_1i_2i_3\ldots}\right] = -\tfrac{1}{2}\overline{Q}_{i_1i_2i_3\ldots},\\
\left[J,S^{i_1i_2i_3\cdots}\right] = \tfrac{1}{2}S^{i_1i_2i_3\cdots},\quad \left[J,\overline{S}_{i_1i_2i_3\ldots}\right] = -\tfrac{1}{2}\overline{S}_{i_1i_2i_3\ldots},\\
\left[T,\overline{Q}_{i_1i_2i_3\ldots}\right] = -(-1)^nS_{i_1i_2i_3\ldots},\qquad \left[\overline{T},Q^{i_1i_2i_3\cdots}\right] = \overline{S}^{i_1i_2i_3\cdots},\\
\left[T,\overline{S}_{i_1i_2i_3\ldots}\right] = -Q_{i_1i_2i_3\ldots},\qquad \left[\overline{T},S^{i_1i_2i_3\cdots}\right] = (-1)^n\overline{Q}^{i_1i_2i_3\cdots}.
\end{gathered} \tag{2.97}$$

Здесь количество ϵ^{ij} символов в антикоммутаторах суперзарядов равно n.

Фактор-пространство может быть параметризовано обычным образом

$$g = e^{\mathrm{i}tP}e^{\mathrm{i}(\mathbf{q}Z+\bar{\mathbf{q}}\overline{Z})}e^{\theta_{(i)}Q^{(i)}+\bar\theta^{(i)}\overline{Q}_{(i)}}e^{\boldsymbol{\psi}_{(j)}S^{(j)}+\bar{\boldsymbol{\psi}}^{(j)}\overline{S}_{(j)}}e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{\Lambda}T+\overline{\boldsymbol{\Lambda}T})}, \tag{2.98}$$

где $\overset{(i)}{\underset{(i)}{}}$ предполагает суммирование по полному набору $i_1 i_2 i_3 \ldots$.

Из предыдущих построений ясен и способ выделения компонент, и определения ковариантных производных, действующих на суперполя и на компоненты. Также и в данном случае можно извлекать уравнения движения для вспомогательных полей из форм при генераторах $S^{(i)}$, без необходимости следить за условиями неприводимости, что весьма важно для столь обширных мультиплетов.

Формы $(\omega_S)_{(i)}$, $(\bar{\omega}_S)^{(i)}$ имеют вид

$$(\omega_S)_{(i)} = \frac{d\boldsymbol{\psi}_{(i)} + \mathrm{i}\boldsymbol{\lambda} d\bar{\theta}_{(i)}}{\sqrt{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}},\ (\bar{\omega}_S)^{(j)} = \frac{d\bar{\boldsymbol{\psi}}^{(j)} - \mathrm{i}(-1)^n \boldsymbol{\lambda} d\theta^{(j)}}{\sqrt{1-\boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}}. \tag{2.99}$$

Очевидно, они приводят к уравнениям для вспомогательных полей

$$\begin{gathered}\nabla^{(j)}\boldsymbol{\psi}_{(i)}|_{\theta\to 0} = 0,\ \left(\overline{\nabla}_{j_1 j_2 j_3\ldots}\boldsymbol{\psi}_{i_1 i_2 i_3\ldots} + \mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}\epsilon_{i_1 j_1}\epsilon_{i_2 j_2}\epsilon_{i_3 j_3}\ldots\right)|_{\theta\to 0} = 0 \qquad , \\ \overline{\nabla}_{(j)}\bar{\boldsymbol{\psi}}_{(i)}|_{\theta\to 0} = 0,\ \left(\nabla^{j_1 j_2 j_3\ldots}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{i_1 i_2 i_3\ldots} - \mathrm{i}(-1)^n\bar{\boldsymbol{\lambda}}\epsilon^{i_1 j_1}\epsilon^{i_2 j_2}\epsilon^{i_3 j_3}\ldots\right)|_{\theta\to 0} = 0.\end{gathered} \tag{2.100}$$

Преобразования ненарушенной суперсимметрии повторяют уже известные в предыдущих случаях, с заменой $\epsilon^{ia}\mathcal{D}_t\psi_{ia}\mathcal{D}_t\bar{q} + \bar{\epsilon}_{ia}\bar{\psi}^{ia}\mathcal{D}_t q \to \epsilon^{(i)}\mathcal{D}_t\psi_{(i)}\mathcal{D}_t\bar{q} + (-1)^n\bar{\epsilon}_{(j)}\mathcal{D}_t\bar{\psi}^{(j)}\mathcal{D}_t q$. Таким образом, инварантное действие имеет вид

$$S_{4\cdot 2^n} = -m_0\int dt\mathcal{E}\left(1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_t q\mathcal{D}_t\bar{q}}\right),\ \mathcal{E} = 1 + \mathrm{i}\left(\dot{\psi}_{(i)}\bar{\psi}^{(i)} + \dot{\bar{\psi}}^{(i)}\psi_{(i)}\right). \tag{2.101}$$

Такое действие включает в себя все рассмотренные случаи.

Алгебру (2.79) можно обобщить и иным способом. Если ввести антисимметричную матрицу

$$(\Omega_{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{cccc} \epsilon & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \epsilon & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \epsilon & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & \end{array}\right),\quad \epsilon = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right), \tag{2.102}$$

то можно считать, что один из индексов в алгебре (2.79) принимает $2n$ значений, может быть опущен и поднят с помощью матриц $\Omega_{\mu\nu}$, $\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu\nu}$, $\Omega_{\mu\nu}\left(\Omega^{-1}\right)^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu$. В этом случае самосогласованная алгебра имеет вид

$$\begin{gathered}
\left[T,\overline{T}\right]=-2J,\ [J,T]=T,\ \left[J,\overline{T}\right]=-\overline{T},\ [J,Z]=Z,\ \left[J,\overline{Z}\right]=-\overline{Z},\\
[T,P]=-Z,\ \left[T,\overline{Z}\right]=-2P,\ \left[\overline{T},P\right]=\overline{Z},\ \left[\overline{T},Z\right]=2P;\\
\left\{Q_{i\alpha},\overline{Q}_{j\beta}\right\}=2\epsilon_{ij}\Omega_{\alpha\beta}P,\ \left\{S_{i\alpha},\overline{S}_{j\beta}\right\}=2\epsilon_{ij}\Omega_{\alpha\beta}P,\\
\left\{Q_{i\alpha},S_{j\beta}\right\}=2\epsilon_{ij}\Omega_{\alpha\beta}Z,\ \left\{\overline{Q}_{i\alpha},\overline{S}_{j\beta}\right\}=2\epsilon_{ij}\Omega_{\alpha\beta}\overline{Z},\\
[J,Q_{i\alpha}]=\tfrac{1}{2}Q_{i\alpha},\ [J,S_{i\alpha}]=\tfrac{1}{2}S_{i\alpha},\ \left[J,\overline{Q}_{i\alpha}\right]=-\tfrac{1}{2}\overline{Q}_{i\alpha},\ \left[J,\overline{S}_{i\alpha}\right]=-\tfrac{1}{2}\overline{S}_{i\alpha},\\
\left[T,\overline{Q}_{i\alpha}\right]=-S_{i\alpha},\ \left[T,\overline{S}_{i\alpha}\right]=-Q_{i\alpha},\ \left[\overline{T},Q_{i\alpha}\right]=\overline{S}_{i\alpha},\ \left[\overline{T},S_{i\alpha}\right]=\overline{Q}_{i\alpha}.
\end{gathered} \tag{2.103}$$

Такая алгебра позволяет повторить все изложенные построения. Инвариантное действие, которое будет получено в результате, имеет аналогичную структуру:

$$S_{16n}=-m_0\int dt\mathcal{E}\left(1+\sqrt{1-4\mathcal{D}_tq\mathcal{D}_t\bar{q}}\right),\ \mathcal{E}=1+\mathrm{i}\left(\dot{\psi}_{i\alpha}\bar{\psi}^{i\alpha}+\dot{\bar{\psi}}^{i\alpha}\psi_{i\alpha}\right). \tag{2.104}$$

Такое действие может быть редуцировано, чтобы включить действия с нарушениями суперсимметрии $N=8\to N=4$ (2.75), $N=4\to N=2$ (2.42).

2.8. Суперчастица в $D=5$

В данном разделе описанный ранее метод построения компонентных действий применен для конструирования действия суперчастицы в $D=5$. Данная система рассматривалась ранее в работе [42] как одна из возможных размерных редукций 5-браны в $D=10$, где для нее были найдены ковариантные уравнения движения; тем не менее, соответствующее суперсимметричное действие не было построено. В данном разделе сохранены обозначения [42].

Алгебра симметрий действия рассматриваемой суперчастицы включает 16 суперзарядов Q^i_α, $S^{a\alpha}$, 4 центральных заряда Z^{ia} и оператор трансляций во времени P:

$$\{Q^i_\alpha,Q^j_\beta\}=\varepsilon^{ij}\Omega_{\alpha\beta}P,\quad \{Q^i_\alpha,S^{b\beta}\}=\delta^\beta_\alpha Z^{ib},\quad \{S^{a\alpha},S^{b\beta}\}=-\varepsilon^{ab}\Omega^{\alpha\beta}P. \tag{2.105}$$

Здесь $i,a=1,2$; $\alpha,\beta=1,2,3,4$, а $\Omega_{\alpha\beta}$ - $Spin(5)$ инвариантная симплектическая метрика, позволяющая поднимать и опускать спинорные индексы. Она удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned}
&\Omega_{\alpha\beta}=-\Omega_{\beta\alpha},\quad \Omega^{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}\Omega_{\lambda\sigma},\quad \Omega_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\sigma}\Omega^{\lambda\sigma},\\
&\Omega_{\alpha\beta}\Omega^{\beta\gamma}=\delta^\gamma_\alpha,\quad \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\sigma}=24.
\end{aligned} \tag{2.106}$$

Элемент фактор-пространства может быть выбран как

$$g=e^{tP}\,e^{\theta^\alpha_i Q^i_\alpha}\,e^{\mathbf{q}_{ia}Z^{ia}}\,e^{\boldsymbol{\psi}_{a\alpha}S^{a\alpha}}. \tag{2.107}$$

Здесь $\mathbf{q}_{ia}$, $\boldsymbol{\psi}_{a\alpha}$ - Голдстоуновские $d=1$, $N=8$ суперполя, зависящие от координат суперпространства t, θ^α_i. Стоит отметить, что в параметризацию (2.107) не включены генераторы автоморфизмов алгебры (2.105); они, однако, не являются необходимыми для построения действия.

Законы преобразования координат и суперполей под действием всех генераторов (2.105) можно найти, вычислив произведение $g_0 g = g'$, где g_0 - соответствующий элемент группы с постоянными параметрами. Наибольший интерес для последующих построений представляют преобразования ненарушенной

$$g_0 = \exp\left(\varepsilon^\alpha_i Q^i_\alpha\right) \Rightarrow \delta_Q t = -\frac{1}{2}\varepsilon^\alpha_i \theta^{i\beta}\Omega_{\alpha\beta}, \quad \delta_Q \theta^\alpha_i = \varepsilon^\alpha_i . \tag{2.108}$$

и спонтанно нарушенной суперсимметрии:

$$g_0 = \exp\left(\eta_{a\alpha} S^{a\alpha}\right) \Rightarrow \delta_S t = -\frac{1}{2}\eta^a_\alpha \boldsymbol{\psi}_{a\beta}\Omega^{\alpha\beta}, \quad \delta_S \boldsymbol{\psi}_{a\alpha} = \eta_{a\alpha}, \quad \delta_S \mathbf{q}_{ia} = -\eta_{a\alpha}\theta^\alpha_i . \tag{2.109}$$

Инвариантами преобразований (2.108), (2.109) являются формы Картана, которые могут быть вычислены стандартными методами:

$$g^{-1}dg = \omega_P P + (\omega_Q)^\alpha_i Q^i_\alpha + (\omega_Z)_{ia} Z^{ia} + (\omega_S)_{a\alpha} S^{a\alpha}, \tag{2.110}$$

где

$$\begin{aligned} &\omega_P = dt - \frac{1}{2}\left(d\theta^\alpha_i \theta^{i\beta} + d\boldsymbol{\psi}^\alpha_a \boldsymbol{\psi}^{a\beta}\right)\Omega_{\alpha\beta}, \quad (\omega_Z)_{ia} = d\mathbf{q}_{ia} - d\theta^\alpha_i \boldsymbol{\psi}_{a\alpha}, \\ &(\omega_Q)^\alpha_i = d\theta^\alpha_i, \quad (\omega_S)_{a\alpha} = d\boldsymbol{\psi}_{a\alpha}. \end{aligned} \tag{2.111}$$

С помощью форм $\{\omega_P, (\omega_Q)^\alpha_i\}$ можно построить производные ∇_t, ∇^i_α, ковариантные относительно обеих суперсимметрий

$$\partial_t = E\nabla_t, \quad E = 1 + \frac{1}{2}\Omega^{\beta\gamma}\boldsymbol{\psi}^a_\beta \partial_t \boldsymbol{\psi}_{a\gamma}, \quad E^{-1} = 1 - \frac{1}{2}\Omega^{\beta\gamma}\boldsymbol{\psi}^a_\beta \nabla_t \boldsymbol{\psi}_{a\gamma}, \tag{2.112}$$

$$\nabla^i_\alpha = D^i_\alpha + \frac{1}{2}\Omega^{\beta\gamma}\boldsymbol{\psi}^a_\beta D^i_\alpha \boldsymbol{\psi}_{a\gamma}\nabla_t = D^i_\alpha + \frac{1}{2}\Omega^{\beta\gamma}\boldsymbol{\psi}^a_\beta \nabla^i_\alpha \boldsymbol{\psi}_{a\gamma}\partial_t, \tag{2.113}$$

где D^i_α - “плоские” производные, ковариантные лишь относительно ненарушенной суперсимметрии:

$$D^i_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha_i} + \frac{1}{2}\theta^{i\beta}\Omega_{\alpha\beta}\partial_t, \quad \left\{D^i_\alpha, D^j_\beta\right\} = \varepsilon^{ij}\Omega_{\alpha\beta}\partial_t . \tag{2.114}$$

∇_t, ∇^i_α удовлетворяют соотношениям (анти)коммутации

$$\begin{aligned} &\left\{\nabla^i_\alpha, \nabla^j_\beta\right\} = \varepsilon^{ij}\Omega_{\alpha\beta}\nabla_t + \Omega^{\lambda\sigma}\nabla^i_\alpha \boldsymbol{\psi}^b_\lambda \nabla^j_\beta \boldsymbol{\psi}_{b\sigma}\nabla_t, \\ &\left[\nabla_t, \nabla^i_\alpha\right] = \Omega^{\beta\gamma}\nabla_t \boldsymbol{\psi}^b_\beta \nabla^i_\alpha \boldsymbol{\psi}_{b\gamma}\nabla_t . \end{aligned} \tag{2.115}$$

Как и в рассмотренных ранее случаях, на суперполя можно наложить ковариантную связь; здесь для этого требуется приравнять к нулю $d\theta^\alpha_i$-проекцию формы $(\omega_Z)_{ia}$ (2.111):

$$(\omega_Z)_{ia}|_{d\theta} = 0 \quad\Rightarrow\quad \nabla^j_\alpha \mathbf{q}_{ia} - \delta^j_i \boldsymbol{\psi}_{a\alpha} = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \nabla^{(j}_\alpha \mathbf{q}^{i)}_a = 0, & \text{(a)}\\ \nabla^i_\alpha \mathbf{q}_{ia} - 2\boldsymbol{\psi}_{a\alpha} = 0. & \text{(b)}\end{cases} \tag{2.116}$$

Таким образом, условие $(\omega_Z)_{ia}|_{d\theta} = 0$ выражает фермионные суперполя $\boldsymbol{\psi}_{a\alpha}$ через спинорные производные полей $\mathbf{q}_{ia}$, которые, следовательно, могут считаться единственными независимыми (обратный эффект Хиггса [38]). Также $\mathbf{q}_{ia}$ оказываются подчинены условию неприводимости, выделяющему неприводимый гипермультиплет $N = 8$, $d = 1$ суперсимметрии. В нем отсутствуют вспомогательные компоненты: из условий (2.116) следует, что результат действия спинорной производной на $\boldsymbol{\psi}_{a\alpha}$ может быть выражен через антикоммутаторы $\{\nabla^i_\alpha, \nabla^j_\beta\}$

$$\frac{3}{2}\nabla^j_\beta \boldsymbol{\psi}_{a\alpha} = \left\{\nabla^j_\beta, \nabla^i_\alpha\right\}\mathbf{q}_{ia} - \frac{1}{2}\left\{\nabla^j_\alpha, \nabla^i_\beta\right\}\mathbf{q}_{ia}. \tag{2.117}$$

Это уравнение можно разрешить, подставив антикоммутаторы в явном виде (2.115) и воспользовавшись тем, что $\nabla^j_\beta \boldsymbol{\psi}_{a\alpha} \sim \Omega_{\alpha\beta}\nabla_t \mathbf{q}^j_a$:

$$\nabla^j_\alpha \boldsymbol{\psi}_{a\beta} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^j_a \Omega_{\alpha\beta} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda}^{ia} = \frac{4\nabla_t \mathbf{q}^{ia}}{1+\sqrt{1-2\nabla_t \mathbf{q}^{jb}\nabla_t \mathbf{q}_{jb}}}. \tag{2.118}$$

Таким образом, условия (2.116*b*) определяют мультиплет на массовой поверхности. В [42] было найдено соответствующее бозонное уравнение движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{q}_{ia}}{\sqrt{1-2\dot{q}^{jb}\dot{q}_{jb}}}\right) = 0, \tag{2.119}$$

где $q_{ia} = \mathbf{q}_{ia}|_{\theta=0}$ - первые компоненты суперполя $\mathbf{q}_{ia}$. Такое уравнение движения следует из действия массивной частицы в пятимерном пространстве-времени, записанном в статической калибровке:

$$S_{bos} \sim \int dt \left(1 - \sqrt{1-2\dot{q}^{ia}\dot{q}_{ia}}\right). \tag{2.120}$$

Как и при построении действий других суперимметричных механик, необходимо сначала обеспечить ковариантность действия относительно нарушенной суперсимметрии. Если определить компоненты стандартным образом

$$q_{ia} = \mathbf{q}_{ia}|_{\theta\to 0}, \quad \psi_{a\alpha} = \boldsymbol{\psi}_{a\alpha}|_{\theta\to 0}, \tag{2.121}$$

то их активные законы преобразования относительно нарушенной суперсимметрии будут иметь вид

$$\delta^\star_S q_{ia} = \frac{1}{2}\eta^b_\alpha \psi_{b\beta}\Omega^{\alpha\beta}\partial_t q_{ia}, \quad \delta^\star_S \psi_{a\alpha} = \eta_{a\alpha} + \frac{1}{2}\eta^b_\beta \psi_{b\lambda}\Omega^{\beta\lambda}\partial_t \psi_{a\alpha}. \tag{2.122}$$

Эти преобразования позволяют установить, что ковариантная производная по времени, действующая на компоненты, является пределом суперполевой при $\theta_i^\alpha \to 0$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{E} = E|_{\theta\to 0} = 1 + \frac{1}{2}\Omega^{\beta\gamma}\psi^a_\beta \partial_t \psi_{a\gamma},\ \mathcal{D}_t = \mathcal{E}^{-1}\partial_t \Rightarrow \mathcal{E}^{-1} = 1 - \frac{1}{2}\,\Omega^{\beta\gamma}\psi^a_\beta \mathcal{D}_t\psi_{a\gamma}, \\ & \delta^\star_S\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,\eta^a_\alpha\partial_t\left(\mathcal{E}\Omega^{\alpha\beta}\psi_{a\beta}\right), \quad \delta^\star_S\mathcal{D}_t q_{ia} = \frac{1}{2}\,\eta^b_\alpha\psi_{b\beta}\Omega^{\alpha\beta}\partial_t(\mathcal{D}_t\, q_{ia}). \end{aligned} \tag{2.123}$$

Из этих преобразований непосредственно следует, что всякое действие вида $S = \int dt\mathcal{E}F\left(\mathcal{D}_t q^{ia}\mathcal{D}_t q_{ia}\right)$ является инвариантным относительно нарушенной суперсимметрии. Если также принять в внимание известный бозонный предел (2.120) и допустить тривиально инвариантное слагаемое $\int dt$, то его можно зафиксировать с точностью до единственной константы

$$S = (1+\alpha)\int dt - \int dt\mathcal{E}\left[\alpha + \sqrt{1 - 2\mathcal{D}_t q^{ia}\mathcal{D}_t q_{ia}}\right]. \tag{2.124}$$

Последним этапом построения действия является проверка его инвариантности относительно ненарушенной суперсимметрии с одновременным определением α. Необходимые преобразования компонент можно вычислить, взяв предел при $\theta \to 0$ преобразований суперполей в точке

$$\delta^\star_Q f = -\delta\theta^\alpha_i \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha_i}\mathbf{f}|_{\theta\to 0} - \delta t\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{f}|_{\theta\to 0} = -\varepsilon^\alpha_i D^i_\alpha \mathbf{f}|_{\theta\to 0}. \tag{2.125}$$

Из этой формулы и связей суперполей (2.116), (2.118) непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} & \delta^\star_Q q_{ia} = -\varepsilon^\alpha_i\psi_{a\alpha} + \frac{1}{4}\varepsilon^\alpha_j\lambda^{jb}\psi_{b\alpha}\partial_t q_{ia}\,, \\ & \delta^\star_Q\psi_{a\alpha} = \frac{1}{2}\varepsilon^\beta_j\Omega_{\alpha\beta}\lambda^j_a + \frac{1}{4}\varepsilon^\beta_j\lambda^{jb}\psi_{b\beta}\partial_t\psi_{a\alpha}, \\ & \delta^\star_Q\mathcal{E} = \frac{1}{4}\,\varepsilon^\beta_j\partial_t\left(\mathcal{E}\lambda^{jb}\psi_{b\beta}\right) - \frac{1}{2}\,\varepsilon^\beta_j\lambda^{jb}\partial_t\psi_{b\beta}, \\ & \delta^\star_Q\mathcal{D}_t q_{ia} = -\varepsilon^\alpha_i\mathcal{D}_t\psi_{a\alpha} + \frac{1}{4}\varepsilon^\alpha_j\frac{\lambda_{ia}}{1+\frac{1}{8}\,\lambda^2}\lambda^{jb}\mathcal{D}_t\psi_{b\alpha} + \frac{1}{4}\varepsilon^\alpha_j\lambda^{jb}\psi_{b\alpha}\partial_t\left(\mathcal{D}_t q_{ia}\right). \end{aligned} \tag{2.126}$$

Используя эти преобразования, можно показать, что действие (2.124) инвариантно относительно ненарушенной суперсимметрии, если $\alpha = 1$:

$$S_{16hyper} = \int dt\left[2 - \mathcal{E}\left(1 + \sqrt{1 - 2\mathcal{D}_t q^{ia}\mathcal{D}_t q_{ia}}\right)\right]. \tag{2.127}$$

2.9. Действия с высшими производными

Рассмотренные алгебры и фактор-пространства (2.2) и (2.3), а также их расширения антикоммутирующими генераторами предоставляют возможность построить более сложные системы, чем свободная частица. Так, бозонные формы Картана, редуцированные условием $\omega_Z = 0,\ \bar{\omega}_Z = 0$, имеют вид (2.11)

$$\omega_P = \frac{1-\lambda\bar{\lambda}}{1+\lambda\bar{\lambda}}dt, \quad \omega_T = \frac{d\lambda}{1-\lambda\bar{\lambda}}, \quad \bar{\omega}_T = \frac{d\bar{\lambda}}{1-\lambda\bar{\lambda}}, \quad \omega_J = \mathrm{i}\frac{\lambda d\bar{\lambda} - \bar{\lambda}d\lambda}{1-\lambda\bar{\lambda}},$$
$$\lambda = \frac{2\mathrm{i}\dot{q}}{1+\sqrt{1-4\dot{q}\dot{\bar{q}}}}, \qquad \bar{\lambda} = -\frac{2\mathrm{i}\dot{\bar{q}}}{1+\sqrt{1-4\dot{q}\dot{\bar{q}}}}. \tag{2.128}$$

Эти формы позволяют сформулировать действия с высшими производными, инвариантные относительно всех преобразований фактор- пространства (2.3). Так, преобразования автоморфизмов оставляют инвариантной форму ω_P (2.9), также как и $\omega_T\bar{\omega}_T$. Таким образом, существует инвариантное действие

$$S_{\text{gen}} = \int \omega_P\, \mathcal{F}\left(\frac{\omega_T}{\omega_P}\cdot\frac{\bar{\omega}_T}{\omega_P}\right) = \int dt\frac{1-\lambda\bar{\lambda}}{1+\lambda\bar{\lambda}}\mathcal{F}\left(\frac{(1+\lambda\bar{\lambda})^2}{(1-\lambda\bar{\lambda})^4}\dot{\lambda}\dot{\bar{\lambda}}\right). \tag{2.129}$$

Смысл (2.129) можно прояснить, если ввести соответствующие обозначения. Действие (2.129) может быть переписано в терминах релятивистских векторов $q^A = (t, q+\bar{q}, \mathrm{i}(q-\bar{q}))$ и их производных по параметру τ

$$S_{\text{gen}} = \int d\tau\mathcal{F}\left(\frac{1}{4}k_1^2\right), \qquad k_1^2(\dot{q},\ddot{q}) \equiv \frac{\left(\ddot{q}^A\dot{q}_A\right)^2 - \left(\ddot{q}^A\ddot{q}_A\right)\left(\dot{q}^B\dot{q}_B\right)}{\left(\dot{q}^C\dot{q}_C\right)^3},$$
$$\dot{q}^A = \frac{dq^A}{d\tau}, \quad \ddot{q}^A = \frac{d^2q^A}{d\tau^2}, \qquad ds = d\tau\sqrt{\dot{q}^A\dot{q}_A}. \tag{2.130}$$

Здесь k_1^2 - внешняя кривизна мировой линии в $d = 2+1$. Такие бозонные действия уже рассматривались ранее в [12]. Наибольший интерес представляют слагаемые с $\sqrt{k_1^2}$ [43] и наиболее простое, линейное по k_1^2, слагаемое, описывающее частицу с жесткостью [43].

Естественно ожидать, что аналогичные инвариантные действия существуют при различных размерностях пространства - времени, поскольку формы при генераторах в фактор-пространстве будут преобразовываться однородно. Однако существует слагаемое, специфичное для трехмерного пространства - времени, связанное с формой ω_J. При преобразованиях автоморфизмов она сдвигается на полный дифференциал $\delta\omega_J = \mathrm{i}(b\,d\bar{\lambda} - \bar{b}\,d\lambda)$, так что интеграл

$$\begin{aligned} S_{\text{anyon}} &= -\frac{1}{2}\int\omega_J = -\frac{1}{2}\int\omega_P\frac{\omega_J}{\omega_P} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\int dt\frac{\lambda\dot{\bar{\lambda}} - \bar{\lambda}\dot{\lambda}}{1-\lambda\bar{\lambda}} = \\ &= \mathrm{i}\int dt\frac{\ddot{q}\dot{\bar{q}} - \ddot{\bar{q}}\dot{q}}{\sqrt{1-4\dot{q}\dot{\bar{q}}}\left(1+\sqrt{1-4\dot{q}\dot{\bar{q}}}\right)} \end{aligned} \tag{2.131}$$

инвариантен, хотя и в более слабом смысле, чем (2.129). Существование такого слагаемого связано с тем, что в подгруппе стабильности находится $U(1)$-генератор. $S_0 + \alpha S_{\text{anyon}}$, где S_0 - свободное действие (2.12), описывает частицу с нетривиальным анионным спином [44].

Поскольку формы ω_T, $\bar\omega_T$, ω_J существуют и в суперсимметричном случае, можно ожидать, что действия (2.129), (2.131) допускают суперсимметризацию. Естественно попытаться применить метод, уже показавший свою эффективность при конструировании свободных действий, и для систем с высшими производными.

Как показывает опыт построения действий свободных частиц, инвариантность относительно спонтанно нарушенной суперсимметрии может быть обеспечена заменой производных $\partial_t \to \mathcal{D}_t$ и меры интегрирования $dt \to \mathcal{E}dt$. Хотя было бы слишком строгим требованием считать, что и в действие с высшими производными фермионы входят только через $\mathcal{E}$, можно допустить присутствие высших производных фермионов в лагранжиане, заменить производные $\partial_t \to \mathcal{D}_t$ и проверить инвариантность слагаемых, подходящих по размерности.

Наиболее существенная трудность, возникающая при введении высших производных в действие, связана с уравнениями движения для вспомогательных полей, которые необходимы для формулировки преобразований относительно ненарушенной суперсимметрии и автоморфизмов. Форма ω_S, ранее служившая источником уравнений движения, теперь не может быть таковым, поскольку она приводила к бозонным уравнениям движения $\ddot q = 0$, $\dddot{\bar q} = 0$, а следующие из $S_1 = S_0 + \alpha S_{\text{anyon}}$, $S_2 = S_0 + \beta S_{\text{gen}}$ уравнения движения значительно сложнее. Также уравнения для вспомогательных полей должны зависеть от параметров α, β. Поскольку α, β отсутствуют в формализме нелинейных реализаций, ожидать возможности извлечь эти уравнения из известных структур не приходится.

Трудности, связанные с уравнениями движения, однако, отсутствуют, если ограничиться рассмотрением действий с $N = 4$ - суперсимметрией, спонтанно нарушенной до $N = 2$. Компоненты, описывающие такую систему, принадлежат $N = 2$ киральному мультиплету, в котором отсутствуют вспомогательные поля. Тогда преобразования относительно нарушенной и ненарушенной суперсимметрии повторяют уже известные преобразования (2.36), (2.40), относительно которых инвариантно свободное действие. Кроме того, поскольку в (2.40) оказывалось возможным заранее отделить часть преобразования, свертывающуюся в полную производную, можно формулировать действие в терминах переменных λ, $\bar\lambda$. В терминах λ, $\bar\lambda$ бозонные действия с высшими производными выглядят значительно проще. Преобразования λ, $\bar\lambda$ имеют вид

$$\delta^\star_S\lambda = -\mathrm{i}\left(\varepsilon\bar\psi + \bar\varepsilon\psi\right)\dot\lambda, \quad \delta^\star_Q\lambda = -2\left(1+\lambda\bar\lambda\right)\epsilon\mathcal{D}_t\psi - H\dot\lambda,$$
$$\delta^\star_S\bar\lambda = -\mathrm{i}\left(\varepsilon\bar\psi + \bar\varepsilon\psi\right)\dot{\bar\lambda}, \quad \delta^\star_Q\bar\lambda = 2\left(1+\lambda\bar\lambda\right)\bar\epsilon\mathcal{D}_t\bar\psi - H\dot{\bar\lambda}, \qquad (2.132)$$

где $H = -\epsilon\psi\bar\lambda + \bar\epsilon\bar\psi\lambda$. Преобразования других переменных также необходимо переписать в терминах λ, $\bar\lambda$

$$\begin{gathered}
\delta^\star_S\psi = \varepsilon - \mathrm{i}\left(\varepsilon\bar\psi + \bar\varepsilon\psi\right)\dot\psi, \quad \delta^\star_Q\psi = \mathrm{i}\bar\epsilon\lambda - H\dot\psi, \\
\delta^\star_S\bar\psi = \bar\varepsilon - \mathrm{i}\left(\varepsilon\bar\psi + \bar\varepsilon\psi\right)\dot{\bar\psi}, \quad \delta^\star_Q\bar\psi = -\mathrm{i}\epsilon\bar\lambda - H\dot{\bar\psi}, \\
\delta^\star_S\mathcal{E} = -\mathrm{i}\partial_t\left[\left(\varepsilon\bar\psi + \bar\varepsilon\psi\right)\mathcal{E}\right], \quad \delta^\star_Q\mathcal{E} = -\partial_t\left[\mathcal{E}H\right] - 2\left(\epsilon\dot\psi\bar\lambda - \bar\epsilon\dot{\bar\psi}\lambda\right).
\end{gathered} \tag{2.133}$$

2.9.1. Анион

Исходное бозонное действие для аниона тривиальным образом инвариантно относительно преобразований нарушенной суперсимметрии (2.132). Поскольку оно линейно по $\dot\lambda$, тождественное добавление $\mathcal{E}/\mathcal{E}$ ковариантизует и меру интегрирования, и производные. Однако, можно ожидать, что существуют дополнительные слагаемые, исчезающие в бозонном пределе. В предположении, что вся анионная добавка пропорциональна безразмерной константе α, фермионное дополнение к лагранжиану должно иметь размерность t^{-1}. Такое слагаемое имеет вид $\mathcal{E}F_2(\lambda\bar\lambda)\mathcal{D}_t\psi\mathcal{D}_t\bar\psi \sim \mathcal{E}^{-1}F_2(\lambda\bar\lambda)\dot\psi\dot{\bar\psi}$ и инвариантно относительно нарушенной суперсимметрии. Члены, зависящие от производных λ, будут иметь меньшее число производных по времени от фермионов и не будут инвариантными относительно S-суперсимметрии, так что данный выбор единственный.

Функция F_2 должна быть установлена инвариантностью относительно ненарушенной суперсимметрии. Непосредственное вычисление приводит к действию

$$S_{\text{sanyon}} = \frac{\mathrm{i}\alpha}{2}\int dt\mathcal{E}\frac{\mathcal{D}_t\lambda\bar\lambda - \mathcal{D}_t\bar\lambda\lambda}{1-\lambda\bar\lambda} - 2\alpha\int dt\mathcal{E}\frac{1+\lambda\bar\lambda}{(1-\lambda\bar\lambda)^2}\mathcal{D}_t\psi\mathcal{D}_t\bar\psi. \tag{2.134}$$

При доказательстве инвариантности (2.134), в отличие от всех предыдущих, приходится прибегать к разложению в ряд по фермионам, что делает возможность обобщения данного действия на высшие суперсимметрии сомнительным.

Как и для свободной $N = 4 \to N = 2$ частицы, в данном случае можно указать суперполевое действие. Поскольку в низшем приближении бозонная часть $D\overline{D}\left(\dot\psi\bar\psi + \dot{\bar\psi}\psi\right) \sim \dot\lambda\bar\lambda - \dot{\bar\lambda}\lambda$, естественно предполагать, что суперполевое действие имеет вид $S \sim F(\lambda\bar\lambda)\left(\dot\psi\bar\psi + \dot{\bar\psi}\psi\right)$. Компонентное выражение (2.134) воспроизводится суперполевым интегралом

$$S_{\text{sfanyon}} = \frac{\mathrm{i}\alpha}{2}\int dt d\theta d\bar\theta\frac{\dot{\boldsymbol\psi}\bar{\boldsymbol\psi} + \dot{\bar{\boldsymbol\psi}}\boldsymbol\psi}{1-\boldsymbol\lambda\bar{\boldsymbol\lambda}}. \tag{2.135}$$

Также стоит отметить, что фермионный вклад в низшем приближении $\frac{\mathrm{i}\alpha}{2}D\overline{D}\left(\dot\psi\bar\psi + \dot{\bar\psi}\psi\right)$ имеет вид $-2\alpha\dot\psi\dot{\bar\psi}$, и такое слагаемое можно было угадать и из суперполевых соображений.

Компонентное слагаемое в действии для аниона может быть записано через формы Картана. Если $\omega_J|$, $\omega_S|$, $\bar\omega_S|$, $\omega_P|$ - $\triangle t$-проекции форм ω_J, ω_S, $\bar\omega_S$, ω_P, рассматриваемые при

$\theta \to 0$, то (2.134) имеет структуру

$$S_{\text{sanyon}} = \frac{\mathrm{i}\alpha}{2} \int \omega_J| - 2\alpha \int \frac{\omega_S| \cdot \bar{\omega}_S|}{\omega_P|}. \tag{2.136}$$

2.9.2. Частица с жесткостью

Схожим образом можно рассмотреть возможность построения суперсимметричного действия, квадратичного по внешней кривизне - частного случая (2.129) при

$$\mathcal{F} = \frac{(1+\lambda\bar{\lambda})^2}{(1-\lambda\bar{\lambda})^4} \dot{\lambda}\dot{\bar{\lambda}}. \tag{2.137}$$

Слагаемое $\int dt G_1(\lambda\bar{\lambda})\dot{\lambda}\dot{\bar{\lambda}}$ имеет размерность t^{-1} и должно сопрождаться соответствующим параметром β, $[\beta] = [t]$. Его очевидный аналог, инвариантный относительно нарушенной суперсимметрии, имеет вид $\int dt\mathcal{E}G_1(\lambda\bar{\lambda})\mathcal{D}_t\lambda\mathcal{D}_t\bar{\lambda}$ Исчезающими в бозонном пределе слагаемыми с нужной размерностью являются

$$\mathrm{i}\int dt\mathcal{E}G_2(\lambda\bar{\lambda})\left(\mathcal{D}_t^2\psi\mathcal{D}_t\bar{\psi} + \mathcal{D}_t^2\bar{\psi}\mathcal{D}_t\psi\right),\ \mathrm{i}\int dt\mathcal{E}G_3(\lambda\bar{\lambda})\left(\mathcal{D}_t\lambda\bar{\lambda} - \mathcal{D}_t\bar{\lambda}\lambda\right)\mathcal{D}_t\psi\mathcal{D}_t\bar{\psi}. \tag{2.138}$$

Они также инвариантны относительно S-суперсимметрии. Таким образом, сокращая излишние множители в данных слагаемых, можно записать анзац для действия частицы с жесткостью в виде

$$S_{\text{srigid}} = \int dt \left[\mathcal{E}^{-1}G_1\dot{\lambda}\dot{\bar{\lambda}} + \mathrm{i}\mathcal{E}^{-2}G_2(\lambda\bar{\lambda})\left(\ddot{\psi}\dot{\bar{\psi}} + \ddot{\bar{\psi}}\dot{\psi}\right) + \mathrm{i}G_3\mathcal{E}^{-2}\left(\dot{\lambda}\bar{\lambda} - \dot{\bar{\lambda}}\lambda\right)\dot{\psi}\dot{\bar{\psi}}\right]. \tag{2.139}$$

Данное действие инвариантно относительно ненарушенной суперсимметрии, если выполнены уравнения

$$-G_3 + G_2' + 2G_1 = 0, \quad G_3 + G_2' + 2(1+\lambda\bar{\lambda})G_1' = 0, \quad G_2 + (1+\lambda\bar{\lambda})G_1 = 0 \tag{2.140}$$

Они не являются независимыми, поскольку сумма первых двух сводится к производной третьего. Их решение удобно выразить через функцию G_1, известную из бозонного предела (2.137):

$$G_2 = -(1+\lambda\bar{\lambda})G_1, \quad G_3 = G_1 - (1+\lambda\bar{\lambda})G_1'. \tag{2.141}$$

Таким образом, полное действие имеет вид

$$\begin{aligned} S_{\text{srigid}} \;&=\; \int dt \left[\frac{1+\lambda\bar{\lambda}}{(1-\lambda\bar{\lambda})^3}\mathcal{E}^{-1}\dot{\lambda}\dot{\bar{\lambda}} - \mathrm{i}\frac{(1+\lambda\bar{\lambda})^2}{(1-\lambda\bar{\lambda})^3}\mathcal{E}^{-2}\left(\ddot{\psi}\dot{\bar{\psi}} + \ddot{\bar{\psi}}\dot{\psi}\right) - \right. \\ &\left. -3\mathrm{i}\frac{(1+\lambda\bar{\lambda})^3}{(1-\lambda\bar{\lambda})^4}\left(\dot{\lambda}\bar{\lambda} - \dot{\bar{\lambda}}\lambda\right)\mathcal{E}^{-2}\dot{\psi}\dot{\bar{\psi}}\right]. \end{aligned} \tag{2.142}$$

Суперполевое действие существует и для этой системы. Замечая, что в низшем приближении $\overline{D}\dot{\boldsymbol{\psi}} \sim \dot{\boldsymbol{\lambda}}$, можно ожидать, что суперполевой лагранжиан имеет вид $\sim G_1\dot{\psi}\dot{\bar{\psi}}$ (поскольку $\mathcal{E} = 1 + \mathrm{i}\left(\dot{\psi}\bar{\psi} + \dot{\bar{\psi}}\psi\right)$, дополнительные множители с ним пропадут.) Известное компонетное действие (2.142) полностью воспроизводится интегралом

$$S_{\text{srigid}} = \int dt d\theta d\bar{\theta} \frac{1 + \boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{(1 - \boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{\lambda}})^3} \dot{\boldsymbol{\psi}}\dot{\bar{\boldsymbol{\psi}}}. \tag{2.143}$$

2.9.3. Произвольное действие со вторыми производными q

Также можно поставить задачу суперсимметризации действия (2.129). Наиболее простым в данном случае оказывается не компонентный формализм, а суперполевой. Поскольку в бозонном пределе $D\overline{D}\left(\dot{\boldsymbol{\psi}}\dot{\bar{\boldsymbol{\psi}}}\right)|_{\theta\to 0} = \dot{\lambda}\dot{\bar{\lambda}}$, интеграл

$$S_{sgen} = \int dt d\theta d\bar{\theta} \frac{1 - \lambda\bar{\lambda}}{1 + \lambda\bar{\lambda}} \frac{\mathcal{F}(\nabla_t\boldsymbol{\lambda}\nabla_t\bar{\boldsymbol{\lambda}})}{\nabla_t\boldsymbol{\lambda}\nabla_t\bar{\boldsymbol{\lambda}}} \nabla_t\boldsymbol{\psi}\nabla_t\bar{\boldsymbol{\psi}}, \tag{2.144}$$

при пренебрежении фермионами в конечном ответе приводит к (2.129). Также он инвариантен относительно нарушенной суперсимметрии. Действительно, если рассматривать активные преобразования, относительно которых

$$\delta_S^\star\boldsymbol{\lambda} = -\mathrm{i}\left(\varepsilon\bar{\boldsymbol{\psi}} + \bar{\varepsilon}\boldsymbol{\psi}\right)\dot{\boldsymbol{\lambda}},\; \delta_S^\star\nabla_t\boldsymbol{\lambda} = -\mathrm{i}\left(\varepsilon\bar{\boldsymbol{\psi}} + \bar{\varepsilon}\boldsymbol{\psi}\right)\partial_t\nabla_t\boldsymbol{\lambda},\; \delta_S^\star\nabla_t\boldsymbol{\psi} = -\mathrm{i}\left(\varepsilon\bar{\boldsymbol{\psi}} + \bar{\varepsilon}\boldsymbol{\psi}\right)\partial_t\nabla_t\boldsymbol{\psi}, \tag{2.145}$$

вариация суперполевого лагранжиана в S_{sgen} будет иметь вид $\delta_S^\star\mathcal{L}_{sgen} = -\mathrm{i}\left(\varepsilon\bar{\boldsymbol{\psi}} + \bar{\varepsilon}\boldsymbol{\psi}\right)\partial_t\mathcal{L}_{sgen}$. Интегрированием по частям производную можно перебросить на $\boldsymbol{\psi}$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}$; тогда соответствующее слагаемое пропадет, поскольку $\mathcal{L}_{sgen} \sim \dot{\boldsymbol{\psi}}\dot{\bar{\boldsymbol{\psi}}}$.

В отличие от суперполевого формализма, компонентный оказывается в данном случае малополезным, в первую очередь из-за того, что при наличии произвольной функции от размерного выражения старые аргументы о составе членов в компонентном лагранжиане оказываются неприменимыми. Хотя для функций частного вида размерные аргументы все равно можно применять, из-за очевидной необходимости добавлять отрицательные степени $\dot{\lambda}\dot{\bar{\lambda}}$ список членов с фермионами оказывается очень длинным, по сути включающим все не равные тождественно нулю комбинации фермионов.

2.10. Выводы

При построении суперсимметричных действий для частиц в 2+1 - пространстве-времени можно сделать некоторые существенные выводы:

- Примененный метод нелинейных реализаций позволяет систематически строить все элементы, необходимые для формулировки компонентного действия - условия, налагаемые на суперполя, связи между параметрами фактор-пространства, законы преобразования суперполей и компонент, уравнения движения для вспомогательных полей.

- Суперсимметричные действия частиц, сформулированные в терминах компонент суперполей, являются достаточно простыми обобщениями бозонных действий, что напрямую связано с выбором фермионных компонент. Способ, которым фермионы входят в лагранжиан, определяется спонтанно нарушенной суперсимметрией. Роль ненарушенной суперсимметрии - фиксировать остаточную свободу в действии.

- Структура рассмотренных действий для частиц аналогична таковой действия Волкова-Акулова [10] (с учетом упрощений, связанных с тем, что в механике все переменные зависят только от времени). С этой точки зрения, фермион ψ проявляет свойства нейтрино, а q, $\bar{q}$ - полей материи.

- Сконструированные действия имеют весьма общий характер. Так как механики частиц в трех- и пятимерном пространстве-времени с различным количеством суперсимметрий устроены аналогичным образом, имеет смысл предположить, что все свободные суперсимметричные действия для частиц повторяют структуру уже построенных.

- Относительная простота реализации спонтанно нарушенной суперсимметрии, ясный геометрический смысл модификации действия (замена производных и меры интегрирования), и связанная с этим простота доказательства инвариантности действия и его анзаца относительно S- суперсимметрии позволяют утверждать, что в некотором смысле спонтанно нарушенная суперсимметрия реализована явно. Это находится в разительном контрасте с суперполевым подходом, в котором ненарушенная суперсимметрия явна, но спонтанно нарушенная - совершенно не очевидна.

- Также построения упрощаются выбором фермионных компонент, естественным с точки зрения формализма нелинейных реализаций, но неочевидным с точки зрения суперполей. В суперполевом формализме естественным был бы выбор фермиона линейной реализации $Dq|_{\theta\to 0}$, который связан с ψ нелинейным образом и имеет более сложный закон преобразования относительно нарушенной суперсимметрии. Также такой выбор фермиона сильно усложнил бы выражение для $\mathcal{E}$.

- Одним из ограничений предложенного метода является то, что все рассматриваемые фермионы - Голдстоуновские и принадлежат нелинейной реализации суперсимметрии. Такое имеет место, только если половина генераторов суперсимметрии спонтанно нарушены.

- Также следует отметить роль генераторов T, $\overline{T}$ в построении действий. Параметры $\boldsymbol{\lambda}$, $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ при них, с одной стороны, выражались через $\nabla_t\mathbf{q}$, $\nabla_t\bar{\mathbf{q}}$ условиями $\omega_Z = 0$, $\bar{\omega}_Z = 0$, с другой - присутствовали в формах ω_S, $\bar{\omega}_S$. Тем самым они давали возможность простым способом получить связь между $\nabla\bar{\boldsymbol{\psi}}|_{\theta\to0}$, $\overline{\nabla}\boldsymbol{\psi}|_{\theta\to0}$ и $\mathcal{D}_tq$, $\mathcal{D}_t\bar{q}$ на уравнениях движения вспомогательных полей, что сделало возможным построение действий с наибольшим числом суперсимметрий. Если $\nabla\bar{\boldsymbol{\psi}}|_{\theta\to0}$, $\overline{\nabla}\boldsymbol{\psi}|_{\theta\to0}$ не соответствуют никакие параметры фактор-пространства, что имеет место в суперсимметричных теориях Борна-Инфельда, то задача выяснения их свойств существенно усложняется.

- Метод нелинейных реализаций может найти применение при построении суперсимметричных действий с высшими производными. Это применение ограничено необходимостью знать уравнения движения для вспомогательных полей и возможностью использования размерных соображений.

- В отличие от свободного действия, содержащего только первые производные по времени от q и ψ, действия с высшими производными не могут быть полностью зафиксированы только требованиями инвариантности относительно двух суперсимметрий. Остающаяся функциональная свобода должна быть зафиксирована из других соображений, например, известным бозонным пределом.

Результаты, изложенные в данной главе, были в сокращенном виде опубликованы в работах [45, 46].

Глава 3

Компонентные действия суперсимметричных бран

3.1. Введение

Одним из объектов, представляющих интерес для современной математической физики, являются браны - протяженные объекты, погруженные в многомерные пространства и являющиеся решением уравнений супергравитации. Для описания бран, в частности, могут применяться низкоэнергетические эффективные действия - теории поля, описывающие флуктуации браны и определенные в ее мировом объеме.

Будучи погружена в пространство высших размерностей, P-брана спонтанно нарушает симметрии этого пространства до симметрий собственного мирового объема. Возникающие при этом спонтанном нарушении симметрии Голдстоуновские бозоны и являются полями, описывающими флуктуации браны. В случае суперсимметричных бран часть суперсимметрии также оказывается спонтанно нарушенной, что приводит в возникновению Голдстоуновских фермионов. В случае одиночных бран, как правило, нарушается половина суперсимметрий, и все физические фермионы принадлежат нелинейной реализации суперсимметрии. Существенно отметить, что действие соответствующей теории поля полностью определяется требованием инвариантности относительно точной и спонтанно нарушенной суперсимметрий.

Для описания теорий со спонтанно нарушенными симметриями естественно использовать формализм нелинейных реализаций [36, 37], и эффективность его применения к вопросам описания бран уже была продемонстрирована в работах [6, 9, 47] и многих других. Присутствие ненарушенной суперсимметрии позволяет применять для формулировки действия суперполевые методы, что и было с успехом использовано для описания систем с различными вариантами нарушения суперсимметрии [6–9, 39, 48]. Однако, суперполевой лагранжиан, как правило, не является точным инвариантом относительно нарушенной суперсимметрии, а сдвигается на спинорные производные некоторых комбинаций полей, пропадающие при интегрировании по всему суперпространству. Поэтому формализм нелинейных реализаций оказывается непригодным непосредственно для построения суперполевого действия. Поскольку ковариантные условия неприводимости оказываются существенно нелинейными, анализ условий, которые накладывает на суперполевой лагранжиан дополнительная суперсимметрия - задача достаточно сложная. Кроме того, иногда условия неприводимости удается ковариантизовать только вместе с уравнениями движения [6] либо не удается вовсе. Таким образом, применяемые методы позволяют построить суперполевое действие далеко не во всех, представляющих интерес, случаях.

Также стоит отметить, что, даже если ковариантные условия неприводимости найдены и суперполевое действие построено, вычислить из него компонентное действие - достаточно сложная задача. Кроме существенно нелинейных условий, ее усложняет также возможность выбрать фермионные компоненты супермультиплета множеством разных способов. Получающееся при вычислении выражение весьма громоздко, а его геометрическая интерпретация неочевидна, и ничто в нем не указывает на присутствие дополнительной суперсимметрии.

При отказе от требования построения действия в виде, явно инвариантном относительно ненарушенной суперсимметрии, формализм нелинейных реализаций способен оказать существенную помощь. Так, было показано как в [40], так и при исследовании суперсимметричных механик, что при спонтанном нарушении половины суперсимметрий существует выделенная удобная параметризация фактор-пространства. В этой параметризации θ-координаты суперпространства и бозонные суперполя $\mathbf{q}$ инвариантны относительно нарушенной суперсимметрии, а фермионные суперполя $\boldsymbol{\psi}$ сдвигаются на постоянный антикоммутирующий параметр ε. Поскольку оказывается возможным ковариантным образом связать $\boldsymbol{\psi}$ и спинорную производную $\mathbf{q}$, существует естественный выбор физических компонент: $q = \mathbf{q}|_{\theta\to 0}$ инвариантно относительно нарушенной суперсимметрии, а $\psi = \boldsymbol{\psi}|_{\theta\to 0}$ сдвигается на ε. (Таким образом, в этом подходе фермионы ведут себя как Голдстино, а бозоны - как поля материи модели Волкова-Акулова [10].) И результаты работ [10, 40], и непосредственное обобщение результатов, полученных в суперсимметричной механике, свидетельствуют, что требования инвариантности относительно таких преобразований достаточно, чтобы определить способ, которым фермионы входят в лагранжиан. Из этих работ ясно, что фермионы входят в действие в виде:

- Детерминанта фермионной тетрады, обеспечивающего инвариантность меры интегрирования,
- Ковариантных производных физических полей, построенных с помощью обратной фермионной тетрады.

Также существует и третья, менее очевидная, но весьма существенная для дальнейших построений возможность - член Весса-Зумино. Он не является точным инвариантом относительно преобразований спонтанно нарушенной суперсимметрии, а сдвигается на полную дивергенцию.

Фермионная тетрада может быть естественным образом получена в рамках формализма нелинейных реализаций, а член Весса-Зумино - построен из форм Картана с помощью метода, предложенного в [50]. Поскольку действие в бозонном пределе также сравнительно просто строится из форм Картана, полное суперсимметричное действие оказывается зафиксированным с точностью до нескольких констант. Последние могут быть найдены проверкой инвариантности действия относительно ненарушенной суперсимметрии в первых порядках по полям. Описанный подход позволяет получить достаточно простое и компактное действие, каждое слагаемое в котором имеет ясный геометрический смысл.

3.2. Мембрана в пятимерном пространстве-времени

Данный раздел посвящен формулировке компонентного действия для мембраны в $D = 5$, доказательству его инвариантности относительно ненарушенной и спонтанно нарушенной суперсимметрий. Данная система удобна для иллюстрации предлагаемого подхода к действиям для бран, поскольку, с одной стороны, содержит наиболее нетривиальную часть конструкций такого рода - член Весса-Зумино, а с другой - вызывает меньше технических трудностей при анализе по сравнению с системами в более высоких размерностях и с большим числом полей.

Компонентное действие для браны с исключенными вспомогательными полями построено методом, во многом повторяющим использованный в суперсимметричной механике и работе [40]. Подход к построению действия является достаточно простым и алгоритмическим и широко использует метод нелинейных реализаций. Он включает следующие этапы:

- Необходимо сформулировать алгебру симметрии теории. В данном случае это - расширенная нечетными генераторами пятимерная алгебра Пуанкаре;

- Также необходимо постулировать элемент фактор-пространства, оставляющий линейно реализованной группу Лоренца в мировом объеме $so(1,2)$, при стандартной реализации преобразований в суперпространстве;

- Элемент фактор-пространства позволяет стандартными способами найти ковариантные объекты (формы Картана) и преобразования относительно представляющих интерес генераторов. Формы Картана позволяют также построить соответствующие ковариантные производные;

- Из форм при спонтанно нарушенных генераторах можно найти связь между суперполями и условия неприводимости, а также ковариантизованные уравнения движения. Упрощенная с учетом этих результатов, форма при генераторе P позволяет построить бозонное действие;
- Действуя по аналогии с суперсимметричной механикой, и учитывая результаты Волкова-Акулова, необходимо обобщить бозонное действие так, чтобы автоматически обеспечить его инвариантность относительно нарушенной суперсимметрии;
- Также необходимо построить член Весса-Зумино и доказать его инвариантность относительно нарушенной суперсимметрии. Для этого также существует алгоритмический способ [50], хотя в данном случае член Весса-Зумино несложно восстановить и без него, руководствуясь размерными соображениями и тем, что в его состав должен входить ϵ^{ABC} - символ;
- Поскольку действие оказывается зафиксированным этими соображениями с точностью до двух неизвестных констант, уже можно проверить его инвариантность относительно ненарушенной суперсимметрии. Это одновременно определит все константы.

3.2.1. Алгебра и элемент фактор-пространства

$N = 1$, $D = 5$ супералгебра Пуанкаре является исходным пунктом всех последующих построений. Для того, чтобы ее можно было использовать для формулировки элемента фактор-пространства и вычисления форм Картана, предварительно требуется выписать ее в трехмерных обозначениях. Это позволит отделить линейно реализованные трехмерную группу Лоренца и $U(1)$ генератор, а также разделить генераторы пятимерных трансляций на трехмерные, ассоциированные с координатами в мировом объеме мембраны, и спонтанно нарушенные центральные заряды , ассоциированные со скалярными полями, описывающими ее флуктуации. Также нужно разделить суперзаряды исходной алгебры на две одинаковые группы, одна из которых ассоциирована с нечетными координатами суперпространства, вторая - с Голдстоуновскими фермионами.

Однако, поскольку набор генераторов известен и схема коммутационных соотношений между ними ясна, более простым решением оказывается принять за исходный пункт трехмерную алгебру Пуанкаре $M_{\alpha\beta}$, $P_{\alpha\beta}$, расширить ее двумя комплексными центральными зарядами Z, $\overline{Z}$, генератором $U(1)$, преобразующим их, и генераторами $K_{\alpha\beta}$, $\overline{K}_{\alpha\beta}$ из фактор-пространства $SO(1,4)/SO(1,2) \times U(1)$. Тождества Якоби позволяют зафиксировать коммутационные соотношения этих бозонных генераторов:

$$\begin{aligned}
&[M_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta}] = \epsilon_{\alpha\delta} M_{\beta\gamma} + \epsilon_{\alpha\gamma} M_{\beta\delta} + \epsilon_{\beta\gamma} M_{\alpha\delta} + \epsilon_{\beta\delta} M_{\alpha\gamma},\\
&[M_{\alpha\beta}, P_{\gamma\delta}] = \epsilon_{\alpha\delta} P_{\beta\gamma} + \epsilon_{\alpha\gamma} P_{\beta\delta} + \epsilon_{\beta\gamma} P_{\alpha\delta} + \epsilon_{\beta\delta} P_{\alpha\gamma},\\
&[M_{\alpha\beta}, K_{\gamma\delta}] = \epsilon_{\alpha\delta} K_{\beta\gamma} + \epsilon_{\alpha\gamma} K_{\beta\delta} + \epsilon_{\beta\gamma} K_{\alpha\delta} + \epsilon_{\beta\delta} K_{\alpha\gamma},\\
&\left[M_{\alpha\beta}, \overline{K}_{\gamma\delta}\right] = \epsilon_{\alpha\delta} \overline{K}_{\beta\gamma} + \epsilon_{\alpha\gamma} \overline{K}_{\beta\delta} + \epsilon_{\beta\gamma} \overline{K}_{\alpha\delta} + \epsilon_{\beta\delta} \overline{K}_{\alpha\gamma},\\
&[K_{\alpha\beta}, P_{\gamma\delta}] = -\left(\epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta} + \epsilon_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\delta}\right) Z,\ \left[\overline{K}_{\alpha\beta}, P_{\gamma\delta}\right] = \left(\epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta} + \epsilon_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\delta}\right) \overline{Z},\\
&\left[K_{\alpha\beta}, \overline{Z}\right] = -2P_{\alpha\beta},\ \left[\overline{K}_{\alpha\beta}, Z\right] = 2P_{\alpha\beta},\\
&[U, K_{\alpha\beta}] = -K_{\alpha\beta},\ \left[U, \overline{K}_{\alpha\beta}\right] = \overline{K}_{\alpha\beta},\ [U, Z] = -Z,\ \left[U, \overline{Z}\right] = \overline{Z},\\
&\left[K_{\alpha\beta}, \overline{K}_{\gamma\delta}\right] = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{\alpha\delta} M_{\beta\gamma} + \epsilon_{\alpha\gamma} M_{\beta\delta} + \epsilon_{\beta\gamma} M_{\alpha\delta} + \epsilon_{\beta\delta} M_{\alpha\gamma}\right) + 2\left(\epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta} + \epsilon_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\delta}\right) U.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь α, β - $SO(1,2)$ спинорные индексы, которые можно поднимать и опускать с помощью антисимметричных тензоров $\epsilon_{\alpha\beta}$, $\epsilon^{\gamma\delta}$, $\epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta$, $\epsilon_{12} = \epsilon^{21} = 1$. Условия эрмитового сопряжения генераторов (3.1) имеют вид $(M_{\alpha\beta})^\dagger = -M_{\alpha\beta}$, $(P_{\alpha\beta})^\dagger = P_{\alpha\beta}$, $(K_{\alpha\beta})^\dagger = \overline{K}_{\alpha\beta}, (Z)^\dagger = \overline{Z}$, $(U)^\dagger = U$.

Данная бозонная алгебра должна быть дополнена восемью суперзарядами Q_α, $\overline{Q}_\alpha$, S_α, $\overline{S}_\alpha$. Коммутационные соотношения для них можно принять в виде

$$\begin{aligned}
&\left\{Q_\alpha, \overline{Q}_\beta\right\} = 2P_{\alpha\beta},\ \left\{S_\alpha, \overline{S}_\beta\right\} = 2P_{\alpha\beta},\ \{Q_\alpha, S_\beta\} = 2\epsilon_{\alpha\beta} Z,\ \left\{\overline{Q}_\alpha, \overline{S}_\beta\right\} = 2\epsilon_{\alpha\beta}\overline{Z},\\
&[M_{\alpha\beta}, Q_\gamma] = \epsilon_{\alpha\gamma} Q_\beta + \epsilon_{\beta\gamma} Q_\alpha,\ \left[M_{\alpha\beta}, \overline{Q}_\gamma\right] = \epsilon_{\alpha\gamma}\overline{Q}_\beta + \epsilon_{\beta\gamma}\overline{Q}_\alpha,\\
&[M_{\alpha\beta}, S_\gamma] = \epsilon_{\alpha\gamma} S_\beta + \epsilon_{\beta\gamma} S_\alpha,\ \left[M_{\alpha\beta}, \overline{S}_\gamma\right] = \epsilon_{\alpha\gamma}\overline{S}_\beta + \epsilon_{\beta\gamma}\overline{S}_\alpha,\\
&\left[\overline{K}_{\alpha\beta}, Q_\gamma\right] = -\epsilon_{\alpha\gamma}\overline{S}_\beta - \epsilon_{\beta\gamma}\overline{S}_\alpha,\ \left[K_{\alpha\beta}, \overline{Q}_\gamma\right] = \epsilon_{\alpha\gamma} S_\beta + \epsilon_{\beta\gamma} S_\alpha,\\
&\left[\overline{K}_{\alpha\beta}, S_\gamma\right] = \epsilon_{\alpha\gamma}\overline{Q}_\beta + \epsilon_{\beta\gamma}\overline{Q}_\alpha,\ \left[K_{\alpha\beta}, \overline{S}_\gamma\right] = -\epsilon_{\alpha\gamma} Q_\beta - \epsilon_{\beta\gamma} Q_\alpha,\\
&[U, Q_\alpha] = -\frac{1}{2} Q_\alpha,\ \left[U, \overline{Q}_\alpha\right] = \frac{1}{2}\overline{Q}_\alpha,\ [U, S_\alpha] = -\frac{1}{2} S_\alpha,\ \left[U, \overline{S}_\alpha\right] = \frac{1}{2}\overline{S}_\alpha.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Обобщенные тождества Якоби при этом также удовлетворяются. Вместе (3.1), (3.2) образуют $N = 4$, $d = 3$ супералгебру Пуанкаре с двумя центральными зарядами.

Как указывалось ранее [40], существует параметризация фактор-пространства, при которой $M_{\alpha\beta}$ и U - симметрии реализованы линейно, $P_{\alpha\beta}$ и $Z, \overline{Z}$ - сдвигами $x^{\alpha\beta}$ и $\mathbf{q}$, $\bar{\mathbf{q}}$ соответственно, ненарушенная суперсимметрия - стандартным образом, а нарушенная на фермионном суперполе - сдвигами на антикоммутирующий параметр. В данном случае такими свойствами обладает элемент

$$g = e^{\mathrm{i}x^{\alpha\beta}P_{\alpha\beta}} e^{\theta^\alpha Q_\alpha + \bar\theta^\alpha \overline{Q}_\alpha} e^{\mathrm{i}(\mathbf{q}Z + \bar{\mathbf{q}}\overline{Z})} e^{\boldsymbol{\psi}^\alpha S_\alpha + \bar{\boldsymbol{\psi}}^\alpha \overline{S}_\alpha} e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{\Lambda}^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} + \overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\alpha\beta}\overline{K}_{\alpha\beta})}. \tag{3.3}$$

Здесь $\mathbf{q}$, $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}^\dagger$, $\boldsymbol{\psi}^\alpha$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}^\alpha = (\boldsymbol{\psi}^\alpha)^\dagger$, $\boldsymbol{\Lambda}^{\alpha\beta}$, $\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\alpha\beta} = (\boldsymbol{\Lambda}^{\alpha\beta})^\dagger$ - суперполя, зависящие от координат суперпространства $x^{\alpha\beta}$, θ^α, $\bar{\theta}^\alpha$.

Левое умножение элемента g позволяет найти инфинитезимальные преобразования симметрии, связанные со всеми генераторами. Из них наибольший интерес представляют

- Ненарушенная (Q) суперсимметрия ($g_0 = \exp\left(\epsilon^\alpha Q_\alpha + \bar{\epsilon}^\alpha \overline{Q}_\alpha\right)$)

$$\delta x^{\alpha\beta} = \mathrm{i}\left(\epsilon^{(\alpha}\bar{\theta}^{\beta)} + \bar{\epsilon}^{(\alpha}\theta^{\beta)}\right), \quad \delta\theta^\alpha = \epsilon^\alpha\ , \delta\bar{\theta}^\alpha = \bar{\epsilon}^\alpha\ . \tag{3.4}$$

- Спонтанно нарушенная (S) суперсимметрия ($g_0 = \exp\ \left(\varepsilon^\alpha S_\alpha + \bar{\varepsilon}^\alpha \overline{S}_\alpha\right)$)

$$\delta x^{\alpha\beta} = \mathrm{i}\left(\varepsilon^{(\alpha}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{\beta)} + \bar{\varepsilon}^{(\alpha}\boldsymbol{\psi}^{\beta)}\right), \quad \delta\mathbf{q} = 2\mathrm{i}\varepsilon_\alpha\theta^\alpha,\ \delta\bar{\mathbf{q}} = 2\mathrm{i}\bar{\varepsilon}_\alpha\bar{\theta}^\alpha, \quad \delta\boldsymbol{\psi}^\alpha = \varepsilon^\alpha,\ \delta\bar{\boldsymbol{\psi}}^\alpha = \bar{\varepsilon}^\alpha\ . \tag{3.5}$$

- Преобразования автоморфизмов ($K, \overline{K}$) ($g_0 = \exp\ \mathrm{i}\left(a^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta} + \bar{a}^{\alpha\beta}\overline{K}_{\alpha\beta}\right)$)

$$\begin{aligned}
&\delta x^{\alpha\beta} = -2\mathrm{i}\left(a^{\alpha\beta}\mathbf{q} - \bar{a}^{\alpha\beta}\bar{\mathbf{q}}\right) - 2\theta^\gamma\boldsymbol{\psi}_\gamma\bar{a}^{\alpha\beta} + 2\bar{\theta}^\gamma\bar{\boldsymbol{\psi}}_\gamma a^{\alpha\beta}, \quad \delta\theta^\alpha = -2\mathrm{i}a^{\alpha\beta}\bar{\boldsymbol{\psi}}_\beta,\ \delta\bar{\theta}^\alpha = 2\mathrm{i}\bar{a}^{\alpha\beta}\boldsymbol{\psi}_\beta,\\
&\delta\mathbf{q} = -2\mathrm{i}a^{\alpha\beta}x_{\alpha\beta} - 2a^{\alpha\beta}\left(\theta_\alpha\bar{\theta}_\beta - \boldsymbol{\psi}_\alpha\bar{\boldsymbol{\psi}}_\beta\right), \quad \delta\boldsymbol{\psi}^\alpha = 2\mathrm{i}a^{\alpha\beta}\bar{\theta}_\beta,\\
&\delta\bar{\mathbf{q}} = 2\mathrm{i}\bar{a}^{\alpha\beta}x_{\alpha\beta} - 2\bar{a}^{\alpha\beta}\left(\theta_\alpha\bar{\theta}_\beta - \boldsymbol{\psi}_\alpha\bar{\boldsymbol{\psi}}_\beta\right), \quad \delta\bar{\boldsymbol{\psi}}^\alpha = -2\mathrm{i}\bar{a}^{\alpha\beta}\theta_\beta.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Преобразованиям (3.4) - (3.6) соответствует инвариантная форма Картана

$$g^{-1}dg = \mathrm{i}\Omega_P + \Omega_Q + \overline{\Omega}_Q + \mathrm{i}\Omega_Z + \mathrm{i}\overline{\Omega}_Z + \Omega_S + \overline{\Omega}_S + \mathrm{i}\Omega_K + \mathrm{i}\overline{\Omega}_K + \Omega_M + \Omega_U. \tag{3.7}$$

Для дальнейших построений интерес представляют только формы Ω_P, Ω_Q, Ω_Z и Ω_S. Поскольку все эти формы принадлежат генераторам из фактор-пространства, они преобразуются однородно.

$$\begin{aligned}
\Omega_P &= \left\{\left(\mathrm{ch}\,2\sqrt{\boldsymbol{Y}}\right)_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}\triangle x^{\alpha\beta} - \mathrm{i}\left(\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\alpha\beta}\triangle\mathbf{q} - \boldsymbol{\Lambda}^{\alpha\beta}\triangle\bar{\mathbf{q}}\right)\left(\frac{\mathrm{sh}\,2\sqrt{\boldsymbol{Y}}}{\sqrt{\boldsymbol{Y}}}\right)_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}\right\}P_{\gamma\delta},\\
\Omega_Q &= \left\{d\theta^\beta\left(\cos 2\sqrt{\overline{\boldsymbol{T}}}\right)_\beta^{\ \gamma} - \mathrm{i}\,d\bar{\boldsymbol{\psi}}^\beta\,\boldsymbol{\Lambda}_\beta^{\ \alpha}\left(\frac{\sin 2\sqrt{\overline{\boldsymbol{T}}}}{\sqrt{\overline{\boldsymbol{T}}}}\right)_\alpha^{\ \gamma}\right\}Q_\gamma,\\
\Omega_Z &= \left\{\triangle\mathbf{q} + \left(\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\alpha\beta}\triangle\mathbf{q} - \boldsymbol{\Lambda}^{\alpha\beta}\triangle\bar{\mathbf{q}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}\,2\sqrt{\boldsymbol{Y}} - 1}{\boldsymbol{Y}}\right)_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}\boldsymbol{\Lambda}_{\gamma\delta} + \mathrm{i}dx^{\alpha\beta}\left(\frac{\mathrm{sh}\,2\sqrt{\boldsymbol{Y}}}{\sqrt{\boldsymbol{Y}}}\right)_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}\boldsymbol{\Lambda}_{\gamma\delta}\right\}Z,\\
\Omega_S &= \left\{d\boldsymbol{\psi}^\beta\left(\cos 2\sqrt{\overline{\boldsymbol{T}}}\right)_\beta^{\ \gamma} + \mathrm{i}\,d\bar{\theta}^\beta\,\boldsymbol{\Lambda}_\beta^{\ \alpha}\left(\frac{\sin 2\sqrt{\overline{\boldsymbol{T}}}}{\sqrt{\overline{\boldsymbol{T}}}}\right)_\alpha^{\ \gamma}\right\}S_\gamma,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\triangle x^{\alpha\beta} = dx^{\alpha\beta} - \mathrm{i}\left(\theta^{(\alpha}d\bar{\theta}^{\beta)} + \bar{\theta}^{(\alpha}d\theta^{\beta)} + \boldsymbol{\psi}^{(\alpha}d\bar{\boldsymbol{\psi}}^{\beta)} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{(\alpha}d\boldsymbol{\psi}^{\beta)}\right), \tag{3.9}$$

$$\triangle\mathbf{q} = d\mathbf{q} - 2\mathrm{i}\boldsymbol{\psi}_\alpha d\theta^\alpha,\ \triangle\bar{\mathbf{q}} = d\bar{\mathbf{q}} - 2\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\psi}}_\alpha d\bar{\theta}^\alpha. \tag{3.10}$$

Здесь коэффициенты при $\triangle x^{\alpha\beta}$, $\triangle\mathbf{q}$, $d\theta^\alpha, d\boldsymbol{\psi}^\alpha$ - формальные ряды по степеням матриц

$$\boldsymbol{Y}_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = \boldsymbol{\Lambda}_{\alpha\beta}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\gamma\delta} + \overline{\boldsymbol{\Lambda}}_{\alpha\beta}\boldsymbol{\Lambda}^{\gamma\delta}, \quad \boldsymbol{T}_\alpha{}^\beta = \boldsymbol{\Lambda}_\alpha{}^\gamma\overline{\boldsymbol{\Lambda}}_\gamma{}^\beta,\ \overline{\boldsymbol{T}}_\alpha{}^\beta = \overline{\boldsymbol{\Lambda}}_\alpha{}^\gamma\boldsymbol{\Lambda}_\gamma{}^\beta. \tag{3.11}$$

Преобразования (3.4), (3.5) позволяют установить, что $\triangle x^{\alpha\beta}$, $\triangle\mathbf{q}$, $d\theta^\alpha, d\boldsymbol{\psi}^\alpha$ инвариантны относительно обеих суперсимметрий. Это дает возможность ввести производные, ковариантные как относительно Q, так и S-суперсимметрий. Для того, чтобы найти их, нужно сравнить дифференциалы некоторой инвариантной функции, записанные в терминах $dx^{\alpha\beta}, d\theta^\alpha, d\bar\theta^\alpha$ и $\triangle x^{\alpha\beta}, d\theta^\alpha, d\bar\theta^\alpha$. Также дифференциал можно записать и через $\tilde\triangle x^{\alpha\beta}, d\theta^\alpha, d\bar\theta^\alpha$, где $\tilde\triangle x^{\alpha\beta} = dx^{\alpha\beta} - \mathrm{i}\left(\theta^{(\alpha}d\bar\theta^{\beta)} + \bar\theta^{(\alpha}d\theta^{\beta)}\right)$ инвариантен относительно лишь Q-суперсимметрии:

$$\begin{aligned} dF &= dx^{\alpha\beta}\frac{\partial F}{\partial x^{\alpha\beta}} + d\theta^\alpha\frac{\partial F}{\partial\theta^\alpha} + d\bar\theta^\alpha\frac{\partial F}{\partial\bar\theta^\alpha} = \\ &= \tilde\triangle x^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}F + d\theta^\alpha D_\alpha F + d\bar\theta^\alpha\overline{D}_\alpha F = \\ &= \triangle x^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha\beta}F + d\theta^\alpha\nabla_\alpha F + d\bar\theta^\alpha\overline{\nabla}_\alpha F. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Сравнение первой и второй строчек данного выражения приводит к стандартным ковариантным производным в суперпространстве:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - \mathrm{i}\,\bar\theta^\beta\,\partial_{\alpha\beta},\ \overline{D}_\alpha = \frac{\partial}{\partial\bar\theta^\alpha} - \mathrm{i}\,\theta^\beta\,\partial_{\alpha\beta}, \quad \left\{D_\alpha, \overline{D}_\beta\right\} = -2\mathrm{i}\partial_{\alpha\beta},\ \{D_\alpha, D_\beta\} = 0. \tag{3.13}$$

Сравнение второй и третьей, с учетом возможности переписать дифференциалы $d\boldsymbol{\psi}^\alpha$, $d\bar{\boldsymbol{\psi}}^\alpha$ через $\triangle x^{\alpha\beta}, d\theta^\alpha, d\bar\theta^\alpha$ либо $\tilde\triangle x^{\alpha\beta}, d\theta^\alpha, d\bar\theta^\alpha$, приводит к производным

$$\begin{aligned} &\nabla_{\alpha\beta} = (E^{-1})_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}\partial_{\gamma\delta}, \quad E_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = \delta_\alpha^{(\gamma}\delta_\beta^{\delta)} - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}^{(\gamma}\partial_{\alpha\beta}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{\delta)} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{(\gamma}\partial_{\alpha\beta}\boldsymbol{\psi}^{\delta)}\right), \\ &\nabla_\alpha = D_\alpha - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}^\beta D_\alpha\bar{\boldsymbol{\psi}}^\gamma + \bar{\boldsymbol{\psi}}^\beta D_\alpha\boldsymbol{\psi}^\gamma\right)\nabla_{\beta\gamma} = D_\alpha - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}^\beta\nabla_\alpha\bar{\boldsymbol{\psi}}^\gamma + \bar{\boldsymbol{\psi}}^\beta\nabla_\alpha\boldsymbol{\psi}^\gamma\right)\partial_{\beta\gamma}, \\ &\overline{\nabla}_\alpha = \overline{D}_\alpha - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}^\beta\overline{D}_\alpha\bar{\boldsymbol{\psi}}^\gamma + \bar{\boldsymbol{\psi}}^\beta\overline{D}_\alpha\boldsymbol{\psi}^\gamma\right)\nabla_{\beta\gamma} = \overline{D}_\alpha - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}^\beta\overline{\nabla}_\alpha\bar{\boldsymbol{\psi}}^\gamma + \bar{\boldsymbol{\psi}}^\beta\overline{\nabla}_\alpha\boldsymbol{\psi}^\gamma\right)\partial_{\beta\gamma}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Их структура во многом повторяет структуру ковариантных производных в механике, с учетом очевидных усложнений, связанных с наличием пространственно-временных индексов у производных и тетрад. Коммутационные соотношения также схожи:

$$\begin{aligned} &\{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\} = -2\mathrm{i}\ \left(\nabla_\alpha\boldsymbol{\psi}^\gamma\nabla_\beta\bar{\boldsymbol{\psi}}^\delta + \nabla_\alpha\bar{\boldsymbol{\psi}}^\gamma\nabla_\beta\boldsymbol{\psi}^\delta\right)\nabla_{\gamma\delta}, \\ &\left\{\nabla_\alpha, \overline{\nabla}_\beta\right\} = -2\mathrm{i}\,\nabla_{\alpha\beta} - 2\mathrm{i}\left(\nabla_\alpha\boldsymbol{\psi}^\gamma\overline{\nabla}_\beta\bar{\boldsymbol{\psi}}^\delta + \nabla_\alpha\bar{\boldsymbol{\psi}}^\gamma\overline{\nabla}_\beta\boldsymbol{\psi}^\delta\right)\nabla_{\gamma\delta}, \\ &[\nabla_{\alpha\beta}, \nabla_\gamma] = -2\mathrm{i}\ \left(\nabla_{\alpha\beta}\boldsymbol{\psi}^\mu\nabla_\gamma\bar{\boldsymbol{\psi}}^\nu + \nabla_{\alpha\beta}\bar{\boldsymbol{\psi}}^\mu\nabla_\gamma\boldsymbol{\psi}^\nu\right)\nabla_{\mu\nu}, \\ &[\nabla_{\alpha\beta}, \nabla_{\gamma\delta}] = 2\mathrm{i}\left(\nabla_{\alpha\beta}\boldsymbol{\psi}^\mu\nabla_{\gamma\delta}\bar{\boldsymbol{\psi}}^\nu - \nabla_{\gamma\delta}\boldsymbol{\psi}^\mu\nabla_{\alpha\beta}\bar{\boldsymbol{\psi}}^\nu\right)\nabla_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Описанных инструментов достаточно, чтобы можно было перейти к исследованию действия.

3.2.2. Непосредственные следствия форм Картана

Формы Картана являются источником важных сведений о действии мембраны. Они позволяют найти инвариантные связи между суперполями и ковариантные уравнения движения, а также бозонное действие.

Условия неприводимости

Как и в суперсимметричной механике, на суперполя оказывается возможным наложить ковариантные связи. Для этого нужно приравнять к нулю формы Ω_Z, $\overline{\Omega}_Z$. Выделяя в этих условиях коэффициенты при $\triangle x^{\alpha\beta}$, $d\theta^\alpha$, $d\bar{\theta}^\alpha$, можно получить систему уравнений

$$\nabla_{\alpha\beta}\mathbf{q} = -\mathrm{i}\boldsymbol{\Lambda}_{\gamma\delta}\left(\frac{\mathrm{th}\,2\sqrt{\boldsymbol{Y}}}{\sqrt{\overline{\boldsymbol{Y}}}}\right)^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}, \quad \nabla_\alpha\mathbf{q} = -2\mathrm{i}\boldsymbol{\psi}_\alpha, \qquad \overline{\nabla}_\alpha\mathbf{q} = 0,$$
$$\nabla_{\alpha\beta}\mathbf{q} = \mathrm{i}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}_{\gamma\delta}\left(\frac{\mathrm{th}\,2\sqrt{\boldsymbol{Y}}}{\sqrt{\overline{\boldsymbol{Y}}}}\right)^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}, \qquad \nabla_\alpha\bar{\mathbf{q}} = 0, \qquad \overline{\nabla}_\alpha\bar{\mathbf{q}} = -2\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\psi}}_\alpha. \tag{3.16}$$

Данные условия выражают все присутствовавшие в качестве параметров фактор-пространства суперполя через производные бозонных суперполей $\mathbf{q}$, $\bar{\mathbf{q}}$ (обратный эффект Хиггса [38]). Кроме того, связи (3.16) налагают на суперполя $\mathbf{q}$, $\bar{\mathbf{q}}$ условия, в первом приближении совпадающие с условиями, выделяющими киральный мультиплет $N = 2$, $d = 3$ суперсимметрии. Поскольку все нелинейные части этих условий выражаются через производные $\mathbf{q}$, $\bar{\mathbf{q}}$, эти условия также приводят к неприводимому мультиплету с тем же компонетным составом (два физических скаляра, четыре физических фермиона, два вспомогательных поля). Как и в суперсимметричной механике, явную связь вспомогательного поля, $\nabla_{\alpha\beta}\mathbf{q}$ и $\overline{\nabla}_\alpha\boldsymbol{\psi}_\beta$ можно найти, анализируя все следствия условий неприводимости с учетом антикоммутаторов спинорных производных (3.15). Поскольку киральный мультиплет определен вне массовой поверхности, все эти условия - кинематические.

Для того, чтобы найти необходимые динамические условия в суперсимметричной механике, следовало приравнять в нулю $d\theta$, $d\bar{\theta}$ - проекции форм ω_S, $\bar{\omega}_S$. Кроме того, эти условия позволяли не проводить детальный разбор всех следствий из антикоммутаторов. В данном случае условия $\Omega_S|_{d\theta,d\bar{\theta}} = 0$, $\overline{\Omega}_S|_{d\theta,d\bar{\theta}} = 0$ приводят к соотношениям

$$\Omega_S\big| = 0 \;\Rightarrow\; (a)\;\nabla_\alpha\boldsymbol{\psi}_\beta = 0, \quad (b)\;\overline{\nabla}_\beta\boldsymbol{\psi}^\alpha = -\mathrm{i}\boldsymbol{\Lambda}_\beta{}^\gamma\left(\frac{\mathrm{tg}\,2\sqrt{\overline{\boldsymbol{T}}}}{\sqrt{\overline{\boldsymbol{T}}}}\right)^\alpha_\gamma, \tag{3.17}$$
$$\overline{\Omega}_S\big| = 0 \;\Rightarrow\; (a)\;\overline{\nabla}_\alpha\bar{\boldsymbol{\psi}}_\beta = 0, \quad (b)\;\nabla_\beta\bar{\boldsymbol{\psi}}^\alpha = \mathrm{i}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}_\beta{}^\gamma\left(\frac{\mathrm{tg}\,2\sqrt{\boldsymbol{T}}}{\sqrt{\boldsymbol{T}}}\right)^\alpha_\gamma,$$

вместе с условиями (3.16) аналогичными условиям суперэмбеддинга [49].

Условия $\nabla_\alpha \psi_\beta \sim \nabla_\alpha \nabla_\beta \mathbf{q} = 0$ и $\overline{\nabla}_\alpha \bar{\psi}_\beta \sim \overline{\nabla}_\alpha \overline{\nabla}_\beta \bar{\mathbf{q}} = 0$ содержат уравнения вспомогательных полей: в первом приближении они имеют вид $D_\alpha D_\beta \mathbf{q} \sim \epsilon_{\alpha\beta} D^\gamma D_\gamma \mathbf{q} = 0$, $\overline{D}_\alpha \overline{D}_\beta \bar{\mathbf{q}} \sim \epsilon_{\alpha\beta} \overline{D}^\gamma \overline{D}_\gamma \bar{\mathbf{q}}$. Они не противоречат алгебре производных, поскольку с учетом этих условий $\{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\} = 0$, $\{\overline{\nabla}_\alpha, \overline{\nabla}_\beta\} = 0$. Также из них следуют правильные ковариантные уравнения движения $\nabla^\alpha \nabla_\alpha \mathbf{q} = 0$, $\overline{\nabla}^\alpha \overline{\nabla}_\alpha \bar{\mathbf{q}} = 0$ для рассматриваемого мультиплета. Из других соотношений (3.17) следуют выражения также для $\overline{\nabla}_\beta \boldsymbol{\psi}^\alpha$, $\nabla_\beta \bar{\boldsymbol{\psi}}^\alpha$. Они, однако, хотя и верны, в чем можно убедиться в первом приближении, технически мало полезны. Для того, чтобы получить из них выражения $\overline{\nabla}_\beta \boldsymbol{\psi}^\alpha$, $\nabla_\beta \bar{\boldsymbol{\psi}}^\alpha$ через $\nabla_{\alpha\beta} \mathbf{q}$, требуется пересуммировать ряд в терминах матрицы $\boldsymbol{Y}_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = \boldsymbol{\Lambda}_{\alpha\beta} \overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\gamma\delta} + \overline{\boldsymbol{\Lambda}}_{\alpha\beta} \boldsymbol{\Lambda}^{\gamma\delta}$ формы Ω_Z, но нет очевидного способа осуществить это. Тем не менее, можно заметить, что из этих условий следует, что антисимметричные части $\overline{\nabla}_\beta \boldsymbol{\psi}_\alpha$, $\nabla_\beta \bar{\boldsymbol{\psi}}_\alpha$ равны нулю.

Чтобы найти выражения для $\overline{\nabla}_\beta \boldsymbol{\psi}^\alpha|_{\theta\to 0}$, $\nabla_\beta \bar{\boldsymbol{\psi}}^\alpha|_{\theta\to 0}$ на массовой поверхности, требуемые для доказательства инвариантности действия относительно ненарушенной суперсимметрии, нужно снова воспользоваться антикоммутаторами спинорных производных. Для облегчения анализа следствий антикоммутаторов имеет смысл перейти к векторным обозначениям, введя матрицы

$$\left(\sigma^A\right)_{\alpha\gamma} \left(\sigma^B\right)^{\beta\gamma} = \eta^{AB} \delta_\alpha^\beta + \epsilon^{ABC} \left(\sigma_C\right)_\alpha^\beta, \quad \epsilon_{012} = 1,\ \eta^{AB} = \mathrm{diag}\{1, -1, -1\}. \tag{3.18}$$

Тогда, если подставить в антикоммутаторы $\{\nabla_\alpha, \overline{\nabla}_\beta\} \mathbf{q}|_{\theta\to 0}, \{\nabla_\alpha, \overline{\nabla}_\beta\} \bar{\mathbf{q}}|_{\theta\to 0}$ выражения для производных $\mathbf{q}$, $\bar{\mathbf{q}}$, $\boldsymbol{\psi}^\alpha$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}^\alpha$ в терминах объектов с векторными индексами

$$\begin{gathered} \overline{\nabla}_\alpha \boldsymbol{\psi}_\beta|_{\theta\to 0} = \left(\sigma^A\right)_{\alpha\beta} J_A,\ \nabla_\beta \bar{\boldsymbol{\psi}}_\alpha|_{\theta\to 0} = \left(\sigma^A\right)_{\alpha\beta} \overline{J}_A, \\ (\nabla_{\alpha\beta} \mathbf{q})|_{\theta\to 0} = \left(\sigma^A\right)_{\alpha\beta} \mathcal{D}_A q,\ (\nabla_{\alpha\beta} \bar{\mathbf{q}})|_{\theta\to 0} = \left(\sigma^A\right)_{\alpha\beta} \mathcal{D}_A \bar{q}, \end{gathered} \tag{3.19}$$

и учесть уравнения для вспомогательных полей (3.17), то можно получить систему уравнений

$$\begin{aligned} J_C &= \mathcal{D}_C q \left(1 - J \cdot \overline{J} + X\overline{X}\right) + J_C(\overline{J} \cdot \mathcal{D}q) + \overline{J}_C(J \cdot \mathcal{D}q), \\ \overline{J}_C &= \mathcal{D}_C \bar{q} \left(1 - J \cdot \overline{J} + X\overline{X}\right) + J_C(\overline{J} \cdot \mathcal{D}\bar{q}) + \overline{J}_C(J \cdot \mathcal{D}\bar{q}). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Здесь $J \cdot \overline{J} = J^A \overline{J}_A$ и т.п.

Наиболее общая структура, которую, предположительно, могут иметь векторы J_A, $\overline{J}_A$ есть

$$J_A = f_1 \mathcal{D}_A q + f_2 (\mathcal{D}q \cdot \mathcal{D}q) \mathcal{D}_A \bar{q} + f_3 \sqrt{\mathcal{D}q \mathcal{D}q} \epsilon_{ABC} \mathcal{D}^B q \mathcal{D}^C \bar{q}. \tag{3.21}$$

Предполагается, что функции действительны и зависят от скаляров $\xi = \mathcal{D}^A q \mathcal{D}_A \bar{q}$, $\eta = \mathcal{D}^A q \mathcal{D}_A q$, $\bar{\eta} = \mathcal{D}^A \bar{q} \mathcal{D}_A \bar{q}$. Данная структура обеспечивает ковариантность анзаца относительно преобразований $J_A \to J_A e^{i\alpha}$, $\overline{J}_A \to \overline{J}_A e^{-i\alpha}$, $\mathcal{D}_A q \to \mathcal{D}_A q e^{i\alpha}$, $\mathcal{D}_A \bar{q} \to \mathcal{D}_A \bar{q} e^{-i\alpha}$.

Подставив данный анзац в уравнения (3.20), можно найти, что на массовой поверхности

$$f_1 = 1,\ f_2 = \frac{2}{1 - 2\mathcal{D}q \cdot \mathcal{D}\bar{q} + \sqrt{(1 - 2\mathcal{D}q \cdot \mathcal{D}\bar{q})^2 - 4(\mathcal{D}q \cdot \mathcal{D}q)(\mathcal{D}\bar{q} \cdot \mathcal{D}\bar{q})}},\ f_3 = 0. \tag{3.22}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} J_C &= \mathcal{D}_C q \left(1 - J \cdot \overline{J}\right) + J_C(\overline{J} \cdot \mathcal{D}q) + \overline{J}_C(J \cdot \mathcal{D}q),\ J_A = f_1 \mathcal{D}_A q + f_2(\mathcal{D}q \cdot \mathcal{D}q)\mathcal{D}_A \bar{q}, \\ \overline{J}_C &= \mathcal{D}_C \bar{q} \left(1 - J \cdot \overline{J}\right) + J_C(\overline{J} \cdot \mathcal{D}\bar{q}) + \overline{J}_C(J \cdot \mathcal{D}\bar{q}),\ \overline{J}_A = f_1 \mathcal{D}_A \bar{q} + f_2(\mathcal{D}\bar{q} \cdot \mathcal{D}\bar{q})\mathcal{D}_A q. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Отсюда уже несложно найти функции f_1, f_2. Решение имеет вид

$$J_A = \mathcal{D}_A q + \frac{2(\mathcal{D}q \cdot \mathcal{D}q)\mathcal{D}_A \bar{q}}{1 - 2\mathcal{D}q \cdot \mathcal{D}\bar{q} + \sqrt{(1 - 2\mathcal{D}q \cdot \mathcal{D}\bar{q})^2 - 4(\mathcal{D}q \cdot \mathcal{D}q)(\mathcal{D}\bar{q} \cdot \mathcal{D}\bar{q})}}, \quad \overline{J}_A = (J_A)^\dagger\,. \tag{3.24}$$

Бозонное действие

Суперполевое действие для супербран может быть полностью зафиксировано требованием инвариантности относительно двух суперсимметрий, и можно ожидать, что и для компонентного действия выполения этих требований достаточно. Однако, поскольку суперсимметричное действие является во многом обобщением бозонного, удобно найти бозонное действие заранее.

Основным требованием к бозонному действию, за неимением суперсимметрий, является инвариантность относительно группы Пуанкаре в $D = 5$. Это позволяет либо написать анзац для действия и зафиксировать функциональный произвол в нем с помощью преобразований (3.6) в бозонном пределе, либо воспользоваться тем, что форма Ω_P по построению ковариантна относительно этих преобразований. Выразив в ней $\Lambda_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\Lambda}_{\alpha\beta}|_{\theta\to 0}$ через $\partial_{\alpha\beta} q = \nabla_{\alpha\beta} \mathbf{q}|_{\theta,\psi\to 0}$ с помощью $\Omega_Z = 0$, можно построить соответствующую форму объема, интеграл от которой и будет действием. Третий возможный способ, анализ суперполевых уравнений движения с последующим удалением фермионов, более сложен, и нет смысла применять его, когда есть дополнительная фиксирующая действие симметрия.

Пренебрегая фермионами в (3.8), из условий $\Omega_Z = 0$, $\overline{\Omega}_Z = 0$ можно получить

$$\begin{gathered} \partial_{\alpha\beta} q = -\mathrm{i}\Lambda_{\gamma\delta} \left(\frac{\operatorname{th} 2\sqrt{Y}}{\sqrt{Y}}\right)^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}, \quad \partial_{\alpha\beta} \bar{q} = \mathrm{i}\overline{\Lambda}_{\gamma\delta} \left(\frac{\operatorname{th} 2\sqrt{Y}}{\sqrt{Y}}\right)^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}, \\ \Omega_P = dx^{\alpha\beta} P_{\gamma\delta} e^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}, \quad e^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{\operatorname{ch} 2\sqrt{Y}}\right)^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}, \quad S_{D5bos} = \int d^3x \det e. \end{gathered} \tag{3.25}$$

Существенно, что квадрат тетрады $e_{\alpha\beta}^{\mu\nu}e_{\mu\nu}^{\gamma\delta}$ может быть выражен в терминах производных q, $\bar{q}$ с помощью простой формулы

$$g_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \equiv e_{\alpha\beta}^{\mu\nu}e_{\mu\nu}^{\gamma\delta} = \delta_{(\alpha}^{\gamma}\delta_{\beta)}^{\delta} - \partial_{\alpha\beta}q\partial^{\gamma\delta}\bar{q} - \partial_{\alpha\beta}\bar{q}\partial^{\gamma\delta}q \Rightarrow S_{D5bos} = \int d^3x\sqrt{\det g}. \tag{3.26}$$

Чтобы придать смысл детерминантам, подобным (3.25), (3.26), имеет смысл снова перейти к векторным обозначениям. Можно принять по определению, что

$$\partial_{\alpha\beta} = \left(\sigma^A\right)_{\alpha\beta}\partial_A, \quad g_A^B = \frac{1}{2}\left(\sigma_A\right)^{\alpha\beta}\left(\sigma^B\right)_{\gamma\delta}g_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \tag{3.27}$$

(последнее требование обеспечивает, что матрица с векторными индексами также начинается с единичной). Тогда, разлагая детерминант симметричной 3 × 3 матрицы по степеням ее следов, можно найти, что

$$\begin{aligned} \det g_A^B &= \frac{1}{6}(\mathrm{Tr}g)^3 - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}g\,\mathrm{Tr}g^2 + \frac{1}{3}\mathrm{Tr}g^3 \Rightarrow \\ S_{D5bos} &= \int d^3x\sqrt{\left(1 - 2\partial_A q\partial^A\bar{q}\right)^2 - 4\left(\partial^B q\partial_B q\right)\left(\partial^C\bar{q}\partial_C\bar{q}\right)}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Данное действие инвариантно относительно бозонных преобразований (3.6), в чем можно убедиться непосредственно.

3.2.3. Нарушенная суперсимметрия и структура действия

Как отмечалось ранее, в используемом компонентом подходе к действиям супербран нарушенная суперсимметрия играет значительную роль. Она полностью фиксирует способ, которым фермионы входят в действие.

Обобщение бозонного действия

Перед тем, как рассматривать преобразования спонтанно нарушенной суперсимметрии, следует определить используемые компоненты. Как и в механике, имеет смысл определить компоненты как

$$q = \mathbf{q}|_{\theta\to 0},\ \bar{q} = \bar{\mathbf{q}}|_{\theta\to 0},\ \psi^\alpha = \boldsymbol{\psi}^\alpha|_{\theta\to 0},\ \bar{\psi}^\alpha = \bar{\boldsymbol{\psi}}^\alpha|_{\theta\to 0}. \tag{3.29}$$

Это возможно, поскольку $\boldsymbol{\psi}_\alpha = \frac{\mathrm{i}}{2}\nabla_\alpha\mathbf{q}$, и удобно, поскольку обеспечивает простой закон преобразования фермионной компоненты.

Можно заметить (3.5), что координаты $\theta^\alpha, \bar{\theta}^\alpha$ инвариантны относительно S-суперсимметрии, и поэтому компоненты преобразуются независимо друг от друга. Тогда нужные законы можно получить, устремив θ^α к нулю:

$$\delta_S q = 0,\ \delta_S\bar{q} = 0,\ \delta_S\psi^\alpha = \varepsilon^\alpha,\ \delta_S\bar{\psi}^\alpha = \bar{\varepsilon}^\alpha,\ \delta_S x^{\alpha\beta} = \mathrm{i}\left(\varepsilon^{(\alpha}\bar{\psi}^{\beta)} + \bar{\varepsilon}^{(\alpha}\psi^{\beta)}\right), \tag{3.30}$$

или, в активной форме,

$$\delta^\star_S q = -U^A\partial_A q,\ \delta^\star_S \bar{q} = -U^A\partial_A \bar{q},\ \delta^\star_S \psi^\alpha = \varepsilon^\alpha - U^A\partial_A\psi^\alpha,\ \delta^\star_S\bar{\psi}^\alpha = \bar{\varepsilon}^\alpha - U^A\partial_A\bar{\psi}^\alpha, \tag{3.31}$$

где $U^A = \mathrm{i}\left(\varepsilon^{(\alpha}\bar{\psi}^{\beta)} + \bar{\varepsilon}^{(\alpha}\psi^{\beta)}\right)\left(\sigma^A\right)_{\alpha\beta}$.

Как и в механике, производная q имеет закон преобразования с иной структурой:

$$\delta^\star_S\partial_A q = -U^M\partial_M\partial_A q - \partial_A U^M\partial_M q. \tag{3.32}$$

Поскольку ψ^α преобразуются так же, как и $\boldsymbol{\psi}^\alpha$, можно ожидать, что $\mathcal{D}_A q = 1/2\left(\sigma_A\right)^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha\beta}\mathbf{q}|_{\theta\to 0}$ будет иметь более простой закон преобразования. Действительно, определив $\mathcal{E}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = \left(E^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}\right)|_{\theta\to 0}$, $\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \left(\mathcal{E}^{-1}\right)^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}\partial_{\gamma\delta}$, можно найти, что

$$\begin{gathered}
E^B_A = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_A\right)^{\alpha\beta}\left(\sigma^B\right)_{\gamma\delta}E^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = \delta^B_A - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}^\gamma\partial_A\bar{\boldsymbol{\psi}}^\delta + \bar{\boldsymbol{\psi}}^\delta\partial_A\boldsymbol{\psi}^\gamma\right)\left(\sigma^B\right)_{\gamma\delta} \Rightarrow \\
\delta^\star_S\mathcal{E}^B_A = -\partial_A U^C\mathcal{E}^B_C - U^C\partial_C\mathcal{E}^B_A,\ \delta^\star_S\left(\mathcal{E}^{-1}\right)^B_A = \mathcal{D}_A U^B - U^C\partial_C\left(\mathcal{E}^{-1}\right)^B_A, \\
\delta^\star_S\det\mathcal{E} = -\partial_A\left(U^A\det\mathcal{E}\right),\ \delta^\star_S\mathcal{D}_A q = -U^B\partial_B\mathcal{D}_A q,\ \delta^\star_S\mathcal{D}_A\psi^\alpha = -U^B\partial_B\mathcal{D}_A\psi^\alpha.
\end{gathered} \tag{3.33}$$

Можно заметить, что

$$\delta^\star_S F(\mathcal{D}_A q, \mathcal{D}_B\bar{q}) = -U^M\partial_M F,\ \delta^\star\left(\det\mathcal{E}\cdot F(\mathcal{D}_A q,\mathcal{D}_B\bar{q})\right) = -\partial_M\left(U^M\det\mathcal{E}\cdot F\right), \tag{3.34}$$

где F - произвольная функция. Следовательно, непосредственное обобщение бозонного действия должно состоять в замене в нем производных $\partial_A \to \mathcal{D}_A$ и меры интегрирования $d^3x \to d^3x\det\mathcal{E}$. Кроме того, можно допустить дополнительное слагаемое $\int d^3x\det\mathcal{E}$, сводящееся к постоянной в бозонном пределе.

Член Весса-Зумино

Член Весса-Зумино имеет принципиальную важность для последующих построений. В трехмерном пространстве он может быть построен из замкнутой 4-формы, инвариантной относительно нарушенной суперсимметрии; если эту форму Ω_4 возможно представить как $d\Omega_3$, то интеграл $\int\Omega_3$ и будет искомым членом Весса-Зумино [50]. Однако, в данном относительно простом случае его структуру можно угадать. Очевидно, данное слагаемое должно быть пропорционально фермионам и содержать $\mathcal{D}_A q$, $\mathcal{D}_A\bar{q}$ и тензор ϵ^{ABC}. Можно ожидать, что член Весса-Зумино имеет вид

$$S_{WZ} = \mathrm{i}\int d^3x\det\mathcal{E}\epsilon^{ABC}\mathcal{D}_A q\mathcal{D}_B\bar{q}\left(\psi_\alpha\mathcal{D}_C\bar{\psi}^\alpha + \bar{\psi}^\alpha\mathcal{D}_C\psi_\alpha\right). \tag{3.35}$$

(Знак в последнем множителе выбран так, чтобы не получить полную дивергенцию). Он оказывается инвариантным относительно преобразований спонтанно нарушенной суперсимметрии. Действительно, варьируя его относительно преобразований (3.31), (3.32),

$$\delta_S^\star S_{WZ} = \mathrm{i}\int d^3x \det\mathcal{E}\epsilon^{ABC}\mathcal{D}_A q\mathcal{D}_B\bar{q}\left(\varepsilon_\alpha\mathcal{D}_C\bar{\psi}^\alpha + \bar{\varepsilon}^\alpha\mathcal{D}_C\psi_\alpha\right) - \int d^3x\partial_A\left(U^A\mathcal{L}_{WZ}\right). \qquad (3.36)$$

Второе слагаемое есть полная дивергенция. В первом слагаемом можно устранить $\det\mathcal{E}$, выделив из трех производных $\mathcal{E}^{-1}$, и воспользовавшись тождеством

$$\epsilon^{ABC}\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_A^M\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_B^N\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_C^P = \frac{1}{\det\mathcal{E}}\epsilon^{MNP}. \qquad (3.37)$$

После этого очевидно, что и первое слагаемое есть полная дивергенция.

Устранив в (3.35) $\det\mathcal{E}$ с помощью (3.37), можно получить другое представление члена Весса-Зумино

$$S_{WZ} = \mathrm{i}\int d^3x\epsilon^{ABC}\partial_A q\partial_B\bar{q}\left(\psi_\alpha\partial_C\bar{\psi}^\alpha + \bar{\psi}^\alpha\partial_C\psi_\alpha\right). \qquad (3.38)$$

Таким образом, бозонное действие и требование инвариантности относительно нарушенной суперсимметрии способны зафиксировать суперсимметричное действие с точностью до двух констант

$$\begin{aligned} S \;=\; & \int d^3x(1+\alpha) - \int d^3x\det\mathcal{E}\left(\alpha + \sqrt{(1-2\mathcal{D}q\cdot\mathcal{D}\bar{q})^2 - 4(\mathcal{D}q\cdot\mathcal{D}q)(\mathcal{D}\bar{q}\cdot\mathcal{D}\bar{q})}\right) + \\ & +\mathrm{i}\beta\int d^3x\det\mathcal{E}\epsilon^{ABC}\mathcal{D}_A q\mathcal{D}_B\bar{q}\left(\psi_\alpha\mathcal{D}_C\bar{\psi}^\alpha + \bar{\psi}^\alpha\mathcal{D}_C\psi_\alpha\right). \qquad (3.39)\end{aligned}$$

Данные константы должны быть определены с помощью преобразований ненарушенной суперсимметрии. Тривиальное действие $\int d^3x$ добавлено, чтобы обеспечить предел $S_{q,\psi\to 0} = 0$.

3.2.4. Ненарушенная суперсимметрия

Инвариантность относительно ненарушенной суперсимметрии является вторым основным требованием, предъявлемым к действию.

Законы преобразования

Преобразования ненарушенной суперсимметрии имеют вид (3.4)

$$\delta_Q x^{\alpha\beta} = \mathrm{i}\left(\epsilon^{(\alpha}\bar{\theta}^{\beta)} + \bar{\epsilon}^{(\alpha}\theta^{\beta)}\right), \quad \delta_Q\theta^\alpha = \epsilon^\alpha,\ \delta_Q\bar{\theta}^\alpha = \bar{\epsilon}^\alpha. \qquad (3.40)$$

Отсюда можно вывести активные преобразования суперполей

$$\delta_Q^\star\mathbf{f} = -\delta_Q\theta^\alpha\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\theta^\alpha} - \delta_Q\bar{\theta}^\alpha\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\bar{\theta}^\alpha} - \delta_Q x^{\alpha\beta}\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x^{\alpha\beta}} \qquad (3.41)$$

и, пользуясь определениями $\overline{\nabla}_\alpha \boldsymbol{\psi}_\beta|_{\theta\to 0} = \left(\sigma^A\right)_{\alpha\beta} J_A$, $\nabla_\beta \bar{\boldsymbol{\psi}}_\alpha|_{\theta\to 0} = \left(\sigma^A\right)_{\alpha\beta} \overline{J}_A$ (3.19), также их первых компонент (с учетом того, что члены, пропорциональные θ^α, пропадают):

$$\delta^\star_Q f = \delta^\star_Q \mathbf{f}|_{\theta\to 0} \sim -\epsilon^\alpha D_\alpha \mathbf{f}|_{\theta\to 0} - \bar{\epsilon}^\alpha \overline{D}_\alpha \mathbf{f}|_{\theta\to 0} \equiv -\epsilon^\alpha \nabla_\alpha \mathbf{f}|_{\theta\to 0} - \bar{\epsilon}^\alpha \overline{\nabla}_\alpha \mathbf{f}|_{\theta\to 0} - H^A \partial_A f. \qquad (3.42)$$

Здесь $H^A = \mathrm{i}\left(\epsilon^\beta \psi_\beta \overline{J}^A + \bar{\epsilon}^\beta \bar{\psi}_\beta J^A + \epsilon^{ABC}\left[\epsilon^\beta \psi^\gamma \overline{J}_B + \bar{\epsilon}^\beta \bar{\psi}^\gamma J_B\right] \left(\sigma_C\right)_{\beta\gamma}\right)$. Данное слагаемое появляется из разницы $\nabla_\alpha - D_\alpha$, $\overline{\nabla}_\alpha - \overline{D}_\alpha$ с учетом уравнений движения (3.17).

Используя данные формулы, можно немедленно получить

$$\begin{aligned}
\delta^\star_Q q &= 2\mathrm{i}\epsilon^\alpha \psi_\alpha - H^C \partial_C q, \quad \delta^\star_Q \psi_\alpha = -\bar{\epsilon}^\beta \left(\sigma^A\right)_{\alpha\beta} J_A - H^C \partial_C \psi_\alpha, \\
\delta^\star_Q \bar{q} &= 2\mathrm{i}\bar{\epsilon}^\alpha \bar{\psi}_\alpha - H^C \partial_C \bar{q}, \quad \delta^\star_Q \bar{\psi}_\alpha = -\epsilon^\beta \left(\sigma^A\right)_{\alpha\beta} \overline{J}_A - H^C \partial_C \bar{\psi}_\alpha, \\
\delta^\star_Q \mathcal{E}^B_A &= 2\mathrm{i}\left[\epsilon^\beta \partial_A \psi_\beta \overline{J}^B + \bar{\epsilon}^\beta \partial_A \bar{\psi}_\beta J^B\right] - \partial_A H^C \mathcal{E}^B_C + \\
&\quad +2\mathrm{i}\left[\epsilon^\beta \partial_A \psi^\gamma \overline{J}_C + \bar{\epsilon}^\beta \partial_A \bar{\psi}^\gamma J_C\right] \epsilon^{BCD} \left(\sigma_D\right)_{\beta\gamma} - H^C \partial_C \mathcal{E}^B_A, \qquad (3.43) \\
\delta^\star_Q \mathcal{D}_A q &= 2\mathrm{i}\epsilon^\alpha \mathcal{D}_A \psi_\alpha - 2\mathrm{i}\left[\epsilon^\beta \mathcal{D}_A \psi_\beta \overline{J}^C + \bar{\epsilon}^\beta \mathcal{D}_A \bar{\psi}_\beta J^C\right] \mathcal{D}_C q + \\
&\quad -2\mathrm{i}\left[\epsilon^\beta \mathcal{D}_A \psi^\gamma \overline{J}_C + \bar{\epsilon}^\beta \mathcal{D}_A \bar{\psi}^\gamma J_C\right] \epsilon^{BCD} \mathcal{D}_B q \left(\sigma_D\right)_{\beta\gamma} - H^C \partial_C \mathcal{D}_A q, \\
\delta^\star_Q \mathcal{D}_A \bar{q} &= 2\mathrm{i}\bar{\epsilon}^\alpha \mathcal{D}_A \bar{\psi}_\alpha - 2\mathrm{i}\left[\epsilon^\beta \mathcal{D}_A \psi_\beta \overline{J}^C + \bar{\epsilon}^\beta \mathcal{D}_A \bar{\psi}_\beta J^C\right] \mathcal{D}_C \bar{q} + \\
&\quad -2\mathrm{i}\left[\epsilon^\beta \mathcal{D}_A \psi^\gamma \overline{J}_C + \bar{\epsilon}^\beta \mathcal{D}_A \bar{\psi}^\gamma J_C\right] \epsilon^{BCD} \mathcal{D}_B \bar{q} \left(\sigma_D\right)_{\beta\gamma} - H^C \partial_C \mathcal{D}_A \bar{q}.
\end{aligned}$$

Также имеет смысл вычислить вариации $\det \mathcal{E}$ и скаляров $\xi = \mathcal{D}q \cdot \mathcal{D}\bar{q}$, $\eta = \mathcal{D}q \cdot \mathcal{D}q$, $\bar{\eta} = \mathcal{D}\bar{q} \cdot \mathcal{D}\bar{q}$, от которых зависит действие

$$\begin{aligned}
\delta^\star_Q \xi &= X_1 \left[1 - \xi + f_J \eta\bar{\eta}\right] - X_2 \left[1 + f_J \xi\right] - X_5 + X_6 f_J - H^C \partial_C \xi, \\
\delta^\star_Q \eta\bar{\eta} &= -2X_1 \eta\bar{\eta} \left[1 + f_J \xi\right] + 2X_2 \left[1 - \xi + f_J \eta\bar{\eta}\right] - 2X_5 + 2X_6 f_J \eta\bar{\eta} - H^C \partial_C (\eta\bar{\eta}), \qquad (3.44) \\
\delta^\star_Q \det \mathcal{E} &= X_1 + f_J X_2 + X_3 + f_J X_4 - \partial_A \left(H^A \det \mathcal{E}\right).
\end{aligned}$$

Здесь введены независимые комбинации переменных и параметров преобразования

$$\begin{aligned}
X_1 &= 2\mathrm{i}\left[\epsilon^\alpha \mathcal{D}_A \psi_\alpha \mathcal{D}^A \bar{q} + \bar{\epsilon}^\alpha \mathcal{D}_A \bar{\psi}_\alpha \mathcal{D}^A q\right], \\
X_2 &= 2\mathrm{i}\left[\epsilon^\alpha \mathcal{D}_A \psi_\alpha \mathcal{D}^A q \bar{\eta} + \bar{\epsilon}^\alpha \mathcal{D}_A \bar{\psi}_\alpha \mathcal{D}^A \bar{q} \eta\right], \\
X_3 &= 2\mathrm{i}\left[\epsilon^\beta \mathcal{D}_A \psi^\gamma \mathcal{D}_B \bar{q} + \bar{\epsilon}^\beta \mathcal{D}_A \bar{\psi}^\gamma \mathcal{D}_B q\right] \epsilon^{ABC} \left(\sigma_C\right)_{\beta\gamma}, \\
X_4 &= 2\mathrm{i}\left[\epsilon^\beta \mathcal{D}_A \psi^\gamma \mathcal{D}_B q \bar{\eta} + \bar{\epsilon}^\beta \mathcal{D}_A \bar{\psi}^\gamma \mathcal{D}_B \bar{q} \eta\right] \epsilon^{ABC} \left(\sigma_C\right)_{\beta\gamma}, \qquad (3.45) \\
X_5 &= 2\mathrm{i}\left[\epsilon^\beta \mathcal{D}_A \psi^\gamma \mathcal{D}^A \bar{q} - \bar{\epsilon}^\beta \mathcal{D}_A \bar{\psi}^\gamma \mathcal{D}^A q\right] \epsilon^{BCD} \mathcal{D}_B q \mathcal{D}_C \bar{q} \left(\sigma_D\right)_{\beta\gamma}, \\
X_6 &= 2\mathrm{i}\left[\epsilon^\beta \mathcal{D}_A \psi^\gamma \mathcal{D}^A q \bar{\eta} - \bar{\epsilon}^\beta \mathcal{D}_A \bar{\psi}^\gamma \mathcal{D}^A \bar{q} \eta\right] \epsilon^{BCD} \mathcal{D}_B q \mathcal{D}_C \bar{q} \left(\sigma_D\right)_{\beta\gamma},
\end{aligned}$$

а также обозначение

$$f_J = \frac{2}{1 - 2\xi + \sqrt{(1-2\xi)^2 - 4\eta\bar{\eta}}} \Rightarrow J_A = \mathcal{D}_A q + f_J \eta \mathcal{D}_A \bar{q}. \qquad (3.46)$$

Вариация основной части действия

Основная часть лагранжиана $\mathcal{L}_0 = (1+\alpha) - \det\mathcal{E}\left[\alpha + \sqrt{(1-2\xi)^2 - 4\eta\bar\eta}\right]$ содержит одну неопределенную константу. Она определяет множители при кинетических членах бозонов и фермионов, существующих в самом низшем приближении, когда влияние члена Весса-Зумино еще не сказывается. Поэтому можно ожидать, что она может быть зафиксирована при анализе одной лишь вариации $\delta^\star_Q\mathcal{L}_0$.

Стоит отметить, что все слагаемые, содержащие H^A ($\delta^\star_Q \det\mathcal{E} = \ldots - \partial_M(H^M\det\mathcal{E})$, $\delta^\star_Q\xi = \ldots - H^M\partial_M\xi$, $\delta^\star_Q\eta = \ldots - H^M\partial_M\eta$) могут быть собраны в полную дивергенцию, причем независимо от конкретного вида функции $F(\xi,\eta\bar\eta)$ в основной части действия.

Коэффициент при X_1 в вариации основной части действия оказывается равным

$$-\det\mathcal{E}X_1\left\{\alpha + \sqrt{(1-2\xi)^2-4\eta\bar\eta} - \frac{2(1-2\xi)(1-\xi-f_J\eta\bar\eta) - 4\eta\bar\eta(1+f_J\xi)}{\sqrt{(1-2\xi)^2-4\eta\bar\eta}}\right\}. \qquad (3.47)$$

X_1 не является полной дивергенцией даже в низшем приближении, и коэффициент при нем должен быть равен нулю. После некоторых упрощений оказывается, что он равен нулю тогда и только тогда, когда $\alpha = 1$. При данном α коэффициент при X_2, имеющий вид

$$-\det\mathcal{E}\left\{f_J\left(\alpha + \sqrt{(1-2\xi)^2-4\eta\bar\eta}\right) + \frac{2(1-2\xi)(1+f_J\xi) - 4(1-\xi-f_J\eta\bar\eta)}{\sqrt{(1-2\xi)^2-4\eta\bar\eta}}\right\}, \qquad (3.48)$$

также равен нулю.

Полная вариация основной части лагранжиана

$$\delta^\star_Q\mathcal{L}_0 = -2\det\mathcal{E}\,(X_5 + f_JX_6) - \det\mathcal{E}\,(X_3 + f_JX_4)\left[1 + \sqrt{(1-2\xi)^2-4\eta\bar\eta}\right]. \qquad (3.49)$$

тем не менее, не является полной дивергенцией, и действие для мембраны может быть инвариантным только с учетом члена Весса-Зумино.

Вариация члена Весса-Зумино

Для варьирования удобно рассматривать член Весса-Зумино в представлении (3.38)

$$\mathcal{L}_{WZ} = \mathrm{i}\epsilon^{ABC}\partial_Aq\partial_B\bar q\left(\psi_\alpha\partial_C\bar\psi^\alpha + \bar\psi^\alpha\partial_C\psi_\alpha\right), \qquad (3.50)$$

эквивалентном (3.35).

Запись, принятая для законов преобразования, заметно упрощает вычисления. Члены с производными H^M, появляющиеся при варьировании ∂_Aq, $\partial_B\bar q$, $\partial_C\psi_\alpha$, $\partial_C\bar\psi^\alpha$, с помощью тождества

$$\epsilon^{ABC}\partial_AH^D = \epsilon^{DBC}\partial_AH^A + \epsilon^{ADC}\partial_AH^B + \epsilon^{ABD}\partial_AH^C. \qquad (3.51)$$

могут быть приведены к виду

$$-\mathrm{i}\partial_D H^D \epsilon^{ABC} \partial_A q \partial_B \bar{q} \left(\psi_\alpha \partial_C \bar{\psi}^\alpha + \bar{\psi}^\alpha \partial_C \psi_\alpha\right). \tag{3.52}$$

Вместе с членами с H^A без производных $-H^D \partial_D \mathcal{L}_{WZ}$, они, очевидно, образуют полную дивергенцию. При этом учитывать явный вид H^A не требуется.

Остальные слагаемые вариации члена Весса-Зумино имеют вид

$$\begin{aligned} \delta^\star_Q \mathcal{L}_{WZ} \ \sim \ & -2\epsilon^{ABC} \left[\epsilon^\alpha \partial_A \psi_\alpha \partial_B \bar{q} + \bar{\epsilon}^\alpha \partial_B \bar{\psi}_\alpha \partial_A q\right] \left(\psi_\beta \partial_C \bar{\psi}^\beta + \bar{\psi}^\beta \partial_C \psi_\beta\right) - \\ & -\mathrm{i}\partial_C \left[\epsilon^{ABC} \partial_A q \partial_B \bar{q} \left(\epsilon^\beta \psi^\alpha \overline{J}_D - \bar{\epsilon}^\beta \bar{\psi}^\alpha J_D\right) \left(\sigma^D\right)_{\alpha\beta}\right] + \\ & +2\mathrm{i}\epsilon^{ABC} \partial_A q \partial_B \bar{q} \left[\epsilon^\beta \partial_C \psi^\alpha \overline{J}_D - \bar{\epsilon}^\beta \partial_C \bar{\psi}^\alpha J_D\right] \left(\sigma^D\right)_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Последняя строчка (3.53) после восстановления ковариантных производных и $\det \mathcal{E}$ (3.37) и использования тождества $\epsilon^{ABC} J^D = \epsilon^{DBC} J^A + \epsilon^{ADC} J^B + \epsilon^{ABD} J^C$ может быть приведена к виду

$$-\det \mathcal{E} X_3 \left(\xi + f_J \eta \bar{\eta}\right) + \det \mathcal{E} X_4 \left(1 + \xi f_J\right) + \det \mathcal{E} \left(X_5 + f_J X_6\right). \tag{3.54}$$

Ясно, что X_5 и X_6 в полной вариации (3.49)+(3.53) можно сократить, если коэффициент при члене Весса-Зумино принять равным 2. После этого коэффициент перед X_4 оказывается равным нулю, а перед X_3 - минус двум. Другим нетривиальным вкладом в вариацию является первая строка в (3.53). Чтобы увидеть, что данные вклады сокращаются с точностью до полной дивергенции, нужно преобразовать X_3:

$$\begin{aligned} -2X_3 \ = \ & -4\mathrm{i} \left[\epsilon^\beta \partial_A \psi^\gamma \partial_B \bar{q} + \bar{\epsilon}^\beta \partial_A \bar{\psi}^\gamma \partial_B q\right] \epsilon^{ABC} \mathcal{E}^D_C \left(\sigma_D\right)_{\beta\gamma} = \\ = \ & -4\mathrm{i} \left[\epsilon^\beta \partial_A \psi^\gamma \partial_B \bar{q} + \bar{\epsilon}^\beta \partial_A \bar{\psi}^\gamma \partial_B q\right] \left(\sigma_C\right)_{\beta\gamma} \epsilon^{ABC} - \\ & -8\epsilon^{ABC} \left(\epsilon^\beta \partial_A \psi^\gamma \partial_B \bar{q} + \bar{\epsilon}^\beta \partial_A \bar{\psi}^\gamma \partial_B q\right) \left(\psi_{(\beta} \partial_C \bar{\psi}_{\gamma)} + \bar{\psi}_{(\beta} \partial_C \psi_{\gamma)}\right). \end{aligned} \tag{3.55}$$

Последняя строчка здесь не является полной дивергенцией и после интегрирования по частям может быть сведена к

$$-8\epsilon^{ABC} \left(\bar{q}\epsilon^\beta \partial_A \psi_\beta - q\bar{\epsilon}^\beta \partial_A \bar{\psi}_\beta\right) \partial_B \psi_\mu \partial_C \bar{\psi}^\mu. \tag{3.56}$$

Очевидно, данное слагаемое компенсируется первой строчкой (3.53) после аналогичного интегрирования по частям.

Таким образом, инвариантное действие имеет вид

$$\begin{aligned} S \ = \ & \int d^3x \left[2 - \det \mathcal{E} \left(1 + \sqrt{(1 - 2\mathcal{D}q \cdot \mathcal{D}\bar{q})^2 - 4(\mathcal{D}q \cdot \mathcal{D}q)(\mathcal{D}\bar{q} \cdot \mathcal{D}\bar{q})}\right)\right] + \\ & +2\mathrm{i} \int d^3x \det \mathcal{E} \epsilon^{ABC} \mathcal{D}_A q \mathcal{D}_B \bar{q} \left(\psi_\alpha \mathcal{D}_C \bar{\psi}^\alpha + \bar{\psi}^\alpha \mathcal{D}_C \psi_\alpha\right). \end{aligned} \tag{3.57}$$

3.3. Дуальные действия

Если действие некоторой теории поля зависит только от производных поля q, соответствующее уравнение движения имеет вид

$$\frac{\delta S}{\delta q} = 0 \Rightarrow \partial_A F^A = 0,\; F^A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_A q}. \tag{3.58}$$

Если выполнить преобразование Лежандра

$$\mathcal{L}' = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_A q}\partial_A q - \mathcal{L}, \tag{3.59}$$

то можно получить лагранжиан, зависящий от $F^A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_A q}$. При этом уравнение движения для q $\partial_A F^A = 0$, полученное из первого лагранжиана, оказывается тождеством, которому должен удовлетворять объект F^A. В трехмерных теориях такой вид имеет второе уравнение Максвелла, и дуальное действие оказывается действием для электромагнитного поля (в общем случае нелинейным).

Рассмотренное ранее суперсимметричное действие для мембраны в $D = 5$ содержит два бозонных поля, и можно дуализовать либо одно из них, либо оба. Для выполнения первой дуализации необходимо перейти к действительным полям $q = (u + \mathrm{i}v)/\sqrt{2}$, $\bar{q} = (u - \mathrm{i}v)/\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} S_{uv} &= \int d^3x \left[2 - \det\mathcal{E}\left(1 + \sqrt{(1 - 2\mathcal{D}u\cdot\mathcal{D}u)(1 - 2\mathcal{D}v\cdot\mathcal{D}v) - 4(\mathcal{D}u\cdot\mathcal{D}v)^2}\right)\right] + \\ &+ 2\int d^3x \det\mathcal{E}\,\epsilon^{ABC}\mathcal{D}_A u\mathcal{D}_B v\left(\psi_\alpha\mathcal{D}_C\bar{\psi}^\alpha + \bar{\psi}^\alpha\mathcal{D}_C\psi_\alpha\right). \end{aligned} \tag{3.60}$$

В дальнейшем удобно обозначить $F = 1 + \sqrt{(1 - 2\mathcal{D}u\cdot\mathcal{D}u)(1 - 2\mathcal{D}v\cdot\mathcal{D}v) - 4(\mathcal{D}u\cdot\mathcal{D}v)^2}$.

3.3.1. Одно дуализованное поле

Варьируя (3.60) по полю v, можно найти соответствующую напряженность

$$\begin{aligned} \partial_A V^A = 0,\; V^D &= \det\mathcal{E}\,(\mathcal{E}^{-1})_B^D\left[\tilde{V}^B + 2\epsilon^{ABC}\mathcal{D}_A u\left(\psi_\alpha\mathcal{D}_C\bar{\psi}^\alpha + \bar{\psi}^\alpha\mathcal{D}_C\psi_\alpha\right)\right], \\ \tilde{V}^B &= \tfrac{2}{F}\left[(1 - 2\mathcal{D}u\cdot\mathcal{D}u)\mathcal{D}^B v + 2(\mathcal{D}u\cdot\mathcal{D}v)\mathcal{D}^B u\right]. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Данные соотношения должны быть использованы, чтобы выразить $\mathcal{D}_B v$ в терминах $\tilde{V}_B$. Также требуется найти $\tilde{V}^A\mathcal{D}_A v$:

$$\mathcal{L}_{uV} = \mathcal{L}_{uv} - \frac{\partial\mathcal{L}_{uv}}{\partial_A v}\partial_A v = 2 - \det\mathcal{E}\left[\tilde{V}^A\mathcal{D}_A v + 1 + F\right]. \tag{3.62}$$

Разрешить соотношение для $\mathcal{D}_B v$ (3.61) можно, если заметить, что

$$\tilde{V}^A\mathcal{D}_A u = \frac{2}{F}(\mathcal{D}u\cdot\mathcal{D}v) \Rightarrow \tilde{V}^A\mathcal{D}_A v = \frac{1 - 2(\mathcal{D}u\cdot\mathcal{D}u)}{F} - F,\; \mathcal{D}_A v = \frac{F}{2}\frac{\tilde{V}_A - 2(\tilde{V}\cdot\mathcal{D}u)\mathcal{D}^A u}{1 - 2(\mathcal{D}u\cdot\mathcal{D}u)}. \tag{3.63}$$

Вычислить F в терминах переменных $\tilde{V}^A$, $\mathcal{D}_A u$ можно, если подставить в F^2 известные соотношения (3.63), и решить полученное уравнение. В результате можно получить, что

$$F = \frac{1 - 2(\mathcal{D}u \cdot \mathcal{D}u)}{\sqrt{1 - 2(\mathcal{D}u \cdot \mathcal{D}u) + \frac{\tilde{V}^2}{2} - (\tilde{V} \cdot \mathcal{D}u)}}. \tag{3.64}$$

Следовательно, дуальное действие имеет вид

$$S_{uV} = 2\int d^3x - \int d^3x \det\mathcal{E}\left[1 + \sqrt{1 - 2(\mathcal{D}u \cdot \mathcal{D}u) + \frac{\tilde{V}^2}{2} - (\tilde{V} \cdot \mathcal{D}u)^2}\right]. \tag{3.65}$$

В нем отсутствует член Весса-Зумино, поскольку он линеен по $\mathcal{D}_A v$ и входит одиаковым образом в оба слагаемых преобразования Лежандра. Стоит отметить, что, хотя действие удобно записывать в терминах $\tilde{V}^A$, истинной напряженностью поля является V^A (3.61).

3.3.2. Два дуализованных поля

Варьируя лагранжиан по u, v, можно найти соответствующие напряженности

$$\begin{aligned} &\partial_A U^A = 0, U^D = \det\mathcal{E}\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_A^D \left[\tilde{U}^A + 2\epsilon^{ABC}\mathcal{D}_B v\left(\psi_\alpha \mathcal{D}_C \bar{\psi}^\alpha + \bar{\psi}^\alpha \mathcal{D}_C \psi_\alpha\right)\right], \\ &\partial_A V^A = 0, V^D = \det\mathcal{E}\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_B^D \left[\tilde{V}^B + 2\epsilon^{ABC}\mathcal{D}_A u\left(\psi_\alpha \mathcal{D}_C \bar{\psi}^\alpha + \bar{\psi}^\alpha \mathcal{D}_C \psi_\alpha\right)\right], \end{aligned} \tag{3.66}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{U}^A &= \frac{2}{F}\left[(1 - 2(\mathcal{D}v \cdot \mathcal{D}v))\mathcal{D}^A u + 2(\mathcal{D}u \cdot \mathcal{D}v)\mathcal{D}^A v\right], \\ \tilde{V}^A &= \frac{2}{F}\left[(1 - 2(\mathcal{D}u \cdot \mathcal{D}u))\mathcal{D}^A v + 2(\mathcal{D}u \cdot \mathcal{D}v)\mathcal{D}^A u\right]. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Для того, чтобы разрешить данные соотношения относительно $\mathcal{D}_A u$, $\mathcal{D}_A v$, полезно заметить, что из (3.67) следует, что

$$\epsilon^{ABC}\tilde{U}_A \tilde{V}_B = 4\epsilon^{ABC}\mathcal{D}_A u \mathcal{D}_B v. \tag{3.68}$$

Возведенное в квадрат, это равенство приводит к

$$\tilde{U}^2\tilde{V}^2 - \left(\tilde{U} \cdot \tilde{V}\right)^2 = 16\left[(\mathcal{D}u \cdot \mathcal{D}u)(\mathcal{D}v \cdot \mathcal{D}v) - (\mathcal{D}u \cdot \mathcal{D}v)^2\right]. \tag{3.69}$$

Очевидно, все члены четвертой степени по $\mathcal{D}_A u$, $\mathcal{D}_A v$ в F^2 могут быть переписаны с помощью этих соотношений. Тогда, возводя (3.67) в квадрат и снова применяя (3.69), можно получить

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}u \cdot \mathcal{D}u) + (\mathcal{D}v \cdot \mathcal{D}v) &= \frac{F^2\left(\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2\right) + 2\left(\tilde{U}^2\tilde{V}^2 - \left(\tilde{U} \cdot \tilde{V}\right)^2\right)}{4 + \tilde{U}^2\tilde{V}^2 - \left(\tilde{U} \cdot \tilde{V}\right)^2} \Rightarrow \\ F &= \frac{1 - \frac{1}{4}\left(\tilde{U}^2\tilde{V}^2 - \left(\tilde{U} \cdot \tilde{V}\right)^2\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\tilde{U}^2\right)\left(1 + \frac{1}{2}\tilde{V}^2\right) - \frac{1}{4}\left(\tilde{U} \cdot \tilde{V}\right)^2}}. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Дуальный лагранжиан определяется соотношением

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{UV} &= \mathcal{L}_{uv} - U^A\partial_A u - V^A\partial_A v = \\ &= 2 - \det\mathcal{E}\left[\tilde{U}^A\mathcal{D}_A u + \tilde{V}^A\mathcal{D}_A v + 1 + F + 2\epsilon^{ABC}\mathcal{D}_A u\mathcal{D}_B v\left(\psi_\alpha\mathcal{D}_C\bar{\psi}^\alpha + \bar{\psi}^\alpha\mathcal{D}_C\psi_\alpha\right)\right].\end{aligned} \tag{3.71}$$

После использования равенств (3.67), (3.69) и подстановки F (3.70) дуальное действие может быть приведено к виду

$$\begin{aligned}S_{UV} &= 2\int d^3x - \int d^3x\det\mathcal{E}\left[1 + \sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\tilde{U}^2\right)\left(1+\frac{1}{2}\tilde{V}^2\right) - \frac{1}{4}\left(\tilde{U}\cdot\tilde{V}\right)^2}\right] - \\ &\quad -\frac{1}{2}\int d^3x\det\mathcal{E}\epsilon^{ABC}\tilde{U}_A\tilde{V}_B\left(\psi_\alpha\mathcal{D}_C\bar{\psi}^\alpha + \bar{\psi}^\alpha\mathcal{D}_C\psi_\alpha\right).\end{aligned} \tag{3.72}$$

Настоящие напряженности поля в нем - U^A, V^A, связанные с $\tilde{U}^A$, $\tilde{V}^A$ соотношениями (3.67).

3.4. 3-брана в шестимерном пространстве-времени

Данный раздел посвящен построению действия суперсимметричной 3-браны, погруженной в плоское шестимерное пространство-время, и доказательству его инвариантности относительно точной и спонтанно-нарушенной суперсимметрий.

3.4.1. Алгебра и элемент фактор-пространства

Для построения действия 3-браны в $D=6$ исходным пунктом является $N=1$, $D=6$ супер态алгебра Пуанкаре. Ее бозонная часть имеет вид

$$\begin{aligned}&[M_{AB}, M_{CD}] = \mathrm{i}\left(-\eta_{AC}M_{BD} + \eta_{BC}M_{AD} - \eta_{BD}M_{AC} + \eta_{AD}M_{BC}\right), \\ &[M_{AB}, \mathcal{V}_C] = -\mathrm{i}\eta_{AC}\mathcal{V}_B + \mathrm{i}\eta_{BC}\mathcal{V}_A, \quad \mathcal{V}_A = P_A,\, K_A,\, \overline{K}_A; \\ &[U, K_A] = K_A,\ \left[U, \overline{K}_A\right] = -\overline{K}_A,\ [U, Z] = Z,\ \left[U, \overline{Z}\right] = -\overline{Z}; \\ &\left[K_A, \overline{Z}\right] = \left[\overline{K}_A, Z\right] = -2\mathrm{i}P_A,\ [K_A, P_B] = -\mathrm{i}\eta_{AB}Z,\ \left[\overline{K}_A, P_B\right] = -\mathrm{i}\eta_{AB}\overline{Z}; \\ &\left[K_A, \overline{K}_B\right] = 2\mathrm{i}M_{AB} - 2\eta_{AB}U.\end{aligned} \tag{3.73}$$

Генераторы здесь записаны в четырехмерных обозначениях, причем $\eta = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$. M_{AB}, U, K_A, $\overline{K}_A$ образуют алгебру Лоренца в $D=6$, а K_A, $\overline{K}_A$ принадлежат фактор-пространству $SO(1,5)/SO(1,3)\times U(1)$. Также в $d=4$ обозначениях генератор шестимерных трансляций распадается на векторный P_A и скалярные Z, $\overline{Z}$, перемешиваемые преобразованиями K_A, $\overline{K}_A$.

Суперзаряды Q_α, $\overline{Q}_{\dot\alpha}$, S_β, $\overline{S}_{\dot\beta}$ дополняют алгебру (3.73) до супералгебры:

$$\begin{aligned}
&\left\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\alpha}\right\} = \left\{S_\alpha, \overline{S}_{\dot\alpha}\right\} = 2\left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot\alpha} P_A,\ \left\{Q_\alpha, S_\beta\right\} = 2\epsilon_{\alpha\beta} Z,\ \left\{\overline{Q}_{\dot\alpha}, \overline{S}_{\dot\beta}\right\} = 2\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{Z};\\
&\left[M_{AB}, Q_\alpha\right] = -\frac{1}{2}\left(\sigma_{AB}\right)_\alpha{}^\beta Q_\beta,\ \left[M_{AB}, \overline{Q}_{\dot\alpha}\right] = \frac{1}{2}\overline{Q}_{\dot\beta}\left(\tilde\sigma_{AB}\right)^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha},\\
&\left[M_{AB}, S_\alpha\right] = -\frac{1}{2}\left(\sigma_{AB}\right)_\alpha{}^\beta S_\beta,\ \left[M_{AB}, \overline{S}_{\dot\alpha}\right] = \frac{1}{2}\overline{S}_{\dot\beta}\left(\tilde\sigma_{AB}\right)^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha};\\
&\left[\overline{K}_A, Q_\alpha\right] = \mathrm{i}\left(\sigma_A\right)_{\alpha\dot\alpha}\overline{S}^{\dot\alpha},\ \left[\overline{K}_A, S_\alpha\right] = -\mathrm{i}\left(\sigma_A\right)_{\alpha\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha},\\
&\left[K_A, \overline{Q}_{\dot\alpha}\right] = \mathrm{i}\left(\sigma_A\right)_{\alpha\dot\alpha} S^\alpha,\ \left[K_A, \overline{S}_{\dot\alpha}\right] = -\mathrm{i}\left(\sigma_A\right)_{\alpha\dot\alpha} Q^\alpha;\\
&\left[U, Q_\alpha\right] = \frac{1}{2}Q_\alpha,\ \left[U, S_\alpha\right] = \frac{1}{2}S_\alpha,\ \left[U, \overline{Q}_{\dot\alpha}\right] = -\frac{1}{2}\overline{Q}_{\dot\alpha},\ \left[U, \overline{S}_{\dot\alpha}\right] = -\frac{1}{2}\overline{S}_{\dot\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Как указывалось ранее [40], существует параметризация фактор-пространства, при которой M_{AB} и U реализованы линейно, P_A и Z, $\overline{Z}$ - сдвигами x^A и $\mathbf{q}$, $\bar{\mathbf{q}}$ соответственно, ненарушенная суперсимметрия - стандартным образом, а нарушенная на фермионном суперполе - сдвигами на антикоммутирующий параметр. В данном случае указанными свойствами обладает

$$g = e^{\mathrm{i}x^A P_A} e^{\theta^\alpha Q_\alpha + \bar\theta^{\dot\alpha}\overline{Q}_{\dot\alpha}} e^{\boldsymbol{\psi}^\alpha S_\alpha + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{\dot\alpha}\overline{S}_{\dot\alpha}} e^{\mathrm{i}(\mathbf{q}Z + \bar{\mathbf{q}}\overline{Z})} e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{\Lambda}^A K_A + \overline{\boldsymbol{\Lambda}}^A \overline{K}_A)}. \tag{3.75}$$

Действительно, вычисляя наиболее существенные для дальнейших построений преобразования ненарушенной Q_α, $\overline{Q}_{\dot\alpha}$ и спонтанно нарушенной S_β, $\overline{S}_{\dot\beta}$ суперсимметрии левым умножением g на соответствующий g_0, можно найти, что

$$g_0 = e^{\epsilon^\alpha Q_\alpha + \bar\epsilon^{\dot\alpha}\overline{Q}_{\dot\alpha}} \quad \Rightarrow \quad \delta_Q x^A = \mathrm{i}\left(\epsilon^\alpha\bar\theta^{\dot\alpha} + \bar\epsilon^{\dot\alpha}\theta^\alpha\right)\left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot\alpha}, \quad \delta_Q\theta^\alpha = \epsilon^\alpha,\ \delta_Q\bar\theta^{\dot\alpha} = \bar\epsilon^{\dot\alpha}, \tag{3.76}$$

$$g_0 = e^{\varepsilon^\alpha S_\alpha + \bar\varepsilon^{\dot\alpha}\overline{S}_{\dot\alpha}} \quad \Rightarrow \quad \delta_S x^A = \mathrm{i}\left(\varepsilon^\alpha\bar{\boldsymbol{\psi}}^{\dot\alpha} + \bar\varepsilon^{\dot\alpha}\boldsymbol{\psi}^\alpha\right)\left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot\alpha}, \quad \delta_S\boldsymbol{\psi}^\alpha = \varepsilon^\alpha,\ \delta_S\bar{\boldsymbol{\psi}}_{\dot\alpha} = \bar\varepsilon_{\dot\alpha}, \tag{3.77}$$

$$\delta_S\mathbf{q} = 2\mathrm{i}\varepsilon_\alpha\theta^\alpha,\ \delta_S\bar{\mathbf{q}} = 2\mathrm{i}\bar\varepsilon_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}.$$

Также по элементу g можно вычислить формы Картана, описывающие локальные геометрические характеристики системы

$$\begin{aligned}
g^{-1}dg \ = \ & \mathrm{i}\left(\Omega_P\right)^A P_A + \mathrm{i}\Omega_Z Z + \mathrm{i}\overline{\Omega}_Z\overline{Z} + \left(\Omega_Q\right)^\alpha Q_\alpha + \left(\overline{\Omega}_Q\right)^{\dot\alpha}\overline{Q}_{\dot\alpha} + \left(\Omega_S\right)^\alpha S_\alpha + \left(\overline{\Omega}_S\right)^{\dot\alpha}\overline{S}_{\dot\alpha} +\\
& \mathrm{i}\left(\Omega_K\right)^A K_A + \mathrm{i}\left(\overline{\Omega}_K\right)^A\overline{K}_A + \mathrm{i}\left(\Omega_L\right)^{AB} L_{AB} + \mathrm{i}\left(\Omega_U\right) U.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Как и в рассмотренном ранее случае мембраны в $D = 5$, основной интерес представляют формы при генераторе трансляций P_A, центральных зарядах Z, $\overline{Z}$ и генераторах нарушенной суперсимметрии S_α, $\overline{S}_{\dot\alpha}$. Они имеют вид

$$\begin{aligned}
(\Omega_P)^A &= \triangle x^B \left(\mathrm{ch}\sqrt{2\boldsymbol{Y}}\right)_B^{\ A} - 2\left(\triangle\mathbf{q}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^B + \triangle\bar{\mathbf{q}}\boldsymbol{\Lambda}^B\right)\left(\frac{\mathrm{sh}\sqrt{2\boldsymbol{Y}}}{\sqrt{2\boldsymbol{Y}}}\right)_B^{\ A}, \\
\Omega_Z &= \triangle\mathbf{q} + \left(\triangle\mathbf{q}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^A + \triangle\bar{\mathbf{q}}\boldsymbol{\Lambda}^A\right)\left(\frac{\mathrm{ch}\sqrt{2\boldsymbol{Y}}-1}{\boldsymbol{Y}}\right)_A^{\ B}\boldsymbol{\Lambda}_B - \triangle x^A \left(\frac{\mathrm{sh}\sqrt{2\boldsymbol{Y}}}{\sqrt{2\boldsymbol{Y}}}\right)_A^{\ B}\boldsymbol{\Lambda}_B, \qquad (3.79) \\
(\Omega_S)^\alpha &= d\boldsymbol{\psi}^\beta \left(\mathrm{ch}\sqrt{\boldsymbol{W}}\right)_\beta^{\ \alpha} - d\bar\theta^{\dot\alpha}\left(\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\overline{\boldsymbol{W}}}}{\sqrt{\overline{\boldsymbol{W}}}}\right)_{\dot\alpha}^{\ \dot\beta}\boldsymbol{\Lambda}_{\dot\beta}^{\ \ \alpha},
\end{aligned}$$

Здесь введены подформы

$$\begin{aligned}
&\triangle x^A = dx^A - \mathrm{i}\left(\theta^\alpha d\bar\theta^{\dot\alpha} + \bar\theta^{\dot\alpha} d\theta^\alpha + \boldsymbol{\psi}^\alpha d\bar{\boldsymbol{\psi}}^{\dot\alpha} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{\dot\alpha} d\boldsymbol{\psi}^\alpha\right)\left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot\alpha}, \\
&\triangle\mathbf{q} = d\mathbf{q} - 2\mathrm{i}\boldsymbol{\psi}_\alpha d\theta^\alpha,\ \triangle\bar{\mathbf{q}} = d\bar{\mathbf{q}} - 2\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\psi}}_{\dot\alpha} d\bar\theta^{\dot\alpha}, \qquad (3.80)
\end{aligned}$$

оказывающиеся инвариантными относительно обеих суперсимметрий (3.76), (3.77), а коэффициенты при них представлены рядами по степеням матриц

$$\boldsymbol{Y}_A^{\ B} = \boldsymbol{\Lambda}_A\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^B + \overline{\boldsymbol{\Lambda}}_A\boldsymbol{\Lambda}^B, \quad \boldsymbol{W}^\alpha_{\ \beta} = \boldsymbol{\Lambda}^{\alpha\dot\alpha}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}_{\beta\dot\alpha},\ \overline{\boldsymbol{W}}^{\dot\alpha}_{\ \dot\beta} = \overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\alpha\dot\alpha}\boldsymbol{\Lambda}_{\alpha\dot\beta}. \qquad (3.81)$$

С помощью форм (3.80) можно определить производные, инвариантные относительно обеих суперсимметрий, разложив дифференциал произвольной скалярной функции как по dx^A, $d\theta^\alpha$, $d\bar\theta^{\dot\alpha}$, так и по $\triangle x^A$, $d\theta^\alpha$, $d\bar\theta^{\dot\alpha}$. Получающиеся производные имеют вид

$$\begin{aligned}
&\nabla_A = (E^{-1})_A^{\ B}\,\partial_B,\ E_A^{\ B} = \delta_A^{\ B} - \mathrm{i}\left(\psi^\alpha\partial_A\bar\psi^{\dot\alpha} + \bar\psi^{\dot\alpha}\partial_A\psi^\alpha\right)\left(\sigma^B\right)_{\alpha\dot\alpha}, \qquad (3.82) \\
&\nabla_\beta = D_\beta - \mathrm{i}\left(\psi^\alpha D_\beta\bar\psi^{\dot\alpha} + \bar\psi^{\dot\alpha} D_\beta\psi^\alpha\right)\left(\sigma^B\right)_{\alpha\dot\alpha}\nabla_B = D_\beta - \mathrm{i}\left(\psi^\alpha\nabla_\beta\bar\psi^{\dot\alpha} + \bar\psi^{\dot\alpha}\nabla_\beta\psi^\alpha\right)\left(\sigma^B\right)_{\alpha\dot\alpha}\partial_B, \\
&\overline{\nabla}_{\dot\beta} = \overline{D}_{\dot\beta} - \mathrm{i}\left(\psi^\alpha\overline{D}_{\dot\beta}\bar\psi^{\dot\alpha} + \bar\psi^{\dot\alpha}\overline{D}_{\dot\beta}\psi^\alpha\right)\left(\sigma^B\right)_{\alpha\dot\alpha}\nabla_B = \overline{D}_{\dot\beta} - \mathrm{i}\left(\psi^\alpha\overline{\nabla}_{\dot\beta}\bar\psi^{\dot\alpha} + \bar\psi^{\dot\alpha}\overline{\nabla}_{\dot\beta}\psi^\alpha\right)\left(\sigma^B\right)_{\alpha\dot\alpha}\partial_B.
\end{aligned}$$

Здесь введены также производные, ковариантные лишь относительно ненарушенной суперсимметрии

$$\begin{aligned}
&D_\alpha = \tfrac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - \mathrm{i}\bar\theta^{\dot\beta}\left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot\beta}\partial_A,\ \overline{D}_{\dot\alpha} = \tfrac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} - \mathrm{i}\theta^\beta\left(\sigma^A\right)_{\beta\dot\alpha}\partial_A, \\
&\left\{D_\alpha, \overline{D}_{\dot\alpha}\right\} = -2\mathrm{i}\left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot\alpha}\partial_A, \quad \left\{D_\alpha, D_\beta\right\} = \left\{\overline{D}_{\dot\alpha}, \overline{D}_{\dot\beta}\right\} = 0. \qquad (3.83)
\end{aligned}$$

(Анти)коммутаторы производных ∇_α, $\bar\nabla_{\dot\alpha}$, ∇_A имеют более сложный вид

$$\begin{aligned}
&\left\{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\right\} = -2\mathrm{i}\left(\nabla_\alpha\psi^\gamma\nabla_\beta\bar\psi^{\dot\gamma} + \nabla_\beta\psi^\gamma\nabla_\alpha\bar\psi^{\dot\gamma}\right)\left(\sigma^C\right)_{\gamma\dot\gamma}\nabla_C, \\
&\left[\nabla_A, \nabla_B\right] = 2\mathrm{i}\left(\nabla_A\psi^\gamma\nabla_B\bar\psi^{\dot\gamma} - \nabla_B\psi^\gamma\nabla_A\bar\psi^{\dot\gamma}\right)\left(\sigma^C\right)_{\gamma\dot\gamma}\nabla_C, \qquad (3.84) \\
&\left\{\nabla_\alpha, \overline{\nabla}_{\dot\beta}\right\} = -2\mathrm{i}\left(\delta_\alpha^\gamma\delta_{\dot\beta}^{\dot\gamma} + \nabla_\alpha\psi^\gamma\overline{\nabla}_{\dot\beta}\bar\psi^{\dot\gamma} + \overline{\nabla}_{\dot\beta}\psi^\gamma\nabla_\alpha\bar\psi^{\dot\gamma}\right)\left(\sigma^C\right)_{\gamma\dot\gamma}\nabla_C, \\
&\left[\nabla_A, \nabla_\alpha\right] = -2\mathrm{i}\left(\nabla_A\psi^\gamma\nabla_\alpha\bar\psi^{\dot\gamma} + \nabla_\alpha\psi^\gamma\nabla_A\bar\psi^{\dot\gamma}\right)\left(\sigma^C\right)_{\gamma\dot\gamma}\nabla_C.
\end{aligned}$$

3.4.2. Условия неприводимости, уравнения движения и бозонное действие

На формы Картана можно наложить ковариантные условия, которые позволяют сократить число независимых Голдстоуновских суперполей [38]. Так, приравнивая к нулю формы Ω_Z, $\overline{\Omega}_Z$, можно получить соотношения

$$\nabla_\alpha \mathbf{q} + 2\mathrm{i}\boldsymbol{\psi}_\alpha = 0,\ \overline{\nabla}_{\dot\alpha}\mathbf{q} = 0,\ \nabla_A \mathbf{q} = \left(\frac{\operatorname{th}\sqrt{2\boldsymbol{Y}}}{\sqrt{2\boldsymbol{Y}}}\right)_A^{\ B} \boldsymbol{\Lambda}_B,$$
$$\nabla_\alpha \bar{\mathbf{q}} = 0,\ \overline{\nabla}_{\dot\alpha}\bar{\mathbf{q}} + 2\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\psi}}_{\dot\alpha} = 0,\ \nabla_A \bar{\mathbf{q}} = \left(\frac{\operatorname{th}\sqrt{2\boldsymbol{Y}}}{\sqrt{2\boldsymbol{Y}}}\right)_A^{\ B} \overline{\boldsymbol{\Lambda}}_B. \tag{3.85}$$

Условия, связывающие $\boldsymbol{\psi}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}_{\dot\alpha}$, $\boldsymbol{\Lambda}_A$, $\overline{\boldsymbol{\Lambda}}_A$ с производными $\mathbf{q}$, $\bar{\mathbf{q}}$, очевидно, являются сугубо кинематическими. Условия $\overline{\nabla}_{\dot\alpha}\mathbf{q} = 0$, $\nabla_\alpha\bar{\mathbf{q}} = 0$ означают, что $\mathbf{q}$, $\bar{\mathbf{q}}$ образуют неприводимый (обобщенный) киральный мультиплет $N = 1$, $d = 4$ суперсимметрии. Данный мультиплет определен вне массовой поверхности и содержит вспогательные поля, так что и эти условия - кинематические.

Необходимые динамические условия можно найти, рассматривая формы Ω_S, $\overline{\Omega}_S$. $d\theta^\alpha$, $d\bar\theta^{\dot\alpha}$ проекции этих форм содержат вклады вида $\nabla_\alpha\boldsymbol{\psi}_\beta \sim \nabla_\alpha\nabla_\beta\mathbf{q}$, $\overline{\nabla}_{\dot\alpha}\bar{\boldsymbol{\psi}}_{\dot\beta} \sim \overline{\nabla}_{\dot\alpha}\nabla_{\dot\beta}\bar{\mathbf{q}}$. Тогда условия $\Omega_S|_{d\theta} = 0$, $\overline{\Omega}_S|_{d\theta} = 0$ в первом приближении приводят к правильным уравнениям движения свободного кирального мультиплета $D_\alpha D_\beta \mathbf{q} \sim \epsilon_{\alpha\beta}D^\gamma D_\gamma \mathbf{q} = 0$, $\overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}_{\dot\beta}\bar{\mathbf{q}} \sim \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{D}^{\dot\gamma}\overline{D}_{\dot\gamma}\bar{\mathbf{q}} = 0$. Из них также следует, что на массовой поверхности $\{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\} = 0$, $\{\overline{\nabla}_{\dot\alpha}, \overline{\nabla}_{\dot\beta}\} = 0$, и противоречий с алгеброй производных (3.84) также не возникает. Из этих условий также следуют правильные уравнения движения

$$\nabla^\alpha\nabla_\alpha\mathbf{q} = 0,\ \overline{\nabla}^{\dot\alpha}\overline{\nabla}_{\dot\alpha}\bar{\mathbf{q}} = 0. \tag{3.86}$$

Другим следствием $\Omega_S|_{d\theta} = 0$, $\overline{\Omega}_S|_{d\theta} = 0$ является связь между $\overline{\nabla}_{\dot\alpha}\boldsymbol{\psi}_\alpha$, $\nabla_\alpha\bar{\boldsymbol{\psi}}_{\dot\alpha}$ с $\boldsymbol{\Lambda}_A$, $\overline{\boldsymbol{\Lambda}}_A$ на массовой поверхности:

$$\overline{\nabla}_{\dot\alpha}\boldsymbol{\psi}_\alpha = \left(\frac{\operatorname{th}\sqrt{\overline{\boldsymbol{W}}}}{\sqrt{\overline{\boldsymbol{W}}}}\right)_{\dot\alpha}^{\ \dot\beta}\boldsymbol{\Lambda}_{\alpha\dot\beta},\ \nabla_\alpha\bar{\boldsymbol{\psi}}_{\dot\alpha} = \left(\frac{\operatorname{th}\sqrt{\boldsymbol{W}}}{\sqrt{\boldsymbol{W}}}\right)_{\alpha}^{\ \beta}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}_{\beta\dot\alpha}. \tag{3.87}$$

Отсюда с учетом (3.85) также следует связь $\overline{\nabla}_{\dot\alpha}\boldsymbol{\psi}_\alpha$, $\nabla_\alpha\bar{\boldsymbol{\psi}}_{\dot\alpha}$ с $\nabla_A\mathbf{q}$, $\nabla_A\bar{\mathbf{q}}$. Однако, найти явные выражения таким способом сложно, поскольку требуется пересуммировать ряд по степеням $W^\alpha{}_\beta$ в ряд по Y_A^B. Вместо этого можно воспользоваться следствиями условий неприводимости и алгеброй антикоммутаторов с учетом $\nabla_\alpha\boldsymbol{\psi}_\beta = 0$, $\overline{\nabla}_{\dot\alpha}\bar{\boldsymbol{\psi}}_{\dot\beta} = 0$. Подставляя $\overline{\nabla}_{\dot\alpha}\boldsymbol{\psi}_\alpha = \left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot\alpha}\boldsymbol{J}_A$, $\nabla_\alpha\bar{\boldsymbol{\psi}}_{\dot\alpha} = \left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot\alpha}\overline{\boldsymbol{J}}_A$ в антикоммутаторы (3.84), можно найти, что на массовой поверхности

$$\begin{aligned}
&-2\mathrm{i}\overline{\nabla}_{\dot\alpha}\boldsymbol{\psi}_\alpha = \left\{\nabla_\alpha, \overline{\nabla}_{\dot\alpha}\right\}\mathbf{q} \Rightarrow \\
&\boldsymbol{J}_A = \nabla_A\mathbf{q}\left(1-\boldsymbol{J}^B\overline{\boldsymbol{J}}_B\right) + \left(\boldsymbol{J}^B\nabla_B\mathbf{q}\right)\overline{\boldsymbol{J}}_A + \left(\overline{\boldsymbol{J}}^B\nabla_B\mathbf{q}\right)\boldsymbol{J}_A - \mathrm{i}\epsilon_{ABCD}\boldsymbol{J}_B\overline{\boldsymbol{J}}_C\nabla_D\mathbf{q}, \\
&-2\mathrm{i}\nabla_\alpha\bar{\boldsymbol{\psi}}_{\dot\alpha} = \left\{\nabla_\alpha, \overline{\nabla}_{\dot\alpha}\right\}\bar{\mathbf{q}} \Rightarrow \qquad (3.88)\\
&\overline{\boldsymbol{J}}_A = \nabla_A\bar{\mathbf{q}}\left(1-\boldsymbol{J}^B\overline{\boldsymbol{J}}_B\right) + \left(\boldsymbol{J}^B\nabla_B\bar{\mathbf{q}}\right)\overline{\boldsymbol{J}}_A + \left(\overline{\boldsymbol{J}}^B\nabla_B\bar{\mathbf{q}}\right)\boldsymbol{J}_A - \mathrm{i}\epsilon_{ABCD}\boldsymbol{J}_B\overline{\boldsymbol{J}}_C\nabla_D\bar{\mathbf{q}}.
\end{aligned}$$

Решение этих уравнений имеет структуру, полностью аналогичную решению для мембраны в $D = 5$. Анзац для него оказывается даже более простым, поскольку аналог трехмерного выражения $\epsilon^{ABC}\nabla_B\mathbf{q}\nabla_C\bar{\mathbf{q}}$ в четырехмерии оказывается либо антисимметричным тензором второго ранга, либо равен нулю, если допустить свертку трех производных $\mathbf{q}$, $\bar{\mathbf{q}}$. Следовательно, анзац для $\boldsymbol{J}_A$, $\overline{\boldsymbol{J}}_A$ должен иметь вид

$$\boldsymbol{J}_A = f_1\nabla_A\mathbf{q} + f_2\left(\nabla^B\mathbf{q}\nabla_B\mathbf{q}\right)\nabla_A\bar{\mathbf{q}},\ \overline{\boldsymbol{J}}_A = f_1\nabla_A\bar{\mathbf{q}} + f_2\left(\nabla^B\bar{\mathbf{q}}\nabla_B\bar{\mathbf{q}}\right)\nabla_A\mathbf{q}. \qquad (3.89)$$

После подстановки этого анзаца слагаемые вида $\epsilon_{ABCD}\boldsymbol{J}_B\overline{\boldsymbol{J}}_C\nabla_D\mathbf{q}$ оказываются тождественно равными нулю, а коэффициенты при $\nabla_A\mathbf{q}$, $\nabla_A\bar{\mathbf{q}}$ приводят к квадратным уравнениям на f_1, f_2. В итоге

$$\boldsymbol{J}_A = \nabla_A\mathbf{q} + \frac{2\left(\nabla^B\mathbf{q}\nabla_B\mathbf{q}\right)}{1-2\nabla^B\mathbf{q}\nabla_B\bar{\mathbf{q}} + \sqrt{(1-2\nabla^B\mathbf{q}\nabla_B\bar{\mathbf{q}})^2 - 4\nabla^C\mathbf{q}\nabla_C\mathbf{q}\cdot\nabla^D\bar{\mathbf{q}}\nabla_D\bar{\mathbf{q}}}}\nabla_A\bar{\mathbf{q}}. \qquad (3.90)$$

Найденная ранее связь $\boldsymbol{\Lambda}_A$ и $\nabla_A\mathbf{q}$ позволяет также вычислить бозонное действие. Оно может быть построено как интеграл от формы объема, построенной из $(\Omega_P)^A = dx^B e_B^A$ в бозонном пределе. Это гарантирует его инвариантность по отношению к бозонным преобразованиям фактор-пространства (3.75), наиболее существенными из которых оказываются автоморфизмы

$$\delta x^A = 2\bar\alpha^A q + 2\alpha^A\bar q, \quad \delta q = \alpha_A x^A,\ \delta\bar q = \bar\alpha_A x^A, \qquad (3.91)$$

порождаемые $g_0 = \exp\mathrm{i}(\alpha^A K_A + \bar\alpha^A\overline{K}_A)$ с учетом $q = \mathbf{q}|_{\theta\to 0}$. Используя связь (3.85), можно найти, что

$$e_A^B = \left(\frac{1}{\mathrm{ch}\sqrt{2Y}}\right)_A^B,\ S = \int d^4x\,\det e = \int d^4x\sqrt{\det g}, \qquad (3.92)$$

где

$$\begin{aligned}
&g_A^B = e_A^C e_C^B = \delta_A^B - \left(\mathrm{th}^2\sqrt{2Y}\right)_A^B = \delta_A^B - 2\left(\partial_A q\partial^B\bar q + \partial_A\bar q\partial^B q\right), \\
&\det g = \left(1-2\partial^A q\partial_A\bar q\right)^2 - 4\left(\partial^B q\partial_B q\right)\left(\partial^C\bar q\partial_C\bar q\right). \qquad (3.93)
\end{aligned}$$

3.4.3. Нарушенная суперсимметрия

В используемом компонентном подходе к действиям суперсимметричных бран инвариантность действия относительно нарушенной суперсимметрии используется для того, чтобы зафиксировать способ, которым фермионы входят в лагранжиан. По опыту исследования предыдущих систем, из бозонного действия возможно сконструировать инвариантное относительно спонтанно нарушенной суперсимметрии, заменив производные и меру интегрирования на соответствующие ковариантные. Также оказывается возможным добавить дополнительные инвариантные слагаемые, не нарушив бозонный предел: интеграл от фермионной формы объема и член Весса-Зумино. Две константы при этих слагаемых должны быть зафиксированы требованием инвариантности относительно ненарушенной суперсимметрии.

Обобщение бозонного действия

Как отмечалось ранее, имеет смысл использовать в дальнейших построениях в качестве физических компонент первые компоненты суперполей фактор-пространства

$$q = \mathbf{q}|_{\theta\to 0},\ \bar{q} = \bar{\mathbf{q}}|_{\theta\to 0},\ \psi_\alpha = \boldsymbol{\psi}_\alpha|_{\theta\to 0} = \frac{\mathrm{i}}{2}\nabla_\alpha \mathbf{q}|_{\theta\to 0},\ \bar{\psi}_{\dot\alpha} = \bar{\boldsymbol{\psi}}_{\dot\alpha}|_{\theta\to 0} = \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\nabla}_{\dot\alpha}\bar{\mathbf{q}}|_{\theta\to 0}. \tag{3.94}$$

Их законы преобразования относительно нарушенной суперсимметрии в активной форме имеют вид

$$\delta^\star_S q = -U^M\partial_M q,\ \delta^\star_S \bar{q} = -U^M\partial_M \bar{q},\ \delta^\star_S\psi_\alpha = \varepsilon_\alpha - U^M\partial_M\psi_\alpha,\ \delta^\star_S\bar{\psi}_{\dot\alpha} = \bar{\varepsilon}_{\dot\alpha} - U^M\partial_M\bar{\psi}_{\dot\alpha}, \tag{3.95}$$

где $U^M = \mathrm{i}\left(\varepsilon^\gamma\bar{\psi}^{\dot\gamma} + \bar{\varepsilon}^{\dot\gamma}\psi^\gamma\right)\left(\sigma^M\right)_{\gamma\dot\gamma}$ является следствием сдвига координат x^A. Очевидно, q, $\bar{q}$ инвариантны относительно неактивных преобразований $\delta_S q = \delta^\star_S q + \delta_S x^A\partial_A q$. Тем же свойством обладают и их должным образом определенные производные:

$$\begin{aligned} &\delta^\star_S\mathcal{D}_A q = -U^M\partial_M\mathcal{D}_A q,\ \mathcal{D}_A q = (\mathcal{E}^{-1})_A^{\ B}\,\partial_B q,\\ &\mathcal{E}_A^B = E_A^B|_{\theta\to 0} = \delta_A^B - \mathrm{i}\left(\psi^\gamma\partial_A\bar{\psi}^{\dot\gamma} + \bar{\psi}^{\dot\gamma}\partial_A\psi^\gamma\right)\left(\sigma^B\right)_{\gamma\dot\gamma}. \end{aligned} \tag{3.96}$$

Поскольку также $\delta^\star_S \det\mathcal{E} = -\partial_M\left(U^M\det\mathcal{E}\right)$, для любого действия, зависящего от производных q, $\bar{q}$, можно указать аналог, инвариантный относительно нарушенной суперсимметрии

$$S_{bos} = \int d^4x F(\partial_A q, \partial_B\bar{q}) \to S_{inv} = \int d^4x\det\mathcal{E} F(\mathcal{D}_A q, \mathcal{D}_B\bar{q}). \tag{3.97}$$

Ясно, что также можно добавить слагаемое $\alpha\int d^4x\det\mathcal{E}$ с произвольным постоянным множителем α, не зависящее от бозонных полей. Это слагаемое необходимо, поскольку α определяет множители при кинетических членах бозонов и фермионов, отношение которых фиксируется ненарушенной суперсимметрией. Также можно добавить тривиальное действие $\int d^4x$, которое позволит соблюсти требование

$$S_{q,\psi\to 0} \to 0. \tag{3.98}$$

Член Весса-Зумино

Член Весса-Зумино для 3-браны в $D = 6$ может быть построен с помощью стандартной процедуры [50]. Согласно этому методу, для четырехмерной теории требуется постулировать 5-форму Ω_5, инвариантную относительно преобразований Лоренца и нарушенной суперсимметрии. Инвариантность относительно нарушенной суперсимметрии можно обеспечить, если использовать формы Картана; поскольку $\delta_S \mathbf{\Lambda}_A = 0$, $\delta_S \theta^\alpha = 0$, в них можно положить $\mathbf{\Lambda}_A \to 0$, $\theta^\alpha \to 0$, не разрушив S-суперсимметрию. Используя формы

$$\begin{gathered}
\omega_Z = \Omega_Z|_{\Lambda,\theta\to 0} = dq, \quad \bar\omega_Z = \bar\Omega_Z|_{\Lambda,\theta\to 0} = d\bar q, \\
(\omega_S)^\alpha = (\Omega_S)^\alpha|_{\Lambda,\theta\to 0} = d\psi^\alpha, \quad (\bar\omega_S)^{\dot\alpha} = \left(\bar\Omega_S\right)^{\dot\alpha}|_{\Lambda,\theta\to 0} = d\bar\psi^{\dot\alpha}, \\
(\omega_P)^A = (\Omega_P)^A|_{\Lambda,\theta\to 0} = dx^A - \mathrm{i}\left(\psi^\alpha d\bar\psi^{\dot\alpha} + \bar\psi^{\dot\alpha} d\psi^\alpha\right)\left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot\alpha} = \mathcal{E}^A_B dx^B,
\end{gathered} \tag{3.99}$$

можно постулировать Ω_5 в виде

$$\Omega_5 = \omega_Z \wedge \bar\omega_Z \wedge (\omega_S)^\alpha \wedge (\bar\omega_S)^{\dot\alpha}\left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot\alpha} \wedge (\omega_P)_A\,. \tag{3.100}$$

Как и требует метод [50], данная форма является замкнутой. Действительно,

$$d\Omega_5 \sim dq \wedge d\bar q \wedge d\psi^\alpha \wedge d\bar\psi^{\dot\alpha}\left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot\alpha} \wedge d\,(\omega_P)_A \sim dq \wedge d\bar q \wedge d\psi^\alpha \wedge d\bar\psi^{\dot\alpha} \wedge d\psi_\alpha \wedge d\bar\psi_{\dot\alpha} = 0. \tag{3.101}$$

Следовательно, $\Omega_5 = d\Omega_4$, где

$$\Omega_4 \sim dq \wedge d\bar q \wedge \left(\psi^\alpha d\bar\psi^{\dot\alpha} + \bar\psi^{\dot\alpha} d\psi^\alpha\right)(\sigma_A)_{\alpha\dot\alpha} \wedge \omega_P, \tag{3.102}$$

а член Весса-Зумино есть интеграл $\int \Omega_4$:

$$\begin{aligned}
S_{WZ} &= \int d^4x \epsilon^{ABCD} \partial_A q \partial_B \bar q \left(\psi^\alpha \partial_C \bar\psi^{\dot\alpha} + \bar\psi^{\dot\alpha} \partial_C \psi^\alpha\right) \mathcal{E}^F_D (\sigma_F)_{\alpha\dot\alpha} = \\
&= \int d^4x \det \mathcal{E} \epsilon^{ABCD} \mathcal{D}_A q \mathcal{D}_B \bar q \left(\psi^\alpha \mathcal{D}_C \bar\psi^{\dot\alpha} + \bar\psi^{\dot\alpha} \mathcal{D}_C \psi^\alpha\right)(\sigma_D)_{\alpha\dot\alpha}\,.
\end{aligned} \tag{3.103}$$

Также стоит отметить, что $\mathcal{E}^B_A$ в первой записи члена Весса-Зумино можно проигнорировать. Это возможно, поскольку фермионные слагаемые, отличающие $\mathcal{E}^B_A$ от δ^B_A, после свертки σ-матриц приводят к выражению

$$\left[\psi^\alpha \partial_C \bar\psi^{\dot\alpha} + \bar\psi^{\dot\alpha} \partial_C \psi^\alpha\right] \cdot \left[\psi_\alpha \partial_D \bar\psi_{\dot\alpha} + \bar\psi_{\dot\alpha} \partial_D \psi_\alpha\right], \tag{3.104}$$

очевидно симметричному по C, D. Поскольку $\det\mathcal{E}$ и ковариантные производные можно восстановить и в этом случае, существует еще одно тождественное представление члена Весса-Зумино

$$S_{WZ} \;=\; \int d^4x \det\mathcal{E}\,\epsilon^{ABCD}\mathcal{D}_A q\mathcal{D}_B\bar{q}\left(\psi^\alpha\mathcal{D}_C\bar{\psi}^{\dot\alpha} + \bar{\psi}^{\dot\alpha}\mathcal{D}_C\psi^\alpha\right)\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_D^F(\sigma_F)_{\alpha\dot\alpha}\,. \qquad (3.105)$$

Несмотря на то, что используемый метод [50] обеспечивает инвариантность члена Весса-Зумино относительно нарушенной суперсимметрии, данный факт можно проверить непосредственно. Удобно варьировать лагранжиан в форме (3.105):

$$\begin{aligned}\delta_S^\star\mathcal{L}_{WZ} \;=\;& -\partial_M\left(U^M\mathcal{L}_{WZ}\right) + \det\mathcal{E}\,\epsilon^{ABCD}\mathcal{D}_A q\mathcal{D}_B\bar{q}\left(\varepsilon^\alpha\mathcal{D}_C\bar{\psi}^{\dot\alpha} + \bar{\varepsilon}^{\dot\alpha}\mathcal{D}_C\psi^\alpha\right)\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_D^F(\sigma_F)_{\alpha\dot\alpha} + \\ &+ \det\mathcal{E}\,\epsilon^{ABCD}\mathcal{D}_A q\mathcal{D}_B\bar{q}\left(\psi^\alpha\mathcal{D}_C\bar{\psi}^{\dot\alpha} + \bar{\psi}^{\dot\alpha}\mathcal{D}_C\psi^\alpha\right)\mathcal{D}_D U^F(\sigma_F)_{\alpha\dot\alpha}\,. \qquad (3.106)\end{aligned}$$

Первое слагаемое здесь аналогично вариации основной части действия и возникает при сборке U^M из вариации каждого из полей и $\det\mathcal{E}$ и является полной дивергенцией. Также к полной дивергенции сводится второе слагаемое после свертки четырех $\mathcal{E}^{-1}$ из производных в $\det\mathcal{E}^{-1}$. Основное отличие доказательства от трехмерного случая заключается в присутствии третьего слагаемого. Оно, после удаления ковариантных производных, $\det\mathcal{E}$ и взятия следа произведения σ-матриц, может быть приведено к виду

$$2\epsilon^{ABCD}\partial_A q\partial_B\bar{q}\left(\psi^\alpha\partial_C\bar{\psi}^{\dot\alpha} + \bar{\psi}^{\dot\alpha}\partial_C\psi^\alpha\right)\left(\varepsilon_\alpha\partial_D\bar{\psi}_{\dot\alpha} + \bar{\varepsilon}_{\dot\alpha}\partial_D\psi_\alpha\right). \qquad (3.107)$$

Поскольку $\partial_C\psi^\alpha\partial_D\psi_\alpha$ и $\partial_C\bar{\psi}^{\dot\alpha}\partial_D\bar{\psi}_{\dot\alpha}$ симметричны по C, D, это выражение после перемножения скобок также может быть представлено как полная дивергенция:

$$-\epsilon^{ABCD}\partial_A q\partial_B\bar{q}\left[\varepsilon_\alpha\partial_C\psi^\alpha\partial_D\left(\bar{\psi}^{\dot\alpha}\bar{\psi}_{\dot\alpha}\right) + \bar{\varepsilon}_{\dot\alpha}\partial_C\bar{\psi}^{\dot\alpha}\partial_D\left(\psi^\alpha\psi_\alpha\right)\right]. \qquad (3.108)$$

Таким образом, член Весса-Зумино действительно инвариантен относительно преобразований нарушенной суперсимметрии (3.95). Он исчерпывает список слагаемых, совместимых с S-суперсимметрией. Окончательный анзац для действия, учитывающий все инвариантные члены, имеет вид

$$\begin{aligned}S \;=\;& \int d^4x(1+\alpha) - \int d^4x\det\mathcal{E}\left[\alpha + \sqrt{\left(1 - 2\mathcal{D}^A q\mathcal{D}_A\bar{q}\right)^2 - 4\left(\mathcal{D}^B q\mathcal{D}_B q\right)\left(\mathcal{D}^C\bar{q}\mathcal{D}_C\bar{q}\right)}\,\right] + \\ &+\beta\int d^4x\det\mathcal{E}\,\epsilon^{ABCD}\mathcal{D}_A q\mathcal{D}_B\bar{q}\left(\psi^\alpha\mathcal{D}_C\bar{\psi}^{\dot\alpha} + \bar{\psi}^{\dot\alpha}\mathcal{D}_C\psi^\alpha\right)\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_D^F(\sigma_F)_{\alpha\dot\alpha}\,. \qquad (3.109)\end{aligned}$$

Он содержит две неопределенные константы α, β, которые должны быть зафиксированы в ходе проверки инвариантности этого анзаца относительно нарушенной суперсимметрии.

3.4.4. Ненарушенная суперсимметрия

Законы преобразования

Для доказательства инвариантности действия относительно преобразований ненарушенной суперсимметрии требуется сначала сформулировать сами преобразования для компонент q, $\bar{q}$, ψ^α, $\bar{\psi}^{\dot\alpha}$, их производных и часто встречающихся комбинаций.

Вариация первой компоненты любого суперполя может быть найдена с помощью формулы

$$\delta^\star_Q f = -\left(\epsilon^\alpha D_\alpha + \bar\epsilon^{\dot\alpha}\overline{D}_{\dot\alpha}\right)\mathbf{f}|_{\theta\to0} = -\left(\epsilon^\alpha \nabla_\alpha + \bar\epsilon^{\dot\alpha}\overline{\nabla}_{\dot\alpha}\right)\mathbf{f}|_{\theta\to0} - H^M\partial_M f, \tag{3.110}$$

которая следует из активного закона преобразования суперполя с учетом того, что члены, содержащие θ^α явно, равны нулю в соответствующем пределе. Здесь

$$H^M = -\mathrm{i}\left[\epsilon_\beta\psi^\beta\overline{J}^M + \bar\epsilon_{\dot\beta}\bar\psi^{\dot\beta}J^M\right] - \left[\epsilon_\beta\psi^\gamma\left(\sigma^{MN}\right)_\gamma^{\ \beta}\overline{J}_N - \bar\epsilon_{\dot\beta}\bar\psi^{\dot\gamma}\left(\tilde\sigma^{MN}\right)_{\dot\gamma}^{\ \dot\beta}J_N\right]. \tag{3.111}$$

Из формулы (3.110) сразу следует, что

$$\begin{aligned}
\delta^\star_Q q = -2\mathrm{i}\epsilon_\beta\psi^\beta - H^M\partial_M q, &\quad \delta^\star_Q\psi_\alpha = -\bar\epsilon^{\dot\beta}\left(\sigma^M\right)_{\alpha\dot\beta}J_M - H^M\partial_M\psi_\alpha,\\
\delta^\star_Q \bar q = -2\mathrm{i}\bar\epsilon_{\dot\beta}\bar\psi^{\dot\beta} - H^M\partial_M \bar q, &\quad \delta^\star_Q\bar\psi_{\dot\alpha} = -\epsilon^{\beta}\left(\sigma^M\right)_{\beta\dot\alpha}J_M - H^M\partial_M\bar\psi_{\dot\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.112}$$

Следовательно, вариации тетрады $\mathcal{E}_A^B$ и ковариантной производной q равны

$$\begin{aligned}
\delta^\star_Q\mathcal{E}_A^B &= -\partial_A H^M\mathcal{E}_M^B - H^M\partial_M\mathcal{E}_A^B - 2\mathrm{i}\left[\epsilon_\beta\partial_A\psi^\beta\overline{J}^B + \bar\epsilon_{\dot\beta}\partial_A\bar\psi^{\dot\beta}J^B\right] -\\
&\quad -2\left[\epsilon_\beta\partial_A\psi^\gamma\left(\sigma^{BC}\right)_\gamma^{\ \beta}\overline{J}_C - \bar\epsilon_{\dot\beta}\partial_A\bar\psi^{\dot\gamma}\left(\tilde\sigma^{BC}\right)_{\dot\gamma}^{\ \dot\beta}J_C\right],\\
\delta^\star_Q\mathcal{D}_A q &= -2\mathrm{i}\epsilon_\beta\mathcal{D}_A\psi^\beta + 2\mathrm{i}\left[\epsilon_\beta\mathcal{D}_A\psi^\beta\overline{J}^B + \bar\epsilon_{\dot\beta}\mathcal{D}_A\bar\psi^{\dot\beta}J^B\right]\mathcal{D}_B q +\\
&\quad +2\left[\epsilon_\beta\mathcal{D}_A\psi^\gamma\left(\sigma^{BC}\right)_\gamma^{\ \beta}\overline{J}_C - \bar\epsilon_{\dot\beta}\mathcal{D}_A\bar\psi^{\dot\gamma}\left(\tilde\sigma^{BC}\right)_{\dot\gamma}^{\ \dot\beta}J_C\right]\mathcal{D}_B q - H^M\partial_M\mathcal{D}_A q.
\end{aligned} \tag{3.113}$$

Вариация $\mathcal{D}_A\bar q$, очевидно, может быть найдена эрмитовым сопряжением $\delta^\star_Q\mathcal{D}_A q$.

Как и при исследовании мембраны в $D = 5$, оказывается удобным ввести переменные $\xi = \mathcal{D}_A q\mathcal{D}^A\bar q$, $\eta = \mathcal{D}_A q\mathcal{D}^A q$, $\bar\eta = \mathcal{D}_A\bar q\mathcal{D}^A\bar q$, в терминах которых формулируется основная часть действия, а также линейно независимые комбинации полей и параметров преобразования, через которые можно записать вариацию лагранжиана. Поскольку J_A, $\overline{J}_A$ в (3.113) являются функциями $\mathcal{D}_A q$, $\mathcal{D}_A\bar q$,

$$J_A = \mathcal{D}_A q + f_J\eta\mathcal{D}_A\bar q, \quad \overline{J}_A = \mathcal{D}_A\bar q + f_J\bar\eta\mathcal{D}_A q, \quad f_J = \frac{2}{1 - 2\xi + \sqrt{(1-2\xi)^2 - 4\eta\bar\eta}}, \tag{3.114}$$

то таковыми независимыми комбинациями оказываются

$$\begin{aligned}
X_1 &= \mathrm{i}\left\{\epsilon_\beta \mathcal{D}_A\psi^\beta \mathcal{D}^A\bar{q} + \bar{\epsilon}_{\dot\beta}\mathcal{D}_A\bar{\psi}^{\dot\beta}\mathcal{D}^A q\right\},\\
X_2 &= \mathrm{i}\left\{\epsilon_\beta \mathcal{D}_A\psi^\beta \mathcal{D}^A q\bar{\eta} - \bar{\epsilon}_{\dot\beta}\mathcal{D}_A\bar{\psi}^{\dot\beta}\mathcal{D}^A \bar{q}\eta\right\},\\
X_3 &= \left\{\epsilon_\beta \mathcal{D}_B\psi^\alpha \left(\sigma^{BC}\right)_\alpha^\beta \mathcal{D}_C\bar{q} - \bar{\epsilon}_{\dot\beta}\mathcal{D}_B\bar{\psi}^{\dot\alpha}\left(\tilde{\sigma}^{BC}\right)_{\dot\alpha}^{\dot\beta}\mathcal{D}_C q\right\},\\
X_4 &= \left\{\epsilon_\beta \mathcal{D}_B\psi^\alpha \left(\sigma^{BC}\right)_\alpha^\beta \mathcal{D}_C q\bar{\eta} - \bar{\epsilon}_{\dot\beta}\mathcal{D}_B\bar{\psi}^{\dot\alpha}\left(\tilde{\sigma}^{BC}\right)_{\dot\alpha}^{\dot\beta}\mathcal{D}_C \bar{q}\eta\right\},\\
X_5 &= \left\{\epsilon_\beta \mathcal{D}_B\psi^\alpha \left(\sigma^{MN}\right)_\alpha^\beta \mathcal{D}^B\bar{q} + \bar{\epsilon}_{\dot\beta}\mathcal{D}_B\bar{\psi}^{\dot\alpha}\left(\tilde{\sigma}^{MN}\right)_{\dot\alpha}^{\dot\beta}\mathcal{D}^B q\right\}\mathcal{D}_M q\mathcal{D}_N\bar{q},\\
X_6 &= \left\{\epsilon_\beta \mathcal{D}_B\psi^\alpha \left(\sigma^{MN}\right)_\alpha^\beta \mathcal{D}^B q\bar{\eta} + \bar{\epsilon}_{\dot\beta}\mathcal{D}_B\bar{\psi}^{\dot\alpha}\left(\tilde{\sigma}^{MN}\right)_{\dot\alpha}^{\dot\beta}\mathcal{D}^B \bar{q}\eta\right\}\mathcal{D}_M q\mathcal{D}_N\bar{q}.
\end{aligned} \tag{3.115}$$

В терминах этих комбинаций, вариации ξ, $\eta\bar{\eta}$ и $\det\mathcal{E}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
\delta_Q^\star \det\mathcal{E} &= -\partial_M\left[H^M\det\mathcal{E}\right] - 2X_1 - 2f_J X_2 - 2X_3 - 2f_J X_4,\\
\delta_Q^\star \xi &= -2X_1\left(1-\xi-f_J\eta\bar{\eta}\right) + 2X_2\left(1+f_J\xi\right) + 2X_5 - 2f_J X_6 - H^M\partial_M\xi,\\
\delta_Q^\star(\eta\bar{\eta}) &= 4X_1\eta\bar{\eta}\left(1+f_J\xi\right) - 4X_2\left(1-\xi-f_J\eta\bar{\eta}\right) - 4f_J\eta\bar{\eta}X_5 + 4X_6 - H^M\partial_M(\eta\bar{\eta}).
\end{aligned} \tag{3.116}$$

Вариация основной части действия

Основная часть действия содержит одну неопределенную константу α и может быть записана как

$$S_0 = \int d^4x(1+\alpha) - \int d^4x\det\mathcal{E}\left[\alpha + \sqrt{(1-2\xi)^2 - 4\eta\bar{\eta}}\right]. \tag{3.117}$$

Вычисляя вариацию соответствующего лагранжиана, можно отметить, что члены с H^M могут быть собраны в полную дивергенцию независимо от α, что вполне аналогично результатам, полученным при исследовании суперсимметричных механик и мембраны в $D=5$. Константу α можно найти, рассмотрев вариацию в первом нетривиальном приближении по полям, игнорируя H^M:

$$\begin{aligned}
&\delta_{Qapr}^\star\partial_A q\partial^A\bar{q} \approx -2\mathrm{i}\left\{\epsilon_\beta\partial_A\psi^\beta\partial^A\bar{q} + \bar{\epsilon}_{\dot\beta}\partial_A\bar{\psi}^{\dot\beta}\partial^A q\right\},\\
&\delta_{Qapr}^\star\mathrm{i}\left(\psi^\gamma\partial_A\bar{\psi}^{\dot\gamma} + \bar{\psi}^{\dot\gamma}\partial_A\psi^\gamma\right)\left(\sigma^B\right)_{\gamma\dot\gamma} \approx 2\mathrm{i}\left\{\epsilon_\beta\partial_A\psi^\beta\partial^A\bar{q} + \bar{\epsilon}_{\dot\beta}\partial_A\bar{\psi}^{\dot\beta}\partial^A q\right\} -\\
&-2\left\{\epsilon_\beta\partial_B\psi^\alpha\left(\sigma^{BC}\right)_\alpha^\beta\partial_C\bar{q} - \bar{\epsilon}_{\dot\beta}\partial_B\bar{\psi}^{\dot\alpha}\left(\tilde{\sigma}^{BC}\right)_{\dot\alpha}^{\dot\beta}\partial_C q\right\}.
\end{aligned} \tag{3.118}$$

Тогда вариация лагранжиана в низших порядках по полям

$$\mathcal{L}_{0apr} \approx \mathrm{i}(1+\alpha)\left(\psi^\gamma\partial_A\bar{\psi}^{\dot\gamma} + \bar{\psi}^{\dot\gamma}\partial_A\psi^\gamma\right)\left(\sigma^B\right)_{\gamma\dot\gamma} + 2\partial_A q\partial^A\bar{q} \tag{3.119}$$

обращается в полную дивергенцию, если $\alpha = 1$. Часть вариации $\mathrm{i}\left(\psi^\gamma\partial_A\bar{\psi}^{\dot\gamma} + \bar{\psi}^{\dot\gamma}\partial_A\psi^\gamma\right)\left(\sigma^B\right)_{\gamma\dot\gamma}$, содержащая σ_{AB} - матрицу, является дивергенцией сама по себе.

При данном α коэффициенты при X_1, X_2 в полной вариации оказываются равными нулю, а остальные после некоторых упрощений могут быть записаны как

$$\delta^{\star}_{Q}\mathcal{L}_0 \;=\; 2\left(1+\sqrt{(1-2\xi)^2-4\eta\bar{\eta}}\right)(X_3+f_J X_4)+4X_5+4f_J X_6. \qquad (3.120)$$

Данное выражение не является полной дивергенцией отчасти из-за структуры X_3, X_4, X_5, X_6, отчасти - из-за коэффициентов при них. Следовательно, учет члена Весса-Зумино оказывается необходим и в этой системе.

Вариация члена Весса-Зумино

Представляется наиболее удобным вычислять вариацию члена Весса-Зумино, записанного в виде:

$$\mathcal{L}_{WZ}=\epsilon^{ABCD}\partial_A q\partial_B\bar{q}\left(\psi_\alpha\partial_C\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}+\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\partial_C\psi_\alpha\right)(\tilde{\sigma}_D)^{\dot{\alpha}\alpha}. \qquad (3.121)$$

Это позволяет использовать законы преобразования $\partial_A q$, менее сложные по сравнению с преобразованиями $\mathcal{D}_A q$. Вариация (3.121) после использования тождества

$$\epsilon^{ABCD}H^M=\epsilon^{MBCD}H^A+\epsilon^{AMCD}H^B+\epsilon^{ABMD}H^C+\epsilon^{ABCM}H^D \qquad (3.122)$$

и интегрирований по частям может быть приведена к виду

$$\begin{aligned}\delta^{\star}_{Q}\mathcal{L}_{WZ} \;=\;& -2\mathrm{i}\epsilon^{ABCD}\left[\epsilon_\beta\partial_A\psi^\beta\partial_B\bar{q}+\bar{\epsilon}_{\dot{\beta}}\partial_B\bar{\psi}^{\dot{\beta}}\partial_A q\right]\left(\psi_\alpha\partial_C\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}+\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\partial_C\psi_\alpha\right)(\tilde{\sigma}_D)^{\dot{\alpha}\alpha}+\\ &+2\epsilon^{ABCD}\partial_A q\partial_B\bar{q}\left[\epsilon_\beta\partial_C\psi^\beta\overline{J}_D+\bar{\epsilon}_{\dot{\beta}}\partial_C\bar{\psi}^{\dot{\beta}}J_D\right]- \\ &-2\mathrm{i}\epsilon^{ABCD}\partial_A q\partial_B\bar{q}\left[\epsilon_\beta\partial_C\psi^\gamma(\sigma_{DM})_\gamma^\beta\,\overline{J}^M-\bar{\epsilon}_{\dot{\beta}}\partial_C\bar{\psi}^{\dot{\gamma}}(\tilde{\sigma}_{DM})_{\dot{\gamma}}^{\dot{\beta}}\,J^M\right]+\\ &+2\epsilon^{ABCD}\partial_A q\partial_B\bar{q}\partial_C\psi_\alpha\partial_D\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}H^M(\tilde{\sigma}_M)^{\dot{\alpha}\alpha}.\end{aligned} \qquad (3.123)$$

Произведение $H^M(\tilde{\sigma}_M)^{\dot{\alpha}\alpha}$ удобно вычислять, пользуясь определением H^M (3.110):

$$H^M(\tilde{\sigma}_M)^{\dot{\alpha}\alpha}=-2\mathrm{i}\left[\epsilon_\gamma\psi^\alpha\left(\tilde{\sigma}^M\right)^{\dot{\alpha}\gamma}\overline{J}_M+\bar{\epsilon}_{\dot{\gamma}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\left(\tilde{\sigma}^M\right)^{\dot{\gamma}\alpha}J_M\right]. \qquad (3.124)$$

Чтобы сравнить ее с (3.120), требуется восстановить ковариантные производные в трех последних строчках. Если подставить появляющийся при этом дополнительный множитель $(\mathcal{E}^{-1})_D^F=\delta_D^F+\mathrm{i}\left(\psi_\alpha\mathcal{D}_D\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}+\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\mathcal{D}_D\psi_\alpha\right)\left(\tilde{\sigma}^F\right)^{\dot{\alpha}\alpha}$ в явном виде, большинство слагаемых с высшими степенями фермионов сокращаются:

$$\begin{aligned}\delta^{\star}_{Q}\mathcal{L}_{WZ} \;=\;& -2\mathrm{i}\epsilon^{ABCD}\left[\epsilon_\beta\partial_A\psi^\beta\partial_B\bar{q}+\bar{\epsilon}_{\dot{\beta}}\partial_B\bar{\psi}^{\dot{\beta}}\partial_A q\right]\left(\psi_\alpha\partial_C\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}+\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\partial_C\psi_\alpha\right)(\tilde{\sigma}_D)^{\dot{\alpha}\alpha}- \\ &-2\mathrm{i}\det\mathcal{E}\epsilon^{ABCD}\mathcal{D}_A q\mathcal{D}_B\bar{q}\left[\epsilon_\beta\mathcal{D}_C\psi^\gamma(\sigma_{DM})_\gamma^\beta\,\overline{J}^M-\bar{\epsilon}_{\dot{\beta}}\mathcal{D}_C\bar{\psi}^{\dot{\gamma}}(\tilde{\sigma}_{DM})_{\dot{\gamma}}^{\dot{\beta}}\,J^M\right].\end{aligned} \qquad (3.125)$$

Слагаемое $\det\mathcal{E}\epsilon^{ABCD}\mathcal{D}_A q\mathcal{D}_B\bar{q}\left[\epsilon_\beta\mathcal{D}_C\psi^\beta\overline{J}_D+\bar{\epsilon}_{\dot{\beta}}\mathcal{D}_C\bar{\psi}^{\dot{\beta}}J_D\right]$, появляющееся при восстановлении ковариантных производных, равно нулю ввиду (3.114).

Далее, выражение (3.125) с помощью тождества

$$\epsilon^{ABCD}\left(\sigma_{DM}\right)_\alpha^{\ \beta}=\mathrm{i}\left[\delta_M^A\left(\sigma^{BC}\right)_\alpha^{\ \beta}-\delta_M^B\left(\sigma^{AC}\right)_\alpha^{\ \beta}+\delta_M^C\left(\sigma^{AB}\right)_\alpha^{\ \beta}\right], \tag{3.126}$$

следующего из самодуальности σ_{DM}, может быть приведено к виду

$$\begin{aligned}\delta_Q^\star\mathcal{L}_{WZ} &= -2\mathrm{i}\epsilon^{ABCD}\left[\epsilon_\beta\partial_A\psi^\beta\partial_B\bar{q}+\bar{\epsilon}_{\dot{\beta}}\partial_B\bar{\psi}^{\dot{\beta}}\partial_A q\right]\left(\psi_\alpha\partial_C\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}+\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\partial_C\psi_\alpha\right)\left(\tilde{\sigma}_D\right)^{\dot{\alpha}\alpha}+\\ &+2\det\mathcal{E}\left[X_5+f_JX_6-X_3\left(\xi+f_J\eta\bar{\eta}\right)+X_4\left(1+f_J\xi\right)\right].\end{aligned} \tag{3.127}$$

Сравнивая данное выражение с (3.120), можно убедиться, что слагаемые с X_4, X_5, X_6, которые даже в низшем приближении не сводятся к полным дивергенциям, сокращаются, если $\beta=-2$ (3.109). Остаток в вариации полного лагранжиана имеет вид

$$\begin{aligned}\delta_Q^\star\mathcal{L} &= 4\mathrm{i}\epsilon^{ABCD}\left[\epsilon_\beta\partial_A\psi^\beta\partial_B\bar{q}+\bar{\epsilon}_{\dot{\beta}}\partial_B\bar{\psi}^{\dot{\beta}}\partial_A q\right]\left(\psi_\alpha\partial_C\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}+\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\partial_C\psi_\alpha\right)\left(\tilde{\sigma}_D\right)^{\dot{\alpha}\alpha}+\\ &+4\det\mathcal{E}\left[\epsilon_\beta\mathcal{D}_B\psi^\alpha\left(\sigma^{BC}\right)_\alpha^{\ \beta}\mathcal{D}_C\bar{q}-\bar{\epsilon}_{\dot{\beta}}\mathcal{D}_B\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\left(\tilde{\sigma}^{BC}\right)_{\dot{\alpha}}^{\ \dot{\beta}}\mathcal{D}_C q\right].\end{aligned} \tag{3.128}$$

Окончательное сокращение фермионных слагаемых

Чтобы доказать, что вариация (3.128) является полной дивергенцией, достаточно рассмотреть коэффициент при ϵ_α. Тогда, интегрируя по частям последнюю строчку (3.128), чтобы снять производную с $\bar{q}$, и дифференцируя $\det\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^{-1}$, следующие из ковариантных производных можно получить

$$\begin{aligned}4\det\mathcal{E}\epsilon_\beta\mathcal{D}_B\psi^\alpha\left(\sigma^{BC}\right)_\alpha^{\ \beta}\mathcal{D}_C\bar{q} &= \bar{q}\partial_E\left[\det\mathcal{E}\epsilon_\beta\mathcal{D}_B\psi^\alpha\left(\sigma^{BC}\right)_\alpha^{\ \beta}\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_C^{\ E}\right]+\\ &+4\bar{q}\epsilon_\beta\partial_E\psi^\alpha\partial_D E_M^N\det\mathcal{E}\left[\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_B^{\ M}\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_N^{\ E}\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_C^{\ D}+\right.\\ &\left.+\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_B^{\ E}\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_C^{\ M}\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_N^{\ D}-\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_N^{\ M}\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_C^{\ D}\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_B^{\ E}\right].\end{aligned} \tag{3.129}$$

Производная $\partial_D\partial_E\psi^\alpha$ отсутствует в силу антисимметричности комбинации $\mathcal{E}^{-1}$ относительно перестановки D,E. Подставляя в явном виде $\partial_D\mathcal{E}_M^N$, и учитывая, что высшие производные фермионов также сокращаются, можно прийти к выражению

$$\begin{aligned}&8\mathrm{i}\det\mathcal{E}\bar{q}\left(\tilde{\sigma}^N\right)^{\dot{\gamma}\gamma}\left(\sigma^{BC}\right)_\alpha^{\ \beta}\left[\mathcal{D}_N\psi^\alpha\mathcal{D}_B\psi_\gamma\mathcal{D}_C\bar{\psi}_{\dot{\gamma}}+\mathcal{D}_C\psi^\alpha\mathcal{D}_N\psi_\gamma\mathcal{D}_B\bar{\psi}_{\dot{\gamma}}-\mathcal{D}_C\psi^\alpha\mathcal{D}_B\psi_\gamma\mathcal{D}_N\bar{\psi}_{\dot{\gamma}}\right]=\\ &8\mathrm{i}\det\mathcal{E}\bar{q}\mathcal{D}_N\psi^\alpha\mathcal{D}_B\psi_\gamma\mathcal{D}_C\bar{\psi}_{\dot{\gamma}}\left[\left(\tilde{\sigma}^N\right)^{\dot{\gamma}\gamma}\left(\sigma^{BC}\right)_\alpha^{\ \beta}+\left(\tilde{\sigma}^B\right)^{\dot{\gamma}\gamma}\left(\sigma^{CN}\right)_\alpha^{\ \beta}-\left(\tilde{\sigma}^C\right)^{\dot{\gamma}\gamma}\left(\sigma^{BN}\right)_\alpha^{\ \beta}\right].\end{aligned} \tag{3.130}$$

Как можно заметить, комбинация σ-матриц в (3.130), антисимметрична по N,B,C, и может быть переписана как

$$\left(\tilde{\sigma}^N\right)^{\dot{\gamma}\gamma}\left(\sigma^{BC}\right)_\alpha^{\ \beta}+\left(\tilde{\sigma}^B\right)^{\dot{\gamma}\gamma}\left(\sigma^{CN}\right)_\alpha^{\ \beta}-\left(\tilde{\sigma}^C\right)^{\dot{\gamma}\gamma}\left(\sigma^{BN}\right)_\alpha^{\ \beta}=-\frac{1}{2}\epsilon^{NBCK}\epsilon_{FGHK}\left(\tilde{\sigma}^F\right)^{\dot{\gamma}\gamma}\left(\sigma^{GH}\right)_\alpha^{\ \beta}. \tag{3.131}$$

Дуализуя $\left(\sigma^{GH}\right)_{\alpha}^{\beta}$, свертывая матрицы $\left(\tilde{\sigma}^{N}\right)^{\dot{\gamma}\gamma}\left(\sigma_{NK}\right)_{\alpha}^{\beta}=\mathrm{i}\left[\delta_{\alpha}^{\gamma}\left(\tilde{\sigma}_{K}\right)^{\dot{\gamma}\beta}-\epsilon^{\gamma\beta}\left(\sigma_{K}\right)_{\alpha}^{\dot{\gamma}}\right]$, и учитывая, что $\mathcal{D}_N\psi^\gamma\mathcal{D}_B\psi_\gamma$ симметрично по N, B, можно привести (3.129) к окончательному виду

$$8\mathrm{i}\det\mathcal{E}\bar{q}\epsilon_\beta\mathcal{D}_N\psi_\alpha\mathcal{D}_B\psi^\beta\mathcal{D}_C\bar{\psi}_{\dot{\gamma}}\epsilon^{NBCK}\left(\tilde{\sigma}_K\right)^{\dot{\gamma}\alpha}. \tag{3.132}$$

Коэффициент при ϵ_β в первой строчке (3.128) также может быть приведен к аналогичному виду интегрированием по частям

$$-8\mathrm{i}\bar{q}\det\mathcal{E}\epsilon_\beta\mathcal{D}_N\psi^\beta\mathcal{D}_B\psi_\alpha\mathcal{D}_C\bar{\psi}_{\dot{\gamma}}\epsilon^{NBCM}\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_M^K\left(\tilde{\sigma}_K\right)^{\dot{\gamma}\alpha}. \tag{3.133}$$

Подставляя $\mathcal{E}^{-1}$ в явном виде и свертывая σ-матрицы, можно убедиться, что фермионная добавка из него пропадает вследствие симметричности выражений вида $\mathcal{D}_B\psi_\alpha\mathcal{D}_M\psi^\alpha$, $\mathcal{D}_C\bar{\psi}_{\dot{\gamma}}\mathcal{D}_M\bar{\psi}^{\dot{\gamma}}$. Тогда (3.133) и (3.132) полностью сокращают друг друга, и действие (3.109) с $\alpha=1$, $\beta=-2$

$$\begin{aligned} S \;=\; & 2\int d^4x-\int d^4x\det\mathcal{E}\left[1+\sqrt{\left(1-2\mathcal{D}^Aq\mathcal{D}_A\bar{q}\right)^2-4\left(\mathcal{D}^Bq\mathcal{D}_Bq\right)\left(\mathcal{D}^C\bar{q}\mathcal{D}_C\bar{q}\right)}\right]- \\ & -2\int d^4x\det\mathcal{E}\epsilon^{ABCD}\mathcal{D}_Aq\mathcal{D}_B\bar{q}\left(\psi^\alpha\mathcal{D}_C\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}+\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\mathcal{D}_C\psi^\alpha\right)\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_D^F\left(\sigma_F\right)_{\alpha\dot{\alpha}} \end{aligned} \tag{3.134}$$

действительно оказывается инвариантным.

3.5. Мембрана в семимерном пространстве-времени

Данный раздел посвящен построению действия суперсимметричной мембраны в семимерном плоском пространстве-времени и доказательству его инвариантности относительно точной и спонтанно-нарушенной суперсимметрий.

3.5.1. Алгебра и элемент фактор-пространства

Исходным пунктом формализма нелинейных реализаций является алгебра симметрий, которыми должна обладать теория. В данном случае это $N=1$, $D=7$ суперaлгебра Пуанкаре. Поскольку мировой объем мембраны трехмерен, ее следует выписать в трехмерных обозначениях.

Суперaлгебру симметрий теории оказывается более удобным формулировать в $SO(1,2)$ спинорных обозначениях. Бозонная подалгебра включает трехмерные трансляции $P_{\alpha\beta}$ и центральные заряды Z^{ia}, составляющие вместе $D=7$ трансляции, а также семимерную алгебру Лоренца $SO(1,6)$. Последняя может быть разбита на $d=3$ алгебру Лоренца

$M_{\alpha\beta}$, две $SU(2)$ алгебры T^{ij}, R^{ab}, и генераторы $K^{ia}_{\alpha\beta}$, принадлежащие фактор-пространству $SO(1,6)/SO(1,2)\times SU(2)\times SU(2)$. Их коммутаторы имеют вид

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}\left[M_{\alpha\beta},M_{\gamma\delta}\right]=\epsilon_{\alpha\gamma}M_{\beta\delta}+\epsilon_{\alpha\delta}M_{\beta\gamma}+\epsilon_{\beta\gamma}M_{\alpha\delta}+\epsilon_{\beta\delta}M_{\alpha\gamma}\equiv\left(M\right)_{\alpha\beta,\gamma\delta}\,,\\
&\mathrm{i}\left[M_{\alpha\beta},P_{\gamma\delta}\right]=\left(P\right)_{\alpha\beta,\gamma\delta}\,,\ \mathrm{i}\left[M_{\alpha\beta},K^{ia}_{\gamma\delta}\right]=\left(K^{ia}\right)_{\alpha\beta,\gamma\delta}\,,\\
&\mathrm{i}\left[T^{ij},T^{kl}\right]=-\epsilon^{ik}T^{jl}-\epsilon^{jk}T^{il}-\epsilon^{il}T^{jk}-\epsilon^{jl}T^{ik},\\
&\mathrm{i}\left[R^{ab},R^{cd}\right]=-\epsilon^{ac}R^{bd}-\epsilon^{bc}R^{ad}-\epsilon^{ad}R^{bc}-\epsilon^{bd}R^{ac},\\
&\mathrm{i}\left[P_{\alpha\beta},K^{ia}_{\gamma\delta}\right]=\left(\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon^{\beta\delta}+\epsilon^{\beta\gamma}\epsilon^{\alpha\delta}\right)Z^{ia},\quad \mathrm{i}\left[K^{ia}_{\alpha\beta},Z^{jb}\right]=-2\epsilon^{ij}\epsilon^{ab}P_{\alpha\beta},\\
&\mathrm{i}\left[K^{ia}_{\alpha\beta},K^{jb}_{\gamma\delta}\right]=-\frac{1}{2}\epsilon^{ij}\epsilon^{ab}\left(M\right)_{\alpha\beta,\gamma\delta}+\left(\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon^{\beta\delta}+\epsilon^{\beta\gamma}\epsilon^{\alpha\delta}\right)\left(\epsilon^{ij}R^{ab}+\epsilon^{ab}T^{ij}\right).
\end{aligned} \tag{3.135}$$

Для обеих $su(2)$ алгебр коммутаторы с прочими генераторами имеют вид

$$\mathrm{i}\left[T^{ij},G^{k}\right]=-\epsilon^{ik}G^{j}-\epsilon^{jk}G^{i},\ \mathrm{i}\left[R^{ab},G^{c}\right]=-\epsilon^{ac}G^{b}-\epsilon^{bc}G^{a}, \tag{3.136}$$

для любого генератора G с соответствующим индексом.

Супералгебра содержит также 16 фермионных генераторов Q^i_α, $\overline{Q}_{i\alpha}$, S^a_α, $\overline{S}_{\alpha a}$:

$$\begin{aligned}
&\left\{Q^i_\alpha,\overline{Q}_{j\beta}\right\}=2\delta^i_jP_{\alpha\beta},\ \left\{S^a_\alpha,\overline{S}_{\beta b}\right\}=2\delta^a_bP_{\alpha\beta},\ \left\{Q^i_\alpha,S^a_\beta\right\}=2\epsilon_{\alpha\beta}Z^{ia},\ \left\{\overline{Q}_{i\alpha},\overline{S}_{a\beta}\right\}=2\epsilon_{\alpha\beta}Z_{ia},\\
&\mathrm{i}\left[M_{\alpha\beta},Q^i_\gamma\right]=\epsilon_{\alpha\gamma}Q^i_\beta+\epsilon_{\beta\gamma}Q^i_\alpha\equiv\left(Q^i\right)_{\alpha\beta,\gamma}\,,\ \mathrm{i}\left[M_{\alpha\beta},\overline{Q}_{i\gamma}\right]=\left(\overline{Q}_i\right)_{\alpha\beta,\gamma}\,,\\
&\mathrm{i}\left[M_{\alpha\beta},S^a_\gamma\right]=\left(S^a\right)_{\alpha\beta,\gamma}\,,\ \mathrm{i}\left[M_{\alpha\beta},\overline{S}_{a\gamma}\right]=\left(\overline{S}_a\right)_{\alpha\beta,\gamma}\,,\\
&\mathrm{i}\left[K^{ia}_{\alpha\beta},Q^j_\gamma\right]=\epsilon^{ij}\left(\overline{S}^a\right)_{\alpha\beta,\gamma}\,,\ \mathrm{i}\left[K^{ia}_{\alpha\beta},\overline{Q}_{j\gamma}\right]=\delta^i_j\left(S^a\right)_{\alpha\beta,\gamma}\,,\\
&\mathrm{i}\left[K^{ia}_{\alpha\beta},S^b_\gamma\right]=-\epsilon^{ab}\left(\overline{Q}^i\right)_{\alpha\beta,\gamma}\,,\ \mathrm{i}\left[K^{ia}_{\alpha\beta},\overline{S}_{b\gamma}\right]=-\delta^a_b\left(Q^i\right)_{\alpha\beta,\gamma}\,.
\end{aligned} \tag{3.137}$$

Таким образом, в трехмерных обозначениях $N=1$, $D=7$ супералгебра Пуанкаре может быть записана как $N=8$, $d=3$ супералгебра Пуанкаре, расширенная четырьмя центральными зарядами.

Элемент фактор-пространства может быть постулирован вполне аналогично рассмотренным ранее системам со спонтанным нарушением суперсимметрии:

$$g\;=\;e^{\mathrm{i}x^{\alpha\beta}P_{\alpha\beta}}e^{\theta^\alpha_iQ^i_\alpha+\bar{\theta}^{i\alpha}\overline{Q}_{i\alpha}}e^{\mathrm{i}\mathbf{q}_{ia}Z^{ia}}e^{\boldsymbol{\psi}^\alpha_aS^a_\alpha+\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\alpha}\overline{S}_{a\alpha}}e^{\mathrm{i}\boldsymbol{\Lambda}^{\alpha\beta}_{ia}K^{ia}_{\alpha\beta}}. \tag{3.138}$$

Здесь $\mathbf{q}_{ia}$, $\boldsymbol{\psi}^\alpha_a$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\alpha}$, $\boldsymbol{\Lambda}^{\alpha\beta}_{ia}$ - Голдстоуновские суперполя, зависящие от координат $x^{\alpha\beta}$, θ^α_i, $\bar{\theta}^{\alpha i}$ суперпространства. Как обычно, генераторы алгебры Лоренца в мировом объеме и генераторы, преобразующие друг через друга центральные заряды, оставлены в подгруппе стабильности h. Из всех законов преобразования, которые могут быть получены из (3.138) с помощью левого умножения $g_0g=g'h$, наибольший интерес представляют нарушенная и ненарушенная суперсимметрия:

$$g_0 = e^{\epsilon_i^\alpha Q_\alpha^i + \bar\epsilon^{i\alpha}\overline{Q}_{\alpha i}} \quad\Rightarrow\quad \delta_Q x^{\alpha\beta} = \mathrm{i}\left(\epsilon_i^{(\alpha}\bar\theta^{\beta)i} + \bar\epsilon^{i(\alpha}\theta_i^{\beta)}\right),\ \delta_Q\theta_i^\alpha = \epsilon_i^\alpha,\ \delta_Q\bar\theta^{i\alpha} = \bar\epsilon^{\alpha i}, \tag{3.139}$$

$$g_0 = e^{\varepsilon_a^\alpha S_\alpha^a + \bar\varepsilon^{a\alpha}\overline{S}_{a\alpha}} \quad\Rightarrow\quad \delta_S x^{\alpha\beta} = \mathrm{i}\left(\varepsilon_a^{(\alpha}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{\beta)a} + \bar\varepsilon^{a(\alpha}\boldsymbol{\psi}_a^{\beta)}\right),\ \delta_S\mathbf{q}_{ia} = 2\mathrm{i}\left(\varepsilon_{a\alpha}\theta_i^\alpha + \bar\varepsilon_{a\alpha}\bar\theta_i^\alpha\right), \tag{3.140}$$

$$\delta_S\boldsymbol{\psi}_a^\alpha = \varepsilon_a^\alpha,\ \delta_S\bar{\boldsymbol{\psi}}_a^\alpha = \bar\varepsilon_a^\alpha,\ \delta_S\theta_i^\alpha = 0,\ \delta_S\bar\theta^{\alpha i} = 0,\ \delta_S\boldsymbol{\Lambda}_{i\alpha}^{\alpha\beta} = 0.$$

Из всех форм Картана

$$g^{-1}dg = \mathrm{i}\Omega_P + \mathrm{i}\Omega_Z + \Omega_Q + \overline{\Omega}_Q + \Omega_S + \overline{\Omega}_S + \mathrm{i}\Omega_K + \mathrm{i}\Omega_M + \mathrm{i}\Omega_T + \mathrm{i}\Omega_R, \tag{3.141}$$

для дальнейших построений интерес представляют лишь три:

$$\begin{aligned}
\Omega_P &= \left[\left(\cosh 2\sqrt{\boldsymbol{Y}}\right)_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}\triangle x^{\alpha\beta} + 2\left(\frac{\sinh 2\sqrt{\boldsymbol{y}}}{2\sqrt{\boldsymbol{y}}}\right)_{ia}^{jb}\triangle q^{ia}\boldsymbol{\Lambda}_{jb}^{\gamma\delta}\right]P_{\gamma\delta},\\
\Omega_Z &= \left[(\cosh 2\sqrt{\boldsymbol{y}})_{ia}^{jb}\triangle q_{jb} + 2\boldsymbol{\Lambda}_{ia}^{\alpha\beta}\triangle x_{\gamma\delta}\left(\frac{\sinh 2\sqrt{\boldsymbol{Y}}}{2\sqrt{\boldsymbol{Y}}}\right)_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}\right]Z^{ia}, \qquad (3.142)\\
\Omega_S &= \left[\left(\cosh 2\sqrt{\boldsymbol{W}}\right)_{a\beta}^{c\alpha}d\boldsymbol{\psi}_c^\beta + 2d\bar\theta^{j\beta}\boldsymbol{\Lambda}_{cj\beta}^\delta\left(\frac{\sinh 2\sqrt{\boldsymbol{W}}}{2\sqrt{\boldsymbol{W}}}\right)_{\delta a}^{\alpha c}\right]S_a^\alpha.
\end{aligned}$$

Коэффициенты в этих формах - ряды по степеням матриц $\boldsymbol{Y}_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = \boldsymbol{\Lambda}_{\alpha\beta}^{ia}\boldsymbol{\Lambda}_{ia}^{\gamma\delta}$, $\boldsymbol{y}_{ia}^{jb} = \boldsymbol{\Lambda}_{ia}^{\gamma\delta}\boldsymbol{\Lambda}_{\gamma\delta}^{jb}$, $\boldsymbol{W}_{\alpha a}^{\beta b} = \boldsymbol{\Lambda}_{\alpha\gamma}^{jb}\boldsymbol{\Lambda}_{ja}^{\gamma\beta}$. Подформы

$$\triangle x^{\alpha\beta} = dx^{\alpha\beta} - \mathrm{i}\left(\theta_i^{(\alpha}d\bar\theta^{\beta)i} + \bar\theta^{i(\alpha}d\theta_i^{\beta)} + \boldsymbol{\psi}_a^{(\alpha}d\bar{\boldsymbol{\psi}}^{\beta)a} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{a(\alpha}d\boldsymbol{\psi}_a^{\beta)}\right), \tag{3.143}$$

$$\triangle\mathbf{q}_{ia} = d\mathbf{q}_{ia} - 2\mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}_{a\alpha}d\theta_i^\alpha + \bar{\boldsymbol{\psi}}_{a\alpha}d\bar\theta_i^\alpha\right),$$

также как и $d\theta_i^\alpha$, $d\boldsymbol{\psi}_a^\alpha$, инвариантны относительно обеих суперсимметрий (3.139), (3.140). Следовательно, с помощью $\triangle x^{\alpha\beta}$, $d\theta_i^\alpha$, $d\bar\theta^{i\alpha}$ можно определить ковариантные производные

$$dF = dx^{\alpha\beta}\frac{\partial F}{\partial x^{\alpha\beta}} + d\theta_i^\alpha\frac{\partial F}{\partial\theta_i^\alpha} + d\bar\theta^{i\alpha}\frac{\partial F}{\partial\bar\theta^{\alpha i}} = \triangle x^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha\beta}F + d\theta_i^\alpha\nabla_\alpha^i F + d\bar\theta^{i\alpha}\overline{\nabla}_{i\alpha}F. \tag{3.144}$$

Они имеют вид

$$\begin{aligned}
\nabla_{\alpha\beta} &= \left(E^{-1}\right)_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}\partial_{\gamma\delta},\ E_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(\delta_\alpha^\gamma\delta_\beta^\delta + \delta_\alpha^\delta\delta_\beta^\gamma\right) - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}_a^{(\gamma}\partial_{\alpha\beta}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{\delta)a} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{a(\gamma}\partial_{\alpha\beta}\boldsymbol{\psi}_a^{\delta)}\right);\\
\nabla_\alpha^i &= D_\alpha^i - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}_a^\gamma\nabla_\alpha^i\bar{\boldsymbol{\psi}}^{\delta a} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\gamma}\nabla_\alpha^i\boldsymbol{\psi}_a^\delta\right)\partial_{\gamma\delta} = D_\alpha^i - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}_a^\gamma D_\alpha^i\bar{\boldsymbol{\psi}}^{\delta a} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{\gamma a}D_\alpha^i\boldsymbol{\psi}_a^\delta\right)\nabla_{\gamma\delta},\\
\overline{\nabla}_{i\alpha} &= \overline{D}_{i\alpha} - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}_a^\gamma\overline{\nabla}_{i\alpha}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{\delta a} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{\gamma a}\overline{\nabla}_{i\alpha}\boldsymbol{\psi}_a^\delta\right)\partial_{\gamma\delta} = D_\alpha^i - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}_a^\gamma\overline{D}_{i\alpha}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{\delta a} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{\gamma a}\overline{D}_{i\alpha}\boldsymbol{\psi}_a^\delta\right)\nabla_{\gamma\delta}.
\end{aligned}$$

Здесь D_a^i, $\overline{D}_{ia}$ - производные, ковариантные лишь относительно ненарушенной суперсимметрии:

$$D_\alpha^i = \frac{\partial}{\partial\theta_i^\alpha} - \mathrm{i}\bar\theta^{i\beta}\partial_{\alpha\beta},\ \overline{D}_{i\alpha} = \frac{\partial}{\partial\bar\theta^{i\alpha}} - \mathrm{i}\theta_i^\beta\partial_{\alpha\beta},$$

$$\left\{D_\alpha^i, \overline{D}_{j\beta}\right\} = -2\mathrm{i}\delta_j^i\partial_{\alpha\beta},\ \left\{D_\alpha^i, D_\beta^j\right\} = 0,\ \left\{\overline{D}_{i\alpha}, \overline{D}_{j\beta}\right\} = 0. \tag{3.145}$$

Как и ранее, для производных по антикоммутирующим координатам существуют два эквивалентных представления, поскольку дифференциалы $\boldsymbol{\psi}_a^\alpha$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\alpha}$ в (3.143), (3.144) могут быть раскрыты как в терминах $dx^{\alpha\beta}$, так и $\triangle x^{\alpha\beta}$.

(Анти)коммутаторы производных $\nabla_{\alpha\beta}$, ∇^i_α, $\overline{\nabla}_{i\alpha}$ имеют достаточно сложный вид; для дальнейших построений существенны антикоммутаторы

$$\begin{gathered}
\left\{\nabla^i_\alpha, \nabla^j_\beta\right\} = -2\mathrm{i}\left(\nabla^i_\alpha \boldsymbol{\psi}_a^{(\gamma} \nabla^j_\beta \bar{\boldsymbol{\psi}}^{\delta)a} + \nabla^i_\alpha \bar{\boldsymbol{\psi}}^{(\delta a} \nabla^j_\beta \boldsymbol{\psi}_a^{\gamma)}\right) \nabla_{\gamma\delta}, \\
\left\{\nabla^i_\alpha, \overline{\nabla}_{j\beta}\right\} = -2\mathrm{i}\delta^i_j \nabla_{\alpha\beta} - 2\mathrm{i}\left(\nabla^i_\alpha \bar{\boldsymbol{\psi}}^{\gamma a} \overline{\nabla}_{j\beta} \boldsymbol{\psi}_a^\delta + \nabla^i_\alpha \boldsymbol{\psi}_a^\gamma \overline{\nabla}_{j\beta} \bar{\boldsymbol{\psi}}^{\delta a}\right) \nabla_{\gamma\delta}.
\end{gathered} \tag{3.146}$$

3.5.2. Непосредственные следствия форм Картана

Формы Картана (3.142), (3.143) играют важную роль в построении суперсимметричного компонентного действия. Их можно использовать, чтобы найти связи между суперполями, не разрушающие исходные симметрии, условия неприводимости, уравнения движения и бозонное действие.

Условия неприводимости

Как и во всех рассмотренных ранее случая нарушения суперсимметрии, оказывается возможным наложить на суперполя условие, ковариантное относительно всех преобразований фактор-пространства (3.138). Это условие имеет вид $\Omega_Z = 0$ и позволяет выразить $\boldsymbol{\psi}_a^\alpha$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\alpha}$, $\boldsymbol{\Lambda}_{ia}^{\alpha\beta}$ через производные $\nabla^i_\alpha \mathbf{q}_{ja}, \overline{\nabla}_{i\alpha}\mathbf{q}_{ja}, \nabla_{\alpha\beta}\mathbf{q}$ (обратный эффект Хиггса [38]) одновременно с условиями неприводимости:

$$\nabla_{\alpha\beta}\mathbf{q}_{ia} = -2\boldsymbol{\Lambda}^{\gamma\delta}_{ia}\left(\frac{\operatorname{th} 2\sqrt{\boldsymbol{Y}}}{2\sqrt{\boldsymbol{Y}}}\right)^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}, \quad \nabla^j_\alpha \mathbf{q}_{ia} + 2\mathrm{i}\boldsymbol{\psi}_{a\alpha}\delta^j_i = 0, \quad \overline{\nabla}_{j\alpha}\mathbf{q}_{ia} + 2\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\psi}}_{a\alpha}\epsilon_{ij} = 0. \tag{3.147}$$

Из фермионных проекций следует, что

$$\nabla^{(j}_\alpha \mathbf{q}^{i)}_a = 0, \quad \overline{\nabla}_{\alpha(j}\mathbf{q}_{i)a} = 0, \quad \boldsymbol{\psi}_{a\alpha} = \tfrac{\mathrm{i}}{4}\nabla^k_\alpha \mathbf{q}_{ka}, \quad \bar{\boldsymbol{\psi}}_{a\alpha} = \tfrac{\mathrm{i}}{4}\overline{\nabla}_{k\alpha}\mathbf{q}^k_a. \tag{3.148}$$

Как и следовало ожидать, суперполя, описывающие мембрану в $D = 7$, принадлежат $N = 4$, $d = 3$ гипермультиплету. Этот мультиплет определен на массовой поверхности и не содержит вспомогательных полей. Вследствие этого, результат действия двух любых спинорных производных на $\mathbf{q}_{ia}$ (либо одной на $\boldsymbol{\psi}_{a\alpha}$) можно найти с помощью алгебры прозводных (3.146) без дополнительных предположений:

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{j\beta}\boldsymbol{\psi}_{a\alpha} &= \frac{\mathrm{i}}{3}\left[\left\{\nabla^k_\alpha, \overline{\nabla}_{j\beta}\right\}\mathbf{q}_{ka} + \frac{1}{2}\left\{\nabla_{j\alpha}, \overline{\nabla}_{k\beta}\right\}\mathbf{q}^k_a\right], \\
\nabla^i_\beta \bar{\boldsymbol{\psi}}_{a\alpha} &= \frac{\mathrm{i}}{3}\left[\left\{\nabla^i_\beta, \overline{\nabla}_{k\alpha}\right\}\mathbf{q}^k_a + \frac{1}{2}\left\{\nabla^k_\beta, \overline{\nabla}^i_\alpha\right\}\mathbf{q}_{ka}\right].
\end{aligned} \tag{3.149}$$

Условия $\Omega_S|_{d\theta} = 0$, являвшиеся ранее источником уравнений движения, в данном случае не содержат дополнительной динамической информации. Их можно рассматривать как эквивалентные (3.149).

Бозонное действие

Бозонное действие, за неимением суперсимметрий, может быть зафиксировано требованием $SO(1,6)$ инвариантности. Наиболее простым способом его можно найти, заметив, что, наличие генераторов $K^{ia}_{\alpha\beta}$ в фактор-пространстве автоматически обеспечивает инвариантность форм Картана относительно группы $SO(1,6)$. Тогда интеграл от формы объема, построенной из Ω_P, и будет искомым бозонным действием. В бозонном пределе, с учетом (3.147) и (3.142), Ω_P может быть записана как

$$\Omega_P = dx^{\alpha\beta} P_{\gamma\delta} e^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}, \quad e^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{\cosh 2\sqrt{Y}} \right)^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}. \tag{3.150}$$

Поскольку $\partial_{\alpha\beta} q^{ia} \partial^{\gamma\delta} q_{ia} = \left(\tanh^2 2\sqrt{Y} \right)^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$, квадрат тетрады $e^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ может быть выражен через $\partial_{\alpha\beta} q_{ia}$ с помощью простой формулы

$$g^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = e^{\mu\nu}_{\alpha\beta} e^{\gamma\delta}_{\mu\nu} = \delta^{\gamma}_{\alpha} \delta^{\delta}_{\beta} - \partial_{\alpha\beta} q^{ia} \partial^{\gamma\delta} q_{ia}. \tag{3.151}$$

Тогда, очевидно, бозонное действие есть $S_{bos} = \int d^3x \det e^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = \int d^3x \sqrt{\det g^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}}$.

Чтобы корректно определить данный детерминант, удобно использовать трехменые векторные обозначения. Переход к ним можно осуществить с помощью трех симметричных матриц $\left(\sigma^A\right)_{\alpha\beta}$, $\left(\sigma^A\right)_{\alpha\beta} \left(\sigma^B\right)^{\beta\gamma} = \eta^{AB} \delta^{\beta}_{\alpha} + \epsilon^{ABC} \left(\sigma_C\right)^{\gamma}_{\alpha}$:

$$\begin{gathered} g^B_A = \frac{1}{2} \left(\sigma_A\right)^{\alpha\beta} \left(\sigma^B\right)_{\gamma\delta} g^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}, \ \partial_{\alpha\beta} = \left(\sigma^A\right)_{\alpha\beta} \partial_A \Rightarrow \\ g^B_A = \delta^B_A - 2\partial_A q^{ia} \partial^B q_{ia} \Rightarrow S_{bos} = \int d^3x \sqrt{\det g}. \end{gathered} \tag{3.152}$$

3.5.3. Нарушенная суперсимметрия

В компонетном подходе к действиям P-бран, инвариантность относительно спонтанно нарушенной суперсимметрии является одним из двух основных требований к действию. Это требование оказывается способным определить вид фермионных членов в лагранжиане. С учетом также бозонного предела, действие оказывается зафиксированным с точностью до двух констант, которые должны быть найдены с помощью Q-суперсимметрии.

Перед тем, как обобщать бозонное действие до инвариантного относительно S-суперсимметрии, следует определить компоненты. Поскольку суперполя $\mathbf{q}_{ia}$ и $\boldsymbol{\psi}^{\alpha}_{a}$ связаны друг с другом формулами (3.147), естественно определить бозонные и фермионные компоненты как

$$q_{ia} = \mathbf{q}_{ia}|_{\theta\to 0},\ \psi^\alpha_a = \boldsymbol{\psi}^\alpha_a|_{\theta\to 0},\ \bar\psi^{a\alpha} = \bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\alpha}|_{\theta\to 0}. \tag{3.153}$$

Такой выбор фермиона обеспечивает сравнительно простой закон преобразования относительно нарушенной суперсимметрии, по сравнению с фермионом линейной реализации.

Обобщение бозонного действия

Вычисляя активные преобразования суперполей (3.140), переходя к векторным обозначениям и пределу $\theta^a_i \to 0$, можно найти законы преобразования (3.153) относительно нарушенной суперсимметрии

$$\begin{gathered}\delta^\star_S \psi^\alpha_a = \varepsilon^\alpha_a - U^M \partial_M \psi^\alpha_a, \quad \delta^\star_S \bar\psi^{a\alpha} = \bar\varepsilon^{a\alpha} - U^M \partial_M \bar\psi^{a\alpha} \\ \delta^\star_S q_{ia} = -U^M \partial_M q_{ia}, \quad U^M = \mathrm{i}\left(\varepsilon^{(\alpha}_a \bar\psi^{\beta)a} + \bar\varepsilon^{a(\alpha}\psi^{\beta)}_a\right)\left(\sigma^M\right)_{\alpha\beta}.\end{gathered} \tag{3.154}$$

Вследствие необходимости дифференцировать U^M вариация $\partial_A q_{ia}$ имеет структуру, отличную от (3.154). Должным законом преобразования обладает ковариантная производная $\mathcal{D}_A q$, определенная с помощью фермионной тетрады $\mathcal{E}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = E^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}|_{\theta\to 0}$ (3.145):

$$\begin{gathered}\mathcal{E}^B_A = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_A\right)^{\alpha\beta}\left(\sigma^B\right)_{\gamma\delta} E_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}|_{\theta\to 0} = \delta^B_A - \mathrm{i}\left(\psi^\gamma_a \partial_A \bar\psi^{\delta a} + \bar\psi^{\delta a}\partial_A \psi^\gamma_a\right)\left(\sigma^B\right)_{\gamma\delta} \Rightarrow \\ \delta^\star_S \mathcal{E}^B_A = -U^M \partial_M \mathcal{E}^B_A - \partial_A U^M \mathcal{E}^B_M \Rightarrow \mathcal{D}_A = \left(\mathcal{E}^{-1}\right)^B_A \partial_B, \quad \delta^\star_S \mathcal{D}_A q_{ia} = -U^M \partial_M \mathcal{D}_A q_{ia}.\end{gathered} \tag{3.155}$$

Очевидно, что вариация $\mathcal{D}_A q_{ia}$ исчезает при переходе от активных преобразований к “обычным” $\delta_S = \delta^\star_S + \delta_S x^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta} = \delta^\star_S + U^M\partial_M$, и его нетривиальная вариация обусловлена лишь сдвигом $x^{\alpha\beta}$. Последнее также верно и для матрицы $d_{AB} = \mathcal{D}_A q^{ia}\mathcal{D}_B q_{ia}$, и для следов всех ее степеней. Учитывая также, что $\delta^\star_S \det\mathcal{E} = -\partial_M\left(U^M \det\mathcal{E}\right)$, можно заметить, что

$$\delta^\star_S\left[\det\mathcal{E} F(\mathrm{Tr}d, \mathrm{Tr}d^2, \mathrm{Tr}d^3)\right] = -\partial_M\left[U^M \det\mathcal{E} F(\mathrm{Tr}d, \mathrm{Tr}d^2, \mathrm{Tr}d^3)\right]. \tag{3.156}$$

Тогда интеграл $\int d^3x \det\mathcal{E} F(\mathrm{Tr}d, \mathrm{Tr}d^2, \mathrm{Tr}d^3)$ определяет некоторое действие, инвариантное относительно нарушенной суперсимметрии. Последнее вполне согласуется с [10].

Функция в (3.156) может быть зафиксирована бозонным пределом с точностью до постоянной:

$$S_0 = (1+\alpha)\int d^3x - \int d^3x \det\mathcal{E}\left[\alpha + \sqrt{\det g}\right], \quad g_{AB} = \eta_{AB} - 2d_{AB}. \tag{3.157}$$

Тривиальное действие $\int d^3x$ здесь добавлено, чтобы обеспечить предел $S_0|_{q,\psi\to 0} = 0$.

Член Весса-Зумино

Вторым слагаемым, которое необходимо учесть при формулировке анзаца для действия, наряду с обобщением бозонного лагранжиана, является член Весса-Зумино. Способ, позволяющий систематически строить такие слагаемые, известен [50]. Для этого необходимо, во-первых, выписать форму Ω_4 (в трехмерном случае), инвариантную относительно нарушенной суперсимметрии, такую, что $d\Omega_4 = 0$. Поскольку Λ^{ia}_{A}, θ^{α}_{i}, $\bar\theta^{i\alpha}$ инвариантны относительно нарушенной суперсимметрии, В качестве элементов Ω_4 можно взять

$$(\Omega_Z)^{ia}|_{\Lambda,\theta\to 0} = dq^{ia},\ (\Omega_S)^{\alpha}_{a}|_{\Lambda,\theta\to 0} = d\psi^{\alpha}_{a},\ (\overline{\Omega}_S)^{a\alpha}|_{\Lambda,\theta\to 0} = d\bar\psi^{a\alpha}. \tag{3.158}$$

Эти формы инвариантны относительно нарушенной суперсимметрии, поскольку $\delta_S \boldsymbol{\Lambda}^{ia}_{A} = 0$, $\delta_S \theta^{\alpha}_{i} = 0$, $\delta_S \bar\theta^{i\alpha} = 0$.

Поскольку лишь формы dq^{ia} несут индекс i, единственный способ получить форму, не имеющую внешних индексов - свернуть $dq^{ia}\wedge dq^{b}_{i}$; тогда единственно допустимой 4-формой оказывается $\Omega_4 \sim \mathrm{i}dq^{ia}\wedge dq^{b}_{i}\wedge d\psi_{a\alpha}\wedge d\bar\psi^{\alpha}_{b}$. Она может быть представлена как $d\Omega_3$, и интеграл $\int\Omega_3$ является правильным членом Весса-Зумино:

$$\begin{aligned}\Omega_3 &\sim \mathrm{i}dq^{ia}\wedge dq^{b}_{i}\wedge\left(\psi_{a\alpha}\wedge d\bar\psi^{\alpha}_{b} + \bar\psi^{\alpha}_{b}\wedge d\psi_{a\alpha}\right),\\ S_{WZ} &= \mathrm{i}\int d^3x\epsilon^{ABC}\partial_A q^{ia}\partial_B q^{b}_{i}\left(\psi_{a\alpha}\partial_C\bar\psi^{\alpha}_{b} + \bar\psi^{\alpha}_{b}\partial_C\psi_{a\alpha}\right).\end{aligned} \tag{3.159}$$

Другие возможные слагаемые либо оказываются полными дивергенциями, либо не допустимы по размерным соображениям.

Член Весса-Зумино с помощью тождества $\epsilon^{ABC}\mathcal{E}^{M}_{A}\mathcal{E}^{N}_{B}\mathcal{E}^{P}_{C} = \det\mathcal{E}\epsilon^{MNP}$ можно написать в несколько более ковариантном виде:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{WZ} &= \mathrm{i}\epsilon^{ABC}\partial_A q^{ia}\partial_B q^{b}_{i}\left(\psi_{a\alpha}\partial_C\bar\psi^{\alpha}_{b} + \bar\psi^{\alpha}_{b}\partial_C\psi_{a\alpha}\right),\quad \partial_A = \mathcal{E}^{B}_{A}\mathcal{D}_B \Rightarrow\\ \mathcal{L}_{WZ} &= \mathrm{i}\det\mathcal{E}\epsilon^{ABC}\mathcal{D}_A q^{ia}\mathcal{D}_B q^{b}_{i}\left(\psi_{a\alpha}\mathcal{D}_C\bar\psi^{\alpha}_{b} + \bar\psi^{\alpha}_{b}\mathcal{D}_C\psi_{a\alpha}\right).\end{aligned} \tag{3.160}$$

Если проварьировать (3.160) относительно (3.154), слагаемые с U^M, появляющиеся из-за сдвига координат, свернутся с полную дивергенцию; остаток же

$$\mathrm{i}\det\mathcal{E}\epsilon^{ABC}\mathcal{D}_A q^{ia}\mathcal{D}_B q^{b}_{i}\left(\varepsilon_{a\alpha}\mathcal{D}_C\bar\psi^{\alpha}_{b} + \bar\varepsilon^{\alpha}_{b}\mathcal{D}_C\psi_{a\alpha}\right), \tag{3.161}$$

возникающий за счет сдвига фермионов на антикоммутирующий параметр, преобразуется в полную дивергенцию, если тождественно удалить $\det\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^{-1}$.

Таким образом, полный анзац для лагранжиана, удовлетворяющий также требованию $\mathcal{L}|_{q,\psi\to 0} \to 0$, имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \beta\mathcal{L}_{WZ} = (1+\alpha) - \det\mathcal{E}\left(\alpha + \sqrt{\det g}\right) - \\ -\mathrm{i}\beta\det\mathcal{E}\epsilon^{ABC}\mathcal{D}_A q^{ia}\mathcal{D}_B q_i^b\left(\psi_{a\alpha}\mathcal{D}_C\bar{\psi}_b^\alpha + \bar{\psi}_b^\alpha\mathcal{D}_C\psi_{a\alpha}\right). \tag{3.162}$$

Две неопределенные константы α, β в нем должны быть зафиксированы требованием инвариантности относительно нарушенной суперсимметрии.

3.5.4. Ненарушенная суперсимметрия

Инвариантность относительно преобразований ненарушенной суперсимметрии является вторым основным требованием, предъявляемым к действию.

Предварительные замечания

Преобразования компонент (3.153) относительно Q-суперсимметрии следуют из активной формы преобразований суперполей при $\theta_i^a \to 0$ и могут быть вычислены с помощью формулы

$$\delta_Q^\star f = -\left(\epsilon_i^\alpha D_\alpha^i + \bar{\epsilon}^{\alpha i}\overline{D}_{i\alpha}\right)\mathbf{f}|_{\theta\to 0} \equiv -\left(\epsilon_i^\alpha\nabla_\alpha^i + \bar{\epsilon}^{\alpha i}\overline{\nabla}_{i\alpha}\right)\mathbf{f}|_{\theta\to 0} - H^C\partial_C f, \tag{3.163}$$

где в слагаемое с H^C вынесены члены с производными фермионов $\nabla_\alpha^i\bar{\boldsymbol{\psi}}_{\beta a}|_{\theta\to 0}, \ldots$, отличающие ∇_α^i, $\overline{\nabla}_{i\alpha}$ от D_α^i, $\overline{D}_{i\alpha}$ (3.145). Его удобно выделять из полных преобразований, поскольку в вариации трехмерных лагранжианов (3.162) такие слагаемые всегда могут быть сведены к полной дивергенции.

Чтобы с помощью формулы (3.163) можно было вычислить преобразования всех компонент в явном виде, предварительно требуется выразить $\nabla_\alpha^i\boldsymbol{\psi}_a^\beta|_{\theta\to 0}$, $\overline{\nabla}_{i\alpha}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\alpha}|_{\theta\to 0}$, $\overline{\nabla}_{i\alpha}\boldsymbol{\psi}_{\beta a}|_{\theta\to 0}$, $\nabla_{i\beta}\bar{\boldsymbol{\psi}}_{a\alpha}|_{\theta\to 0}$ в терминах $\mathcal{D}_A q_{ia}$. Для этого можно как воспользоваться условием $\Omega_S|_{d\theta} = 0$, так и проанализировать следствия определяющих условий гипермультиплета (3.148), (3.149). Поскольку вся динамическая информация уже содержится в (3.148), условие $\Omega_S|_{d\theta} = 0$ нет необходимости накладывать независимо. Тем не менее, его применение оказывается полезным. Именно, из $d\theta_i^\alpha$ проекции Ω_S и $d\bar{\theta}^{i\alpha}$ проекции $\overline{\Omega}_S$ сразу следует, что $\nabla_\alpha^i\boldsymbol{\psi}_a^\beta|_{\theta\to 0} = 0, \overline{\nabla}_{i\alpha}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\beta}|_{\theta\to 0} = 0$, поскольку все такие проекции происходят лишь из $d\boldsymbol{\psi}_a^\alpha$, $d\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\alpha}$ соответственно. Это не противоречит следствиям условий гипермультиплета

$$\nabla_\alpha^i\boldsymbol{\psi}_{\beta a} = \frac{\mathrm{i}}{3}\left[\left\{\nabla_\alpha^i, \nabla_\beta^j\right\}\mathbf{q}_{ja} - \frac{1}{2}\left\{\nabla_\alpha^j, \nabla_\beta^i\right\}\mathbf{q}_{ja}\right], \tag{3.164}$$

если принять во внимание (3.146).

Кроме того, рассматривая $d\bar{\theta}^{j\beta}$-проекцию $\Omega_S|_{d\theta} = 0$, можно выразить $\overline{\nabla}_{j\beta}\boldsymbol{\psi}^{\alpha}_{a}|_{\theta\to 0}$ через $\Lambda^{\alpha\beta}_{ia}$

$$\overline{\nabla}_{j\beta}\psi^{\alpha}_{a}|_{\theta\to 0} = -2\Lambda^{\delta}_{cj\beta}\left(\frac{\tanh 2\sqrt{W}}{2\sqrt{W}}\right)^{\alpha c}_{\delta a},\ W^{\alpha c}_{\delta a} = \Lambda^{\gamma k}_{\gamma\delta}\Lambda^{\gamma\alpha}_{ka}. \tag{3.165}$$

Хотя это неочевидно, данное выражение является действительным: $\left(\overline{\nabla}_{j\beta}\boldsymbol{\psi}_{a\alpha}|_{\theta\to 0}\right)^{\dagger} = \overline{\nabla}^{j}_{\beta}\boldsymbol{\psi}^{\alpha}_{a}|_{\theta\to 0}$ (следовательно, также $\nabla_{j\beta}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{\alpha}_{a}|_{\theta\to 0} = \overline{\nabla}_{j\beta}\boldsymbol{\psi}^{\alpha}_{a}|_{\theta\to 0}$). Для того, чтобы убедиться в этом, следует рассмотреть, как сопрягается каждое слагаемое в ряде (3.165), например, $\left(\Lambda^{\delta}_{\gamma j\beta}\Lambda^{ck}_{\gamma\delta}\Lambda^{\gamma\alpha}_{ka}\right)^{\dagger} = \Lambda^{\delta jc}_{\beta}\Lambda^{a\alpha}_{k\gamma}\Lambda^{k\gamma}_{c\delta} = \left(\Lambda^{\delta j}_{\beta c}\Lambda^{ck}_{\gamma\delta}\Lambda^{\alpha\gamma}_{ka'}\right)\epsilon^{aa'}$.

Условие $\Omega_S|_{d\theta} = 0$, тем не менее, не позволяет получить явное выражение $\overline{\nabla}_{i\alpha}\boldsymbol{\psi}_{\beta a}|_{\theta\to 0}$, $\nabla_{i\beta}\bar{\boldsymbol{\psi}}_{a\alpha}|_{\theta\to 0}$ через $\mathcal{D}_A q_{ia}$, поскольку $\Lambda^{\alpha\beta}_{ia}$ и $\mathcal{D}_A q_{ia}$ связаны друг с другом рядом по степеням $Y^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = \Lambda^{ia}_{\alpha\beta}\Lambda^{\gamma\delta}_{ia}$, и (3.165) необходимо пересуммировать в терминах $Y^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$. Хотя несколько первых членов разложения могут быть найдены, очевидного способа пересуммировать весь ряд нет.

Другую возможность вычислить $\overline{\nabla}_{i\alpha}\boldsymbol{\psi}_{a\beta}|_{\theta\to 0}$, $\nabla_{i\beta}\bar{\boldsymbol{\psi}}_{a\alpha}|_{\theta\to 0}$ предоставляют следствия условий гипермультиплета

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{i\alpha}\boldsymbol{\psi}_{a\beta} + \nabla_{i\beta}\bar{\boldsymbol{\psi}}_{a\alpha} &= \frac{\mathrm{i}}{2}\left\{\nabla^{k}_{\beta},\, \overline{\nabla}_{k\alpha}\right\}\mathbf{q}_{ia},\\ \overline{\nabla}_{i\alpha}\boldsymbol{\psi}_{a\beta} - \nabla_{i\beta}\bar{\boldsymbol{\psi}}_{a\alpha} &= -\frac{\mathrm{i}}{6}\left[\left\{\nabla_{k\beta},\, \overline{\nabla}_{i\alpha}\right\}\mathbf{q}^{k}_{a} + \left\{\nabla_{i\beta},\, \overline{\nabla}_{k\alpha}\right\}\mathbf{q}^{k}_{a}\right].\end{aligned} \tag{3.166}$$

Подставив в (3.166) явный вид антикоммутаторов (3.146), приняв во внимание следствия $\Omega_S|_{d\theta} = 0$ и обозначив

$$\overline{\nabla}_{i\alpha}\boldsymbol{\psi}_{a\beta}|_{\theta\to 0} = \nabla_{i\alpha}\bar{\boldsymbol{\psi}}_{a\beta}|_{\theta\to 0} \equiv \left(\sigma^{A}\right)_{\alpha\beta} J_{Aia} + \epsilon_{\alpha\beta}X_{ia},$$

можно получить систему матричных уравнений

$$\begin{aligned}2J^{A}_{ia} &= \left(2 - J^{B}_{kb}J^{kb}_{B} + X_{kb}X^{kb}\right)\mathcal{D}_A q_{ia} + 2\left(J^{B}_{kb}\mathcal{D}_B q_{ia}\right)J^{kb}_{A},\\ X_{ia} &= \tfrac{1}{3}\epsilon^{ABC}J_{Aib}J^{b}_{Bk}\mathcal{D}_C q^{k}_{a} - \tfrac{1}{3}\left(X_{ib}J^{b}_{Bk} + X_{kb}J^{b}_{Bi}\right)\mathcal{D}^{B}q^{k}_{a}.\end{aligned} \tag{3.167}$$

Чтобы получить систему уравнений на скалярные функции, нужно подставить в (3.167) подходящий анзац для J^{A}_{ia} и X_{ia}. J^{A}_{ia} должен быть связан с $\mathcal{D}_B q_{ia}$ умножением на некоторую матрицу; это всегда можно записать в виде

$$J^{ia}_{A} = F_0\mathcal{D}_A q^{ia} + F_1 d^{B}_{A}\mathcal{D}_B q^{ia} + F_2 d^{B}_{A}d^{C}_{B}\mathcal{D}_C q^{ia}, \tag{3.168}$$

поскольку третья степень любой 3 × 3-матрицы может быть переписана как линейная комбинация ее нулевой, первой и второй степеней с функциями - коэффициентами, зависящими от следов ее степеней $\mathrm{Tr}d = d_A^A$, $\mathrm{Tr}d^2 = d_A^B d_B^A$, $\mathrm{Tr}d^3 = d_A^B d_B^C d_C^A$ и детерминанта

$$\begin{aligned} \left(d^3\right)_A^B &= \mathrm{Tr}d\left(d^2\right)_A^B + \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}d^2 - (\mathrm{Tr}d)^2\right) d_A^B + \det d \cdot \delta_A^B, \\ \det d &= \frac{1}{6}(\mathrm{Tr}d)^3 - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}d\,\mathrm{Tr}d^2 + \frac{1}{3}\mathrm{Tr}d^3. \end{aligned} \tag{3.169}$$

Если допустить в анзаце умножение на матрицу M_{ia}^{jb} с $SU(2)$ индексами, результат всегда можно представить в виде (3.168).

Структура X_{ia} проще и допускает лишь одну произвольную функцию. В низшем приближении, как следует из (3.167), X_{ia} должен быть пропорционален $\epsilon^{ABC}\mathcal{D}_A q_{ib}\mathcal{D}_B q_k^b \mathcal{D}_C q_a^k$. Данное выражение нельзя умножить на матрицу M_{ia}^{jb} с $SU(2)$ индексами, поскольку $\epsilon^{ABC}\mathcal{D}_A q_{ib}\mathcal{D}_B q_k^b \mathcal{D}_C q_a^k \mathcal{D}_D q^{ia} = 0$. (Если ввести $SO(4)$ индексы, оно может быть сведено к $\epsilon^{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}}\mathcal{D}_A q_{\bar{A}}\mathcal{D}_B q_{\bar{B}}\mathcal{D}_C q_{\bar{C}}\mathcal{D}_D q_{\bar{D}}\epsilon^{ABC}$, где комбинация $\mathcal{D}q$ антисимметрична по A, B, C, D). Следовательно, правильный анзац для X_{ia} имеет вид

$$X_{ia} = \frac{F_3}{3}\epsilon^{ABC}\mathcal{D}_A q_{ib}\mathcal{D}_B q_k^b \mathcal{D}_C q_a^k. \tag{3.170}$$

Однако, система уравнений, получающаяся после его подстановки в (3.167) вместе с (3.168), также не может быть решена никакими очевидными методами.

Данные трудности могут быть преодолены, если принять иную стратегию. Опыт исследования аналогичных систем свидетельствует, что весомых сомнений в инвариантности действия с правильно подобранными константами нет. Поэтому можно использовать требование инвариантности действия как условие, которое определит J_{ia}^A, X_{ia}, а затем убедиться, что получающиеся выражения действительно удовлетворяют системе (3.167). Преимущество такого подхода в том, что, поскольку J_{ia}^A и X_{ia} входят лишь в законы преобразования, но не в действие, получающиеся условия окажутся линейными.

Законы преобразования

В соответствии с принятым методом доказательства, можно выписать законы преобразования компонент относительно Q-суперсимметрии с помощью пока неопределенных J_{ia}^A и X_{ia} с помощью (3.163):

$$\begin{gathered} \delta_Q^\star q_{ia} = 2\mathrm{i}\left(\epsilon_i^\beta \psi_{\beta a} + \bar{\epsilon}_i^\beta \bar{\psi}_{\beta a}\right) - H^C\partial_C q_{ia}, \\ \delta_Q^\star \psi_{a\alpha} = -\bar{\epsilon}^{j\beta}\left(\sigma^C\right) J_{Cja} + \bar{\epsilon}_\alpha^j X_{ja} - H^C\partial_C \psi_{a\alpha}, \\ \delta^\star \bar{\psi}_\alpha^a = -\epsilon_j^\beta\left(\sigma^C\right)_{\alpha\beta} J_C^{ja} + \epsilon_{j\alpha}X^{ja} - H^C\partial_C\bar{\psi}_\alpha^a, \end{gathered} \tag{3.171}$$

где

$$\begin{aligned} H^A &= -\mathrm{i}\left[\epsilon_j^\beta\psi_{\gamma b}+\bar\epsilon_j^\beta\bar\psi_{\gamma b}\right](\sigma_C)_\beta^\gamma\,\epsilon^{ABC}J_B^{jb}+ \\ &+\mathrm{i}\left[\epsilon_j^\beta\psi_{b\beta}+\bar\epsilon_j^\beta\bar\psi_{b\beta}\right]J^{Ajb}+\mathrm{i}\left[\epsilon_j^\beta\psi_{\gamma b}+\bar\epsilon_j^\beta\bar\psi_{\gamma b}\right]\left(\sigma^A\right)_\beta^\gamma X^{jb} \end{aligned} \qquad (3.172)$$

Из них непосредственно следует более сложная вариация $\mathcal{E}_A^B$:

$$\begin{aligned} \delta_Q^\star\mathcal{E}_A^B &= -H^M\partial_M\mathcal{E}_A^B-\partial_AH^M\mathcal{E}_M^B+2\mathrm{i}\left[\epsilon_j^\beta\partial_A\psi_{\beta a}+\bar\epsilon_j^\beta\partial_A\bar\psi_{\beta a}\right]J^{Bja}- \\ &-2\mathrm{i}\epsilon^{CDB}\left[\epsilon_j^\beta\partial_A\psi_{\delta a}+\bar\epsilon_j^\beta\partial_A\bar\psi_{\delta a}\right](\sigma_D)_\beta^\delta+2\mathrm{i}\left[\epsilon_j^\beta\partial_A\psi_{\delta a}+\bar\epsilon_j^\beta\partial_A\bar\psi_{\delta a}\right]\left(\sigma^B\right)_\beta^\delta X^{ja} \end{aligned} (3.173)$$

В свою очередь, из (3.171) и (3.173) можно вывести законы преобразования основных комбинаций переменных, от которых зависит действие:

$$\begin{aligned} \delta_Q^\star\det\mathcal{E} &= -\partial_M\left(H^M\det\mathcal{E}\right)-2\mathrm{i}\det\mathcal{E}\left[\epsilon^{CDA}\Sigma_{ADja}J_{Cja}-\Sigma_{Aja}J^{Aja}-\Sigma_{Aja}^AX^{ja}\right], \\ \delta_Q^\star\mathcal{D}_Aq_{ia} &= 2\mathrm{i}\Sigma_{Aia}+2\mathrm{i}\epsilon^{CDB}\Sigma_{ADjb}\mathcal{D}_Bq_{ia}-2\mathrm{i}\Sigma_{Ajb}J^{Djb}\mathcal{D}_Dq_{ia}- \\ &-2\mathrm{i}\Sigma_{Ajb}^BX^{jb}\mathcal{D}_Bq_{ia}-H^M\partial_M\mathcal{D}_Aq_{ia}. \end{aligned} \qquad (3.174)$$

Здесь, для краткости формул, введены вспомогательные обозначения

$$\Sigma_{Ajb}{}^B=\left(\epsilon_j^\beta\mathcal{D}_A\psi_{\gamma b}+\bar\epsilon_j^\beta\mathcal{D}_A\bar\psi_{\gamma b}\right)\left(\sigma^B\right)_\beta^\gamma,\quad \Sigma_{Ajb}=\left(\epsilon_j^\beta\mathcal{D}_A\psi_{b\beta}+\bar\epsilon_j^\beta\mathcal{D}_A\bar\psi_{b\beta}\right). \qquad (3.175)$$

Имеет смысл также выписать приближенные решения для J_{ia}^A, X_{ia} до третьего порядка по $\mathcal{D}_Aq_{ia}$, следующие из (3.167):

$$J_{ia}^A\approx\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}d\right)\mathcal{D}^Aq_{ia}+d^{AB}\mathcal{D}_Bq_{ia},\quad X_{ia}\approx\frac{1}{3}\epsilon^{ABC}\mathcal{D}_Aq_{ib}\mathcal{D}_Bq_k^b\mathcal{D}_Cq_a^k. \qquad (3.176)$$

Они требуются, чтобы зафиксировать константы в (3.162).

Вариация основной части лагранжиана

Перед тем, как выписывать вариацию основной части лагранжиана $\mathcal{L}_0=(1+\alpha)-\det\mathcal{E}(\alpha+\sqrt{\det g})$ относительно преобразований (3.174), имеет смысл отметить, что

- Поскольку H^A входит в законы преобразования $\det\mathcal{E}$ и $\mathcal{D}_Aq_{ia}$ только как $-\partial_M\left(H^M\det\mathcal{E}\right)$ и $-H^M\partial_M\mathcal{D}_Aq_{ia}$, все содержащие H^A слагаемые могут быть собраны в полную дивергенцию $-\partial_M\left(H^M\mathcal{L}_0\right)$ (это вполне аналогично доказательству инвариантности основной части действия относительно нарушенной суперсимметрии).

- Поскольку соотношение констант при кинетических членах бозонов и фермионов фиксируется требованием инвариантности относительно преобразований Q-суперсимметрии, константа α в (3.162) может быть найдена без обращения к члену Весса-Зумино.

В низшем приближении лагранжиан $\mathcal{L}_0$ и часть преобразований q_{ia} и ψ^α_a, содержащая только $\epsilon_{i\alpha}$, имеют вид

$$\begin{aligned} &\delta_{Qlow} q_{ia} \approx 2\mathrm{i}\epsilon^\alpha_i \psi_{a\alpha},\ \delta_{Qlow}\psi^\alpha_a \approx 0,\ \delta_{Qlow}\bar\psi^{a\alpha} \approx -\epsilon^\beta_j \left(\sigma^A\right)^\alpha_\beta \partial_A q^{ja}, \\ &\mathcal{L}_{low} \approx \mathrm{i}(1+\alpha)\left(\psi^\gamma_a \partial_A \bar\psi^{\delta a} + \bar\psi^{\delta a}\partial_A \psi^\gamma_a\right)\left(\sigma^A\right)_{\gamma\delta} + \partial_A q^{ia}\partial^A q_{ia}. \end{aligned} \qquad (3.177)$$

Следовательно,

$$\delta_Q \mathcal{L}_{low} \approx 2\mathrm{i}\epsilon_{\beta j}\partial_A\psi^\gamma_a \partial_B q^{ja}\left((\alpha-1)\eta^{AB}\delta^\beta_\gamma + (1+\alpha)\epsilon^{ABC}\left(\sigma_C\right)^\beta_\gamma\right) \Rightarrow \alpha = 1, \qquad (3.178)$$

поскольку второе слагаемое в скобках приводит к полной дивергенции независимо от α. Тогда, после некоторых упрощений, с точностью до полной дивергенции вариация основной части лагранжиана может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \delta^\star \mathcal{L}_0 \ \ = \ \ & -2\mathrm{i}\det\mathcal{E}\Sigma_{Ajb}\left[\left(\eta^{AB} + \sqrt{\det g}(g^{-1})^{AB}\right)J^{jb}_B - 2\sqrt{\det g}(g^{-1})^{AB}\mathcal{D}_B q^{jb}\right] + \\ & +2\mathrm{i}\det\mathcal{E}\left[\delta^A_B + \sqrt{\det g}(g^{-1})^A_B\right]\left(\epsilon^{CDB}J^{jb}_C\Sigma_{ADjb} - \Sigma_{Ajb}{}^B X^{jb}\right). \end{aligned} \qquad (3.179)$$

Вариация члена Весса-Зумино

Вариация члена Весса-Зумино, рассматриваемого в эквивалентной форме (3.159)

$$\mathcal{L}_{WZ} = \mathrm{i}\epsilon^{ABC}\partial_A q^{ia}\partial_B q^b_i\left(\psi_{a\alpha}\partial_C\bar\psi^\alpha_b + \bar\psi^\alpha_b\partial_C\psi_{a\alpha}\right), \qquad (3.180)$$

может быть записана как:

$$\begin{aligned} \delta^\star\mathcal{L}_{WZ} \ \ = \ \ & 2\mathrm{i}\epsilon^{ABC}\partial_A q^{ia}\partial_B q^b_i\left(\epsilon^\beta_j\partial_C\psi_{b\beta} + \bar\epsilon^\beta_j\partial_C\bar\psi_{b\beta}\right)X^j_a - \\ & -2\mathrm{i}\epsilon^{ABC}\partial_A q^{ia}\partial_B q^b_i\left(\epsilon^\beta_j\partial_C\psi_{\alpha b} + \bar\epsilon^\beta_j\partial_C\bar\psi_{\alpha b}\right)\left(\sigma^M\right)^\alpha_\beta J^j_{Ma} - \\ & -8\epsilon^{ABC}q^{ia}\left(\epsilon^\beta_i\partial_A\psi^b_\beta + \bar\epsilon^\beta_i\partial_A\bar\psi^b_\beta\right)\partial_B\psi_{\alpha(a}\partial_C\bar\psi^\alpha_{b)}. \end{aligned} \qquad (3.181)$$

Здесь также опущены полные дивергенции. Слагаемые с H^A сведены в дивергенцию с помощью тождества $\epsilon^{ABC}H^M = \epsilon^{MBC}H^A + \epsilon^{AMC}H^B + \epsilon^{ABM}H^C$.

Вариация (3.181) должна быть приведена к виду, аналогичному (3.179). Для этого нужно восстановить ковариантные производные вмете с $\det\mathcal{E}$, подставить анзац для J^A_{ia} (3.168) и X_{ia} (3.170), и упростить получающееся выражение, используя несколько тождеств, связывающих d^B_A и $\mathcal{D}_A q_{ia}$. В частности, вторая строчка (3.181), преобразованная с помощью

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_A q_{ib}\mathcal{D}_B q^b_k \mathcal{D}_C q^k_a \ \ = \ \ & \frac{1}{6}\epsilon_{ABC}\cdot\epsilon^{FGH}\mathcal{D}_F q_{ib}\mathcal{D}_G q^b_k\mathcal{D}_H q^k_a - \qquad (3.182) \\ & -\frac{1}{2}\left(d_{AB}\mathcal{D}_C q_{ia} + d_{BC}\mathcal{D}_A q_{ia} - d_{AC}\mathcal{D}_B q_{ia}\right), \end{aligned}$$

порождает слагаемое, сходное по своей структуре члену с X_{ia} в (3.179). Эти слагаемые даже в низшем приближении содержат слишком много полей, чтобы свернуться в полную дивергенцию. Следовательно, их сумма должна быть равна нулю. Раскладывая вариацию основной части лагранжиана (3.179) по степеням d_A^B,

$$\begin{aligned}&\delta_B^A + \sqrt{\det g}(g^{-1})_B^A = \Phi_0\delta_B^A + \Phi_1 d_B^A + \Phi_2(d^2)_B^A,\\ &\Phi_0 = 1 + \frac{1-2\mathrm{Tr}d + 2(\mathrm{Tr}d)^2 - 2\mathrm{Tr}d^2}{\sqrt{\det g}},\ \Phi_1 = 2\frac{1-2\mathrm{Tr}d}{\sqrt{\det g}},\ \Phi_2 = \frac{4}{\sqrt{\det g}},\end{aligned} \tag{3.183}$$

можно найти три независимых условия

$$\begin{aligned}&\Sigma_{Mi\alpha}{}^M \cdot (\Phi_0 F_3 - \beta F_0) = 0,\\ &\Sigma_{Mi\alpha}{}^N d_N^M \cdot (\Phi_1 F_3 - \beta F_1) = 0,\\ &\Sigma_{Mi\alpha}{}^N (d^2)_N^M \cdot (\Phi_2 F_3 - \beta F_2) = 0.\end{aligned} \tag{3.184}$$

Здесь β - коэффициент при члене Весса-Зумино в (3.162). Поскольку F_0, F_1, F_3 в первом приближении известны (3.176), следует принять $\beta = 2$.

Поскольку все функции в J_{ia}^A, X_{ia} пропорциональны единственной F_3, вариации могут быть существенно упрощены. Коэффициенты при некоторых комбинациях переменных пропадают просто в силу этой пропорциональности

$$\begin{aligned}&\epsilon^{CDN} d_C^A \mathcal{D}_N q^{jb} \Sigma_{ADjb} \,(\Phi_0 F_1 - \Phi_1 F_0) \to 0,\\ &\epsilon^{CDM} (d^2)_M^A \mathcal{D}_C q^{jb} \Sigma_{ADjb} \,(\Phi_0 F_2 - \Phi_2 F_0) \to 0,\\ &\epsilon^{CNK} d_K^D (d^2)_C^A \mathcal{D}_C q^{jb} \Sigma_{ADjb} \,(\Phi_1 F_2 - \Phi_2 F_1) \to 0.\end{aligned} \tag{3.185}$$

В коэффициентах при $\epsilon^{KNA}\mathcal{D}_N q^{jb} d_K^D \Sigma_{ADjb}$ и $\epsilon^{KNA}\mathcal{D}_N q^{jb} (d^2)_K^D \Sigma_{ADjb}$ F_3 также факторизуется, и они оказываются равными нулю тождествами, связывающими $\Phi_{(i)}$ (3.183) and $\mathrm{Tr}d^k$. Коэффициент при $\epsilon^{NDA}\mathcal{D}_N q^{jb}\Sigma_{ADjb}$, однако, не оказывается тождественно равным нулю. Он может быть определен низшими приближениями; тогда из него следует

$$F_3 = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{\det g} + \frac{1}{2}\sqrt{\det g}\mathrm{Tr}(g^{-1})}, \quad \det g\,\mathrm{Tr}(g^{-1}) = 3 - 4\mathrm{Tr}d + 2(\mathrm{Tr}d)^2 - 2\mathrm{Tr}d^2. \tag{3.186}$$

Слагаемое $\epsilon^{NDA}\mathcal{D}_N q^{jb}\Sigma_{ADjb}$ является полной дивергенцией лишь в низшем приближении по фермионам. Тем не менее, все члены с высшими степенями фермионов в нем компенсируются последней строчкой (3.181).

Поскольку J_{ia}^A, X_{ia} уже вычислены, с их помощью можно определить, что все члены, не содержащие ϵ^{ABC}-символ, тождественно сокращаются. Чтобы доказать это, следует воспользоваться тождеством

$$\epsilon^{ABC}\epsilon_{FGH} = \delta_F^A\delta_G^B\delta_H^C - \delta_G^A\delta_F^B\delta_H^C - \delta_F^A\delta_H^B\delta_G^C - \delta_H^A\delta_G^B\delta_F^C + \delta_G^A\delta_H^B\delta_F^C + \delta_H^A\delta_F^B\delta_G^C, \tag{3.187}$$

чтобы переписать первую строку (3.181) в виде

$$2\mathrm{i}\det\mathcal{E}\Sigma_{Cjb}F_3\left[\frac{1}{2}\left((\mathrm{Tr}d)^2-\mathrm{Tr}d^2\right)\mathcal{D}^C q^{j\beta}-\mathrm{Tr}d\cdot d^{CD}\mathcal{D}_D q^{jb}+d^{CD}d_{DE}\mathcal{D}^E q^{jb}\right]. \tag{3.188}$$

Следовательно, действие

$$\begin{aligned} S &= 2\int d^3x-\int d^3x\det\mathcal{E}\left[1+\sqrt{\det g}\right]- \\ &-2\mathrm{i}\int d^3x\det\mathcal{E}\epsilon^{ABC}\mathcal{D}_A q^{ia}\mathcal{D}_B q_i^b\left(\psi_{a\alpha}\mathcal{D}_C\bar{\psi}_b^\alpha+\bar{\psi}_b^\alpha\mathcal{D}_C\psi_{a\alpha}\right) \end{aligned} \tag{3.189}$$

инвариантно по отношению к преобразованиям ненарушенной суперсимметрии (3.171), если

$$J_{ia}^A=\tfrac{F_3}{2}\left(\eta^{AB}+\sqrt{\det g}(g^{-1})^{AB}\right)\mathcal{D}_B q_{ia},\ X_{ia}=\tfrac{F_3}{3}\epsilon^{ABC}\mathcal{D}_A q_{ib}\mathcal{D}_B q_k^b\mathcal{D}_C q_a^k, \tag{3.190}$$

$$F_3=\frac{2}{1-\frac{1}{2}\sqrt{\det g}+\frac{1}{2}\sqrt{\det g}\,\mathrm{Tr}(g^{-1})}.$$

Как и ожидалось, они удовлетворяют системе уравнений (3.167).

3.5.5. О системе нелинейных уравнений

Несмотря на то, что решение системы уравнений (3.167) известно (3.190), оно было получено с помощью соображений, не имеющих никакой связи с самой системой. Поэтому имеет смысл исследовать, какие свойства (3.167) фиксируют решение в виде (3.190).

Чтобы выяснить эти свойства, можно подставить соотношение $J_A^{ia}=M_A^B\mathcal{D}_B q^{ia}$ в первое из уравнений (3.167)

$$J_A^{ia}=\left(1-\frac{1}{2}J_B^{kb}J_{kb}^B+\frac{1}{2}X_{kb}X^{kb}\right)\mathcal{D}_A q^{ia}+\left(J_A^{kb}J_{kb}^B\right)\mathcal{D}_B q_{ia}. \tag{3.191}$$

Удаляя факторизующееся $\mathcal{D}_B q_{ia}$ и подставляя $\mathcal{D}_C q^{lc}\mathcal{D}_D q_{lc}=\frac{1}{2}\left(\eta_{CD}-g_{CD}\right)$, можно переформулировать получающееся матричное квадратное уравнение с помощью матрицы g_{AB}

$$M_{AB}-\frac{1}{2}M_A^C M_{BC}+\frac{1}{2}M_A^C M_B^D g_{CD}=\left(1-\frac{1}{2}J_B^{kb}J_{kb}^B+\frac{1}{2}X_{kb}X^{kb}\right)\eta_{AB}. \tag{3.192}$$

Структура матрицы M_A^B известна из решения (3.190). Поэтому можно подставить $M_A^B=\frac{F_3}{2}\left[\delta_A^B+\sqrt{\det g}\,(g^{-1})_A^B\right]$ в левую часть (3.192):

$$\begin{aligned} M_{AB}-\frac{1}{2}M_A^C M_{BC}+\frac{1}{2}M_A^C M_B^D g_{CD} &= \eta_{AB}\left[\frac{F_3}{2}-\frac{F_3^2}{8}\right]+\frac{F_3^2}{8}g_{AB}-\frac{F_3^2}{8}\det g\left(g^{-2}\right)_{AB}+ \\ &+\sqrt{\det g}\left(g^{-1}\right)_{AB}\left[\frac{F_3}{2}+\frac{F_3^2}{8}\left(-2+\sqrt{\det g}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.193}$$

Поскольку только три степени матрицы g_{AB} линейно независимы, можно выразить g_{AB} в терминах η_{AB}, $\left(g^{-1}\right)_{AB}$, $\left(g^{-2}\right)_{AB}$ с помощью соотношения

$$g_{AB}=\det g\left[\left(g^{-2}\right)_{AB}-\mathrm{Tr}(g^{-1})\left(g^{-1}\right)_{AB}-\frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}(g^{-2})-(\mathrm{Tr}(g^{-1}))^2\right)\eta_{AB}\right]. \tag{3.194}$$

Его можно получить, если заменить d_{AB} в (3.169) на $\left(g^{-1}\right)_{AB}$, и умножить результат на g^{BC}. Тогда коэффициент при $\left(g^{-2}\right)_{AB}$ в (3.193) обращается в ноль, а коэффициент при $\left(g^{-1}\right)_{AB}$ приобретает вид

$$\frac{1}{2}F_3 - \frac{1}{4}F_3^2\left[2+\sqrt{\det g}\mathrm{Tr}(g^{-1})-\sqrt{\det g}\right]. \tag{3.195}$$

Он должен быть равен нулю, поскольку правая часть (3.192) пропорциональна η_{AB}. Это условие приводит к такому же F_3, как и в (3.190), и не зависит от X_{ia}. Таким образом смысл матрицы в решении (3.190) ясен: $M_A^B = \frac{F_3}{2}\left[\delta_A^B + \sqrt{\det g}\,(g^{-1})_A^B\right]$ - анзац, позволяющий решать уравнения вида (3.192). Если M_A^B известно, анализ коэффициента при η_{AB} с учетом второго уравнения (3.167) позволяет однозначно найти X_{ia}.

3.6. 3-брана в восимимерном пространстве-времени

В данном разделе построено суперсимметричное действие 3-браны в $D=8$, и доказана его инвариантность относительно спонтанно нарушенной и ненарушенной суперсимметрий [54]. Голдстоуновские поля, описывающие данную брану, принадлежат гипермультиплету $d=4$, $N=2$ суперсимметрии.

3.6.1. Алгебра и элемент фактор-пространства

Для описания суперсимметричной 3-браны с помощью формализма нелинейных реализаций необходимо сформулировать $D=8$, $N=1$ супералгебру Пуанкаре в четырехмерных терминах. В таких обозначениях она может быть записана как $d=4$, $N=4$ супералгебра Пуанкаре, расширенная четырьмя центральными зарядами, и включающая генераторы

$$P_A,\ Q^i_\alpha,\ \overline{Q}_{i\dot\alpha},\ S^a_\alpha,\ \overline{S}_{a\dot\alpha},\ Z^{ia},\ L_{AB},\ K^{ia}_A,\ T^{ij},\ R^{ab}. \tag{3.196}$$

Здесь $P_A\,(A=0,1,2,3)$, Z^{ia}, $(i,a=1,2)$ - генераторы восьмимерных трансляций, Q^i_α, $\overline{Q}_{i\dot\alpha}$ и S^a_α, $\overline{S}_{a\dot\alpha}$ - генераторы супертрансляций. Восьмимерная алгебра Лоренца $so(1,7)$ разбита на генераторы L_{AB}, образующие $d=4$ алгебру Лоренца $so(1,3)$, две $su(2)$ алгебры T^{ij} и R^{ab}, и генераторы K^{ia}_A, принадлежащие фактор-пространству $SO(1,7)/\left(SO(1,3)\times SU(2)\times SU(2)\right)$, перемешивающие генераторы P_A, Z_{ia} и Q^i_α, S^a_α. В этом базисе коммутационные соотношения между бозонными генераторами имеют вид

$$
\begin{aligned}
\left[L_{AB}, L_{CD}\right] &= \mathrm{i}\left(-\eta_{AC}L_{BD} + \eta_{BC}L_{AD} - \eta_{BD}L_{AC} + \eta_{AD}L_{BC}\right), \\
\left[L_{AB}, P_{C}\right] &= \mathrm{i}\left(-\eta_{AC}P_{B} + \eta_{BC}P_{A}\right),\ \left[L_{AB}, K^{ia}_{C}\right] = \mathrm{i}\left(-\eta_{AC}K^{ia}_{B} + \eta_{BC}K^{ia}_{A}\right), \\
\left[T^{ij}, T^{kl}\right] &= \mathrm{i}\left(\epsilon^{ik}T^{jl} + \epsilon^{jk}T^{il} + \epsilon^{il}T^{jk} + \epsilon^{jl}T^{ik}\right), \\
\left[R^{ab}, R^{cd}\right] &= \mathrm{i}\left(\epsilon^{ac}R^{bd} + \epsilon^{bc}R^{ad} + \epsilon^{ad}R^{bc} + \epsilon^{bd}R^{ac}\right), \\
\left[T^{ij}, K^{ka}_{A}\right] &= \mathrm{i}\left(\epsilon^{ik}K^{ja}_{A} + \epsilon^{jk}K^{ia}_{A}\right),\ \left[R^{ab}, K^{ic}_{A}\right] = \mathrm{i}\left(\epsilon^{ac}K^{ib}_{A} + \epsilon^{bc}K^{ia}_{A}\right), \\
\left[T^{ij}, Z^{ka}\right] &= \mathrm{i}\left(\epsilon^{ik}Z^{ja} + \epsilon^{jk}Z^{ia}\right),\ \left[R^{ab}, Z^{ic}\right] = \mathrm{i}\left(\epsilon^{ac}Z^{ib} + \epsilon^{bc}Z^{ia}\right), \\
\left[P_{A}, K^{ia}_{B}\right] &= \mathrm{i}\eta_{AB}Z^{ia},\ \left[K^{ia}_{A}, Z^{jb}\right] = -2\mathrm{i}\epsilon^{ij}\epsilon^{ab}P_{A}, \\
\left[K^{ia}_{A}, K^{jb}_{B}\right] &= 2\mathrm{i}\epsilon^{ij}\epsilon^{ab}L_{AB} - \mathrm{i}\eta_{AB}\left(\epsilon^{ab}T^{ij} + \epsilon^{ij}R^{ab}\right).
\end{aligned}
\tag{3.197}
$$

Здесь $\eta_{AB} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$. Коммутаторы (3.197) дополняют (анти)коммутационные соотношения, включающие суперзаряды:

$$
\begin{aligned}
\left\{Q^{i}_{\alpha}, \overline{Q}_{\dot\alpha j}\right\} &= 2\delta^{i}_{j}\left(\sigma^{A}\right)_{\alpha\dot\alpha}P_{A},\ \left\{S^{a}_{\alpha}, \overline{S}_{\dot\alpha b}\right\} = 2\delta^{a}_{b}\left(\sigma^{A}\right)_{\alpha\dot\alpha}P_{A}, \\
\left\{Q^{i}_{\alpha}, S^{a}_{\beta}\right\} &= 2\epsilon_{\alpha\beta}Z^{ia},\ \left\{\overline{Q}_{\dot\alpha i}, \overline{S}_{\dot\beta a}\right\} = 2\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}Z_{ia}; \\
\left[L_{AB}, Q^{i}_{\alpha}\right] &= -\frac{1}{2}\left(\sigma_{AB}\right)^{\beta}_{\alpha}Q^{i}_{\beta},\ \left[L_{AB}, \overline{Q}_{\dot\alpha i}\right] = \frac{1}{2}\left(\tilde\sigma_{AB}\right)^{\dot\beta}_{\dot\alpha}\overline{Q}_{\dot\beta i}, \\
\left[L_{AB}, S^{a}_{\alpha}\right] &= -\frac{1}{2}\left(\sigma_{AB}\right)^{\beta}_{\alpha}S^{a}_{\beta},\ \left[L_{AB}, \overline{S}_{\dot\alpha a}\right] = \frac{1}{2}\left(\tilde\sigma_{AB}\right)^{\dot\beta}_{\dot\alpha}\overline{S}_{\dot\beta a}; \\
\left[K^{ia}_{A}, Q^{j}_{\alpha}\right] &= \mathrm{i}\left(\sigma_{A}\right)_{\alpha\dot\alpha}\epsilon^{ij}\overline{S}^{\dot\alpha a},\ \left[K^{ia}_{A}, S^{b}_{\alpha}\right] = -\mathrm{i}\left(\sigma_{A}\right)_{\alpha\dot\alpha}\epsilon^{ab}\overline{Q}^{\dot\alpha i}, \\
\left[K^{ia}_{A}, \overline{Q}_{\dot\alpha j}\right] &= \mathrm{i}\left(\sigma_{A}\right)_{\alpha\dot\alpha}\delta^{i}_{j}S^{\alpha a},\ \left[K^{ia}_{A}, \overline{S}_{\dot\alpha b}\right] = -\mathrm{i}\left(\sigma_{A}\right)_{\alpha\dot\alpha}\delta^{a}_{b}Q^{\alpha i}; \\
\left[T^{ij}, Q^{k}_{\alpha}\right] &= \mathrm{i}\left(\epsilon^{ik}Q^{j}_{\alpha} + \epsilon^{jk}Q^{i}_{\alpha}\right),\ \left[T^{ij}, \overline{Q}_{\dot\alpha k}\right] = -\mathrm{i}\left(\delta^{i}_{k}\overline{Q}^{j}_{\dot\alpha} + \delta^{j}_{k}\overline{Q}^{i}_{\dot\alpha}\right), \\
\left[R^{ab}, S^{c}_{\alpha}\right] &= \mathrm{i}\left(\epsilon^{ac}S^{b}_{\alpha} + \epsilon^{bc}S^{a}_{\alpha}\right),\ \left[R^{ab}, \overline{S}_{\dot\alpha c}\right] = -\mathrm{i}\left(\delta^{a}_{c}\overline{S}^{b}_{\dot\alpha} + \delta^{b}_{c}\overline{S}^{a}_{\dot\alpha}\right).
\end{aligned}
\tag{3.198}
$$

Элемент фактор-пространства может быть определен как

$$
g = e^{\mathrm{i}x^{A}P_{A}}e^{\theta^{\alpha}_{i}Q^{i}_{\alpha} + \bar\theta^{i\dot\alpha}\overline{Q}_{i\dot\alpha}}e^{\mathrm{i}\mathbf{q}^{ia}Z_{ia}}e^{\boldsymbol{\psi}^{\alpha}_{a}S^{a}_{\alpha} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\alpha}\overline{S}_{a\dot\alpha}}e^{\mathrm{i}\mathbf{\Lambda}^{A}_{ia}K^{ia}_{A}}. \tag{3.199}
$$

Здесь $\mathbf{q}^{ia}$, $\boldsymbol{\psi}^{\alpha}_{a}$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\alpha}$, $\mathbf{\Lambda}^{A}_{ia}$ - Годстоуновские суперполя, зависящие от координат $N = 2$, $d = 4$ суперпространства $x^{A}, \theta^{\alpha}_{i}, \bar\theta^{i\dot\alpha}$.

Все необходимые законы преобразования можно найти, умножая g слева на различные элементы супергруппы Пуанкаре с постоянными параметрами. Наибольший интерес представляют преобразования ненарушенной и спонтанно нарушенной суперсимметрий, имеющие вид

- Ненарушенная суперсимметрия:

$$
\delta_{Q}x^{A} = \mathrm{i}\left(\epsilon^{\alpha}_{i}\bar\theta^{i\dot\alpha} + \bar\epsilon^{i\dot\alpha}\theta^{\alpha}_{i}\right)\left(\sigma^{A}\right)_{\alpha\dot\alpha}, \quad \delta_{Q}\theta^{\alpha}_{i} = \epsilon^{\alpha}_{i}, \quad \delta_{Q}\bar\theta^{i\dot\alpha} = \bar\epsilon^{i\dot\alpha}; \tag{3.200}
$$

- Спонтанно нарушенная суперсимметрия:

$$\delta_S x^A = \mathrm{i}\big(\varepsilon^\alpha_a \bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\alpha} + \bar\varepsilon^{a\dot\alpha}\boldsymbol{\psi}^\alpha_a\big)\left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot\alpha}, \quad \delta_S\boldsymbol{\psi}^\alpha_a = \varepsilon^\alpha_a, \quad \delta_S\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\alpha} = \bar\varepsilon^{a\dot\alpha},$$
$$\delta_S\mathbf{q}^{ia} = 2\mathrm{i}\left(\varepsilon^a_\alpha\theta^{i\alpha} + \bar\varepsilon^a_{\dot\alpha}\bar\theta^{i\dot\alpha}\right), \quad \delta_S\theta^\alpha_i = 0, \quad \delta_S\bar\theta^{i\alpha} = 0. \tag{3.201}$$

Из всех форм Картана

$$\begin{aligned} g^{-1}dg &= \mathrm{i}\left(\Omega_P\right)^A P_A + \mathrm{i}\left(\Omega_Z\right)^{ia} Z_{ia} + \left(\Omega_Q\right)^\alpha_i Q^i_\alpha + \left(\overline{\Omega}_Q\right)^{i\dot\alpha}\overline{Q}_{i\dot\alpha} + \left(\Omega_S\right)^\alpha_a S^a_\alpha + \left(\overline{\Omega}_S\right)^{a\dot\alpha}\overline{S}_{a\dot\alpha} + \\ &\quad \mathrm{i}\left(\Omega_K\right)^A_{ia} K^{ia}_A + \mathrm{i}\left(\Omega_L\right)^{AB} L_{AB} + \mathrm{i}\left(\Omega_T\right)^{ij} T_{ij} + \mathrm{i}\left(\Omega_R\right)^{ab} R_{ab}, \end{aligned} \tag{3.202}$$

для последующих построений оказывается необходимым явный вид форм

$$\begin{aligned} \left(\Omega_P\right)^A &= \triangle x^B\left(\cosh\sqrt{2\boldsymbol{Y}}\right)^A_B - 2\triangle\mathbf{q}^{jb}\boldsymbol{\Lambda}^C_{jb}\left(\frac{\sinh\sqrt{2\boldsymbol{Y}}}{\sqrt{2\boldsymbol{Y}}}\right)^A_C, \\ \left(\Omega_Z\right)^{ia} &= \triangle\mathbf{q}^{jb}\left(\cosh\sqrt{2\boldsymbol{y}}\right)^{ia}_{jb} - \triangle x^A\boldsymbol{\Lambda}^{jb}_A\left(\frac{\sinh\sqrt{2\boldsymbol{y}}}{\sqrt{2\boldsymbol{y}}}\right)^{ia}_{jb}, \\ \left(\Omega_Q\right)^\alpha_i &= d\theta^\beta_j\left(\cosh\sqrt{W}\right)^{j\alpha}_{i\beta} + d\bar{\boldsymbol{\psi}}^{c\dot\gamma}\left(\frac{\sinh\sqrt{\overline{T}}}{\sqrt{\overline{T}}}\right)^{b\dot\beta}_{c\dot\gamma}\boldsymbol{\Lambda}^\alpha_{ib\dot\beta}, \\ \left(\Omega_S\right)^\alpha_a &= d\boldsymbol{\psi}^\beta_b\left(\cosh\sqrt{T}\right)^{b\alpha}_{a\beta} - d\bar\theta^{k\dot\gamma}\boldsymbol{\Lambda}^\gamma_{bk\dot\gamma}\left(\frac{\sinh\sqrt{T}}{\sqrt{T}}\right)^{b\alpha}_{a\gamma}. \end{aligned} \tag{3.203}$$

Здесь использованы разложения по степеням матриц

$$\begin{gathered} \boldsymbol{Y}^B_A = \boldsymbol{\Lambda}^{ia}_A\boldsymbol{\Lambda}^B_{ia},\ \boldsymbol{y}^{jb}_{ia} = \boldsymbol{\Lambda}^A_{ia}\boldsymbol{\Lambda}^{jb}_A, \\ W^{j\alpha}_{i\beta} = \boldsymbol{\Lambda}^{\alpha\dot\alpha}_{ia}\boldsymbol{\Lambda}^{ja}_{\beta\dot\alpha},\ \overline{W}^{i\dot\alpha}_{j\dot\beta} = \boldsymbol{\Lambda}^{i\dot\alpha}_{a\alpha}\boldsymbol{\Lambda}^{a\alpha}_{j\dot\beta}, \\ T^{b\alpha}_{a\beta} = \boldsymbol{\Lambda}^{ib}_{\beta\dot\alpha}\boldsymbol{\Lambda}^{\alpha\dot\alpha}_{ia},\ \overline{T}^{a\dot\alpha}_{b\dot\beta} = \boldsymbol{\Lambda}^{i\alpha}_{b\dot\beta}\boldsymbol{\Lambda}^{a\dot\alpha}_{i\alpha}, \end{gathered} \tag{3.204}$$

а подформы, инвариантные относительно обеих суперсимметрий, имеют вид

$$\begin{aligned} &\triangle x^A = dx^A - \mathrm{i}\left(\theta^\alpha_i d\bar\theta^{i\dot\alpha} + \bar\theta^{i\dot\alpha}d\theta^\alpha_i + \boldsymbol{\psi}^\alpha_a d\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\alpha} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\alpha}d\boldsymbol{\psi}^\alpha_a\right)\left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot\alpha}, \\ &\triangle\mathbf{q}_{ia} = d\mathbf{q}_{ia} - 2\mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}_{a\alpha}d\theta^\alpha_i + \bar{\boldsymbol{\psi}}_{a\dot\alpha}d\bar\theta^{\dot\alpha}_i\right). \end{aligned} \tag{3.205}$$

Также инвариантными относительно Q^i_α, S^a_α - преобразований являются формы $d\theta^\alpha_i$, $d\bar\theta^{i\alpha}$, $d\boldsymbol{\psi}^\alpha_a$, $d\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\alpha}$.

Разлагая дифференциал произвольной скалярной функции по подформам $\triangle x^A$, $d\theta^\alpha_i$, $d\bar\theta^{i\alpha}$, можно вычислить производные, ковариантные относительно обеих суперсимметрий:

$$\begin{aligned} \nabla_A &= \left(E^{-1}\right)^B_A\partial_B,\ E^B_A = \delta^B_A - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}^\alpha_a\partial_A\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\alpha} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\alpha}\partial_A\boldsymbol{\psi}^\alpha_a\right)\left(\sigma^B\right)_{\alpha\dot\alpha}, \\ \nabla^i_\alpha &= D^i_\alpha - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}^\beta_a\nabla^i_\alpha\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\beta} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\beta}\nabla^i_\alpha\boldsymbol{\psi}^\beta_a\right)\left(\sigma^B\right)_{\beta\dot\beta}\partial_B, \\ \overline{\nabla}_{i\dot\alpha} &= \overline{D}_{i\dot\alpha} - \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\psi}^\beta_a\overline{\nabla}_{i\dot\alpha}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\beta} + \bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\beta}\overline{\nabla}_{i\dot\alpha}\boldsymbol{\psi}^\beta_a\right)\left(\sigma^B\right)_{\beta\dot\beta}\partial_B. \end{aligned} \tag{3.206}$$

Здесь D^i_α, $\overline{D}_{i\dot\alpha}$ - “плоские” производные, удовлетворяющие соотношениям

$$\left\{D^i_\alpha,\ \overline{D}_{j\dot\alpha}\right\} = -2\mathrm{i}\delta^i_j\left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot\alpha}\partial_A, \quad \left\{D^i_\alpha,\ D^j_\beta\right\} = \left\{\overline{D}_{i\dot\alpha},\ \overline{D}_{j\dot\beta}\right\} = 0. \tag{3.207}$$

(Анти)коммутаторы производных (3.206) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\left\{\nabla^i_\alpha,\ \nabla^j_\beta\right\} = -2\mathrm{i}\left(\nabla^i_\alpha\boldsymbol{\psi}^\gamma_a\nabla^j_\beta\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\gamma} + \nabla^i_\alpha\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\gamma}\nabla^j_\beta\boldsymbol{\psi}^\gamma_a\right)\left(\sigma^A\right)_{\gamma\dot\gamma}\nabla_A,\\
&\left[\nabla_A,\ \nabla^i_\alpha\right] = -2\mathrm{i}\left(\nabla_A\boldsymbol{\psi}^\gamma_a\nabla^i_\alpha\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\gamma} + \nabla_A\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\gamma}\nabla^i_\alpha\boldsymbol{\psi}^\gamma_a\right)\left(\sigma^B\right)_{\gamma\dot\gamma}\nabla_B,\\
&\left\{\nabla^i_\alpha,\ \overline{\nabla}_{\dot\alpha j}\right\} = -2\mathrm{i}\delta^i_j\left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot\alpha}\nabla_A - 2\mathrm{i}\left(\nabla^i_\alpha\boldsymbol{\psi}^\gamma_a\overline{\nabla}_{j\dot\alpha}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\gamma} + \nabla^i_\alpha\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\gamma}\overline{\nabla}_{j\dot\alpha}\boldsymbol{\psi}^\gamma_a\right)\left(\sigma^A\right)_{\gamma\dot\gamma}\nabla_A.
\end{aligned} \tag{3.208}$$

3.6.2. Непосредственные следствия условий на формы Картана

Как отмечалось ранее, накладывая условия на формы Картана, можно найти ковариантные связи между суперполями, условия неприводимости рассматриваемого мультиплета и уравнения движения. Упростив с помощью указанных условий форму при генераторе P_A, возможно также найти бозонное действие.

Условия неприводимости

Как показывает опыт исследования систем со спонтанным нарушением суперсимметрии [40, 45], найти все необходимые связи между суперполями и суперполевые уравнения движения можно, если одновременно потребовать выполнения условий

$$\Omega_Z = \overline{\Omega}_Z = 0 \ \ (a), \qquad \Omega_S\big|_{d\theta,d\bar\theta} = \overline{\Omega}_S\big|_{d\theta,d\bar\theta} = 0 \ \ (b). \tag{3.209}$$

Они аналогичны аналогичны условиям суперэмбеддинга [49].

Условия (3.209a) приводят к уравнениям

$$\nabla^j_\alpha\mathbf{q}_{ia} + 2\mathrm{i}\boldsymbol{\psi}_{a\alpha}\delta^j_i = 0, \quad \overline{\nabla}_{j\dot\alpha}\mathbf{q}_{ia} + 2\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\psi}}_{a\dot\alpha}\epsilon_{ij} = 0, \tag{3.210}$$

$$\nabla_A\mathbf{q}^{ia} = \boldsymbol{\Lambda}^{ia}_B\left(\frac{\operatorname{th}\sqrt{2\boldsymbol{Y}}}{\sqrt{2\boldsymbol{Y}}}\right)^A_B. \tag{3.211}$$

Эти уравнения позволяют выразить суперполя $\boldsymbol{\psi}^\alpha_a$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\alpha}$ и $\boldsymbol{\Lambda}^{ia}_A$ через ковариантные производные суперполей $\mathbf{q}^{ia}$ (обратный эффект Хиггса [38]):

$$\boldsymbol{\psi}_{a\alpha} = \frac{\mathrm{i}}{4}\nabla^k_\alpha\mathbf{q}_{ka}, \quad \bar{\boldsymbol{\psi}}_{a\dot\alpha} = \frac{\mathrm{i}}{4}\overline{\nabla}_{k\dot\alpha}\mathbf{q}^k_a, \tag{3.212}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^{ia}_A = \nabla_A\mathbf{q}^{ia} + \ldots, \tag{3.213}$$

где в соотношении (3.213) сохранено только основное, линейное по $\nabla_A\mathbf{q}^{ia}$ слагаемое. Кроме того, из уравнения (3.210) следует, что

$$\nabla^{(i}_\alpha\mathbf{q}^{j)}_a = 0, \quad \overline{\nabla}_{\dot\alpha}{}^{(i}\mathbf{q}^{j)}_a = 0. \tag{3.214}$$

Эти условия являются ковариантизованной версией условий, выделяющих гипермультиплет $N=2$, $d=4$ суперсимметрии [51]. Данный мультиплет определен на массовой поверхности.

Хотя условия (3.209b) в данном случае не являются независимыми и следуют из (3.209a), они открывают возможность упростить рассуждения. Условие, наложенное на $d\bar\theta$ ($d\theta$) проекцию формы Ω_S ($\overline{\Omega}_S$) связывает спинорную производную фермионных суперполей $\boldsymbol{\psi}^\alpha_a, \bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\alpha}$ и производную суперполя $\mathbf{q}^{ia}$ по x^A:

$$\overline{\nabla}_{k\dot\gamma}\boldsymbol{\psi}^\alpha_b \equiv \left(\overline{\boldsymbol{J}}{}^\alpha_{\dot\gamma}\right)_{kb} = \boldsymbol{\Lambda}^\gamma_{ck\dot\gamma}\left(\frac{\tanh\sqrt{T}}{\sqrt{T}}\right)^{c\alpha}_{b\gamma} = \boldsymbol{\Lambda}^\alpha_{kb\gamma}+\ldots,$$
$$\nabla^k_\gamma\bar{\boldsymbol{\psi}}^{b\dot\alpha} \equiv \left(\boldsymbol{J}^{\dot\alpha}_\gamma\right)^{kb} = \boldsymbol{\Lambda}^{kc\dot\gamma}_\gamma\left(\frac{\tanh\sqrt{\overline{T}}}{\sqrt{\overline{T}}}\right)^{b\dot\alpha}_{c\dot\gamma} = \boldsymbol{\Lambda}^{kb\dot\alpha}_\gamma+\ldots. \qquad (3.215)$$

Условия на $d\theta$ ($d\bar\theta$) проекции форм Ω_S ($\overline{\Omega}_S$) требуют, что

$$\nabla^i_\alpha\boldsymbol{\psi}^\beta_a = 0, \qquad \overline{\nabla}_{i\dot\alpha}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\dot\beta} = 0. \qquad (3.216)$$

Соотношения (3.210), (3.211), (3.215) and (3.216) инвариантны относительно всех преобразований $N=2$, $d=4$ суперадгебры (3.197), (3.198), что обеспечивается инвариантностью условий (3.209).

Бозонное действие

Для построения компонентного суперсимметричного действия P-бран оказывается весьма важным предварительно найти бозонное действие. Его можно найти с помощью бозонных уравнений движения, следующих из условий неприводимости (3.214), но более простым путем оказывается использование инвариантности бозонного действия относительно $D=8$ группы Пуанкаре. Как и в исследованных ранее системах, требуемым инвариантом оказывается интеграл от формы объема, построенной из Ω_P (3.203). В бозонном пределе, с учетом условия $\Omega_Z=0$, она имеет вид

$$\partial_A q^{ia} = \Lambda^{ia}_B\left(\frac{\tanh\sqrt{2Y}}{\sqrt{2Y}}\right)^A_B \Rightarrow (\Omega_P)^A = dx^B\, e_B{}^A = dx^B\left(\frac{1}{\cosh\sqrt{2Y}}\right)^A_B. \qquad (3.217)$$

Тогда искомым бозонным действием оказывается интеграл

$$S_{bos} = \int d^4x\,\det e = \int d^4x\sqrt{\det g},\ g^B_A = e^C_A e^B_C = \delta^B_A - 2\partial_A q^{ia}\partial^B q_{ia}. \qquad (3.218)$$

Это - действие Намбу-Гото для 3-браны в $D=8$ в статической калибровке. Оно инвариантно относительно бозонных преобразований, порождаемых генераторами K^{ia}_A, принадлежащих фактор-пространству $SO(1,7)/SO(1,3)\times SU(2)\times SU(2)$

$$g_0 = e^{\mathrm{i}\mathcal{A}^A_{ia}K^{ia}_A} \Rightarrow \delta_K x^A = 2\mathcal{A}^A_{ia}q^{ia}, \quad \delta_K q^{ia} = \mathcal{A}^{ia}_A x^A, \qquad (3.219)$$

а, следовательно, и всей группы Пуанкаре в восьмимерии $SO(1,7)$.

3.6.3. Нарушенная суперсимметрия

Необходимым этапом построения действия в компонентном подходе является формулировка соответствующего анзаца, обеспечивающего инвариантность относительно нарушенной суперсимметрии и правильный бозонный предел. Этот анзац включает должным образом ковариантизованное бозонное действие и член Весса-Зумино. Все инструменты, необходимые для построения ковариантных производных, меры интегрирования и члена Весса-Зумино, могут быть получены с помощью метода нелинейных реализаций.

Как и во всех рассмотренных ранее случаях, естественно определить физические компоненты теории как

$$q_{ia} = \mathbf{q}_{ia}|_{\theta\to 0},\ \psi^{\alpha}_{a} = \boldsymbol{\psi}^{\alpha}_{a}|_{\theta\to 0},\ \bar{\psi}^{a\alpha} = \bar{\boldsymbol{\psi}}^{a\alpha}|_{\theta\to 0}. \tag{3.220}$$

Обобщение бозонного действия

Одним из важных свойств выбранной параметризации фактор-пространства (3.199) является инвариантность нечетных координат θ^{α}_{i} относительно нарушенной суперсимметрии. Вследствие этого, компоненты суперполей не перемешиваются преобразованиями нарушенной суперсимметрии, а необходимые законы преобразования и ковариантные объекты могут быть получены из суперполевых при $\theta^{\alpha}_{i} \to 0$. Также можно ожидать, что производные, действующие на компоненты, могут быть ковариантизованы с помощью тетрады $\mathcal{E}^{B}_{A} = E^{B}_{A}|_{\theta\to 0}$ (3.206). Действительно, преобразования нарушенной суперсимметрии координат и полей имеют вид

$$\delta_S x^A = \mathrm{i}\left(\varepsilon^{\alpha}_{a}\bar{\psi}^{a\dot{\alpha}} + \bar{\varepsilon}^{a\dot{\alpha}}\psi^{\alpha}_{a}\right)\left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad \delta_S\psi^{\alpha}_{a} = \varepsilon^{\alpha}_{a}, \quad \delta_S\bar{\psi}^{a\dot{\alpha}} = \bar{\varepsilon}^{a\dot{\alpha}}, \quad \delta_S q^{ia} = 0, \quad \delta_S\Lambda = 0. \tag{3.221}$$

Они оставляют инвариантными формы

$$\begin{aligned}
&(\omega_P)^A = (\Omega_P)^A|_{\Lambda,\theta\to 0} = \mathcal{E}^{A}_{B}dx^B,\ \mathcal{E}^{A}_{B} = \delta^{A}_{B} - \mathrm{i}\left(\psi^{\alpha}_{a}\partial_B\bar{\psi}^{a\dot{\alpha}} + \bar{\psi}^{a\dot{\alpha}}\partial_B\psi^{\alpha}_{a}\right)\left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot{\alpha}},\\
&(\omega_Z)^{ia} = (\Omega_Z)^{ia}|_{\Lambda,\theta\to 0} = dq^{ia}, \quad (\omega_S)^{\alpha}_{a} = (\Omega_S)^{\alpha}_{a}|_{\Lambda,\theta\to 0} = d\psi^{\alpha}_{a}.
\end{aligned} \tag{3.222}$$

Таким образом, как и в рассмотренных ранее случаях, мерой интегрирования, инвариантной относительно нарушенной суперсимметрии, оказывается

$$\epsilon_{ABCD}\,(\omega_P)^A \wedge (\omega_P)^B \wedge (\omega_P)^C \wedge (\omega_P)^D \sim d^4x\,\det\mathcal{E}, \tag{3.223}$$

а ковариантные производные имеют вид

$$\mathcal{D}_A = \left(\mathcal{E}^{-1}\right)_A^B \partial_B. \tag{3.224}$$

Ясно, что любое действие, имеющее вид

$$\begin{gathered}S = \int d^4x \det \mathcal{E} F \left(\mathrm{Tr}d, \mathrm{Tr}d^2, \mathrm{Tr}d^3, \mathrm{Tr}d^4\right), \\ d_A^B = \mathcal{D}_A q^{ia} \mathcal{D}^B q_{ia}, \ \mathrm{Tr}d = d_A^A, \ \mathrm{Tr}d^2 = d_A^B d_B^A, \ldots\end{gathered} \tag{3.225}$$

окажется инвариантным относительно нарушенной суперсимметрии. Принимая во внимание также бозонный предел, можно выписать основную часть суперсимметричного действия, содержащую один неопределенный параметр α и имеющую правильный бозонный предел:

$$\begin{aligned} S_{main} &= (1+\alpha)\int d^4x - \int d^4x \det(\mathcal{E}) \Big[\alpha + \sqrt{\det g}\Big], \\ g_A^B &= \delta_A^B - 2\mathcal{D}_A q^{ia} \mathcal{D}^B q_{ia}. \end{aligned} \tag{3.226}$$

Тривиальное действие $\int d^4x$ добавлено, чтобы обеспечить предел

$$S_{q,\psi\to 0} = 0.$$

Член Весса-Зумино

Член Весса-Зумино является существенно необходимым для обеспечения инвариантности действия относительно ненарушенной суперсимметрии. Соответствующая часть лагранжиана не является точным инвариантом относительно преобразований нарушенной суперсимметрии (3.221), а сдвигается на полную дивергенцию. Данное слагаемое может быть построено стандартным способом [50]. Во-первых, необходимо построить замкнутую 5-форму Ω_5, инвариантную относительно четырехмерных преобразований Лоренца и нарушенной суперсимметрии (3.221). Также ясно, что Ω_5 должна исчезать в бозонном пределе, поскольку он уже обеспечен первой частью анзаца (3.226). 5-форма с требуемыми свойствами может быть построена из форм (3.222), инвариантных относительно нарушенной суперсимметрии

$$\begin{aligned} \Omega_5 &= (\omega_S)_a^\alpha \wedge (\bar\omega_S)^{b\dot\alpha} \wedge (\omega_Z)^{ia} \wedge (\omega_Z)_{ib} \wedge (\omega_P)^A \ (\sigma_A)_{\alpha\dot\alpha} \\ &= d\psi_a^\alpha \wedge d\bar\psi^{b\dot\alpha} \wedge dq^{ia} \wedge dq_{ib} \wedge \left[dx_{\alpha\dot\alpha} - 2\mathrm{i}\left(\psi_{c\alpha} d\bar\psi_{\dot\alpha}^c + \bar\psi_{\dot\alpha}^c d\psi_{c\alpha}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.227}$$

Форма Ω_5 (3.227) действительно является замкнутой. Доказать это можно, заметив, что внешний дифференциал формы $(\omega_P)_{\alpha\dot\alpha}$ дается выражением

$$d\left(\omega_P\right)_{\alpha\dot\alpha} = -4\mathrm{i}\, d\psi_{c\alpha} \wedge d\bar\psi_{\dot\alpha}^c, \tag{3.228}$$

и, поскольку

$$d\psi^{\alpha}_{a} \wedge d\psi_{b\alpha} = \frac{1}{2}\epsilon_{ab} d\psi^{c\alpha} \wedge d\psi_{c\alpha}, \tag{3.229}$$

то внешний дифференциал формы Ω_5 оказывается равным нулю

$$d\Omega_5 \sim d\psi^{a\alpha} \wedge d\psi_{a\alpha} \wedge d\bar{\psi}^{b\dot{\alpha}} \wedge d\bar{\psi}_{b\dot{\alpha}} \wedge dq^{ic} \wedge dq_{ic} = 0. \tag{3.230}$$

Далее необходимо записать Ω_5 как внешний дифференциал 4-формы Ω_4. В отличие от построения действий 3-браны в $D = 6$ и мембраны в $D = 7$, данный этап нетривиален. Предположив, что искомая 4-форма имеет вид,

$$\Omega_4^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\psi^{\alpha}_{a} d\bar{\psi}^{b\dot{\alpha}} + \bar{\psi}^{b\dot{\alpha}} d\psi^{\alpha}_{a}\right) \wedge dq^{ia} \wedge dq_{ib} \wedge \left(dx_{\alpha\dot{\alpha}} - 2\mathrm{i}\left(\psi_{c\alpha} d\bar{\psi}^{c}_{\dot{\alpha}} + \bar{\psi}^{c}_{\dot{\alpha}} d\psi_{c\alpha}\right)\right), \tag{3.231}$$

можно найти, что

$$d\Omega_4^{(1)} = \Omega_5 + 2\mathrm{i}\left(\psi^{\alpha}_{a} d\bar{\psi}^{b\dot{\alpha}} + \bar{\psi}^{b\dot{\alpha}} d\psi^{\alpha}_{a}\right) \wedge d\psi_{c\alpha} \wedge d\bar{\psi}^{c}_{\dot{\alpha}} \wedge dq^{ia} \wedge dq_{ib}. \tag{3.232}$$

Поскольку второе слагаемое в правой части (3.232) может быть записано как

$$-\mathrm{i}d\Big\{ \left[(\psi^{a\alpha} d\psi^{b}_{\alpha}) \wedge (\bar{\psi}^{c\dot{\alpha}} \wedge d\bar{\psi}_{c\dot{\alpha}}) + (\psi^{c\alpha} \wedge d\psi_{c\alpha}) \wedge (\bar{\psi}^{a\dot{\alpha}} d\bar{\psi}^{b}_{\dot{\alpha}})\right] \wedge dq^{i}_{a} \wedge dq_{ib}\Big\}, \tag{3.233}$$

то форма Ω_4, обладающая свойством $d\Omega_4 = \Omega_5$, имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega_4 \;\; = \;\; & \frac{1}{2}\left(\psi^{\alpha}_{a} d\bar{\psi}^{b\dot{\alpha}} + \bar{\psi}^{b\dot{\alpha}} d\psi^{\alpha}_{a}\right) \wedge dq^{ia} \wedge dq_{ib} \wedge \left(dx_{\alpha\dot{\alpha}} - 2\mathrm{i}\left(\psi_{c\alpha} d\bar{\psi}^{c}_{\dot{\alpha}} + \bar{\psi}^{c}_{\dot{\alpha}} d\psi_{c\alpha}\right)\right) + \\ & + \mathrm{i}\left[(\psi^{a\alpha} d\psi^{b}_{\alpha}) \wedge (\bar{\psi}^{c\dot{\alpha}} \wedge d\bar{\psi}_{c\dot{\alpha}}) + (\psi^{c\alpha} \wedge d\psi_{c\alpha}) \wedge (\bar{\psi}^{a\dot{\alpha}} d\bar{\psi}^{b}_{\dot{\alpha}})\right] \wedge dq^{i}_{a} \wedge dq_{ib}. \end{aligned} \tag{3.234}$$

Интеграл от этой формы и является членом Весса-Зумино

$$\begin{aligned} S_{WZ} \;\; = \;\; & \beta \int d^4x \det \mathcal{E}\, \epsilon^{ABCD} \Big[\left(\psi^{\alpha}_{a} \mathcal{D}_A \bar{\psi}^{b\dot{\alpha}} + \bar{\psi}^{b\dot{\alpha}} \mathcal{D}_A \psi^{\alpha}_{a}\right) \mathcal{D}_B q^{ia} \mathcal{D}_C q_{ib} \left(\sigma_D\right)_{\alpha\dot{\alpha}} - \\ - \;\; & 2\mathrm{i}\left(\psi^{\alpha}_{a} \mathcal{D}_A \psi^{b}_{\alpha}\; \bar{\psi}^{c\dot{\alpha}} \mathcal{D}_B \bar{\psi}_{c\dot{\alpha}} + \psi^{c\alpha} \mathcal{D}_A \psi_{c\alpha}\; \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}_{a} \mathcal{D}_B \bar{\psi}^{b}_{\dot{\alpha}}\right) \mathcal{D}_C q^{ia} \mathcal{D}_D q_{ib} \Big]. \end{aligned} \tag{3.235}$$

Он инвариантен относительно преобразований нарушенной суперсимметрии (3.221) по построению. Таким образом, анзац для действия 3-браны в $D = 8$ имеет вид

$$\begin{aligned} S \;\; = \;\; & (1+\alpha) \int d^4x - \int d^4x \det \mathcal{E} \left[\alpha + \sqrt{\det g}\right] + \\ & + \beta \int d^4x \det \mathcal{E} \epsilon^{ABCD} \Big[\left(\psi^{\alpha}_{a} \mathcal{D}_A \bar{\psi}^{b\dot{\alpha}} + \bar{\psi}^{b\dot{\alpha}} \mathcal{D}_A \psi^{\alpha}_{a}\right) \mathcal{D}_B q^{ia} - \mathcal{D}_C q_{ib} \left(\sigma_D\right)_{\alpha\dot{\alpha}} - \\ & - 2\mathrm{i}\left(\psi^{\alpha}_{a} \mathcal{D}_A \psi^{b}_{\alpha}\; \bar{\psi}^{c\dot{\alpha}} \mathcal{D}_B \bar{\psi}_{c\dot{\alpha}} + \psi^{c\alpha} \mathcal{D}_A \psi_{c\alpha}\; \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}_{a} \mathcal{D}_B \bar{\psi}^{b}_{\dot{\alpha}}\right) \mathcal{D}_C q^{ia} \mathcal{D}_D q_{ib} \Big]. \end{aligned} \tag{3.236}$$

Данный анзац (3.236) является минимальным, содержащим лишь первые производные полей, имеющим должный бозонный предел, и инвариантным относительно нарушенной суперсимметрии (3.221). Два неопределенных параметра α, β, которые он содержит, должны быть зафиксированы требованием инвариантности относительно ненарушенной суперсимметрии.

3.6.4. Ненарушенная суперсимметрия

Предварительные замечания

При построении компонентного действия наиболее сложной в техническом плане задачей оказывается доказательство инвариантности действия относительно нарушенной суперсимметрии. Для 3-браны в $D = 8$ это доказательство оказывается еще более сложным, чем во всех рассмотренных ранее случаях. Чтобы осуществить такое доказательство, необходимо точно вычислить преобразования ненарушенной суперсимметрии, а, следовательно, и выражения для величин (3.215)

$$\overline{\nabla}_{k\dot{\gamma}}\boldsymbol{\psi}^{\alpha}_{b}|_{\theta\to 0} \equiv \left(\overline{J}{}^{\alpha}_{\dot{\gamma}}\right)_{kb}, \qquad \nabla^{k}_{\gamma}\bar{\boldsymbol{\psi}}^{b\dot{\alpha}}|_{\theta\to 0} \equiv \left(J^{\dot{\alpha}}_{\gamma}\right)^{kb} \tag{3.237}$$

в терминах $\mathcal{D}_A q^{ia}$. Как и в случае мембраны в $D = 7$, пересуммирование рядов в (3.215) в терминах $\boldsymbol{Y}^{B}_{A} = \boldsymbol{\Lambda}^{ia}_{A}\boldsymbol{\Lambda}^{B}_{ia}$ не представляется возможным. С другой стороны, действуя антикоммутатором $\left\{\nabla_{i\alpha}, \overline{\nabla}_{j\dot{\alpha}}\right\}$ (3.208) на суперполе $\mathbf{q}^{mb}$ с учетом (3.216), можно получить нелинейные уравнения

$$\delta^{m}_{j}(J_{\alpha\dot{\alpha}})^{b}_{i} - \delta^{m}_{i}(\overline{J}_{\alpha\dot{\alpha}})^{b}_{j} = \epsilon_{ij}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}q^{mb} + (J_{\alpha\dot{\gamma}})^{a}_{i}(\overline{J}_{\gamma\dot{\alpha}})_{aj}\mathcal{D}^{\gamma\dot{\gamma}}q^{mb}. \tag{3.238}$$

Также как и в случае мембраны в $D = 7$, решение этих уравнений с помощью наиболее общего анзаца является исключительно сложной задачей, хотя решение и существует, в чем можно убедиться, решая (3.238) итерационно. Приближенное решение имеет вид

$$J^{ia}_{A} = N^{B}_{A}\mathcal{D}_{B}q^{ia} + \mathrm{i}K^{B}_{A}X^{ia}_{B}, \quad X^{Aia} = \epsilon^{ABCD}\mathcal{D}_{B}q^{ib}\mathcal{D}_{C}q^{j}_{b}\mathcal{D}_{D}q^{a}_{j}, \tag{3.239}$$

где матрицы N^{B}_{A}, K^{B}_{A} вычислены до 3 и 2 порядка по d соответственно:

$$\begin{aligned}
N^{B}_{A} &= \left[1 - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}d + \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}d)^2 - \mathrm{Tr}d^2 - \frac{8}{3}\mathrm{Tr}d^3 + \frac{11}{4}\mathrm{Tr}d^2\mathrm{Tr}d - \frac{17}{24}(\mathrm{Tr}d)^3\right]\delta^{B}_{A} \\
&+ \left[1 - \mathrm{Tr}d + \frac{7}{4}(\mathrm{Tr}d)^2 - \frac{5}{2}\mathrm{Tr}d^2\right]d^{B}_{A} + \left[2 - 4\mathrm{Tr}d\right]\left(d^2\right)^{B}_{A} + 6\left(d^3\right)^{B}_{A} + \ldots \\
K^{B}_{A} &= \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\left(\mathrm{Tr}d\right)^2 - \frac{1}{6}\mathrm{Tr}d^2\right]\delta^{B}_{A} - \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}d\right]d^{B}_{A} - \frac{2}{3}\left(d^2\right)^{B}_{A} + \ldots .
\end{aligned} \tag{3.240}$$

Здесь, как и ранее,

$$d^{B}_{A} \equiv \mathcal{D}_{A}q^{ia}\mathcal{D}^{B}q_{ia}, \quad \left(d^2\right)^{B}_{A} = d^{C}_{A}d^{B}_{C}, \quad \mathrm{Tr}d = d^{A}_{A}, \quad \mathrm{Tr}d^2 = d^{B}_{A}d^{A}_{B}, \ldots . \tag{3.241}$$

Стоит отметить, что метод поиска точных выражений для J^{ia}_{A}, $\overline{J}{}^{ia}_{A}$ состоит в том, чтобы определить, при каких J^{ia}_{A}, $\overline{J}{}^{ia}_{A}$ вариация действия относительно преобразований ненарушенной суперсимметрии превращается в ноль. После этого надлежит проверить, удовлетворяют ли полученные J^{ia}_{A}, $\overline{J}{}^{ia}_{A}$ уравнению (3.238).

Определение констант α, β

Анзац действия для 3-браны в $D=8$ содержит два неизвестных параметра, которые должны быть зафиксированы требованием инвариантности относительно ненарушенной суперсимметрии. Для того, чтобы найти их, требуется вычислить вариацию действия в первом порядке по фермионам и первом и третьем порядках по бозонам, принимая во внимание (3.239), (3.240).

Преобразования ненарушенной суперсимметрии для первых компонент суперполей могут быть вычислены с помощью формулы

$$\delta_Q F = -\epsilon_i^\alpha D^i_\alpha \mathbf{F}_{\theta\to 0} = -\epsilon_i^\alpha \nabla^i_\alpha \mathbf{F}_{\theta\to 0} + H^A\partial_A F, \quad H^B = \mathrm{i}\epsilon_i^\alpha \psi^a_\alpha J^{Bi}_a + \epsilon_i^\alpha \psi^a_\beta J^i_{Aa}\left(\sigma^{AB}\right)_\alpha^{\ \beta}. \tag{3.242}$$

(чтобы установить инвариантность действия, достаточно вычислить часть его вариации при ϵ_i^α.)

При неопределенных J_A^{ia}, $\overline{J}_A^{ia}$ преобразования компонент, их производных и основных элементов действия имеют вид

$$\begin{array}{rcl}
\delta_Q\psi_{a\alpha} & = & H^B\partial_B\psi_{a\alpha}, \quad \delta_Q\bar\psi^a_{\dot\alpha} = H^B\partial_B\bar\psi^a_{\dot\alpha} - \epsilon_i^\alpha J_A^{ia}\left(\sigma^A\right)_{\alpha\dot\alpha}, \\
\delta_Q\mathcal{D}_A q_{ka} & = & H^B\partial_B\mathcal{D}_A q_{ka} + 2\mathrm{i}\epsilon_k^\alpha\mathcal{D}_A\psi_{a\alpha} - 2\mathrm{i}\epsilon_i^\alpha\mathcal{D}_A\psi_{b\alpha}J^{Bib}\mathcal{D}_B q_{ka} \\
 & & -2\epsilon_i^\alpha\mathcal{D}_A\psi_{b\beta}\,J_D^{ib}\big(\sigma^{DB}\big)_\alpha^{\ \beta}\mathcal{D}_B q_{ka}, \qquad\qquad (3.243)\\
\delta_Q\mathcal{D}_A\psi_{a\alpha} & = & H^B\partial_B\mathcal{D}_A\psi_{a\alpha} - 2\mathrm{i}\epsilon_i^\beta\mathcal{D}_A\psi_{b\beta}J^{Bib}\mathcal{D}_B\psi_{a\alpha} - 2\epsilon_i^\gamma\mathcal{D}_A\psi_{b\beta}J_D^{ib}\big(\sigma^{DB}\big)_\gamma^{\ \beta}\mathcal{D}_B\psi_{a\alpha}, \\
\delta_Q\mathcal{D}_A\bar\psi^a_{\dot\alpha} & = & H^B\partial_B\mathcal{D}_A\bar\psi^a_{\dot\alpha} - \epsilon_i^\alpha\mathcal{D}_A J_B^{ia}\left(\sigma^B\right)_{\alpha\dot\alpha} - 2\mathrm{i}\epsilon_i^\alpha\mathcal{D}_A\psi_{b\alpha}J^{Bib}\mathcal{D}_B\bar\psi^a_{\dot\alpha} \\
 & & -2\mathrm{i}\epsilon_i^\alpha\mathcal{D}_A\psi_{b\beta}J_D^{ib}\big(\sigma^{DB}\big)_\alpha^{\ \beta}\mathcal{D}_B\bar\psi^a_{\dot\alpha}, \\
\delta_Q\det\mathcal{E} & = & \partial_A\big(H^A\det\mathcal{E}\big) + 2\mathrm{i}\det\mathcal{E}\epsilon_i^\alpha\left[\mathcal{D}_A\psi_{a\alpha}J^{Aia} - \mathrm{i}\mathcal{D}_A\psi_{a\beta}J_B^{ia}\big(\sigma^{BA}\big)_\alpha^{\ \beta}\right].
\end{array}$$

Рассматривая эти преобразования в линейном приближении

$$\delta_Q^{lin}q^{ia} = 2\mathrm{i}\epsilon^{i\alpha}\psi^a_\alpha, \quad \delta_Q^{lin}\psi^a_\alpha = 0, \quad \delta_Q^{lin}\bar\psi^a_{\dot\alpha} = \epsilon_i^\alpha\partial_{\alpha\dot\alpha}q^{ia}, \tag{3.244}$$

можно найти, что действие (3.236), рассмотренное во втором порядке по полям, инвариантно относительно (3.244), если $\alpha=1$.

Чтобы найти константу β, нужно рассмотреть вариацию действия (3.236) в первом порядке по фермионам и в третьем - по бозонам. Используя приближенные выражения для элементов действия

$$\begin{array}{rcl}
\det\mathcal{E} & \Rightarrow & 1 - 2\mathrm{i}\left(\psi^\alpha_a\partial_{\alpha\dot\alpha}\bar\psi^{a\dot\alpha} + \bar\psi^{a\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha}\psi^\alpha_a\right), \\
1+\sqrt{\det g} & \Rightarrow & 2\Big(1 - \mathrm{Tr}d + (\mathrm{Tr}d)^2 - \mathrm{Tr}d^2\Big), \\
S_{WZ} & \Rightarrow & \beta\displaystyle\int d^4x\,\epsilon^{ABCD}\Big[\left(\psi^\alpha_a\partial_A\bar\psi^{b\dot\alpha} + \bar\psi^{b\dot\alpha}\partial_A\psi^\alpha_a\right)\partial_B q^{ia}\partial_C q_{ib}\left(\sigma_D\right)_{\alpha\dot\alpha}\Big],
\end{array} \tag{3.245}$$

а также приближенное решение для J^{ia}_A (3.239), (3.240), можно найти вариацию основной части действия:

$$\begin{aligned}&\delta_Q^{cube}\left[-\det\mathcal{E}\left(1+\sqrt{\det g}\right)\right] \approx 4\mathrm{i}\epsilon_{i\alpha}\partial_A\psi^\alpha_a\Big\{\frac{\mathrm{i}}{3}\,\epsilon^{ABCD}\partial_B q^{ib}\partial_C q^j_b\partial_D q^a_j\Big\}\\ &+4\epsilon_{i\alpha}\partial_A\psi^\beta_a\left(\sigma^{AB}\right)^\alpha_\beta\Big\{\,(1-\mathrm{Tr}d)\,\partial_B q^{ia}+d_{BC}\partial^C q^{ia}+\frac{\mathrm{i}}{3}\epsilon_{BCDF}\partial^C q^{ib}\partial^D q^j_b\partial^F q^a_j\Big\}\\ &+4\epsilon_{i\alpha}\,\partial^C\psi^\beta_a\left(\sigma^{AB}\right)^\alpha_\beta d_{AC}\partial_B q^{ia}.\end{aligned} \tag{3.246}$$

Слагаемое в первой строчке (3.246) является полной дивергенцией и может быть проигнорировано. Все слагаемые, содержащие одновременно σ^{AB}-матрицу и ϵ^{BCDF}-символ, могут быть преобразованы с помощью тождества

$$\sigma^{BC}\epsilon_{CFGH}=\mathrm{i}\left(\delta^B_F\sigma_{GH}-\delta^B_G\sigma_{FH}+\delta^B_H\sigma_{FG}\right), \tag{3.247}$$

следующего из самодуальности σ^{AB}-матриц. Кроме того, в последнее слагаемое (3.246) нужно подставить $d_{CB}=\partial_C q^{ia}\partial_B q_{ia}$ и выделить слагаемые, антисимметричные относительно перестановок $\{i,j\}$ and $\{a,b\}$ - тогда слагаемые, антисимметричные по $\{a,b\}$, сократятся. После этих упрощений вариация основной части действия может быть приведена к виду

$$\begin{aligned}\delta_Q^{cube}\left[-\det\mathcal{E}\left(1+\sqrt{\det g}\right)\right] \;\;\approx\;\; & 4\epsilon_{i\alpha}\partial_A\psi^\beta_a\left(\sigma^{AB}\right)^\alpha_\beta\Big\{\,(1-\mathrm{Tr}d)\,\partial_B q^{ia}+d_{BC}\partial^C q^{ia}\Big\}\\ & 4\epsilon_{i\alpha}\partial^C\psi^\beta_a\left(\sigma^{AB}\right)^\alpha_\beta\partial_A q^{jb}\partial_C q^i_b\partial_B q^a_j.\end{aligned} \tag{3.248}$$

При вычислении вариации члена Весса-Зумино в том же приближении (3.248) достаточно проварьировать $\bar\psi^{i\dot\alpha}$ и учесть первое слагаемое в разложении $J^{ia}_A(\mathcal{D}q)$. Возникающее при этом произведение $\epsilon^{ABCD}\sigma_{DM}$ также должно быть преобразовано с помощью тождества (3.247). Следовательно, вариация члена Весса-Зумино в искомом приближении имеет вид

$$\begin{aligned}\delta_Q^{cube}\mathcal{L}_{WZ} \;\;\approx\;\; & -2\beta\epsilon_{i\alpha}\Big\{\partial_C\psi^\beta_a\left(\sigma^{BC}\right)_\beta{}^\alpha\partial_B q^b_j\partial_A q^{ja}\partial^A q^i_b+\partial_C\psi^\beta_a\left(\sigma^{AB}\right)_\beta{}^\alpha\partial^C q^i_b\partial_A q^{ja}\partial_B q^b_j\\ & -\partial_C\psi^\beta_a\left(\sigma^{AC}\right)_\beta{}^\alpha\partial_A q^{ja}\partial_B q^b_j\partial^B q^i_b\Big\}.\end{aligned} \tag{3.249}$$

После небольших упрощений можно заметить, что вариация члена Весса-Зумино (3.249) и вариация основной части действия (3.248) сокращают друг друга, если выбрать $\beta=2$. Таким образом, действие (3.236) инвариантно относительно нарушенной и ненарушенной суперсимметрии в рассмотренном приближении при $\alpha=1$, $\beta=2$. Поскольку список допустимых слагаемых исчерпан, множители при них определены, а все слагаемые с высшими степенями фермионов могут быть восстановлены исходя из требования инвариантности относительно нарушенной суперсимметрии, можно заключить, что полное компонентное действие 3-браны в $D=8$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
S \;=\;& 2\int d^4x - \int d^4x\,\det(\mathcal{E})\left[1+\sqrt{\det g}\right]+ \\
&+2\int d^4x\,\det\mathcal{E}\,\epsilon^{ABCD}\Big[\left(\psi^{\alpha}_{a}\mathcal{D}_A\bar\psi^{b\dot\alpha}+\bar\psi^{b\dot\alpha}\mathcal{D}_A\psi^{\alpha}_{a}\right)\mathcal{D}_Bq^{ia}\mathcal{D}_Cq_{ib}\left(\sigma_D\right)_{\alpha\dot\alpha} \qquad (3.250)\\
&-2\mathrm{i}\left(\psi^{\alpha}_{a}\mathcal{D}_A\psi^{b}_{\alpha}\;\bar\psi^{c\dot\alpha}\mathcal{D}_B\bar\psi_{c\dot\alpha}+\psi^{c\alpha}\mathcal{D}_A\psi_{c\alpha}\;\bar\psi^{\dot\alpha}_{a}\mathcal{D}_B\bar\psi^{b}_{\dot\alpha}\right)\mathcal{D}_Cq^{ia}\mathcal{D}_Dq_{ib}\Big].
\end{aligned}
$$

Точное решение для J^{ia}_A

Несмотря на то, что доказательство инвариантности действия (3.250), данное в предыдущем подразделе, можно продолжать, учитывая члены все более и более высокого порядка по d^B_A в разложениях матриц (3.240), желательно найти точное доказательство. Для этого требуется знать связь J^{ia}_A и $\mathcal{D}_Bq^{jb}$ в замкнутом виде. Однако, решить систему нелинейных уравнений (3.238), определяющую эту связь, точно, не представляется возможным ни подстановкой анзаца для J^{ia}_A, ни суммированием рядов (3.240).

При доказательстве инвариантности действия мембраны в $D=7$ был использован другой способ, использующий для поиска явного выражения для J^{ia}_A не систему нелинейных уравнений, а действие. Если (3.250) действительно инвариантно, его вариация относительно (3.243) должна исчезать при подстановке точного выражения для J^{ia}_A. Тогда можно вычислить вариацию (3.250) относительно (3.243) при независимом J^{ia}_A, и определить, при каком J^{ia}_A она равна нулю. Поскольку J^{ia}_A входит лишь в законы преобразования, но не в действие, получающиеся уравнения окажутся линейными, и в отличие от (3.238), заведомо решаемыми точно. Также стоит отметить, что, согласно уравнениям (3.238), решение для J^{ia}_A, учитывающее все фермионные слагаемые, может быть однозначным образом восстановлено из бозонного предела заменой $\partial_Aq^{ia}\to\mathcal{D}_Aq^{ia}$. Поэтому для поиска J^{ia}_A достаточно проанализировать вариацию действия (3.250) в первом порядке по фермионам.

Вариация действия (3.250) относительно преобразований нарушенной суперсимметрии (3.243) в линейном приближении по фермионам имеет вид

$$
\begin{aligned}
\delta_QL \;=\;& 4\mathrm{i}\sqrt{\det g}\big(g^{-1}\big)^{AB}\big(\Sigma_A\big)_{ia}\partial_Bq^{ia}-2\mathrm{i}\Big[\delta^A_B+\sqrt{\det g}\big(g^{-1}\big)^{A}_{B}\Big]\big(\Sigma_A\big)_{ia}J^{Bia}- \qquad (3.251)\\
&-2\Big[\delta^A_B+\sqrt{\det g}\big(g^{-1}\big)^{A}_{B}\Big]\big(\Sigma_A{}^{DB}\big)_{ia}J^{ia}_D- \\
&-4\epsilon^{ABCD}\epsilon^{\alpha}_{k}\partial_A\psi_{a\alpha}J^{kb}_D\partial_Bq^{ia}\partial_Cq_{ib}+4\mathrm{i}\epsilon^{ABCD}\epsilon^{\alpha}_{k}\partial_A\psi_{a\beta}J^{Fkb}\big(\sigma_{FD}\big)^{\beta}_{\alpha}\partial_Bq^{ia}\partial_Cq_{ib}.
\end{aligned}
$$

Здесь использованы обозначения

$$
\big(\Sigma_A\big)_{ia}=\epsilon^{\alpha}_{i}\partial_A\psi_{a\alpha},\quad \big(\Sigma_A{}^{DB}\big)_{ia}=\epsilon^{\alpha}_{i}\partial_A\psi_{a\beta}\big(\sigma^{DB}\big)^{\beta}_{\alpha}. \qquad (3.252)
$$

Собирая слагаемые с $\left(\Sigma_A\right)_{ia}$ и $\left(\Sigma_A^{DB}\right)_{ia}$, можно получить

$$\begin{aligned}\delta_Q S \;\; = \;\; & \int d^4x \left(\Sigma_A\right)_{ka} \Big\{ 4\mathrm{i}\sqrt{\det g} \left(g^{-1}\right)^{AB} \partial_B q^{ka} - 2\mathrm{i}\Big[\delta_B^A + \sqrt{\det g}\left(g^{-1}\right)_B^A\Big] J^{Bka} - \\ & -4\epsilon^{ABCD} \partial_B q^{ia}\, \partial_C q_{ib} J_D^{kb} \Big\} + \qquad (3.253) \\ & +2\int d^4x \left(\Sigma_{A,DB}\right)_{ia} \left\{ \left[\eta^{AB} + \sqrt{\det g}\left(g^{-1}\right)^{AB}\right] J^{Dka} - \right. \\ & \left. -2\mathrm{i}\epsilon^{ABCF} J^{Dkb} \partial_C q^{ia} \partial_F q_{ib} \right\}. \qquad (3.254)\end{aligned}$$

Вариации, пропорциональные $\left(\Sigma_A\right)_{ia}$ и $\left(\Sigma_A{}^{DB}\right)_{ia}$, должны быть равны нулю независимо. Из этого, однако, нельзя сделать вывод, что коэффциенты при $\left(\Sigma_A\right)_{ia}$ и $\left(\Sigma_A{}^{DB}\right)_{ia}$ (3.252) равны нулю. Так, можно заметить, что интегралы

$$\int d^4x \left(\Sigma_A\right)_{ia} (X^A)^{ia}, \qquad \int d^4x \left(\Sigma_{A,DB}\right)_{ia} \eta^{AB} \partial^D q^{ia} \qquad (3.255)$$

равны нулю, поскольку подынтегральное выражение является полной дивергенцией. Поэтому следует установить, к чему следует приравнять выражения в фигурных скобках (3.253), (3.254), подставив в них J_A^{ia} в низших приближениях (3.240). Тогда можно получить уравнения

$$4\mathrm{i}\sqrt{\det g}\left(g^{-1}\right)^{AB} \partial_B q^{ka} - 2\mathrm{i} M_B^A J^{Bka} - 4\epsilon^{ABCD}\, \partial_B q^{ia} \partial_C q_{ib} J_D^{kb} = -\frac{8}{3}\left(X^A\right)^{ka}, \qquad (3.256)$$

$$2M^{A\underline{B}} J^{ka\underline{D}} - 4\mathrm{i}\epsilon^{A\underline{B}CF}\, J^{\underline{D}kb} \partial_C q^{ia} \partial_F q_{ib} = 4\eta^{A\underline{B}} \partial^{\underline{D}} q^{ka}. \qquad (3.257)$$

Здесь

$$M_B^A = \delta_B^A + \sqrt{\det g}\,\left(g^{-1}\right)_B^A, \qquad (3.258)$$

а некоторые индексы в уравнении (3.257) подчеркнуты, чтобы отметить, что из-за антисимметрии и самодуальности матрицы σ^{BD} в (3.252) лишь три уравнения в (3.257) независимы.

Для того, чтобы найти точное решение, оказывается достаточным рассмотреть уравнение (3.256). Чтобы избежать появления $su(2)$ индексов (i, a), имеет смысл свернуть это уравнение с $\partial_B q_{ka}$ и подставить анзац (3.239) для J_A^{ia}. После этого можно выделить матричные уравнения на действительную и мнимую части (3.256):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(M\cdot K\right)_B^A - \frac{1}{3}\left(\delta_B^A\delta_D^C - \delta_D^A\delta_B^C\right) N_C^D = -\frac{2}{3}\delta_B^A, \qquad (3.259) \\ & 4\sqrt{\det g}\left(g^{-1}\right)^{AB} d_{BD} - 2\left(M\cdot N\cdot d\right)_D^A - \frac{4}{3}\left(\delta_D^A\delta_F^C - \delta_F^A\delta_D^C\right)\left(K\cdot Z\right)_C^F = 0.\end{aligned}$$

Здесь матрица Z^{AB} имеет вид

$$\begin{aligned} Z^{AB} = (X^A)^{ia}(X^B)_{ia} = -\frac{9}{2}\Big[& \left(\frac{2}{3}\mathrm{Tr}d^3 - \mathrm{Tr}d^2\mathrm{Tr}d + \frac{1}{3}(\mathrm{Tr}d)^3\right)\eta^{AB} + \\ & + \left(\mathrm{Tr}d^2 - (\mathrm{Tr}d))^2\right) d^{AB} + +2\mathrm{Tr}d\,(d^2)^{AB} - 2(d^3)^{AB}\Big]. \qquad (3.260)\end{aligned}$$

Уравнения (3.259) являются линейными и могут быть относительно легко решены; их сложность связана лишь с необычной структурой матрицы Z^{AB}. Их решение также имеет достаточно сложный вид. Его оказалось возможным представить в форме

$$\begin{aligned}
N_B^A &= \frac{2}{F}\Big[2\sqrt{\det g} - 4\mathrm{Tr}d + 4(\mathrm{Tr}d)^2 - 4\mathrm{Tr}d^2 - \sqrt{\det g}\mathrm{Tr}\big(g^{-1}\big)\Big]\delta_B^A - \\
&\quad - \frac{2\sqrt{\det g}}{F}\Big[2 + \sqrt{\det g}\mathrm{Tr}\big(g^{-1}\big)\Big]\big(g^{-1}\big)_B^A + \frac{8}{F}\Big[2\big(d^2\big)_B^A + \big(1 - 2\mathrm{Tr}d\big)d_B^A\Big], \\
K_B^A &= \frac{4}{3F}\Big[2\sqrt{\det g}\,\big(g^{-1}\big)_B^A - 2g_B^A - \sqrt{\det g}\,\mathrm{Tr}\big(g^{-1}\big)\delta_B^A\Big],
\end{aligned} \tag{3.261}$$

где

$$F = 8 + 8\sqrt{\det g} - 16\mathrm{Tr}d + 8(\mathrm{Tr}d)^2 - 8\mathrm{Tr}d^2 - \det g \cdot \big(\mathrm{Tr}\big(g^{-1}\big)\big)^2 - 4\sqrt{\det g}\mathrm{Tr}\big(g^{-1}\big). \tag{3.262}$$

Можно заметить, что матрицы N_A^B и K_A^B связаны простым соотношением

$$\big(N \cdot d\big)_B^A = \gamma K_B^A + \frac{1}{2}\delta_B^A, \quad \gamma = -\frac{3}{8}\Big(2 - 2\sqrt{\det g} + \sqrt{\det g}\mathrm{Tr}\big(g^{-1}\big)\Big). \tag{3.263}$$

Как можно проверить непосредственным вычислением, найденное решение для J_A^{ia} (3.261) удовлетворяет также уравнениям (3.257) и (3.238). Поскольку данное J_A^{ia} обеспечивает обращение в ноль вариации действия (3.251) и не противоречит следствиям условий неприводимости, доказательство инвариантности действия можно считать законченным.

3.7. Выводы

При построении действий суперсимметричных бран можно сделать следующие выводы:

- Компонентный подход к действиям бран оказывается вполне эффективным. В частности, с его помощью удалось в замкнутом виде построить компонентные действия для мембраны в $D = 7$ и 3-браны в $D = 8$ с 16 суперсимметриями и доказать их инвариантность.

- Наиболее существенным отличием рассмотренных действий бран от действий частиц суперсимметричной механики является наличие члена Весса-Зумино. Во всех рассмотренных случаях его присутствие оказывалось необходимым и достаточным для обеспечения инвариантности действия относительно ненарушенной суперсимметрии.

- Формы при генераторах нарушенной суперсимметрии Ω_S по-прежнему могут использоваться при описании действий бран как источники уравнений движения. Для выяснения связи между спинорными производными фермионных суперполей и производными по пространственно-временным координатам бозонных полей они, тем не менее, оказываются фактически непригодными.

- При рассмотрении наиболее сложных систем - мембраны в $D = 7$ и 3-браны в $D = 8$ - также возникают трудности и с поиском выражения для спинорной производной фермионных суперполей с помощью следствий условий неприводимости. Тем не менее, эти выражения оказалось возможным найти в обоих случаях, используя для их поиска условие инвариантности действия.

В основу данной главы легли результаты, опубликованные в работах [52–54].

Заключение

В диссертации был рассмотрен и решен ряд задач суперсимметричной механики, связанных с квантовым эффектом Холла в пространствах высших размерностей и спонтанным нарушением суперсимметрии. Также на основе результатов, полученных в суперсимметричной механике, разработан метод построения действий P-бран.

Для описания суперсимметричного квантового эффекта Холла в многомерных пространствах, таких как сфера $\mathbb{S}^4$ и комплексные проективные пространства $\mathbb{CP}^n$, требуется знать суперсимметричную механику частиц на таких пространствах в присутствии внешнего неабелева магнитного поля. Суперсимметричные механики таких частиц и были построены и изучены в диссертации, причем для механик на $\mathbb{CP}^n$ в присутствии $U(n)$ поля было построено их $N = 4$ суперсимметричное расширение. Существенно отметить, что такие системы наследуют все симметрии исходной бозонных $\mathbb{CP}^n$ моделей. Другим их необычным свойством является то, что $u(n)$ алгебру изоспиновых токов для их построения требуется расширять до $su(1,n)$. С точки зрения анализа спектра состояний частиц в этих моделях примечательно то, что их гамильтонианы может быть представлен в виде суммы квадратичных операторов Казимира $su(n+1)$ и изоспиновой $su(1,n)$ алгебр.

Другая суперсимметричная механика, построенная в диссертации и представляющая интерес с точки зрения изучения квантового эффекта Холла - механика на сфере $\mathbb{S}^4$ во внешнем $SU(2)$ магнитном поле, которая может быть переформулирована как свободная механика на $\mathbb{CP}^3$. Она является первой в ряду систем на $\mathbb{HP}^n$ в $SU(2)$ поле, представимых как механики на $\mathbb{CP}^{2n+1}$. Поскольку $N = 4$ суперсимметричная механика на $\mathbb{HP}^n$ не существует из-за отсутствия комплексной структуры, имеет смысл рассматривать только $N = 2$ версию механик этого вида. Тогда построить механику с требуемым свойством редуцируемости оказывается возможным. Интересно, что она имеет нестандартный вид и содержит на два фермиона больше, чем киральная $N = 2$ механика на $\mathbb{CP}^{2n+1}$.

Другой исследуемой в данной диссертации задачей является построение действий суперчастиц со спонтанным нарушением суперсимметрии с помощью формализма нелинейных реализаций. Применение данного формализма оказывается наиболее эффективным, если действие частицы строится в терминах компонент, а не суперполей. Элемент фактор-пространства и формы Картана позволяют найти, кроме ковариантных производных и условий неприводимости, применяемых и в суперполевых теориях, также и уравнения движения для вспомогательных полей, наиболее удобные определения компонент, бозонное действие, и способ его ковариантизации относительно ненарушенной суперсимметрии. Таким образом, с помощью относительно простых вычислений удается найти требуемое суперсимметричное действие свободной частицы с точностью до одной константы, определяющей дополнительные фермионные слагаемые. Данная константа фиксируется требованием инвариантности действия относительно нарушенной суперсимметрии. Итоговое действие имеет компактный вид, сохраняет основные черты бозонного действия, имеет ясный геометрический смысл, делающий его инвариантность относительно нарушенной суперсимметрии почти очевидной. Стоит отметить, что таким способом оказалось возможным построить действия с 16 суперсимметриями для частиц в $D = 3$ и $D = 5$, которые не были ранее известны, и, более того, действия суперчастиц в $D = 3$ с произвольно большим ($4 \cdot 2^k$, $k = 3, 4, \ldots$) числом суперсимметрий. Компонентный подход на основе формализма нелинейных реализаций оказывается применимым и к действиям с высшими производными. В данном случае ограничивающими факторами оказываются необходимость знать уравнения движения для вспомогательных полей и анализировать относительно сложный анзац для действия, раскладывая его по степеням фермионов.

Возможным направлением дальнейших исследований механик со спонтанным нарушением суперсимметрии является построение суперсимметричных систем на искривленных пространствах, таких, как пространства анти-де Ситтера.

Успешное использование формализма нелинейных реализаций для построения компонентных действий суперчастиц открывает возможность применения аналогичных методов для построения действий суперсимметричных бран со спонтанным нарушением половины суперсимметрий. Таким способом в диссертации были построены действия для мембран в $D = 5, 7$ и 3-бран в $D = 6, 8$, погруженных в плоское пространство, и доказана их инвариантность относительно спонтанно нарушенной и ненарушенной суперсимметрий. Наиболее существенное отличие от суперсимметричной механики заключается в том, что в действиях данных систем присутствуют члены Весса-Зумино. В отличие от основной части лагранжиана, представляющей собой ковариантное обобщение бозонного действия, лагранжиан члена Весса-Зумино не является точным инвариантом относительно преобразований нарушенной суперсимметрии, но сдвигается на полную дивергенцию. Его построение, однако, не представляет принципиальной трудности [50] и также использует результаты применения формализма нелинейных реализаций. Технические трудности, часто препятствующие построению суперполевых действий, существуют и в компонентном подходе; в первую очередь, это относится к необходимости выразить спинорные производные фермионных суперполей через производные бозонных полей по пространственно-временным координатам. Уравнения, связывающие их, являются следствием ковариантных условий, определяющих мультиплет, но в случае мембраны в $D = 7$ и 3-браны в $D = 8$ они оказываются слишком сложными. Тем не менее, данные трудности возможно преодолеть, что и было сделано в диссертации, используя для поиска указанной связи требование инвариантности действия.

Возможным направлением дальнейших исследований компонентных действий бран является построение действий P-бран в высших измерениях и искривленных пространствах, а также построение действий теорий Борна-Инфельда.

Перечислим основные результаты, полученные в диссертации:

1. Основываясь на идеях работы [24], построены $N = 4$ суперсимметричные механики на комплексных проективных пространствах $\mathbb{CP}^n$ в присутствии внешнего $U(n)$ поля, обладающие $SU(n+1)$ инвариантностью. Найденные генераторы соответствующей симметрии коммутируют с суперзарядами. Гамильтониан таких систем может быть представлен как сумма операторов Казимира, построенных из токов $su(n+1)$ и изоспиновых токов.

2. Построена $N = 2$ суперсимметричная механика на комплексном проективном пространстве $\mathbb{CP}^3$, допускающая формулировку как механика на сфере $\mathbb{S}^4$ во внешнем $SU(2)$ магнитном поле. Построена суперполевая формулировка этой механики. Также построены суперсимметричные механики на пространствах $\mathbb{CP}^{2k+1}$, которые могут быть сформулированы как механики суперчастиц на кватернионных проективных пространствах $\mathbb{HP}^k$ во внешних $SU(2)$ магнитных полях.

3. Построены механики релятивистских частиц в трехмерном пространстве-времени с $N = 4$, $N = 8$, $N = 16$, а также высшими $4 \cdot 2^k,\ k = 3, 4, \ldots$ суперсимметриями, половина из которых спонтанно нарушена. Доказана инвариантность компонентных действий этих механик относительно обеих суперсимметрий. Построена суперсимметричная механика частицы в $D = 5$ с 16 суперсимметриями, из которых 8 спонтанно нарушены. Построены компонентные $N = 4$ - суперсимметричные действия с высшими производными для аниона и частицы с жесткостью и найдены их суперполевые формулировки.

4. Разработан метод построения компонентных действий P-бран, непосредственно обобщающий методы, разработанные в суперсимметричной механике. С его помощью построены компонентные действия для мембран в $D = 5, 7$ и 3-бран в $D = 6, 8$. Доказана

их инвариантность относительно спонтанно нарушенной и ненарушенной суперсимметрий.

Результаты, изложенные в диссертации, были опубликованы в работах [29, 35, 45, 46, 52–54].

Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному руководителю Сергею Олеговичу Кривоносу за поставленные задачи, помощь и поддержку в их решении, а также моим соавторам, принимавшим участие в работе над этими задачами - Стефано Беллуччи, Армену Ераняну, Олафу Лехтенфельду, Армену Нерсесяну, и Антону Олеговичу Сутулину. Автор также выражает признательность коллективу Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований за оказанное доверие и предоставленные возможности для работы, а также лекторам, чьи лекции и семинары оказались ценными для понимания автором сути стоящих перед ним задач и методов их решения, в частности, Иосифу Львовичу Бухбиндеру, Алексею Александровичу Владимирову, Анастасии Андреевне Голубцовой, Евгению Алексеевичу Иванову, Алексею Петровичу Исаеву, Дмитрию Игоревичу Казакову, Александру Владимировичу Патрушеву, Александру Савельевичу Сорину, Келлогу Стелле.

Список литературы

1. Генденштейн Л.Э., Криве И.В. “Суперсимметрия в квантовой механике”, УФН **146**, 553-590 (1985).
2. Gorbunov I.V., Kuzenko S.M., Lyakhovich S.L. “$N = 1$, $D = 3$ Superanyons, $osp(2|2)$ and the Deformed Heisenberg Algebra”, Phys.Rev. **D56**, 3744-3755 (1997), arXiv:hep-th/9702017.
3. Zhang S.C., Hu J.P., Science **294**, 823 (2001).
4. Karabali D., Nair V.P., “Quantum Hall Effect in higher dimensions”, Nucl.Phys. **B641**, 533-546 (2002).
5. Bellucci S., Krivonos S., Shcherbakov A., “Universal Superfield Action for $N = 8 \to N = 4$ Partial Breaking of Global Supersymmetry in $D = 1$”, Phys.Lett. **B638**, 526-530 (2006), arXiv:hep-th/0604215.
6. Bagger J., Galperin A., “Matter couplings in partially broken extended supersymmetry”, Phys.Lett. **B336**, 25 (1994), arXiv:hep-th/9406217.
7. Bagger J., Galperin A., “A New Goldstone multiplet for partially broken supersymmetry”, Phys.Rev. **D55**, 1091 (1997), arXiv:hep-th/9608177.
8. Bagger J., Galperin A., “The Tensor Goldstone multiplet for partially broken supersymmetry”, Phys.Lett. **B412**, 296 (1997), arXiv:hep-th/9707061.
9. Roc̆ek M., Tseytlin A.A., “Partial breaking of global $D = 4$ supersymmetry, constrained superfields, and 3-brane actions”, Phys.Rev. **D59**, 106001 (1999), arXiv:hep-th/9811232.
10. Volkov D. and Akulov V., “Possible Universal Neutrino Interaction”, JETP Lett. **16**, 438-440 (1972);

    “Is the neutrino Goldstone particle?”, Phys. Lett. **B46**, 109 (1973).
11. Ivanov E.A., Kapustnikov A.A., “General Relationship Between Linear and Nonlinear Realizations of Supersymmetry”, J.Phys. **A11**, 2375-2384 (1978).
12. Pavsic M., “Classical Motion of Membranes, Strings and Point Particles With Extrinsic Curvature”, Phys.Lett. **205B**, 231 (1988),

    “The Quantization of a Point Particle With Extrinsic Curvature Leads to the Dirac Equation”, Phys.Lett. **221B**, 264 (1989).
13. Nersessian A., “The Hamiltonian formalism for the generalized rigid particles”, Theor.Math.Phys. **117**, 1214 (1998), arXiv:hep-th/9805009.
14. Zumino B., “Supersymmetry and Kähler manifolds”, Phys. Lett. **87B**, 203 (1979).
15. Davis A.C., Macfarlane A.J., Popat P.C. and van Holten J.W., “The quantum mechanics of

the supersymmetric nonlinear σ-model", J.Phys. A: Math.Gen. **17**, 2945 (1984).

16. Macfarlane A.J. and Popat P.C., "The quantum mechanics of the $N = 2$ extended supersymmetric nonlinear σ-model", J.Phys. A: Math.Gen. **17**, 2955 (1984).
17. Cremmer E. and Sherk J., "The supersymmetric non-linear σ-model in four dimensions and its coupling to supergravity", Phys. Lett. **74B**, 341 (1978).
18. Smilga A.V., "How To Quantize Supersymmetric Theories", Nucl.Phys. **B292**, 363 (1987).
19. Bellucci S., Nersessian A., "A note on $N = 4$ supersymmetric mechanics on Kähler manifolds", Phys.Rev. **D64**, 021702 (2001), arXiv:hep-th/0101065.
20. Bellucci S., Nersessian A., "Kähler geometry and SUSY mechanics", Nucl.Phys.Proc.Suppl. **102**, 227 (2001), arXiv:hep-th/0103005.
21. Macfarlane A.J., "The $SU(N+1)$ σ-model of CP^N model as a non-linear realisation of $SU(N+1)$ symmetry", Nucl. Phys. **B152**, 145 (1979).
22. Karabali D.,"Electromagnetic interactions of higher dimensional quantum Hall droplets", Nucl.Phys. **B726**, 407 (2005), arXiv:hep-th/0507027.
23. Smilga A.V., "Weak supersymmetry", Phys.Lett. **B585**, 173 (2004), arXiv:hep-th/0311023.
24. Bellucci S., Krivonos S., Sutulin A., "CP^n supersymmetric mechanics in $U(n)$ background gauge fields", Phys.Rev. **D84**, 065033 (2011), arXiv:1106.2435 [hep-th].
25. Krivonos S., Lechtenfeld O., Sutulin A., "$N = 4$ Supersymmetry and the BPST Instanton", Phys.Rev. **D81**, 085021 (2010), arXiv:1001.2659 [hep-th].
26. Kirchberg A., Länge J.D., Wipf A., "Extended Supersymmetries and the Dirac Operator", Annals Phys. **315**, 467 (2005), arXiv:hep-th/0401134.
27. Bellucci S., A. Nersessian A., "(Super)oscillator on CP^N and constant magnetic field", Phys. Rev. **D67** (2003) 065013, [Erratum-ibid. **D71** (2005) 089901], arXiv:hep-th/0211070;
    Bellucci S., Nersessian A., Yeranyan A., "Quantum oscillator on CP^n in a constant magnetic field", Phys. Rev. **D70**, 085013 (2004), arXiv:hep-th/0406184;
    Bellucci S., Nersessian A., "Supersymmetric Kaehler oscillator in a constant magnetic field", International Seminar on Supersymmetries and Quantum Symmetries SQS 03, 24-29 Jul 2003. Dubna, Russia, arXiv:hep-th/0401232.
28. Bellucci S., Casteill P.Y., Nersessian A., "Four-dimensional Hall mechanics as a particle on CP^3", Phys. Lett. **B574**, 121 (2003), arXiv:hep-th/0306277.
29. Bellucci S., Kozyrev N., Krivonos S., Sutulin A., "Symmetries of $N = 4$ supersymmetric $\mathbb{CP}^n$ mechanics", J. Phys. **A46**, 275305 (2013), arXiv:1206.0175.
30. Konyushikhin M.A., Smilga A.V.,"Self-duality and supersymmetry", Phys. Lett. **B689**, 95

(2010), arXiv:0910.5162[hep-th];

Ivanov E.A., Konyushikhin M.A., Smilga A.V., “SQM with non-Abelian self-dual fields: harmonic superspace description”, JHEP **1005**, 033 (2010), arXiv:0912.3289 [hep-th];

Ivanov E.A., Smilga A.V., “Dirac operator on complex manifolds and supersymmetric quantum mechanics”, arXiv:1012.2069[hep-th];

Smilga A.V., “Dolbeault complex on $S^4\backslash\{.\}$ and $S^6\backslash\{.\}$ through supersymmetric glasses”, SIGMA **7**, 105 (2011), arXiv:1105.3935[hep-th].

31. Krivonos S., Lechtenfeld O., Sutulin A., “$N = 4$ supersymmetry and the BPST instanton”, Phys. Rev. **D81**, 085021 (2010), arXiv:1001.2659[hep-th].
32. Bellucci S., Beylin A., Krivonos S., Nersessian A., “$N = 4$ supersymmetric mechanics with nonlinear chiral supermultiplet”, Phys.Lett. **B616**, 228-232 (2005), arXiv:hep-th/0503244.
33. Ivanov E., Krivonos S., Lechtenfeld O., “$N = 4, d = 1$ supermultiplets from nonlinear realizations of $D(2, 1; \alpha)$”, Class. Quant. Grav. **21**, 1031 (2004), arXiv:hep-th/0310299.
34. Bellucci S., Krivonos S., Nersessian A., Yeghikyan V., “Isospin particle systems on quaternionic projective spaces”, Phys.Rev. **D87**, 045005 (2013), arXiv:1212.1663 [hep-th].
35. Kozyrev N., Krivonos S., O. Lechenfeld O., “$N = 2$ supersymmetric $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{CP}^3 \to \mathbb{S}^4$ fibration viewed as superparticle mechanics”, J. Phys. Conf. Ser. **411**, 012019 (2013), arXiv:1210.4587 [hep-th].
36. Coleman S.R., Wess J., Zumino B., “Structure of phenomenological Lagrangians. 1”, Phys.Rev. **177**, 2239 (1969); “Structure of phenomenological Lagrangians. 2”, Phys.Rev. **177**, 2247 (1969).
37. Volkov D.V., “Phenomenological Lagrangians”, Sov.J.Part.Nucl. **4**, 3 (1973);

    Ogievetsky V.I., “Nonlinear realizations of internal and space-time symmetries”, In Proceedings of the Xth Winter School of Theoretical Physics in Karpacz, Vol.**1**, p.117 (1974).
38. Ivanov E.A., Ogievetsky V.I., “Inverse Higgs Phenomenon in Nonlinear Realisations”, Teor. Mat. Fiz. **25**, 164 (1975).
39. Ivanov E., Krivonos S., “$N = 1, D = 4$ supermembrane in the coset approach”, Phys.Lett. **B453**, 237-244 (1999), arXiv:hep-th/9901003.
40. Bellucci S., Krivonos S., Sutulin A., “Supersymmetric component actions via coset approach”, Phys.Lett. **B726**, 497-504 (2013), arXiv:1306.1115 [hep-th].
41. Bellucci S., Krivonos S., “Supersymmetric Mechanics in Superspace”, Lect.Notes Phys. **698**, 49-96 (2006), arXiv:hep-th/0602199.
42. S. Bellucci, E. Ivanov, S. Krivonos, “Partial breaking of $N = 1$, $D = 10$ supersymmetry”,

Phys.Lett. **B460**, 348 (1999), arXiv:hep-th/9811244,

"Partial breaking N=4 to N=2: hypermultiplet as a Goldstone superfield", Fortsch.Phys. **48**, 19 (2000), arXiv:hep-th/9809190.

43. Pisarski R.D, "Theory of Curved Paths", Phys.Rev. **D34**, 670 (1986);

Plyushchay M.S., "Massive Relativistic Point Particle With Rigidity", Int.J.Mod.Phys. **A4**, 3851 (1989);

Plyushchay M.S., "Relativistic model of anyon", Phys.Lett. **B248**, 107 (1990).

Nesterenko V.V., "The Singular Lagrangians With Higher Derivatives", J.Phys. **A22**, 1673 (1989);

Nesterenko V.V., "Relativistic particle with curvature in an external electromagnetic field", Int.J.Mod.Phys. **A6**, 3989 (1991);

Isberg J., Lindstrom U., Nordstrom H. and Grundberg J., "Canonical Quantization Of A Rigid Particle", Mod.Phys.Lett. **A5**, 2491 (1990);

Deriglazov A., and Nersessian A., "Rigid particle revisited: extrinsic curvature yields the Dirac equation", arXiv:1303.0483 [hep-th].

44. Jackiw R., Nair V.P., "Relativistic wave equations for anyons", Phys.Rev. **D43**, 1933 (1991);

Chou C.-h, Nair V.P. and Polychronakos A.P., "On the electromagnetic interactions of anyons", Phys.Lett. **B304**, 105 (1993) arXiv:hep-th/9301037;

Cortes J.L. and Plyushchay M.S., "Anyons as spinning particles", Int.J.Mod.Phys. **A11**, 3331 (1996), arXiv:hep-th/9505117,

Gorbunov I.V., Kuzenko S.M. and Lyakhovich S.L., "On the minimal model of anyons", Int.J.Mod.Phys. **A12**, 4199 (1997), arXiv:hep-th/9607114;

Gorbunov I.V., Kuzenko S.M. and Lyakhovich S.L., "$N = 1$, $D = 3$ superanyons, $osp(2|2)$ and the deformed Heisenberg algebra", Phys.Rev. **D56**, 3744 (1997) arXiv:hep-th/9702017.

Nersessian A., "On the geometry of relativistic anyon", Mod.Phys.Lett. **A12**, 1783 (1997), arXiv:hep-th/9704182.

45. Bellucci S., Kozyrev N., Krivonos S., Sutulin A., "Partial breaking of global supersymmetry and super particle actions", JHEP **1401**, 154 (2014), arXiv:1309.3902 [hep-th].

46. Kozyrev N., Krivonos S., O. Lechenfeld O., Nersessian A., "Higher derivative $N = 4$ superparticle in three-dimensional space-time", Phys. Rev. **D89**, 045013 (2014), arXiv:1311.4540 [hep-th].

47. Bellucci S., Ivanov E., Krivonos S., "Superbranes and Super Born-Infeld Theories from Nonlinear Realizations", Nucl.Phys.Proc.Suppl. **102**, 26 (2001).

48. Gonzalez-Rey F., Park I.Y., Roček M., “On dual 3-brane actions with partially broken $N = 2$ supersymmetry”, Nucl.Phys. **B544**, 243 (1999), arXiv:hep-th/9811130.
49. Sorokin D.P., “Superbranes and superembeddings”, Phys.Rept. **329**, 1 (2000), arXiv:hep-th/9906142.
50. Henneaux M., Mezincescu L., “A Sigma Model Interpretation of Green-Schwarz Covariant Superstring Action”, Phys.Lett. **B152**, 340 (1985).
51. Fayet P., “Fermi-Bose hypersymmetry”, Nucl.Phys. **B113**, 135 (1976);

    Sohnius M.F., “Supersymmetry and central charges”, Nucl.Phys. **B138**, 109 (1978).
52. Bellucci S., Kozyrev N., Krivonos S., Yeranyan A., “Supermembrane in $D = 5$: component action”, JHEP **1405**, 142 (2014), arXiv:1312.0231 [hep-th].
53. Bellucci S., Kozyrev N., Krivonos S., Sutulin A., “Component on-shell actions for supersymmetric 3-brane I. 3-brane in $D = 6$”, Class. Quant. Grav. **32**, 035025 (2015), arXiv:1409.0641 [hep-th].
54. Bellucci S., Kozyrev N., Krivonos S., Sutulin A., “Component on-shell actions for supersymmetric 3-branes II. 3-brane in $D = 8$” (2015), arXiv:1411:7550 [hep-th].