ОБЪЕДИНЁННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

Сидоров Степан Сергеевич

Деформированные модели суперсимметричной квантовой механики

Специальность: 01.04.02 – теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор Иванов Евгений Алексеевич

Дубна – 2015

Оглавление

Введение

Суперсимметрия интенсивно исследуется в современной теоретической физике в связи с её значительной ролью в физике элементарных частиц как гипотетической симметрии между бозонными и фермионными полями. В настоящее время именно с суперсимметрией связаны надежды на построение единой теории всех взаимодействий. Кандидатом на такую теорию является теория суперструн [1].

Суперсимметричная квантовая механика – простейшая $d = 1$ суперсимметричная теория [2, 3], соответствующая $d = 1$ суперлгебре Пуанкаре,

$$\{Q^k, Q^n\} = 2\delta^{kn}\, H\,, \qquad [H, Q^k] = 0\,, \qquad k, n = 1, \ldots \mathcal{N}\,, \tag{1}$$

которая состоит из $\mathcal{N}$ действительных суперзарядов Q^n и гамильтониана H. Эффективным инструментом построения суперсимметричных инвариантных действий является суперполевой формализм. Суперполе – это обобщение понятия поля на суперпространство, расширение пространства-времени той или иной размерности антикоммутирующими грассмановыми координатами.

Суперсимметрия в одном измерении играет важную роль в исследовании свойств многомерных суперсимметричных теорий, которые порождают различные виды суперсимметричной механики через размерную редукцию. Одним из первых и известных исследований такого рода стал анализ условий спонтанного нарушения суперсимметрии [3]. Суперсимметризация интегрируемых систем типа Калоджеро-Мозера порождает новые интегрируемые системы и новые многомерные варианты суперконформной $\mathcal{N} = 4$ механики [4], уже нашедшие широкое применение для описания движения суперчастиц вблизи горизонта чёрных дыр [5]. В рамках суперсимметричной механики также были определены и построены нелинейные аналоги $\mathcal{N} \geqslant 4$ мультиплетов [6–9] и аналоги гармонического суперпространства [10, 11].

Важным свойством суперсимметричной механики являются дуальности между $d = 1$ мультиплетами с разным разделением на физические и вспомогательные поля [12, 13]. Проявлением таких дуальностей в суперсимметричной $\mathcal{N} = 4$ механике является то обстоятельство, что исходя из корневого мультиплета $(\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$ и соответствующих моделей суперсимметричной механики, можно получить все остальные её мультиплеты $(\mathbf{n}, \mathbf{4}, \mathbf{4} - \mathbf{n})$, $n = 0, 1, 2, 3$ [8, 14], а также ассоциированные с ними модели.

Другой подход к концепции суперсимметрии в квантовой механике связан с суперсимметризацией пространства отображения. Этот подход соответствует суперрасширению бозонных многообразий до супермногообразий добавлением дополнительных фермионных координат к пространству отображения. Полученное супермногообразие отождествляется с фактор-пространством некоторой супергруппы. К теориям такого типа относятся различные суперсимметричные расширения модели Ландау, которые представляют собой модели нерелятивистских суперчастиц, движущихся на супермногообразиях. Изучение таких моделей может прояснить вопрос о возможных проявлениях суперсимметрии в различных версиях квантового эффекта Холла (включая так называемый спиновый квантовый эффект Холла) [15–17] и других моделях физики конденсированных сред.

В последнее время возрос интерес к суперсимметричным теориям поля на искривлённых пространствах с жёсткой (rigid) суперсимметрией [18–21], основанной на искривлённых аналогах супергруппы Пуанкаре в различных измерениях. Существует надежда, что изучение нового класса теорий приведёт к дальнейшему прогрессу в понимании AdS/CFT соответствия. Поэтому естественный интерес вызывают суперсимметричные модели, которые основываются на некоторых искривлённых версиях $d = 1$ суперсимметрии Пуанкаре. Их можно рассматривать в качестве $d = 1$ аналогов многомерных суперсимметричных моделей, а в некоторых случаях они следуют из многомерных теорий через размерную редукцию [22]. Независимо от вопроса размерной редукции, они могут представлять очевидный интерес сами по себе как нетривиальные самосогласованные деформации стандартных моделей суперсимметричной квантовой механики с большим количеством возможных применений.

Один из возможных способов определения таких моделей следует из вида простейшей нетривиальной $\mathcal{N} = 2$, $d = 1$ суперaлгебры Пуанкаре. Вводя комплексные генераторы

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q^1 + iQ^2)\,, \qquad \bar{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q^1 - iQ^2)\,, \tag{2}$$

супералгебру (1) для $\mathcal{N} = 2$ можно переписать в виде

$$\{Q, \bar{Q}\} = 2H\,, \quad Q^2 = \bar{Q}^2 = 0, \quad [H, Q] = [H, \bar{Q}] = 0\,. \tag{3}$$

К этой супералгебре можно добавить коммутаторы группы автоморфизмов $O(2) \sim U(1)$ с генератором J:

$$[J, Q] = Q\,, \quad [J, \bar{Q}] = -\bar{Q}\,, \quad [H, J] = 0\,. \tag{4}$$

С одной стороны, (анти)коммутаторы (3) и (4) определяют $\mathcal{N} = 2$, $d = 1$ супералгебру Пуанкаре. С другой стороны, эти же (анти)коммутационные отношения определяют супералгебру $u(1|1)$, с H в качестве генератора центрального заряда . Если отбросить $U(1)$ генератор J, мы получаем супералгебру $su(1|1)$. Эта двойственная интерпретация $\mathcal{N} = 2$, $d = 1$ супералгебры Пуанкаре предполагает две возможности её расширения на $d = 1$ суперсимметрии более высокого ранга. Первый способ – это прямое расширение

$$(\mathcal{N}=2\,,\ d=1)\quad\Rightarrow\quad(\mathcal{N}>2\,,\ d=1\ \text{Poincaré})\,, \tag{5}$$

где $\mathcal{N}$, $d=1$ суперsuccessалгебра Пуанкаре определяется соотношениями (1). Другая, менее очевидная возможность соответствует следующей цепочке вложений:

$$(\mathcal{N}=2\,,\ d=1)\equiv u(1|1)\ \subset\ su(2|1)\ \subset\ su(2|2)\ \subset\ \ldots\,. \tag{6}$$

Характерной особенностью этого вида расширения является то, что соответствующая супералгебра обязательно содержит, помимо аналога гамильтониана H , также дополнительные бозонные генераторы. Эти генераторы появляются в замыкании суперзарядов и образуют внутренние симметрии, коммутирующие с гамильтонианом и имеющие определённые ненулевые коммутаторы с суперзарядами. Цепочка (6) не уникальна в том смысле, что можно было бы предложить некоторые другие расширения $u(1|1)$. Супералгебры $su(2|1)$ и $su(2|2)$ в цепочке (6) являются простейшими нетривиальными деформациями $\mathcal{N}=4$ и $\mathcal{N}=8$ одномерных супералгебр Пуанкаре.

Ранее, модели суперсимметричной квантовой механики с альтернативной суперсимметрией $SU(2|1)$, известной также как слабая суперсимметрия (“Weak supersymmetry”), были рассмотрены в [23–26]. Однако систематические методы построения новых моделей такой деформированной суперсимметричной квантовой механики не были предъявлены. Одной из основных целей настоящей работы является разработка таких методов, которые были бы применимы не только к $SU(2|1)$, но и к аналогичным суперсимметриям более высокого ранга с $\mathcal{N}>4$. Универсальным методом построения таких моделей является суперполевой подход, в котором суперполя определены на фактор-пространствах соответствующей супергруппы, т. е. на искривлённом суперпространстве.

В диссертации рассмотрены и исследованы суперсимметричные модели на $d=1$ фактор-пространствах супергруппы $SU(2|1)$ [A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8]. Развит суперполевой подход к суперсимметрии $SU(2|1)$, который применён для построения $SU(2|1)$ аналогов супермультиплетов, известных в «плоской» $\mathcal{N}=4$, $d=1$ суперсимметрии. Это позволило построить новый класс деформированных моделей суперсимметричной квантовой механики и найти суперполевую формулировку лагранжианов вне массовой оболочки (off-shell) для ранее известных моделей. В частности, лагранжианы на массовой оболочке (on-shell), рассмотренные в [23], основаны на $SU(2|1)$ мультиплете $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$. Другой ранее известный тип $SU(2|1)$ суперсимметричных моделей [25, 26] связан с обобщением стандартного кирального условия для $SU(2|1)$ мультиплета $(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{2})$. Заметим, что суперполевые $SU(2|1)$ модели были также построены на фактор-пространствах супергруппы $SU(2|1)$, включающих бозонные координатные подпространства размерности $d = 2, 3$ [20, 21].

В работе [27] было показано, что конформная механика [28] может быть разделена на три класса, соответствующие *параболическим*, *тригонометрическим* и *гиперболическим* реализациям одномерной конформной группы $SO(2,1) \sim SL(2,\mathbb{R})$. Ранее в основном изучались суперсимметричные расширения конформной механики, отвечающие параболическим преобразованиям [4, 6, 29]. В работе [30] классификация $\mathcal{N} = 4$ моделей суперконформной механики была дополнена *тригонометрическим/гиперболическим* типом. В отличие от параболических моделей, тригонометрические/гиперболические суперконформные лагранжианы деформированы дополнительным осцилляторным потенциалом. Один из примеров тригонометрического суперконформного $\mathcal{N} = 4$ действия с потенциалом осциллятора рассматривался в [31].

Важным свойством $SU(2|1)$ суперпространства является то, что тригонометрический тип преобразований суперконформной симметрии $D(2,1;\alpha)$ реализован естественным образом именно на этом суперпространстве [A7]. Оказалось, что $SU(2|1)$ суперполя идеально подходят для полного описания тригонометрических конформных $\mathcal{N} = 4$ действий. Гиперболические действия могут быть получены из тригонометрических простой заменой параметров.

Суперсимметрия $SU(2|1)$ в квантовой механике также возникает в различных вариантах суперсимметричных моделей Ландау [32–34], [A1]. В данных моделях суперсимметрия связана с преобразованиями полей пространства отображения. Тем не менее, исследование таких моделей позволяют выявить общие свойства, присущие $SU(2|1)$ суперсимметрии. С другой стороны, модели Ландау могут обладать нестандартной скрытой мировой суперсимметрией, например, $SU(2|2)$, как показано в [35].

Основной целью диссертации является разработка суперполевого $SU(2|1)$ формализма, который позволяет построить широкий класс моделей суперсимметричной квантовой механики как деформации стандартных $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ моделей. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

- Построение деформированного суперпростанства $SU(2|1)$, а также его гармонического аналога;
- Определение и решение ковариантизованных связей для $SU(2|1)$ суперполей;
- Построение суперсимметричных лагранжианов;

- Изучение квантово-механических систем на простых примерах;

- Анализ структуры суперсимметричных волновых функций с точки зрения теории представлений супергруппы $SU(2|1)$;

- Установление связи с ранее известными моделями с деформированной суперсимметрией $SU(2|1)$ на мировой линии;

Диссертация состоит из Введения, трёх глав основного текста, Заключения, Приложения А, Приложения Б и Списка литературы.

Первая глава посвящена построению суперпространства $SU(2|1)$ и его гармонического аналога. В качестве инструмента построения используется метод форм Картана. Кроме того, дан краткий обзор моделей Ландау на различных фактор-пространствах супергруппы $SU(2|1)$. Простейший вариант такой модели описан в некоторых деталях в Приложении А.

Во второй главе рассматриваются $SU(2|1)$ аналоги линейных мультиплетов стандартной $\mathcal{N} = 4$ механики с полевым составом $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$, $(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{2})$ и $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$. Вдобавок, для мультиплета $(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{2})$ вводится новое обобщённое киральное условие, которое специфично именно для $SU(2|1)$ случая. Для всех этих мультиплетов определены $SU(2|1)$ ковариантизованные связи и найдены их деформированные решения в виде $SU(2|1)$ суперполей. Используя эти суперполя, строятся инвариантные действия, и для соответствующих лагранжианов применяется гамильтонов формализм и квантование. Более подробно рассматриваются несколько простых примеров, для которых решается квантово-механическая задача с построением гильбертова пространства суперволновых функций, вычислением спектра гамильтониана и анализом групповой структуры квантовых состояний. Классификация конечномерных представлений супергруппы $SU(2|1)$ дана в Приложении Б.

В третьей главе $SU(2|1)$ суперполевой формализм применяется для построения суперконформных моделей тригонометрического типа. Для этого мы даём явную реализацию суперконформных генераторов в суперпространстве $SU(2|1)$, где соответствующая супералгебра $su(2|1)$ специальным образом вложена в суперконформную алгебру $D(2,1;\alpha)$. Для рассмотренных ранее $SU(2|1)$ мультиплетов найдены суперконформные преобразования полей и построены соответствующие суперконформные лагранжианы.

В Заключении приведены основные результаты диссертационной работы и обсуждаются направления возможных дальнейших исследований.

В Приложении А рассмотрена суперсимметричная модель Ландау на фермионном фактор-пространстве $SU(2|1)/U(2)$.

В Приложении Б дана классификация конечномерных неприводимых представлений супергруппы $SU(2|1)$.

Глава 1

Суперпространство $SU(2|1)$

В этой главе изложена процедура построения суперпространства $SU(2|1)$ как фактор-пространства этой супергруппы, где супералгебра $su(2|1)$ определена как деформация $\mathcal{N} = 4\,,\ d = 1$ супералгебры Пуанкаре. Используя метод форм Картана, мы находим трансформационные свойства координат суперпространства и суперполей, а также ковариантные производные, соответствующие этому суперпространству. Аналогичным образом построено гармоническое суперпространство для супергруппы $SU(2|1)$.

1.1. Супералгебра $su(2|1)$

Супералгебра $su(2|1)$ в стандартной форме записывается как

$$\begin{aligned}
&\{Q^i, \bar{Q}_j\} = 2mI^i_j + 2\delta^i_j \tilde{H}, \qquad && \left[I^i_j, I^k_l\right] = \delta^k_j I^i_l - \delta^i_l I^k_j\,,\\
&\left[I^i_j, \bar{Q}_l\right] = \frac{1}{2}\,\delta^i_j \bar{Q}_l - \delta^i_l \bar{Q}_j\,, \qquad && \left[I^i_j, Q^k\right] = \delta^k_j Q^i - \frac{1}{2}\,\delta^i_j Q^k,\\
&\left[\tilde{H}, \bar{Q}_l\right] = \frac{m}{2}\,\bar{Q}_l\,, \qquad \left[\tilde{H}, Q^k\right] = -\frac{m}{2}\,Q^k, &&
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Все остальные (анти)коммутаторы равны нулю. Генераторы удовлетворяют следующим правилам эрмитова сопряжения:

$$\left(Q^k\right)^\dagger = \bar{Q}_k\,, \qquad \left(\bar{Q}_k\right)^\dagger = Q^k, \qquad \left(I^k_i\right)^\dagger = I^i_k\,, \qquad \tilde{H}^\dagger = \tilde{H}. \tag{1.2}$$

Параметр m является параметром деформации с размерностью массы. Безразмерные генераторы I^i_j соответствуют симметрии $SU(2)_{\rm int}$, в то время как генератор $\tilde{H}$ с размерностью массы является внутренним генератором симметрии $U(1)_{\rm int}$. В пределе $m = 0$ супералгебра $su(2|1)$ переходит в $\mathcal{N} = 4\,,\ d = 1$ супералгебру Пуанкаре. При этом $\tilde{H}$ становится каноническим гамильтонианом, а генераторы I^i_j становятся генераторами внешних автоморфизмов $SU(2)$. $\mathcal{N} = 4\,,\ d = 1$ супергруппа, соответствующая «плоскому» случаю $m = 0$, обладает группой автоморфизмов $SO(4) \sim SU(2) \times SU'(2)$.

Супералгебру (1.1) можно расширить внешним $U(1)_{\rm ext}$ генератором автоморфизмов F ($F^\dagger = F$) [18], который вращает суперзаряды как

$$\left[F, \bar{Q}_l\right] = -\frac{1}{2}\,\bar{Q}_l\,, \qquad \left[F, Q^k\right] = \frac{1}{2}\,Q^k. \tag{1.3}$$

Массовый параметр m позволяет разделить внутренний генератор $U(1)_{\rm int}$ как $\tilde{H} \equiv H - mF$. Это приводит супералгебру $su(2|1) \oplus u(1)_{\rm ext}$ к виду центрально-расширенной супералгебры

$\widehat{su}(2|1)$:

$$
\begin{aligned}
&\{Q^i, \bar{Q}_j\} = 2m\left(I^i_j - \delta^i_j F\right) + 2\delta^i_j H\,, \qquad \left[I^i_j, I^k_l\right] = \delta^k_j I^i_l - \delta^i_l I^k_j\,,\\
&\left[I^i_j, \bar{Q}_l\right] = \frac{1}{2}\delta^i_j \bar{Q}_l - \delta^i_l \bar{Q}_j\,, \qquad \left[I^i_j, Q^k\right] = \delta^k_j Q^i - \frac{1}{2}\delta^i_j Q^k,\\
&\left[F, \bar{Q}_l\right] = -\frac{1}{2}\,\bar{Q}_l\,, \qquad \left[F, Q^k\right] = \frac{1}{2}\,Q^k.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Генератор F становится внутренним $U(1)_{\text{int}}$ генератором супералгебры $\widehat{su}(2|1)$. Таким образом, внутренние генераторы I^i_j и F образуют симметрию $U(2)_{\text{int}}$, в то же время новый оператор H коммутирует со всеми остальными генераторами и может рассматриваться как центральный заряд. В случае $m \neq 0$ из второй группы автоморфизмов $SU'(2)$ в алгебре (1.4) выживает только генератор F.

Следует обратить внимание на то, что замены[1]

$$
m \to -m\,,\ Q^i \to \bar{Q}^i\,,\ \bar{Q}_j \to -Q_j\,,\ I^i_j \to \varepsilon_{jk}\varepsilon^{il} I^k_l\,,\ H \to H\,,\ F \to -F \tag{1.5}
$$

не меняют вид супералгебры (1.4) (также супералгебру (1.1)), то есть они представляют собой автоморфизм этой супералгебры. Это означает, что случаи положительного и отрицательного m фактически эквивалентны, и поэтому в дальнейшем мы можем ограничить наше рассмотрение выбором $m > 0$.

1.2. Модели Ландау

Супергруппу $SU(2|1)$ можно реализовать левыми сдвигами на нескольких фактор-пространствах супергруппы $SU(2|1)$, которые использовались в различных вариантах суперсимметричных моделей Ландау [32–34], [A1], с суперсимметрией $SU(2|1)$ в пространстве отображения. Супермногообразие $SU(2|1)/U(1|1)$, известное как суперсфера [34], является суперрасширением $(\mathbf{2}|\mathbf{2})$ сферы S^2. Другое суперрасширение сферы S^2, которое соответствует $(\mathbf{2}|\mathbf{4})$ размерному суперфлагу [32], связано с многообразием $SU(2|1)/[U(1) \times U(1)]$. Модели Ландау, связанные с чисто фермионным фактор-пространством $SU(2|1)/U(2)$ размерности $(\mathbf{0}|\mathbf{4})$, рассматривались в [33] и нашей работе [A1]. Также можно рассматривать модели Ландау на фактор-пространстве $SU(2|1)/U(1)$ с бозонным подмногообразием S^3 (суперсфера $(\mathbf{3}|\mathbf{4})$ [36]) или на самой $SU(2|1)$, трактуемой как суперрасширение многообразия $S^3 \times S^1$ (или $S^3 \times \mathbb{R}$). Во всех этих реализациях координаты супермногообразия считаются полями, в соответствии с интерпретацией $SU(2|1)$ как нелинейно реализованной внутренней суперсимметрии. Соответствующие гамильтонианы являются чисто внешними операторами: они коммутируют со

---

[1] $\overline{(\varepsilon_{ki})} = \varepsilon^{ik}$, $\varepsilon^{21} = -\varepsilon^{21} = -\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = 1$.

всеми $SU(2|1)$ генераторами, и никогда не появляются в замыкании генераторов супергруппы.

Модель Ландау на фермионном фактор-пространстве $SU(2|1)/U(2)$ рассмотрена в Приложении А.

1.3. Деформированное суперпространство $\mathcal{N} = 4\,,\ d = 1$

Наша цель состоит в построении суперпространства $SU(2|1)$ как фактор-пространства группы $\widehat{SU}(2|1)$ с соответствующей центрально-расширенной алгеброй (1.4). Оно является прямым аналогом стандартного $\mathcal{N} = 4\,,\ d = 1$ суперпространства [6, 10], когда параметры фактор-пространства трактуются как координаты, а не поля. Поля возникают как компоненты суперполя, определенного на этом фактор-пространстве. Расщепление $U(1)_{\rm int}$ генератора в алгебре (1.4) на H и F позволяет отождествить гамильтониан с оператором центрального заряда. Мы помещаем генераторы $U(2)_{\rm int}$ в подгруппу стабильности, оставляя генераторы H, Q_i и $\bar{Q}_j$ в фактор-пространстве

$$\frac{\widehat{SU}(2|1)}{SU(2)_{\rm int}\times U(1)_{\rm int}} \sim \frac{\{Q^i, \bar{Q}_j, H, I^i_j, F\}}{\{I^i_j, F\}}\,. \tag{1.6}$$

Координаты суперпространства

$$\zeta = \left\{t, \theta_i, \bar{\theta}^j\right\}. \tag{1.7}$$

отождествляются с параметрами, связанными с генераторами фактор-пространства. Элемент фактор-пространства в экспоненциальной параметризации записывается как

$$g = \exp\left\{\left(1 - \frac{2m}{3}\,\bar{\theta}^k\theta_k\right)\left(\theta_i Q^i + \bar{\theta}^j\bar{Q}_j\right)\right\}\exp\{itH\}, \qquad \overline{(\theta_i)} = \bar{\theta}^i. \tag{1.8}$$

Другая реализация этого фактор-пространства, без координаты времени как параметра, использовалась в моделях Ландау [33], [A1].

Формы Картана. Для реализации $SU(2|1)$ на координатах суперпространства (1.7) следует вычислить лево-ковариантные формы Картана. Они определяются с помощью стандартного соотношения

$$\Omega := g^{-1}dg = e^{-B}d\,e^{B} + i\,dt\,H = \Delta\theta_i\,Q^i + \Delta\bar{\theta}^j\,\bar{Q}_j + i\,\Delta h^j_i\,I^i_j + i\,\Delta\hat{h}\,F + i\,\Delta t\,H\,, \tag{1.9}$$

где

$$B := \left(1 - \frac{2m}{3}\,\bar{\theta}^k\theta_k\right)\left(\theta_i Q^i + \bar{\theta}^j\bar{Q}_j\right). \tag{1.10}$$

Исходя из нильпотентности фермионных координат и (анти)коммутационных соотношений (1.4), находим явные выражения для форм Картана:

$$\begin{aligned}
\Delta\theta_i &= d\theta_i + m\left(d\theta_l\bar\theta^l\theta_i - d\theta_i\bar\theta^k\theta_k\right) + \frac{m^2}{8}\,d\theta_i\,(\theta)^2\left(\bar\theta\,\right)^2,\\
\Delta\bar\theta^j &= d\bar\theta^j - m\left(d\bar\theta^l\theta_l\bar\theta^j - d\bar\theta^j\theta_k\bar\theta^k\right) + \frac{m^2}{8}\,d\bar\theta^j\,(\theta)^2\left(\bar\theta\,\right)^2,\\
\Delta t &= dt + i\left(d\theta_i\bar\theta^i + d\bar\theta^i\theta_i\right)\left(1 - 2m\,\bar\theta^k\theta_k\right),\\
\Delta\hat h &= -\,im\left(d\theta_i\bar\theta^i + d\bar\theta^i\theta_i\right)\left(1 - 2m\,\bar\theta^k\theta_k\right),\\
\Delta h_i^j &= im\left[d\theta_i\bar\theta^j + d\bar\theta^j\theta_i - \frac{1}{2}\,\delta_i^j\left(d\theta_l\bar\theta^l + d\bar\theta^l\theta_l\right)\right]\left(1 - m\,\bar\theta^k\theta_k\right).
\end{aligned}\tag{1.11}$$

Мы используем следующие обозначения для грассмановых переменных:

$$(\theta)^2 = \theta_i\theta^i, \qquad \left(\bar\theta\,\right)^2 = \bar\theta^i\bar\theta_i\,.\tag{1.12}$$

Трансформационные свойства. Трансформационные свойства суперпространства под действием левых сдвигов, с инфинитезимальными параметрами ϵ_i и $\bar\epsilon^i = \overline{(\epsilon_i)}$, а также индуцированные бесконечно-малые преобразования, принадлежащие подгруппе стабильности $(I^i_j\,, F)$, можно найти по общей формуле

$$\left(1 + \epsilon_i Q^i + \bar\epsilon^i\bar Q_i\right) g = g' h\,,\tag{1.13}$$

где

$$h = 1 + \left(i\delta h_i^j I_j^i + i\delta\hat h F\right).\tag{1.14}$$

Уравнения (1.13), (1.14) эквивалентны соотношению

$$g^{-1}\left(\epsilon_i Q^i + \bar\epsilon^i\bar Q_i\right) g = g^{-1}\delta g + i\delta h_i^j I_j^i + i\delta\hat h F.\tag{1.15}$$

Принимая во внимание, что $g^{-1}\delta g$ определяется теми же формулами (1.9) – (1.11) с δ вместо d, легко найти ϵ-преобразования суперпространственных координат[2]

$$\begin{aligned}
&\delta\theta_i = \epsilon_i + 2m\,\bar\epsilon^k\theta_k\theta_i\,, \qquad \delta\bar\theta^j = \bar\epsilon^i - 2m\,\epsilon_k\bar\theta^k\bar\theta^i,\\
&\delta t = i\left(\epsilon_k\bar\theta^k + \bar\epsilon^k\theta_k\right),
\end{aligned}\tag{1.16}$$

и индуцированные $u(2)_{\rm int}$ элементы

$$\begin{aligned}
&\delta\hat h = -\,im\left(\epsilon_k\bar\theta^k + \bar\epsilon^k\theta_k\right),\\
&\delta h_i^j = im\left[\epsilon_i\bar\theta^j + \bar\epsilon^j\theta_i - \frac{1}{2}\,\delta_i^j\left(\epsilon_k\bar\theta^k + \bar\epsilon^k\theta_k\right)\right]\left(1 - m\,\bar\theta^k\theta_k\right).
\end{aligned}\tag{1.17}$$

---

[2] Можно показать, что преобразования фермионных координат в (1.16) эквивалентны преобразованиям полей (A.1).

Мера интегрирования, определённая формулой

$$d\zeta := dt\, d^2\theta\, d^2\bar{\theta}\, \left(1 + 2m\, \bar{\theta}^k \theta_k\right), \tag{1.18}$$

инвариантна под действием преобразований (1.16), $\delta\,(d\zeta) = 0\,.$

Из общего закона преобразования формы Картана $\Omega\,$,

$$\Omega' = h\, \Omega\, h^{-1} - dh\, h^{-1}, \tag{1.19}$$

мы находим бесконечно-малое преобразование

$$\delta\Omega \simeq \Big[\Big(i\delta h_i^j I_j^i + i\delta\hat{h}F\Big), \Omega\Big]. \tag{1.20}$$

Таким образом, компонентные формы Картана, не принадлежащие подалгебре стабильности $(I_k^i\,, F)$, однородно преобразуются по $SU(2|1)\,$.

Остальные $SU(2|1)$ преобразования координат суперпространства содержатся в замыкании ϵ и $\bar{\epsilon}$ преобразований (1.16). Они могут быть найдены вычислением скобки Ли этих преобразований.

Вычислив реализацию ϵ-преобразований на суперпространстве, мы можем определить $SU(2|1)$ генераторы в виде соответствующих дифференциальных операторов:

$$\left(\delta\theta_i, \delta\bar{\theta}^i, \delta t\right) = \left[\epsilon_i Q^i + \bar{\epsilon}^j \bar{Q}_j\,, \left(\theta_i, \bar{\theta}^i, t\right)\right], \tag{1.21}$$

откуда

$$Q^i = \frac{\partial}{\partial\theta_i} - 2m\, \bar{\theta}^i \bar{\theta}^j\, \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^j} + i\bar{\theta}^i \partial_t\,, \qquad \bar{Q}_j = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^j} + 2m\, \theta_j \theta_k\, \frac{\partial}{\partial\theta_k} + i\theta_j \partial_t\,. \tag{1.22}$$

Антикоммутаторы суперзарядов замыкаются на реализацию бозонных генераторов I_j^i, F, H:

$$\begin{aligned} I_j^i &= \left(\bar{\theta}^i \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^j} - \theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_i}\right) - \frac{1}{2}\,\delta_j^i \left(\bar{\theta}^k \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^k} - \theta_k \frac{\partial}{\partial\theta_k}\right), \\ H &= i\partial_t, \qquad F = \frac{1}{2}\left(\bar{\theta}^k \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^k} - \theta_k \frac{\partial}{\partial\theta_k}\right). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Можно проверить, что операторы (1.22) и (1.23) действительно образуют супералгебру (1.4).

Чтобы построить реализацию $SU(2|1)$ на суперполях, которые описывают нетривиальные $U(2)_{\text{int}}$ мультиплеты, следует расширить (1.22) и (1.23) матричными частями $i\delta h_i^j \tilde{I}_j^i$ и $i\delta\hat{h}\tilde{F}$. Матричные генераторы $\tilde{I}_j^i$ и $\tilde{F}$ действуют на суперполе Φ^A с внешним индексом A некоторого $U(2)_{\text{int}}$ представления, генерируя следующие пассивные нечётные преобразования суперполей:

$$\delta\Phi^A = \left(i\delta\hat{h}\tilde{F} + i\delta h_i^j \tilde{I}_j^i\right)\Phi^A. \tag{1.24}$$

С учётом матричных генераторов, суперзаряды реализуются как

$$
\begin{aligned}
&Q^i = \frac{\partial}{\partial\theta_i} - 2m\,\bar\theta^i\bar\theta^k\,\frac{\partial}{\partial\bar\theta^k} + i\bar\theta^i\partial_t - m\,\bar\theta^i\tilde F + m\,\bar\theta^k\left(1 - m\,\bar\theta^l\theta_l\right)\tilde I^i_k\,,\\
&\bar Q_j = \frac{\partial}{\partial\bar\theta^j} + 2m\,\theta_j\theta_k\,\frac{\partial}{\partial\theta_k} + i\theta_j\partial_t - m\,\theta_j\tilde F + m\,\theta_k\left(1 - m\,\bar\theta^l\theta_l\right)\tilde I^k_j\,.
\end{aligned} \tag{1.25}
$$

1.3.1. Ковариантные производные

Ковариантные производные можно найти из общего выражения для ковариантного дифференциала, действующего на суперполе $\Phi^A\left(t,\theta_i,\bar\theta^j\right)$:

$$
\mathcal{D}\Phi^A := d\Phi^A + \left[i\,\Delta h^j_i\,\tilde I^i_j + i\,\Delta\hat h\,\tilde F\right]^B_A\Phi_B \equiv \left[\Delta\theta_i\mathcal{D}^i - \Delta\bar\theta^j\bar{\mathcal{D}}_j + \Delta t\,\mathcal{D}_{(t)}\right]\Phi^A\,. \tag{1.26}
$$

Ковариантные производные $\mathcal{D}^i, \bar{\mathcal{D}}_j, \mathcal{D}_{(t)}$ вычисляются из этого определения в виде:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^i &= \left[1 + m\,\bar\theta^k\theta_k - \frac{3m^2}{8}\,(\theta)^2\left(\bar\theta\,\right)^2\right]\frac{\partial}{\partial\theta_i} - m\,\bar\theta^i\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j} - i\bar\theta^i\partial_t\\
&\quad + m\,\bar\theta^i\tilde F - m\,\bar\theta^j\left(1 - m\,\bar\theta^k\theta_k\right)\tilde I^i_j\,,\\
\bar{\mathcal{D}}_j &= -\left[1 + m\,\bar\theta^k\theta_k - \frac{3m^2}{8}\,(\theta)^2\left(\bar\theta\,\right)^2\right]\frac{\partial}{\partial\bar\theta^j} + m\,\bar\theta^k\theta_j\frac{\partial}{\partial\bar\theta^k} + i\theta_j\partial_t\\
&\quad - m\,\theta_j\tilde F + m\,\theta_k\left(1 - m\,\bar\theta^l\theta_l\right)\tilde I^k_j\,,\\
\mathcal{D}_{(t)} &= \partial_t\,.
\end{aligned} \tag{1.27}
$$

(Анти)коммутационные соотношения между ковариантными производными и матричными генераторами подобны центрально-расширенной супералгебре $\widehat{su}(2|1)$:

$$
\begin{aligned}
&\{\mathcal{D}^i, \bar{\mathcal{D}}_j\} = 2m\left(\tilde I^i_j - \delta^i_j\tilde F\right) + 2i\delta^i_j\mathcal{D}_{(t)}\,, \qquad \left[\tilde I^i_j, \tilde I^k_l\right] = \delta^k_j\tilde I^i_l - \delta^i_l\tilde I^k_j\,,\\
&\tilde I^i_j\bar{\mathcal{D}}_l = \delta^i_l\bar{\mathcal{D}}_j - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\bar{\mathcal{D}}_l\,, \qquad \tilde I^i_j\mathcal{D}^k = \frac{1}{2}\,\delta^i_j\mathcal{D}^k - \delta^k_j\mathcal{D}^i,\\
&\tilde F\bar{\mathcal{D}}_l = \frac{1}{2}\,\bar{\mathcal{D}}_l\,, \qquad \tilde F\mathcal{D}^k = -\frac{1}{2}\,\mathcal{D}^k.
\end{aligned} \tag{1.28}
$$

Важной особенностью суперполевого $SU(2|1)$ формализма является наличие дополнительных матричных $U(2)_{\rm int}$ генераторов с нетривиальным действием (1.28) на спинорные ковариантные производные. При вычислении антикоммутаторов ковариантных спиноров предполагается, что $U(2)_{\rm int}$ матричные части спинорной производной, стоящие слева, должным образом действуют также на дублетный индекс производной справа.

1.4. Гармоническое суперпространство $SU(2|1)$

Гармоническое $d = 1$ суперпространство для супергруппы $\widehat{SU}(2|1)$ как соответствующее фактор-пространство может быть определено с использованием тех же методов, как и в случае гармонического суперпространства для $\mathcal{N}=2$, $d=4$ суперконформной группы в [37]. Основными этапами являются переход к новому базису в (1.4), в котором все генераторы характеризуются их $U(1)$ зарядами, и введение группы дополнительных автоморфизмов $SU(2)_{\text{ext}}$, которая одинаково вращает все дублетные индексы генераторов в (1.4).

Используя обозначения

$$
\begin{aligned}
&Q^1 \equiv Q^+, \quad Q^2 \equiv Q^-, \quad \bar{Q}_1 \equiv \bar{Q}^-, \quad \bar{Q}_2 \equiv -\bar{Q}^+, \\
&I^{++} \equiv I^1_2\,, \quad I^{--} \equiv I^2_1\,, \quad I^0 \equiv I^1_1 - I^2_2 = 2I^1_1\,,
\end{aligned}
\tag{1.29}
$$

мы можем переписать супералгебру (1.4) в виде

$$
\begin{aligned}
&\{Q^-, \bar{Q}^+\} = mI^0 - 2H + 2mF\,, \qquad \{Q^+, \bar{Q}^-\} = mI^0 + 2H - 2mF\,, \\
&\{Q^\pm, \bar{Q}^\pm\} = \mp\, 2mI^{\pm\pm}, \qquad \left[I^0, I^{\pm\pm}\right] = \pm\, 2I^{\pm\pm}, \quad \left[I^{++}, I^{--}\right] = I^0, \\
&\left[I^0, \bar{Q}^\pm\right] = \pm\, \bar{Q}^\pm, \qquad \left[I^{++}, \bar{Q}^-\right] = \bar{Q}^+, \qquad \left[I^{--}, \bar{Q}^+\right] = \bar{Q}^-, \\
&\left[I^0, Q^\pm\right] = \pm\, Q^\pm, \qquad \left[I^{++}, Q^-\right] = Q^+, \qquad \left[I^{--}, Q^+\right] = Q^-, \\
&\left[F, \bar{Q}^\pm\right] = -\frac{1}{2}\,\bar{Q}^\pm, \qquad \left[F, Q^\pm\right] = \frac{1}{2}\,Q^\pm.
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

Мы можем также расширить эту супералгебру генераторами $\{T^0, T^{++}, T^{--}\}$ группы автоморфизмов $SU(2)_{\text{ext}}$, которые вращают суперзаряды как внутренние $SU(2)_{\text{int}}$ генераторы $\{I^0, I^{++}, I^{--}\}$. Для согласованности, $SU(2)_{\text{ext}}$ генераторы должны вращать таким же образом индексы генераторов I^i_j, т. е. эти группы $SU(2)$ образуют полу-прямое произведение

$$
[T, I] \propto I\,. \tag{1.31}
$$

Затем мы вводим гармоническое фактор-пространство расширенной супергруппы:

$$
\frac{\widehat{SU}(2|1) \rtimes SU(2)_{\text{ext}}}{U(1)_{\text{int}} \times U(1)_{\text{ext}}} = \frac{\{H, Q^i, \bar{Q}_k, F, I^i_j, T^{\pm\pm}, T^0\}}{\{F, T^0\}} \sim \left\{t, \theta_i, \bar{\theta}^k, v^j_i, u^\pm_j\right\}, \tag{1.32}
$$

где гармонические переменные v^j_i параметризуют группу $SU(2)_{\text{int}}$, в то время как переменные $u^\pm_i$, $u^{+i}u^-_i = 1$ – стандартные гармоники на фактор-пространстве $SU(2)_{\text{ext}}/U(1)_{\text{ext}} \sim S^2$ [38]. В качестве следующего шага, необходимо перейти к «минимальному» комплексному фактор-пространству

$$
\frac{\{H, Q^\pm, \bar{Q}^\pm, F, I^{\pm\pm}, I^0, T^{\pm\pm}, T^0\}}{\{F, I^{++}, I^0, I^{--} - T^{--}, T^0\}} \sim \left\{t_{(A)}, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm, w^\pm_i\right\} =: \zeta_H\,. \tag{1.33}
$$

Это суперпространство – деформация стандартного плоского $\mathcal{N}=4$, $d=1$ гармонического суперпространства [10]. Новые гармоники $w^\pm_i$, подходящим образом выраженные через би-гармонический набор координат $(v^i_j, u^\pm_k)$ [37], по-прежнему удовлетворяют стандартным условиям $w^{+i}w^-_i = 1$.

Мы пропускаем большинство деталей построения, которые в основном совпадают с приведенными в разделе 9.1 книги [37]. Набор координат, определенных в (1.33), образует *аналитический базис* гармонического суперпространства $SU(2|1)$. Нечётные $SU(2|1)$ преобразования в этом базисе

$$\begin{aligned}
&\delta\theta^{+} = \epsilon^{+} + m\,\bar{\theta}^{+}\theta^{+}\epsilon^{-}, \qquad \delta\bar{\theta}^{+} = \bar{\epsilon}^{+} - m\,\bar{\theta}^{+}\theta^{+}\bar{\epsilon}^{-},\\
&\delta\theta^{-} = \epsilon^{-} + 2m\,\bar{\epsilon}^{-}\theta^{-}\theta^{+}, \qquad \delta\bar{\theta}^{-} = \bar{\epsilon}^{-} + 2m\,\epsilon^{-}\bar{\theta}^{-}\bar{\theta}^{+},\\
&\delta w_i^{+} = -\,m\left(\bar{\theta}^{+}\epsilon^{+} + \theta^{+}\bar{\epsilon}^{+}\right) w_i^{-}, \qquad \delta w_i^{-} = 0\,, \qquad \delta t_{(A)} = 2i\left(\epsilon^{-}\bar{\theta}^{+} + \theta^{+}\bar{\epsilon}^{-}\right), \quad (1.34)
\end{aligned}$$

получены как левые сдвиги соответствующего элемента фактор-пространства, где

$$\epsilon^{\pm} := \epsilon^{i} w_i^{\pm}\,, \qquad \bar{\epsilon}^{\pm} = \bar{\epsilon}^{k} w_k^{\pm}\,, \quad w_i^{+} w_k^{-} - w_k^{+} w_i^{-} = \varepsilon_{ik}\,. \tag{1.35}$$

Обратим внимание на асимметрию в преобразованиях гармонических переменных w_i^{+} и w_k^{-}. Это – общая черта гармонических расширений искривлённых суперпространств [37, 39], и подобное свойство имело место в $d = 1$ гармоническом суперпространстве при рассмотрении реализации $\mathcal{N} = 4\,,\, d = 1$ суперконформной группы $D(2,1;\alpha)$ на гармонических координатах [10].

Из преобразований (1.34) следует, что $SU(2|1)$ гармоническое суперпространство содержит замкнутое аналитическое гармоническое подпространство, параметризованное сокращенным набором координат

$$\zeta_{(A)} := \left(t_{(A)}, \bar{\theta}^{+}, \theta^{+}, w_i^{\pm}\right). \tag{1.36}$$

Это подпространство может быть идентифицировано с фактор-пространством

$$\frac{\{H, Q^{\pm}, \bar{Q}^{\pm}, F, I^{\pm\pm}, I^{0}, T^{\pm\pm}, T^{0}\}}{\{Q^{+}, \bar{Q}^{+}, F, I^{++}, I^{0}, I^{--} - T^{--}, T^{0}\}} \sim \zeta_{(A)}\,. \tag{1.37}$$

На аналитическом подпространстве можно определить меру интегрирования

$$d\zeta^{--}_{(A)} := dw\, dt_{(A)}\, d\bar{\theta}^{+} d\theta^{+}, \tag{1.38}$$

которая инвариантна относительно преобразований координат (1.34). Полную меру интегрирования $d\zeta_H$ в аналитическом базисе можно записать в виде

$$d\zeta_H := dw\, dt_{(A)}\, d\bar{\theta}^{-} d\theta^{-} d\bar{\theta}^{+} d\theta^{+}\left(1 + m\,\bar{\theta}^{+}\theta^{-} - m\,\bar{\theta}^{-}\theta^{+}\right). \tag{1.39}$$

Она неинвариантна,

$$\delta(d\zeta_H) = d\zeta_H\left[-\,m\left(\bar{\theta}^{-}\epsilon^{+} + \theta^{-}\bar{\epsilon}^{+}\right)\left(1 - m\,\bar{\theta}^{+}\theta^{-} + m\,\bar{\theta}^{-}\theta^{+}\right) - m\left(\bar{\theta}^{+}\epsilon^{-} + \theta^{+}\bar{\epsilon}^{-}\right)\right], \tag{1.40}$$

и невозможно подобрать скалярный множитель, компенсирующий вариацию полной меры (1.40).

Расширяя набор координат (1.7) гармоническими координатами $w_i^{\pm}$, мы приходим к центральному базису гармонического суперпространства $SU(2|1)$:

$$\zeta_C = \left\{t, \theta_i, \bar{\theta}^j, w_i^{\pm}\right\}. \tag{1.41}$$

Нечётные $SU(2|1)$ преобразования (1.16) координат $\left\{t, \theta_i, \bar{\theta}^j\right\}$ теперь дополнены преобразованиями гармонических координат

$$\delta w_i^{+} = -\,m\left(1 - m\,\bar{\theta}^l\theta_l\right)\left(\bar{\theta}^k\epsilon^j + \theta^k\bar{\epsilon}^j\right) w_k^{+} w_j^{+} w_i^{-}, \qquad \delta w_i^{-} = 0\,. \tag{1.42}$$

Связь с аналитическим базисом (1.33) задаётся соотношениями

$$\begin{aligned}
&\theta^i w_i^{-} = \theta^{-}, \qquad \theta^i w_i^{+} = \theta^{+}\left(1 + m\,\bar{\theta}^{+}\theta^{-} - m\,\bar{\theta}^{-}\theta^{+}\right),\\
&\bar{\theta}^k w_k^{-} = \bar{\theta}^{-}, \qquad \bar{\theta}^k w_k^{+} = \bar{\theta}^{+}\left(1 + m\,\bar{\theta}^{+}\theta^{-} - m\,\bar{\theta}^{-}\theta^{+}\right),\\
&t = t_{(A)} + i\left(\bar{\theta}^{-}\theta^{+} + \bar{\theta}^{+}\theta^{-}\right).
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Можно показать, что мера (1.39) в центральном базисе (1.41) сводится к произведению стандартной инвариантной меры (1.18) и неинвариантной гармонической меры:

$$d\zeta_H = dw\,d\zeta\,. \tag{1.44}$$

Эта мера $SU(2|1)$ неинвариантна из-за того, что неинвариантна гармоническая мера dw.

1.4.1. Ковариантные производные

Мы используем стандартные обозначения для частных гармонических производных:

$$\partial^{\pm\pm} := w_i^{\pm}\frac{\partial}{\partial w_i^{\mp}}\,, \qquad \partial^{0} := w_i^{+}\frac{\partial}{\partial w_i^{+}} - w_i^{-}\frac{\partial}{\partial w_i^{-}}\,, \tag{1.45}$$

$$[\partial^{++}, \partial^{--}] = \partial^{0}\,, \quad [\partial^{0}, \partial^{\pm\pm}] = \pm\,2\partial^{\pm\pm}\,. \tag{1.46}$$

Деформированные ковариантные спинорные и гармонические производные могут быть получены с помощью стандартной методики реализаций на фактор-пространствах, применённой к (1.33). Мы пропускаем детали и сразу пишем ответ

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^- &= -\frac{\partial}{\partial\theta^+} - 2i\,\bar\theta^-\partial_{(A)} + 2m\,\bar\theta^-\tilde F - m\,\bar\theta^-\left(\theta^+\frac{\partial}{\partial\theta^+} + \bar\theta^+\frac{\partial}{\partial\bar\theta^+}\right) - m\,\bar\theta^-\partial^0 + m\,\bar\theta^+\partial^{--}, \\
\bar{\mathcal{D}}^- &= \frac{\partial}{\partial\bar\theta^+} - 2i\,\theta^-\partial_{(A)} + 2m\,\theta^-\tilde F + m\,\theta^-\left(\theta^+\frac{\partial}{\partial\theta^+} + \bar\theta^+\frac{\partial}{\partial\bar\theta^+}\right) + m\,\theta^-\partial^0 - m\,\theta^+\partial^{--}, \\
\mathcal{D}^+ &= \frac{\partial}{\partial\theta^-} + m\,\bar\theta^-\left(1 + m\,\theta^-\bar\theta^+\right)\partial^{++} + 2im\,\bar\theta^-\theta^+\bar\theta^+\partial_{(A)} - 2m^2\,\bar\theta^-\theta^+\bar\theta^+\tilde F \\
&\quad + m\,\bar\theta^-\theta^+\frac{\partial}{\partial\theta^-} + m\,\bar\theta^-\bar\theta^+\frac{\partial}{\partial\bar\theta^-}\,, \\
\bar{\mathcal{D}}^+ &= -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^-} - m\,\theta^-\left(1 - m\,\theta^+\bar\theta^-\right)\partial^{++} - 2im\,\theta^-\theta^+\bar\theta^+\partial_{(A)} + 2m^2\,\theta^-\theta^+\bar\theta^+\tilde F \\
&\quad - m\,\theta^-\theta^+\frac{\partial}{\partial\theta^-} - m\,\theta^-\bar\theta^+\frac{\partial}{\partial\bar\theta^-}\,, \qquad (1.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}^{++} = \left(1 + m\,\bar\theta^+\theta^- - m\,\bar\theta^-\theta^+\right)^{-1}\partial^{++} + 2i\,\theta^+\bar\theta^+\partial_{(A)} - 2m\,\theta^+\bar\theta^+\tilde F + \theta^+\frac{\partial}{\partial\theta^-} + \bar\theta^+\frac{\partial}{\partial\bar\theta^-}\,, \\
&\mathcal{D}^{--} = \left(1 + m\,\bar\theta^+\theta^- - m\,\bar\theta^-\theta^+\right)\partial^{--} + 2i\,\theta^-\bar\theta^-\partial_{(A)} - 2m\,\theta^-\bar\theta^-\tilde F + \theta^-\frac{\partial}{\partial\theta^+} + \bar\theta^-\frac{\partial}{\partial\bar\theta^+}\,, \\
&\mathcal{D}^0 = \partial^0 + \left(\theta^+\frac{\partial}{\partial\theta^+} + \bar\theta^+\frac{\partial}{\partial\bar\theta^+}\right) - \left(\theta^-\frac{\partial}{\partial\theta^-} + \bar\theta^-\frac{\partial}{\partial\bar\theta^-}\right), \\
&\mathcal{D}_{(A)} = \partial_{(A)}\,, \qquad \partial_{(A)} = \frac{\partial}{\partial t_{(A)}}\,. \qquad (1.48)
\end{aligned}$$

Здесь, матричный генератор $\tilde F$ соответствует внутренней $U(1)_{\text{int}}$ симметрии. Можно проверить, что эти производные действительно ковариантны относительно преобразований (1.34). (Анти)коммутационные соотношения между ними подобны супералгебре (1.30):

$$\begin{aligned}
&\{\bar{\mathcal{D}}^+, \mathcal{D}^-\} = m\mathcal{D}^0 - 2m\tilde F + 2i\mathcal{D}_{(A)}\,, \qquad \{\bar{\mathcal{D}}^-, \mathcal{D}^+\} = m\mathcal{D}^0 + 2m\tilde F - 2i\mathcal{D}_{(A)}\,, \\
&\{\mathcal{D}^\pm, \bar{\mathcal{D}}^\pm\} = \mp\, 2m\mathcal{D}^{\pm\pm}, \qquad \left[\mathcal{D}^{++}, \mathcal{D}^{--}\right] = \mathcal{D}^0, \qquad \left[\mathcal{D}^0, \mathcal{D}^{\pm\pm}\right] = \pm\, 2\mathcal{D}^{\pm\pm}, \\
&\left[\mathcal{D}^{++}, \mathcal{D}^-\right] = \mathcal{D}^+, \qquad \left[\mathcal{D}^{--}, \mathcal{D}^+\right] = \mathcal{D}^-, \qquad \left[\mathcal{D}^0, \mathcal{D}^\pm\right] = \pm\,\mathcal{D}^\pm, \\
&\left[\mathcal{D}^{++}, \bar{\mathcal{D}}^-\right] = \bar{\mathcal{D}}^+, \qquad \left[\mathcal{D}^{--}, \bar{\mathcal{D}}^+\right] = \bar{\mathcal{D}}^-, \qquad \left[\mathcal{D}^0, \bar{\mathcal{D}}^\pm\right] = \pm\,\bar{\mathcal{D}}^\pm, \qquad (1.49) \\
&\tilde F\mathcal{D}^\pm = -\frac{1}{2}\,\mathcal{D}^\pm, \qquad \tilde F\bar{\mathcal{D}}^\pm = \frac{1}{2}\,\bar{\mathcal{D}}^\pm. \qquad (1.50)
\end{aligned}$$

Производные $\mathcal{D}^+$, $\bar{\mathcal{D}}^+$ удобно представить в виде

$$\mathcal{D}^+ = \frac{\partial}{\partial\theta^-} + m\,\bar\theta^-\mathcal{D}^{++}, \qquad \bar{\mathcal{D}}^+ = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^-} - m\,\theta^-\mathcal{D}^{++}. \qquad (1.51)$$

Эти спинорные производные, вместе с $\mathcal{D}^{++}$ и $\mathcal{D}^0$, образуют так называемую структуру Коши-Римана [37]

$$\begin{aligned}
&\{\mathcal{D}^+, \bar{\mathcal{D}}^+\} = -\,2m\mathcal{D}^{++}, \\
&\left[\mathcal{D}^0, \mathcal{D}^+\right] = \mathcal{D}^+, \quad \left[\mathcal{D}^0, \bar{\mathcal{D}}^+\right] = \bar{\mathcal{D}}^+, \quad \left[\mathcal{D}^0, \mathcal{D}^{++}\right] = 2\mathcal{D}^{++}, \\
&\{\mathcal{D}^+, \mathcal{D}^+\} = \{\bar{\mathcal{D}}^+, \bar{\mathcal{D}}^+\} = 0\,, \ \left[\mathcal{D}^{++}, \mathcal{D}^+\right] = \left[\mathcal{D}^{++}, \bar{\mathcal{D}}^+\right] = 0\,. \qquad (1.52)
\end{aligned}$$

Все остальные (анти)коммутаторы могут быть получены из этих путём применения оператора гармонической производной $\mathcal{D}^{--}$, которая вместе с операторами $\mathcal{D}^{++}$ и $\mathcal{D}^{0}$ образует алгебру $su(2)$. Нестандартной особенностью рассматриваемого случая является то, что ковариантная гармоническая производная $\mathcal{D}^{++}$ в структуре (1.52), сохраняющая аналитичность, появляется в антикоммутаторе спинорных производных $\mathcal{D}^{+}$, $\bar{\mathcal{D}}^{+}$. Это влечёт за собой существенные отличия $SU(2|1)$ гармонического формализма и соответствующих моделей $SU(2|1)$ механики от их плоских $\mathcal{N} = 4\,,\ d = 1$ аналогов. Другой особенностью $SU(2|1)$ гармонического формализма является наличие дополнительного матричного $U(1)$ генератора $\tilde{F}$ с нетривиальным действием (1.50) на спинорные ковариантные производные.

1.4.2. Гармонические $SU(2|1)$ суперполя

Пассивные нечётные преобразования гармонических суперполей в аналитическом базисе $\Phi\left(\zeta_H\right)$ можно записать в виде

$$\delta\Phi = -\,m\left[2\left(\bar{\theta}^{+}\epsilon^{-} - \theta^{+}\bar{\epsilon}^{-}\right)\tilde{F} + \left(\bar{\theta}^{+}\epsilon^{-} + \theta^{+}\bar{\epsilon}^{-}\right)\mathcal{D}^{0} + \left(\bar{\theta}^{-}\epsilon^{-} + \theta^{-}\bar{\epsilon}^{-}\right)\mathcal{D}^{++}\right]\Phi\,. \qquad (1.53)$$

Суперполя Φ переносят определенный $U(1)$ заряд, $\tilde{F}\Phi = \kappa\,\Phi\,,\ \mathcal{D}^{0}\Phi = q\,\Phi\,$. Наличие производной $\mathcal{D}^{++}$ в (1.53) необходимо для правильного $SU(2|1)$ замыкания этих вариаций, а также для того, чтобы различные ковариантные производные суперполя Φ, т. е. $\mathcal{D}^{++}\Phi$, $\mathcal{D}^{+}\Phi$ и $\mathcal{D}^{--}\Phi\,$, преобразовывались по тем же общим правилам (1.53). Используя (1.34), мы запишем преобразования ковариантных производных, входящих в (1.52), а также преобразования производной $\mathcal{D}^{--}$:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{D}^{++} \;&=\; m\left(1 - m\,\bar{\theta}^{+}\theta^{-} + m\,\bar{\theta}^{-}\theta^{+}\right)\left(\bar{\theta}^{+}\epsilon^{+} + \theta^{+}\bar{\epsilon}^{+}\right)\mathcal{D}^{0} - m\left(\bar{\theta}^{+}\epsilon^{-} + \theta^{+}\bar{\epsilon}^{-}\right)\mathcal{D}^{++} \\
&\quad + m\left(1 - m\,\bar{\theta}^{+}\theta^{-} + m\,\bar{\theta}^{-}\theta^{+}\right)\left(\bar{\theta}^{-}\epsilon^{+} + \theta^{-}\bar{\epsilon}^{+}\right)\mathcal{D}^{++} \\
&\quad + 2m\left(1 - m\,\bar{\theta}^{+}\theta^{-} + m\,\bar{\theta}^{-}\theta^{+}\right)\left(\bar{\theta}^{+}\epsilon^{+} - \theta^{+}\bar{\epsilon}^{+}\right)\tilde{F}, \\
\delta\mathcal{D}^{+} \;&=\; -2m\,\theta^{+}\bar{\epsilon}^{-}\mathcal{D}^{+} + m\left[\bar{\epsilon}^{-} + m\,\bar{\theta}^{-}\left(\theta^{-}\bar{\epsilon}^{+} + \bar{\theta}^{+}\epsilon^{-} + \theta^{+}\bar{\epsilon}^{-}\right)\right]\mathcal{D}^{++} \\
&\quad + m^{2}\,\bar{\theta}^{-}\left(1 - m\,\bar{\theta}^{+}\theta^{-}\right)\left[\left(\bar{\theta}^{+}\epsilon^{+} + \theta^{+}\bar{\epsilon}^{+}\right)\mathcal{D}^{0} + 2\left(\bar{\theta}^{+}\epsilon^{+} - \theta^{+}\bar{\epsilon}^{+}\right)\tilde{F}\right], \\
\delta\bar{\mathcal{D}}^{+} \;&=\; -2m\,\bar{\theta}^{+}\epsilon^{-}\bar{\mathcal{D}}^{+} - \,m\left[\epsilon^{-} + m\,\theta^{-}\left(\bar{\theta}^{-}\epsilon^{+} + \bar{\theta}^{+}\epsilon^{-} + \theta^{+}\bar{\epsilon}^{-}\right)\right]\mathcal{D}^{++} \\
&\quad - m^{2}\,\theta^{-}\left(1 + m\,\bar{\theta}^{-}\theta^{+}\right)\left[\left(\bar{\theta}^{+}\epsilon^{+} + \theta^{+}\bar{\epsilon}^{+}\right)\mathcal{D}^{0} + 2\left(\bar{\theta}^{+}\epsilon^{+} - \theta^{+}\bar{\epsilon}^{+}\right)\tilde{F}\right], \\
\delta\mathcal{D}^{--} \;&=\; 2m\left(\bar{\theta}^{+}\epsilon^{-} + \theta^{+}\bar{\epsilon}^{-}\right)\mathcal{D}^{--} + 2m\left(\bar{\theta}^{-}\epsilon^{-} - \theta^{-}\bar{\epsilon}^{-}\right)\tilde{F}, \qquad \delta\mathcal{D}^{0} = 0\,. \qquad (1.54)
\end{aligned}$$

Несмотря на сложность этих преобразований, объекты $\mathcal{D}^{\pm\pm}\Phi$, $\mathcal{D}^{+}\Phi$ и $\bar{\mathcal{D}}^{+}\Phi$ преобразуются по общему закону (1.53), т. е. это $SU(2|1)$ суперполя. Например,

$$\delta\left(\mathcal{D}^{++}\Phi\right) = -\,m\Big[2\left(\bar\theta^{+}\epsilon^{-} - \theta^{+}\bar\epsilon^{-}\right)\tilde{F} + \left(\bar\theta^{+}\epsilon^{-} + \theta^{+}\bar\epsilon^{-}\right)\mathcal{D}^{0} + \left(\bar\theta^{-}\epsilon^{-} + \theta^{-}\bar\epsilon^{-}\right)\mathcal{D}^{++}\Big]\left(\mathcal{D}^{++}\Phi\right). \tag{1.55}$$

Преобразования остальных ковариантных производных, т. е. $\mathcal{D}^{-}\Phi$ и $\bar{\mathcal{D}}^{-}\Phi$, можно получить действием $\mathcal{D}^{--}$ на базисные производные, образующие структуру Коши-Римана. Таким образом, эти объекты тоже являются $SU(2|1)$ суперполями.

Вводя некоторое множество таких суперполей $\{\Phi_1, \ldots \Phi_N\}$, мы можем написать общее σ-модельное действие как

$$S = \int dt\,\mathcal{L} = \int d\zeta_H\, K\left(\Phi_1, \ldots \Phi_N, w_i^{\pm}\right), \quad \mathcal{D}^{0}K\left(\Phi_1, \ldots \Phi_N, w_i^{\pm}\right) = 0\,. \tag{1.56}$$

Здесь K – вещественная функция суперполей и гармонических координат $w_i^{\pm}$, пока произвольная. Варьируя (1.56) по отношению к преобразованиям суперсимметрии (1.34) и (1.53), мы получаем

$$\begin{aligned}
\delta S \;=\;& \int d\zeta_H\,\mathcal{D}^{++}\Big\{ -\,m\left(\bar\theta^{-}\epsilon^{-} + \theta^{-}\bar\epsilon^{-}\right)K\left(\Phi_1 \ldots \Phi_N, w_i^{\pm}\right)\Big\} \\
&+ \int d\zeta_H\,\Big[m\left(\bar\theta^{-}\epsilon^{-} + \theta^{-}\bar\epsilon^{-}\right)\left(1 + m\,\bar\theta^{+}\theta^{-} - m\,\bar\theta^{-}\theta^{+}\right)^{-1}\hat\partial^{++} + m\left(\bar\theta^{+}\epsilon^{-} + \theta^{+}\bar\epsilon^{-}\right)\hat\partial^{0} \\
&- m\left(\bar\theta^{+}\epsilon^{+} + \theta^{+}\bar\epsilon^{+}\right)\hat\partial^{--} - 2m\left(\bar\theta^{+}\epsilon^{-} - \theta^{+}\bar\epsilon^{-}\right)\tilde{F}\,\Big]\,K\left(\Phi_1 \ldots \Phi_N, w_i^{\pm}\right),
\end{aligned} \tag{1.57}$$

где $\hat\partial^{\pm}, \hat\partial^{0}$ действуют только на явные гармоники в функции K. Требование инвариантности δS приводит к следующим ограничениям на K:

$$\begin{aligned}
&\hat\partial^{\pm\pm}K\left(\Phi_1, \ldots \Phi_N, w_i^{\pm}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = K\left(\Phi_1, \ldots \Phi_N\right), \\
&\tilde{F}K\left(\Phi_1, \ldots \Phi_N\right) = \mathcal{D}^{0}K\left(\Phi_1, \ldots \Phi_N\right) = 0\,.
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Таким образом, общее действие даётся интегралом

$$S = \int dt\,\mathcal{L} = \int d\zeta_H\, K\left(\Phi_1, \ldots \Phi_N\right). \tag{1.59}$$

Его вариация равна нулю,

$$\delta S = \int d\zeta_H\,\mathcal{D}^{++}\Big\{ -\,m\left(\bar\theta^{-}\epsilon^{-} + \theta^{-}\bar\epsilon^{-}\right)K\left(\Phi_1 \ldots \Phi_N\right)\Big\} = 0\,. \tag{1.60}$$

В дальнейшем нас будут интересовать аналитические суперполя, т. е. те, которые удовлетворяют грассмановым условиям Коши-Римана

$$\mathcal{D}^{+}\phi = \bar{\mathcal{D}}^{+}\phi = 0\,. \tag{1.61}$$

В силу структурных соотношений (1.52), эти условия аналитичности предполагают также гармоническое условие Коши-Римана

$$\mathcal{D}^{++}\phi = 0\,. \tag{1.62}$$

В этом состоит принципиальное отличие от плоских $\mathcal{N}=4\,,\, d=1$ гармонических аналитических суперполей [10], для которых условие (1.61) не обязательно подразумевает соответствующую версию (1.62). С учётом (1.62), производные $\mathcal{D}^+$ и $\bar{\mathcal{D}}^+$ становятся короткими,

$$\left(\mathcal{D}^+\,,\ \bar{\mathcal{D}}^+\right)\ \Rightarrow\ \left(\frac{\partial}{\partial\theta^-}\,,\ -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^-}\right). \tag{1.63}$$

В результате условия (1.61) означают, что суперполе ϕ определено на аналитическом подпространстве (1.36):

$$\phi = \phi(\zeta_{(A)})\,. \tag{1.64}$$

Необходимость гармонического условия (1.62) для сохранения грассмановой $SU(2|1)$ аналитичности непосредственно вытекает из общего закона преобразований суперполей (1.53). Только при таком ограничении вариация аналитического суперполя не содержит координат $\theta^-, \bar{\theta}^-$.

Отметим, что аналитическое суперпространство (1.36) можно расширить до двух взаимно сопряжённых аналитических суперпространства,

$$\zeta^{(3)}_{(A)} := \left(\theta^-, \zeta_{(A)}\right) = \left(t_{(A)}, \theta^-, \bar{\theta}^+, \theta^+, w^\pm_i\right)\ , \qquad \bar{\zeta}^{(3)}_{(A)} = \left(\bar{\theta}^-, \zeta_{(A)}\right), \tag{1.65}$$

которые замкнуты относительно преобразований (1.34). Соответствующие суперполя ограничены ковариантными условиями

$$\bar{\mathcal{D}}^+\tilde{\phi}_{(1)} = 0 \quad \text{или} \quad \mathcal{D}^+\tilde{\phi}_{(2)} = 0\,, \tag{1.66}$$

которые подобны условиям киральности и не требуют наложения связи (1.62). Существование аналогичных расширенных аналитических суперпространств в плоском $\mathcal{N}=4\,,\ d=1$ случае было отмечено в [11]. Ковариантные производные $\bar{\mathcal{D}}^+$ и $\mathcal{D}^+$ можно сделать короткими:

$$\mathcal{D}^+\left(1 - m\,\theta^-\bar{\theta}^-\mathcal{D}^{++}\right) = \left(1 - m\,\theta^-\bar{\theta}^-\mathcal{D}^{++}\right)\frac{\partial}{\partial\theta^-}\,, \qquad \text{к.с.}. \tag{1.67}$$

Тогда решение условий (1.65) представимо в терминах суперполей, заданных на $\zeta^{(3)}_{(A)}$ или $\bar{\zeta}^{(3)}_{(A)}$.

Глава 2

$SU(2|1)$ мультиплеты и модели суперсимметричной квантовой механики

Здесь определены суперполя на $SU(2|1)$ суперпространстве, которые описывают соответствующие аналоги неприводимых линейных мультиплетов стандартной $\mathcal{N} = 4\,,\ d = 1$ суперсимметрии вне массовой оболочки. Они обозначены как $(\mathbf{n}, \mathbf{4}, \mathbf{4} - \mathbf{n})$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Мультиплет $(\mathbf{n}, \mathbf{4}, \mathbf{4} - \mathbf{n})$ состоит из 4 фермионных полей, n динамических бозонных полей и $(4 - n)$ вспомогательных бозонных полей. Мы определим $SU(2|1)$ мультиплеты $(\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{3})$, $(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{2})$ и $(\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$, и подробно рассмотрим соответствующие модели суперсимметричной квантовой механики.

2.1. Мультиплет $(\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{3})$

В качестве первого примера рассмотрим аналог мультиплета $(\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{3})$ [40, 41]. Он описывается вещественным нейтральным суперполем X, удовлетворяющим $SU(2|1)$ ковариантизации условий стандартного мультиплета $(\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{3})$,

$$\varepsilon^{lj}\bar{\mathcal{D}}_l\,\bar{\mathcal{D}}_j\,X = \varepsilon_{lj}\mathcal{D}^l\,\mathcal{D}^j\,X = 0\,, \qquad \left[\mathcal{D}^i, \bar{\mathcal{D}}_i\right]X = 4m\,X - 4c\,. \tag{2.1}$$

Здесь c – произвольное действительное число. Эти условия имеют следующее решение:

$$\begin{aligned} X \;\; = \;\; & \left[1 - m\,\bar{\theta}^k\theta_k + m^2\,(\theta)^2\,\big(\bar{\theta}\,\big)^2\right]x + \frac{\ddot{x}}{4}\,(\theta)^2\,\big(\bar{\theta}\,\big)^2 + \bar{\theta}^j\theta_i\,B^i_j + c\,\bar{\theta}^j\theta_j\,\big(1 - 2m\,\bar{\theta}^k\theta_k\big) \\ & + \big(1 - 2m\,\bar{\theta}^k\theta_k\big)\,\big(\theta_i\,\psi^i - \bar{\theta}^j\,\bar{\psi}_j\big) - i\,\bar{\theta}^k\theta_k\left(\theta_i\,\dot{\psi}^i + \bar{\theta}^j\,\dot{\bar{\psi}}_j\right), \\ & \overline{(x)} = x\,, \qquad \overline{(\psi^i)} = \bar{\psi}_i\,, \qquad \overline{\big(B^i_j\big)} = B^j_i\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Мы видим, что неприводимый набор компонентных полей составлен из $x(t)$, $\psi^i(t)$, $\bar{\psi}_i(t)$, $B^i_j(t)$ $(B^k_k = 0)$, т. е. X содержит как раз набор полей $(\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{3})$. В пределе $m = 0$ суперполе X сводится к обычному $(\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{3})$ суперполю.

Закон ϵ преобразований суперполя X ,

$$\delta X = -\left[\epsilon_i Q^i + \bar{\epsilon}^j\bar{Q}_j\,, X\right], \tag{2.3}$$

приводит к следующим законам преобразования для компонентных полей:

$$\begin{aligned} & \delta x = \bar{\epsilon}^k\bar{\psi}_k - \epsilon_k\psi^k, \qquad \delta\psi^i = i\bar{\epsilon}^i\dot{x} - m\,\bar{\epsilon}^i x + c\,\bar{\epsilon}^i + \bar{\epsilon}^k B^i_k\,, \\ & \delta B^i_j = -\,2i\left[\epsilon_j\dot{\psi}^i + \bar{\epsilon}^i\dot{\bar{\psi}}_j - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\left(\epsilon_k\dot{\psi}^k + \bar{\epsilon}^k\dot{\bar{\psi}}_k\right)\right] + 2m\left[\bar{\epsilon}^i\bar{\psi}_j - \epsilon_j\psi^i - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\,\big(\bar{\epsilon}^k\bar{\psi}_k - \epsilon_k\psi^k\big)\right]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.1.1. Инвариантные лагранжианы

Используя определение (1.18), мы можем построить общий лагранжиан и действие для $SU(2|1)$ мультиплета $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$ в виде

$$S(X) = -\int d\zeta\, f(X) = -\int dt\, d^2\theta\, d^2\bar\theta\,\left(1 + 2m\,\bar\theta^k\theta_k\right) f(X)\,, \quad S = \int dt\,\mathcal{L}\,. \tag{2.5}$$

Обратим внимание на то, что суперполевая плотность лагранжиана в (2.5) определена с точностью до сдвига

$$f \;\rightarrow\; f + c_1\,X + c_0\,, \tag{2.6}$$

где c_0, c_1 – произвольные вещественные постоянные. После интегрирования по $\theta, \bar\theta$ эти дополнительные члены порождают полные производные, и поэтому они не дают вклада в действие $S(X)$.

Беря интеграл Березина в (2.5), получаем компонентный лагранжиан вне массовой оболочки

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \;&=\; \dot x^2 g(x) + i\left(\bar\psi_i\dot\psi^i - \dot{\bar\psi}_i\psi^i\right) g(x) - B^i_j\left(\frac{1}{2}\,\delta^j_i\bar\psi_k\psi^k - \bar\psi_i\psi^j\right) g'(x) + \frac{1}{2}\,B^i_jB^j_i g(x) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\bar\psi_i\psi^i\right)^2 g''(x) + 2m\,\bar\psi_i\psi^i g(x) + mx\,\bar\psi_i\psi^i g'(x) - m^2x^2 g(x) \\
&\quad - c\,g'(x)\,\bar\psi_i\psi^i + 2cm\,xg(x) - c^2 g(x)\,,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где $g := f''$, $f' = \partial_x f$. Отсутствие f и f' в действии компонентного лагранжиана отражает свободу (2.6).

В качестве следующего стандартного шага мы исключаем вспомогательные поля с помощью их алгебраических уравнений движения,

$$B^i_j = \frac{g'(x)}{g(x)}\left(\frac{1}{2}\,\delta^i_j\bar\psi_k\psi^k - \bar\psi_j\psi^i\right), \tag{2.8}$$

и переписываем лагранжиан в терминах x и ψ^i:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \;&=\; \dot x^2 g(x) + i\left(\bar\psi_i\dot\psi^i - \dot{\bar\psi}_i\psi^i\right) g(x) - \frac{1}{2}\left(\bar\psi_i\psi^i\right)^2\left[g''(x) - \frac{3\left(g'(x)\right)^2}{2g(x)}\right] - m^2x^2 g(x) \\
&\quad + 2m\,\bar\psi_i\psi^i g(x) + mx\,\bar\psi_i\psi^i g'(x) - c\,g'(x)\,\bar\psi_i\psi^i + 2cm\,xg(x) - c^2 g(x)\,.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Он инвариантен относительно следующих нечётных преобразований:

$$\begin{aligned}
&\delta x = \bar\epsilon^k\bar\psi_k - \epsilon_k\psi^k\,, \\
&\delta\psi^i = i\bar\epsilon^i\dot x - m\,\bar\epsilon^i x + c\,\bar\epsilon^i - \left(\bar\epsilon^k\bar\psi_k\psi^i - \frac{1}{2}\,\bar\epsilon^i\bar\psi_k\psi^k\right)\frac{g'(x)}{g(x)}\,, \quad \text{и к.с.}\,.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Мы можем упростить лагранжиан (2.7) переходом к новому бозонному полю $y(x)$ со свободным кинетическим членом. Из равенства

$$\dot{x}^2 g(x) = \frac{1}{2}\,\dot{y}^2 \tag{2.11}$$

мы находим уравнение

$$y'(x) = \sqrt{2g(x)}\,, \qquad y'(x) = \frac{1}{x'(y)} \tag{2.12}$$

и определяем

$$\chi^i = \psi^i y'(x), \qquad \tilde{B}^i_j = \frac{1}{2}\,B^i_j\,y'(x), \qquad V(y) = \frac{x(y)}{x'(y)}\,. \tag{2.13}$$

Решая последнее уравнение в (2.13) как

$$x(y) = \exp\Big\{\int^y \frac{d\tilde{y}}{V(\tilde{y})}\Big\}, \tag{2.14}$$

мы можем переписать лагранжиан (2.7) в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\;& \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{i}{2}\left(\bar{\chi}_i\dot{\chi}^i - \dot{\bar{\chi}}_i\chi^i\right) + \tilde{B}^i_j\tilde{B}^j_i - \frac{V'(y)-1}{V(y)}\,\tilde{B}^j_i\left(\delta^i_j\bar{\chi}_k\chi^k - 2\bar{\chi}_j\chi^i\right) \\
& - \frac{V''(y)V(y) + \left[2V'(y)-3\right]\left[V'(y)-1\right]}{4V^2(y)}\,(\chi)^2\,(\bar{\chi}\,)^2 \\
& + \partial_y\left[mV(y) - c\,V(y)\exp\Big\{-\int^y \frac{d\tilde{y}}{V(\tilde{y})}\Big\}\right]\bar{\chi}_i\chi^i \\
& + \frac{1}{2}\left[mV(y) - c\,V(y)\exp\Big\{-\int^y \frac{d\tilde{y}}{V(\tilde{y})}\Big\}\right]^2 .
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Функцию $V(y)$ можно считать произвольной из-за произвольности $g(x)$ в (2.12). Таким образом, мы получили $SU(2|1)$ лагранжиан с произвольной функцией и дополнительными членами, которые зависят от параметра c. В новом представлении преобразования суперсимметрии приобретают вид

$$\begin{aligned}
\delta y \;&=\; \bar{\epsilon}^k\bar{\chi}_k - \epsilon_k\,\chi^k, \\
\delta\chi^i \;&=\; i\bar{\epsilon}^i\dot{y} - m\,\bar{\epsilon}^i V(y) + c\,\bar{\epsilon}^i V(y)\exp\Big\{-\int^y \frac{d\tilde{y}}{V(\tilde{y})}\Big\} + 2\bar{\epsilon}^k\tilde{B}^i_k + \chi^i\left(\bar{\epsilon}^k\bar{\chi}_k - \epsilon_k\chi^k\right)\frac{V'(y)-1}{V(y)}\,, \\
\delta\tilde{B}^i_j \;&=\; -\,i\left[\epsilon_j\dot{\chi}^i + \bar{\epsilon}^i\dot{\bar{\chi}}_j - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\left(\epsilon_k\dot{\chi}^k + \bar{\epsilon}^k\dot{\bar{\chi}}_k\right)\right] + \tilde{B}^i_j\left(\bar{\epsilon}^k\bar{\chi}_k - \epsilon_k\chi^k\right)\frac{V'(y)-1}{V(y)} \\
& \quad + i\dot{y}\left[\epsilon_j\chi^i + \bar{\epsilon}^i\bar{\chi}_j - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\left(\epsilon_k\chi^k + \bar{\epsilon}^k\bar{\chi}_k\right)\right]\frac{V'(y)-1}{V(y)} \\
& \quad + m\left[\bar{\epsilon}^i\bar{\chi}_j - \epsilon_j\chi^i - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\left(\bar{\epsilon}^k\bar{\chi}_k - \epsilon_k\chi^k\right)\right].
\end{aligned} \tag{2.16}$$

В частном случае $c = 0$, лагранжиан (2.15) переходит в лагранжиан модели со слабой суперсимметрией, введённой в [23].

2.1.2. Квантовая модель осциллятора $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$

Лагранжиан и гамильтониан. Рассмотрим простейший лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{m^2x^2}{2} + \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}_i\dot{\psi}^i - \dot{\bar{\psi}}_i\psi^i\right) + m\,\bar{\psi}_i\psi^i, \tag{2.17}$$

что соответствует следующему выбору:

$$g = 1/2 \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{1}{4}\,x^2 + c_0x + c_1\,, \qquad c = 0\,. \tag{2.18}$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно преобразований

$$\delta x = \bar{\epsilon}^k\bar{\psi}_k - \epsilon_k\psi^k, \qquad \delta\psi^i = i\bar{\epsilon}^i\dot{x} - m\,\bar{\epsilon}^i x\,. \tag{2.19}$$

Соответствующий канонический гамильтониан есть

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{m^2x^2}{2} + m\,\psi^i\bar{\psi}_i\,. \tag{2.20}$$

Этот гамильтониан является суперсимметризацией гамильтониана гармонического осциллятора.

Скобки Пуассона вводятся как[1]

$$\{x,p\} = 1\,, \qquad \{\psi^i,\bar{\psi}_j\} = -i\delta^i_j\,. \tag{2.21}$$

Скобки (2.21) квантуются стандартным способом

$$[x,p] = i\,, \quad \{\psi^i,\bar{\psi}_j\} = \delta^i_j\,, \quad p = -i\partial_x\,,\; \bar{\psi}_j = \partial/\partial\psi^j\,. \tag{2.22}$$

Мы используем соотношение

$$\left[(p - imx)\,,(p + imx)\right] = 2m\,, \tag{2.23}$$

чтобы представить квантовый гамильтониан в виде

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\,(p + imx)\,(p - imx) + m\,\psi^i\bar{\psi}_i\,. \tag{2.24}$$

Квантовые операторы, связанные с остальными зарядами Нётер, принимают вид

$$\hat{Q}^i = \psi^i\,(p - imx)\,, \qquad \hat{\bar{Q}}_i = \bar{\psi}_i\,(p + imx)\,, \tag{2.25}$$

$$\hat{F} = \frac{1}{2}\,\psi^k\bar{\psi}_k\,, \qquad \hat{I}^i_j = \psi^i\bar{\psi}_j - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\psi^k\bar{\psi}_k\,. \tag{2.26}$$

Можно проверить, что они действительно образуют супералгебру (1.4). К гамильтониану $\hat{H}$ и генератору $\hat{F}$ можно добавить константы так, чтобы сумма генераторов $\hat{H} - m\hat{F}$ оставалась

---

[1] Для фермионных полей скобки на самом деле являются скобками Дирака.

постоянной. Используя эту свободу, можно написать квантовый гамильтониан $\hat{H}$ в виде, который соответствует подстановке (2.22) в классический гамильтониан (2.20). В дальнейшем мы будем оперировать с квантовыми операторами (2.24) – (2.26).

Выражения (Б.1) и (Б.2) справедливы независимо от конкретной реализации $SU(2|1)$ генераторов. Для нашей квантово-механической реализации (2.24) – (2.26) они сводятся к следующему компактному виду:

$$m^2 C_2 = \hat{H}\left(\hat{H} - m\right), \qquad m^3 C_3 = \hat{H}\left(\hat{H} - m\right)\left(\hat{H} - \frac{m}{2}\right). \tag{2.27}$$

Таким образом, они полностью определяются энергетическим спектром квантового гамильтониана.

Волновые функции и спектр. Отбрасывая фермионы в (2.24) – (2.26), мы получаем систему гармонического осциллятора, поэтому гильбертово пространство волновых функций строится в терминах волновых функций бозонного гармонического осциллятора.

Общая суперволновая функция $\Omega^{(\ell)}$ на уровне энергии $\ell \geqslant 2$ имеет четырехкратное вырождение (2 бозонных и 2 фермионных состояния) из-за разложения по ψ

$$\Omega^{(\ell)} = a^{(\ell)}\,|\ell\rangle + b_i^{(\ell)}\psi^i\,|\ell - 1\rangle + \frac{1}{2}\,c^{(\ell)}\,\varepsilon_{ij}\psi^i\psi^j\,|\ell - 2\rangle, \qquad \ell \geqslant 2\,, \tag{2.28}$$

где $|\ell\rangle, |\ell-1\rangle, |\ell-2\rangle$ являются функциями гармонического осциллятора на соответствующих уровнях, $a^{(\ell)}, b^{(\ell)}, c^{(\ell)}$ – некоторые численные коэффициенты. Мы рассматриваем операторы $p \pm imx$ в качестве операторов рождения и уничтожения и налагаем стандартные физические условия

$$\bar{\psi}_k\,|\ell\rangle = 0\,, \qquad (p - imx)\,|0\rangle = 0\,, \qquad (p + imx)\,|\ell\rangle = |\ell + 1\rangle. \tag{2.29}$$

Спектр гамильтониана (2.24) имеет линейную зависимость от уровня Ландау ℓ:

$$\hat{H}\,\Omega^{(\ell)} = m\,\ell\,\Omega^{(\ell)}, \qquad m > 0\,, \quad \ell \geqslant 0\,. \tag{2.30}$$

Заметим, что основное состояние ($\ell = 0$) и первое возбужденное состояние ($\ell = 1$) являются специальными, в том смысле, что их волновые функции включают неравное число бозонов и фермионов:

$$\Omega^{(0)} = a^{(0)}\,|0\rangle\,, \qquad \Omega^{(1)} = a^{(1)}\,|1\rangle + b_i^{(1)}\,\psi^i\,|0\rangle\,. \tag{2.31}$$

Основное состояние аннигилируется всеми $SU(2|1)$ генераторами, включая суперзаряды $\hat{Q}^i$ и $\hat{\bar{Q}}_i$, т. е. является $SU(2|1)$ синглетом. Состояния с $\ell = 1$ образуют фундаментальное представление $SU(2|1)$. Суперзаряды действуют на эти состояния как

$$\begin{aligned} &\hat{Q}^i\,\psi^k\,|0\rangle = 0\,, \qquad \hat{\bar{Q}}_i\,\psi^k\,|0\rangle = \delta^k_i\,|1\rangle\,, \\ &\hat{Q}^i\,|1\rangle = 2m\,\psi^i\,|0\rangle\,, \qquad \hat{\bar{Q}}_i\,|1\rangle = 0\,. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Сравнивая собственные значения операторов Казимира (2.27) с (Б.3), мы находим, что в нашем случае $\lambda = 1/2$ для всех уровней $\ell > 0$:

$$C_2(\ell) = (\ell - 1)\,\ell\,, \quad C_3(\ell) = (\ell - 1/2)\,(\ell - 1)\,\ell\,, \quad \beta(\ell) = \ell - 1/2\,. \tag{2.33}$$

Основное состояние $\ell = 0$ соответствует числам $\lambda = \beta = 0$. Операторы Казимира принимают нулевые значения только на уровнях $\ell = 0$ и $\ell = 1$, так что эти уровни образуют атипическое представления супергруппы $SU(2|1)$. На возбуждённых уровнях $\ell > 1$ оба оператора Казимира не равны нулю, так что эти состояния принадлежат к типическим $SU(2|1)$ представлениям, которые характеризуются равным числом бозонов и фермионов. Для наглядности, на рис. 2.1 показана картина вырождения уровней Ландау.

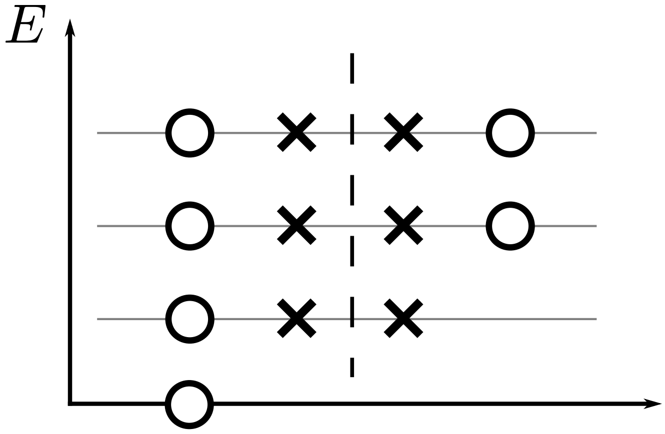

Рис. 2.1. Вырождение уровней Ландау. Круги и кресты обозначают бозонные и фермионные состояния.

Определяя скалярное произведение квантовых состояний как

$$\langle\Omega|\Psi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,\Omega^\dagger\Psi\,, \tag{2.34}$$

можно проверить, что состояния $\Omega^{(\ell)}$ для разных уровней ℓ ортогональны по отношению к этому произведению, а также нормы этих состояний положительно определены. Например,

$$\langle 0|0\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,e^{-mx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{m}}\,. \tag{2.35}$$

Норма состояния $\Omega^{(\ell)}$ определяется как

$$||\Omega^{(\ell)}||^2 = \frac{\langle \Omega^{(\ell)} | \Omega^{(\ell)} \rangle}{\langle \ell | \ell \rangle}. \tag{2.36}$$

Следовательно, для волновых функций (2.28), (2.31) мы находим следующие явно положительные нормы:

$$\begin{aligned} &||\Omega^{(\ell)}||^2 = \bar{a}^{(\ell)} a^{(\ell)} + \frac{\bar{b}^{(\ell) i} b_i^{(\ell)}}{2m\ell} + \frac{\bar{c}^{(\ell)} c^{(\ell)}}{4m^2 \left(\ell - 1\right) \ell}, \quad \ell \geqslant 2\,, \\ &||\Omega^{(1)}||^2 = \bar{a}^{(1)} a^{(1)} + \frac{\bar{b}^{(1) i} b_i^{(1)}}{2m}, \quad ||\Omega^{(0)}||^2 = \bar{a}^{(0)} a^{(0)}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

2.2. Мультиплет $(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{2})$

2.2.1. Киральное суперпространство $SU(2|1)$

У супергруппы $SU(2|1)$ имеется два взаимно сопряжённых комплексных фактор-пространства,

$$\frac{\{Q^i, \bar{Q}_j, H, I^i_j, F\}}{\{\bar{Q}_k, I^i_j, F\}} \sim \{t_L, \theta_i\}\,, \qquad \text{и} \quad \text{к.с.}, \tag{2.38}$$

которые могут быть идентифицированы с левым и правым киральными подпространствами $\zeta_L = \{t_L, \theta_i\}$, $\zeta_R = \left\{t_R, \bar{\theta}^k\right\}$. Соответствующие комплексные бозонные координаты связаны с координатой времени t как

$$t_L = t + i\,\bar{\theta}^k \theta_k - \frac{i}{2}\, m \left(\theta\right)^2 \left(\bar{\theta}\,\right)^2, \qquad \text{и} \quad \text{к.с.}. \tag{2.39}$$

Грассмановы координаты θ_i и $\bar{\theta}^i$ такие же, как и в (1.16). Преобразования $SU(2|1)$ на координатах $\{t_L, \theta_i\}$, $\left\{t_R, \bar{\theta}^i\right\}$ замкнуты и реализованы как

$$\delta\theta_i = \epsilon_i + 2m\,\bar{\epsilon}^k \theta_k \theta_i\,, \qquad \delta t_L = 2i\,\bar{\epsilon}^k \theta_k\,, \quad \text{и} \quad \text{к.с.}. \tag{2.40}$$

Комплексные координаты (2.39) определены с точностью до несущественных сдвигов $t_L \to t_L + a\left(\theta\right)^2$, $t_R \to t_R + \bar{a}\left(\bar{\theta}\,\right)^2$, не нарушающих замкнутости подпространств (2.38).

Мультиплет $(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{2})$ описывается киральным суперполем Φ, которое подчиняется условиям киральности

$$\bar{\mathcal{D}}_j \Phi = 0\,, \qquad \tilde{I}^i_j \Phi = 0\,, \qquad \tilde{F}\Phi = 2\kappa\Phi \tag{2.41}$$

и обладает фиксированным внешним $U(1)_{\rm int}$ зарядом[2]. Условие киральности (2.41) имеет

---

[2] В принципе, мы могли бы приписать суперполю также нетривиальный внешний $SU(2)_{\rm int}$ индекс, но мы рассматриваем простейший случай.

решение

$$\begin{aligned}
&\Phi\left(t_L,\theta,\bar\theta\right)=e^{2i\kappa m(t_L-t)}\Phi_L\left(t_L,\theta\right)=\left(1+2m\,\bar\theta^k\theta_k\right)^{-\kappa}\Phi_L\left(t_L,\theta\right),\\
&\Phi_L\left(t_L,\theta\right)=z+\sqrt{2}\,\theta_i\xi^i+\varepsilon^{ij}\theta_i\theta_jB\,,\qquad \overline{\left(\xi^i\right)}=\bar\xi_i\,.
\end{aligned}\tag{2.42}$$

В центральном базисе $\left\{t,\theta_i,\bar\theta^k\right\}$, киральное суперполе принимает вид

$$\begin{aligned}
\Phi\left(t,\theta,\bar\theta\right) \;=\;& z+\sqrt{2}\,\theta_i\xi^i+\varepsilon^{ij}\theta_i\theta_jB+i\,\bar\theta^k\theta_k\nabla_tz+\sqrt{2}\,i\,\bar\theta^k\theta_k\theta_i\nabla_t\xi^i\\
&-\frac{1}{4}\left(\theta\right)^2\left(\bar\theta\right)^2\left[2im\nabla_tz+\nabla_t^2z\right],
\end{aligned}\tag{2.43}$$

где

$$\nabla_t=\partial_t+2i\kappa m,\qquad \bar\nabla_t=\partial_t-2i\kappa m\,.\tag{2.44}$$

Киральное суперполе с $\tilde F$ зарядом 2κ преобразуется как

$$\delta\Phi\simeq\Phi'\left(t',\theta',\bar\theta'\right)-\Phi\left(t,\theta,\bar\theta\right)=2\kappa m\left(\epsilon_i\bar\theta^i+\bar\epsilon^j\theta_j\right)\Phi\quad\Longleftrightarrow\tag{2.45}$$

$$\delta\Phi_L\left(t_L,\theta\right)=4\kappa m\,\bar\epsilon^k\theta_k\,\Phi_L\left(t_L,\theta\right).\tag{2.46}$$

Законы преобразования суперполей (2.46) индуцируют следующие преобразования для компонентных полей:

$$\begin{aligned}
&\delta z=-\sqrt{2}\,\epsilon_i\xi^i,\qquad \delta\xi^i=\sqrt{2}\,i\bar\epsilon^i\nabla_tz-\sqrt{2}\,\epsilon^iB,\\
&\delta B=-\sqrt{2}\,\bar\epsilon_i\left(m\,\xi^i+i\nabla_t\xi^i\right).
\end{aligned}\tag{2.47}$$

2.2.2. Лагранжиан

Общий лагранжиан определяется через функцию $f\left(\Phi,\bar\Phi\right)$, которая является аналогом потенциала Кэлера стандартной $\mathcal{N}=4$ механики для мультиплета $(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{2})$ [42, 43]:

$$\mathcal{L}_{\text{kin.}}=\frac{1}{4}\int d^2\theta\,d^2\bar\theta\left(1+2m\,\bar\theta^k\theta_k\right)f\left(\Phi,\bar\Phi\right).\tag{2.48}$$

Так как Φ преобразуется с нетривиальным $U(1)_{\text{int}}$ весом $\sim 2\kappa m$ в (2.45), то потенциал Кэлера должен удовлетворять следующим условиям для $\kappa\neq 0$: $f\left(\Phi,\bar\Phi\right)=\tilde f\left(\Phi\bar\Phi\right)$. Если $\kappa=0$, то потенциал $f\left(\Phi,\bar\Phi\right)$ – произвольная действительная функция.

Компонентный лагранжиан пишется в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{kin.}} \;=\;& -\frac{1}{4}\,f_z\nabla_t^2z-\frac{1}{4}\,f_{\bar z}\bar\nabla_t^2\bar z-\frac{1}{4}\,f_{zz}\left(\nabla_tz\right)^2-\frac{1}{4}\,f_{\bar z\bar z}\left(\bar\nabla_t\bar z\right)^2+\frac{1}{2}\,g\,\bar\nabla_t\,\bar z\nabla_tz\\
&-\frac{i}{2}\,\bar\xi_k\xi^k\left(\bar\nabla_t\bar z\,g_{\bar z}-\nabla_tz\,g_z\right)+\frac{i}{2}\,g\left(\bar\xi_i\nabla_t\xi^i+\xi^i\bar\nabla_t\bar\xi_i\right)+\frac{1}{4}\left(\xi\right)^2\left(\bar\xi\right)^2g_{z\bar z}\\
&+B\bar Bg-\frac{1}{2}\left(\xi\right)^2\bar Bg_z-\frac{1}{2}\left(\bar\xi\right)^2Bg_{\bar z}+mg\,\bar\xi_k\xi^k-\frac{i}{2}\,m\left(f_{\bar z}\bar\nabla_t\bar z-f_z\nabla_tz\right),
\end{aligned}\tag{2.49}$$

где $f_z = \partial_z f$, $f_{\bar z} = \partial_{\bar z} f$ и $g := f_{z\bar z}$ есть метрика на многообразии Кэлера. Вспомогательное поле B можно исключить из лагранжиана, используя его уравнение движения

$$B = \frac{1}{2}\, g^{-1} g_z \, (\xi)^2 \,. \tag{2.50}$$

Тогда лагранжиан на массовой оболочке принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{kin.}} \;\; = \;\; & g\dot{\bar z}\dot z + 2i\kappa m \left(\dot{\bar z} z - \dot z \bar z\right) g - \frac{i}{2}\, m \left(\dot{\bar z} f_{\bar z} - \dot z f_z\right) - \frac{i}{2}\, \bar\xi_k \xi^k \left(\dot{\bar z} g_{\bar z} - \dot z g_z\right) + \frac{i}{2}\left(\bar\xi_i \dot\xi^i - \dot{\bar\xi}_i \xi^i\right) g \\ & - m^2 V - m\, \bar\xi_k \xi^k U + \frac{1}{4}\, (\xi)^2 \left(\bar\xi\,\right)^2 R \,, \end{aligned} \tag{2.51}$$

где

$$\begin{aligned} V \;\; &= \;\; \kappa \left(\bar z \partial_{\bar z} + z\partial_z\right) f - \kappa^2 \left(\bar z \partial_{\bar z} + z\partial_z\right)^2 f \,, \\ U \;\; &= \;\; \kappa \left(\bar z \partial_{\bar z} + z\partial_z\right) g - (1 - 2\kappa)\, g \,, \\ R \;\; &= \;\; g_{z\bar z} - \frac{g_z g_{\bar z}}{g} \,. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Преобразования полей на массовой оболочке имеют вид

$$\delta z = -\sqrt{2}\, \epsilon_i \xi^i, \qquad \delta\xi^i = \sqrt{2}\, i\bar\epsilon^i \nabla_t z + \sqrt{2}\, \epsilon_k \xi^k \xi^i \frac{g_z}{g} \,. \tag{2.53}$$

Следует отметить, что при $\kappa \neq 0$ нужно выбрать $f(z, \bar z) = \tilde f(z\bar z)$ для обоих компонентных лагранжианов (2.49) и (2.51), до и после исключения вспомогательных полей. Только при таком ограничении лагранжианы с $\kappa \neq 0$ инварианты относительно преобразований (2.47) и (2.53).

В качестве заключения резюмируем свойства деформированного лагранжиана (2.51).

- Деформированный лагранжиан содержит бозонный потенциал $V(z, \bar z)$, который выражается в терминах потенциала Кэлера f и исчезает при $\kappa = 0$.
- Кроме того, присутствует новый член взаимодействия типа Юкавы $\sim U$, который также определяется через f и не пропадает при $\kappa = 0$.
- Деформированный лагранжиан при $m \neq 0$ содержит два $d = 1$ члена Весса-Зумино $\sim \kappa m$ и $\sim m$, которые отсутствуют в случае стандартного плоского $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ кирального мультиплета $(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{2})$. При $\kappa = 0$ исчезает только один из них.

2.2.3. Суперпотенциал

Когда $\kappa \neq 0$, мы можем добавить к кинетическому лагранжиану $\mathcal{L}_{\text{kin.}}$ потенциальный член

$$\mathcal{L}_{\text{pot.}} \;\; = \;\; \tilde m \int d^2\theta\, \mathcal{U}\left(\Phi_L\right) + \text{к.с.}. \tag{2.54}$$

где $\tilde{m}$ – дополнительный параметр размерности массы. В отличие от случая стандартной $\mathcal{N} = 4$ механики [42], $SU(2|1)$ инвариантный суперполевой потенциал $\mathcal{U}\left(\Phi_L\right)$ строго ограничен требованием компенсации нетривиального преобразования киральной меры $d\zeta_L = dt_L\, d^2\theta$:

$$\delta\left(d\zeta_L\right) = -\,2m\left(d\zeta_L\right)\bar{\epsilon}^k\theta_k\,. \tag{2.55}$$

Единственной возможностью обеспечения инвариантности является следующий выбор потенциала:

$$\mathcal{U}\left(\Phi_L\right) = \left(\Phi_L\right)^{\frac{1}{2\kappa}}. \tag{2.56}$$

Это даёт лагранжиан (2.54) в виде

$$\mathcal{L}_{\text{pot.}} = \frac{\tilde{m}}{\kappa}\left[Bz^{\frac{1}{2\kappa}-1} + \bar{B}\bar{z}^{\frac{1}{2\kappa}-1}\right] + \frac{\tilde{m}\left(2\kappa-1\right)}{4\kappa^2}\left[\left(\xi\right)^2 z^{\frac{1}{2\kappa}-2} + \left(\bar{\xi}\right)^2\bar{z}^{\frac{1}{2\kappa}-2}\right]. \tag{2.57}$$

Потенциальный член принимает простую форму $\sim B + \bar{B}$ при $2\kappa = 1$. Для $\kappa = 0$, никакого суперпотенциала в принципе не существует. Для простоты в дальнейшем мы ограничим наше рассмотрение выбором $\tilde{m} = 0$.

2.2.4. Гамильтонов формализм

После преобразования Лежандра, классический гамильтониан запишется в виде

$$\begin{aligned} H \;\;=\;\; & g^{-1}\left(p_z - \frac{i}{2}\,mf_z + \frac{i}{2}\,g_z\,\xi^k\bar{\xi}_k + 2i\kappa m\bar{z}g\right)\left(p_{\bar{z}} + \frac{i}{2}\,mf_{\bar{z}} - \frac{i}{2}\,g_{\bar{z}}\,\xi^k\bar{\xi}_k - 2i\kappa mzg\right) \\ & + m^2V + m\,\bar{\xi}_k\xi^k U - \frac{1}{4}\left(\xi\right)^2\left(\bar{\xi}\right)^2 R\,. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Применяя теорему Нётер, можно вычислить суперзаряды $\left(Q^i\right)^\dagger = \bar{Q}_i$ и остальные бозонные генераторы:

$$\begin{aligned} & Q^i = \sqrt{2}\,\xi^i\left(p_z - \frac{i}{2}\,mf_z + \frac{i}{2}\,g_z\,\xi^k\bar{\xi}_k\right), \\ & \bar{Q}_j = \sqrt{2}\,\bar{\xi}_j\left(p_{\bar{z}} + \frac{i}{2}\,mf_{\bar{z}} - \frac{i}{2}\,g_{\bar{z}}\,\xi^k\bar{\xi}_k\right), \\ & F = -2i\kappa\left(zp_z - \bar{z}p_{\bar{z}}\right) - \left(2\kappa - \frac{1}{2}\right)g\,\xi^k\bar{\xi}_k\,, \\ & I^i_j = g\left(\xi^i\bar{\xi}_j - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\xi^k\bar{\xi}_k\right). \end{aligned} \tag{2.59}$$

Для $\kappa \neq 0$ мы имеем

$$f\left(\Phi, \bar{\Phi}\right) = \tilde{f}\left(\Phi\bar{\Phi}\right) \Rightarrow f(z, \bar{z}) = \tilde{f}(z\bar{z}), \tag{2.60}$$

и тогда мы можем переписать гамильтониан (2.58) в следующем виде:

$$\begin{aligned} H \;\; = \;\; & g^{-1}\left(p_z - \frac{i}{2}\,mf_z + \frac{i}{2}\,g_z\,\xi^k\bar{\xi}_k\right)\left(p_{\bar{z}} + \frac{i}{2}\,mf_{\bar{z}} - \frac{i}{2}\,g_{\bar{z}}\xi^k\bar{\xi}_k\right) \\ & -2i\kappa m\,(zp_z - \bar{z}p_{\bar{z}}) - (1-2\kappa)\,mg\,\bar{\xi}_k\xi^k - \frac{1}{4}\,(\xi)^2\left(\bar{\xi}\right)^2 R\,. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Очевидно, что в случае $\kappa = 0$ гамильтонианы (2.58) и (2.61) совпадают без каких-либо ограничений на функцию $f(z,\bar{z})$.

Скобки Пуассона (Дирака) налагаются как

$$\{z, p_z\} = 1\,, \qquad \{\xi^i, \bar{\xi}_j\} = -i\delta^i_j\,g^{-1}\,. \tag{2.62}$$

Чтобы подготовить систему для квантования, удобно сделать замену

$$\left(z, \xi^i\right) \longrightarrow \left(z, \eta^i\right), \qquad \eta^i = g^{\frac{1}{2}}\xi^i. \tag{2.63}$$

В новых переменных скобки имеют вид

$$\{z, p_z\} = 1\,, \qquad \{\eta^i, \bar{\eta}_j\} = -i\delta^i_j\,, \qquad \{p_z, \eta^i\} = \{p_z, \bar{\eta}_j\} = 0\,. \tag{2.64}$$

Нётеровские заряды (2.59) и гамильтониан (2.20) переписываются в виде

$$\begin{aligned} Q^i \;\; &= \;\; \sqrt{2}\,\eta^i g^{-\frac{1}{2}}\left(p_z - \frac{i}{2}\,mf_z + \frac{i}{2}g^{-1}\,g_z\,\eta^k\bar{\eta}_k\right), \\ \bar{Q}_j \;\; &= \;\; \sqrt{2}\,\bar{\eta}_j\,g^{-\frac{1}{2}}\left(p_{\bar{z}} + \frac{i}{2}\,mf_{\bar{z}} - \frac{i}{2}\,g^{-1}g_{\bar{z}}\,\eta^k\bar{\eta}_k\right), \end{aligned} \tag{2.65}$$

$$F \;\; = \;\; -2i\kappa\,(zp_z - \bar{z}p_{\bar{z}}) - \left(2\kappa - \frac{1}{2}\right)\eta^k\bar{\eta}_k, \qquad I^i_j = \eta^i\bar{\eta}_j - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\eta^k\bar{\eta}_k\,, \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned} H \;\; = \;\; & g^{-1}\left(p_z - \frac{i}{2}\,mf_z + \frac{i}{2}\,g^{-1}g_z\,\eta^k\bar{\eta}_k\right)\left(p_{\bar{z}} + \frac{i}{2}\,mf_{\bar{z}} - \frac{i}{2}\,g^{-1}g_{\bar{z}}\,\eta^k\bar{\eta}_k\right) \\ & -2i\kappa m\,(zp_z - \bar{z}p_{\bar{z}}) + m\,(1-2\kappa)\,\eta^k\bar{\eta}_k - \frac{1}{4}\,g^{-2}R\,(\eta)^2\,(\bar{\eta})^2\,. \end{aligned} \tag{2.67}$$

2.2.5. Квантование

Мы квантуем скобки (2.64) стандартным образом,

$$\begin{aligned} & [z, p_z] = i\,, \qquad \{\eta^i, \bar{\eta}_j\} = \delta^i_j\,, \qquad [p_z, \hat{\eta}^i] = [p_z, \bar{\eta}_j] = 0\,, \\ & p_z = -i\partial_z\,, \qquad \bar{\eta}_j = \frac{\partial}{\partial\eta^j}\,, \end{aligned} \tag{2.68}$$

и будем использовать соотношение

$$\left[\nabla_z, \bar{\nabla}_{\bar{z}}\right] = mg - \frac{1}{2}\,g^{-1}R\left(\eta^k\bar{\eta}_k - \bar{\eta}_k\eta^k\right), \tag{2.69}$$

где

$$\begin{aligned}\nabla_z &= -\,i\partial_z - \frac{i}{2}\,mf_z + \frac{i}{2}\,g^{-1}g_z\left(\hat{\eta}^k\hat{\bar{\eta}}_k - 1\right),\\ \bar{\nabla}_{\bar z} &= -\,i\partial_{\bar z} + \frac{i}{2}\,mf_{\bar z} + \frac{i}{2}\,g^{-1}g_{\bar z}\left(\bar{\eta}_k\eta^k - 1\right).\end{aligned} \tag{2.70}$$

Общая схема перехода от классических суперзарядов к квантовым была описана в [44]. Она состоит из двух этапов.

1. Во-первых, нужно упорядочить по Вейлю суперзаряды. Упорядоченные суперзаряды действуют на суперволновые функции со скалярным произведением
$$\langle\Omega|\Psi\rangle = \int dz\,d\bar z\prod_i d\eta^i\,d\bar\eta_i\,\exp\{\bar\eta_k\eta^k\}\,\Omega^\dagger\Psi. \tag{2.71}$$
2. В качестве следующего шага, переходим к ковариантным суперзарядам, которые действуют на гильбертовом пространстве с более естественным геометрически мотивированным скалярным произведением
$$\langle\Omega|\Psi\rangle = \int g\,dz\,d\bar z\prod_i d\eta^i\,d\bar\eta_i\,\exp\{\bar\eta_k\eta^k\}\,\Omega^\dagger_{(cov)}\,\Psi_{(cov)}. \tag{2.72}$$
Они связаны с упорядоченным по Вейлю суперзарядами преобразованием подобия
$$\left(\hat{Q}^i,\hat{\bar{Q}}_j\right)_{cov} = g^{-\frac{1}{2}}\left(\hat{Q}^i,\hat{\bar{Q}}_j\right)g^{\frac{1}{2}}\,. \tag{2.73}$$

В результате этой процедуры мы получаем следующие квантовые операторы

$$\hat{Q}^i_{(cov)} = \sqrt{2}\,\eta^i\,g^{-\frac{1}{2}}\nabla_z\,,\qquad \hat{\bar{Q}}_{(cov)j} = \sqrt{2}\,\bar\eta_j\,g^{-\frac{1}{2}}\bar\nabla_{\bar z}\,, \tag{2.74}$$

$$\hat{F} = -2\kappa\left(z\partial_z - \bar z\partial_{\bar z}\right) - \left(2\kappa - \frac{1}{2}\right)\eta^k\bar\eta_k\,,\qquad \hat{I}^i_j = \eta^i\bar\eta_j - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\eta^k\bar\eta_k\,. \tag{2.75}$$

Они удовлетворяют $su(2|1)$ супералгебре (1.4) с квантовым гамильтонианом

$$\hat{H} = g^{-1}\,\bar\nabla_{\bar z}\,\nabla_z - 2\kappa m\left(z\partial_z - \bar z\partial_{\bar z}\right) + m\left(1-2\kappa\right)\eta^k\bar\eta_k - \frac{1}{4}\,g^{-2}R\,\left(\eta\right)^2\left(\bar\eta\right)^2. \tag{2.76}$$

Второй член в (2.76) может быть устранён переопределением внешнего магнитного поля в ∇_z , $\bar\nabla_z$, приводящим к появлению бозонного потенциала.

Определим также ещё один $U(1)$ генератор

$$\hat{E} = -\left(z\partial_z - \bar z\partial_{\bar z}\right) - \eta^k\bar\eta_k\,. \tag{2.77}$$

Он коммутирует со всеми $SU(2|1)$ генераторами при условии, что $f(z,\bar z) = \tilde{f}(z\bar z)$. В следующем разделе мы увидим, на простом примере, что наличие генератора $\hat{E}$ играет решающую роль в нахождении спектра гамильтониана. Разностью операторов $\hat{F}$ и $\hat{E}$ является оператор фермионного числа $\hat\eta^k\hat{\bar\eta}_k/2$, который также коммутирует с $\hat{H}$. Из формулы (2.75) видно, что при $\kappa = 0$ оператор фермионного числа совпадает с генератором $\hat{F}$.

2.2.6. Модель на плоскости

Лагранжиан и гамильтониан. Модель на плоскости соответствует простейшему выбору потенциала Кэлера (2.48):

$$f\left(\Phi,\bar{\Phi}\right)=\Phi\bar{\Phi}\,. \tag{2.78}$$

Для этого конкретного случая, общий компонентный лагранжиан (2.51) сводится к свободному лагранжиану

$$\mathcal{L}_{\text{free}}=\dot{\bar{z}}\dot{z}+im\left(2\kappa-\frac{1}{2}\right)\left(\dot{\bar{z}}z-\dot{z}\bar{z}\right)+\frac{i}{2}\left(\bar{\xi}_i\dot{\xi}^i-\dot{\bar{\xi}}_i\xi^i\right)+2\kappa\left(2\kappa-1\right)m^2\bar{z}z+\left(1-2\kappa\right)m\,\bar{\xi}_k\xi^k, \tag{2.79}$$

который инвариантен относительно преобразований

$$\delta z=-\sqrt{2}\,\epsilon_i\xi^i,\qquad \delta\xi^i=\sqrt{2}\,i\bar{\epsilon}^i\dot{z}-2\sqrt{2}\,\kappa m\,\bar{\epsilon}^i z\,. \tag{2.80}$$

В соответствии с обозначениями из предыдущего раздела, мы будем иметь дело с множеством переменных (z,η^i) (в данном случае $\xi^i\equiv\eta^i$, т.к. $g=1$). Соответствующий канонический гамильтониан (2.67) сводится к выражению

$$H=\left[p_z-\frac{i}{2}\left(1-4\kappa\right)m\bar{z}\right]\left[p_{\bar{z}}+\frac{i}{2}\left(1-4\kappa\right)mz\right]+2\kappa\left(1-2\kappa\right)m^2\bar{z}z+\left(1-2\kappa\right)m\,\eta^k\bar{\eta}_k\,, \tag{2.81}$$

или к альтернативному выражению

$$H=\left(p_z-\frac{i}{2}\,m\bar{z}\right)\left(p_{\bar{z}}+\frac{i}{2}\,mz\right)-2i\kappa m\left(zp_z-\bar{z}p_{\bar{z}}\right)+m\left(1-2\kappa\right)\eta^k\bar{\eta}_k\,. \tag{2.82}$$

Квантование выполняется стандартным образом

$$\begin{aligned}&[z,p_z]=i\,,\qquad \{\eta^i,\bar{\eta}_j\}=\delta^i_j\,,\qquad [p_z,\eta^i]=[p_z,\bar{\eta}_j]=0\,,\\ &p_z=-i\partial_z\,,\qquad \bar{\eta}_j=\frac{\partial}{\partial\eta^j}.\end{aligned} \tag{2.83}$$

Квантовый гамильтониан

$$\hat{H}=\bar{\nabla}_{\bar{z}}\,\nabla_z-2\kappa m\left(\hat{z}\partial_z-\hat{\bar{z}}\partial_{\bar{z}}\right)+m\left(1-2\kappa\right)\hat{\eta}^k\hat{\bar{\eta}}_k \tag{2.84}$$

и квантовые генераторы

$$\hat{Q}^i=\sqrt{2}\,\eta^i\nabla_z\,,\qquad \hat{\bar{Q}}_j=\sqrt{2}\,\bar{\eta}_j\bar{\nabla}_{\bar{z}}\,, \tag{2.85}$$

$$\hat{F}=-2\kappa\left(z\partial_z-\bar{z}\partial_{\bar{z}}\right)-\left(2\kappa-\frac{1}{2}\right)\eta^k\bar{\eta}_k\,,\qquad \hat{I}^i_j=\eta^i\bar{\eta}_j-\frac{1}{2}\,\delta^i_j\eta^k\bar{\eta}_k\,, \tag{2.86}$$

образуют $su(2|1)$ супералгебру (1.4). Здесь мы используем операторы

$$\nabla_z = -i\partial_z - \frac{i}{2}\,m\bar{z}\,, \quad \bar{\nabla}_{\bar{z}} = -i\partial_{\bar{z}} + \frac{i}{2}\,mz\,, \qquad \left[\nabla_z, \bar{\nabla}_{\bar{z}}\right] = m\,. \tag{2.87}$$

Гамильтониан (2.84) можно переписать, с точностью до постоянного сдвига, в виде, аналогичном классическому выражению (2.81)

$$\begin{aligned}\hat{H} \;\; &= \;\; -\left[\partial_z + \frac{1}{2}\left(1-4\kappa\right)m\bar{z}\right]\left[\partial_{\bar{z}} - \frac{1}{2}\left(1-4\kappa\right)mz\right] \\ &\quad + 2\kappa\left(1-2\kappa\right)m^2 z\bar{z} + \left(1-2\kappa\right)m\,\eta^k\bar{\eta}_k + \text{const}.\end{aligned} \tag{2.88}$$

Как видно из этого представления, мы имеем дело с суперрасширением двумерного гармонического осциллятора с частотой $\sqrt{2\kappa\left(1-2\kappa\right)m^2}$, во внешнем магнитном поле

$$\mathcal{A}_z = -\frac{i}{2}\left(1-4\kappa\right)m\bar{z}\,, \qquad \mathcal{A}_{\bar{z}} = \frac{i}{2}\left(1-4\kappa\right)mz\,. \tag{2.89}$$

Для дальнейшего использования будет полезно знать явные выражения для операторов Казимира (Б.1) и (Б.2). Для конкретной реализации квантовых генераторов (2.84) – (2.86), они выражаются как

$$\begin{aligned} m^2 C_2 \;\; &= \;\; \left(\hat{H} - 2\kappa m\hat{E}\right)\left(\hat{H} - 2\kappa m\hat{E} - m\right), \\ m^3 C_3 \;\; &= \;\; \left(\hat{H} - 2\kappa m\hat{E}\right)\left(\hat{H} - 2\kappa m\hat{E} - m\right)\left(\hat{H} - 2\kappa m\hat{E} - \frac{m}{2}\right).\end{aligned} \tag{2.90}$$

Волновые функции и спектр. Бозонные волновые функции Ω являются собственными функциями взаимно коммутирующих $U(1)$ оператора (2.77) и гамильтониана (2.84). Задача на собственные значения задаётся уравнениями

$$\text{(a)}\;\; \hat{E}\,\Omega = n\,\Omega, \qquad \text{(b)}\;\; \hat{H}\,\Omega = \mathcal{E}\,\Omega = mq\,\Omega. \tag{2.91}$$

Из уравнения (a) следует, что

$$\Omega = \bar{z}^n A\left(w\right)\,, \qquad w \equiv z\bar{z}\,. \tag{2.92}$$

Тогда уравнение (b) для функции $A\left(w\right)$ сводится к следующему уравнению:

$$\left[-w\partial_w^2 - (1+n)\partial_w + \frac{m^2}{4}w - \frac{m}{2}\right]A\left(w\right) = m\left(q - 2\kappa n + \frac{n}{2}\right)\,A\left(w\right). \tag{2.93}$$

Решение этого уравнения выражается через обобщённые полиномы Лагерра $L^{(n)}_{q-2\kappa n}(mw)$:

$$A(w) = e^{-\frac{mw}{2}}L^{(n)}_{q-2\kappa n}(mw). \tag{2.94}$$

Таким образом, задачу на собственные значения для $\hat{H}$ можно переписать в виде

$$\hat{H}\,\Omega^{(\ell;n)} = \mathcal{E}^{(\ell;n)}\,\Omega^{(\ell;n)}\,, \qquad \mathcal{E}^{(\ell;n)} = m(\ell + 2\kappa n), \tag{2.95}$$

где

$$\Omega^{(\ell;n)} = \bar{z}^n e^{-\frac{mz\bar{z}}{2}} L_\ell^{(n)}(mz\bar{z}) = \frac{z^{-n}}{\ell!} e^{\frac{mz\bar{z}}{2}} \ \frac{d^\ell}{dw^\ell} \left(e^{-mw} w^{n+\ell}\right)\Big|_{w=z\bar{z}} . \tag{2.96}$$

Согласно определению полиномов Лагерра, ℓ – неотрицательное целое число, $\ell \geqslant 0$.

Ортогональность $\Omega^{(\ell;n)}$ по отношению к скалярному произведению

$$\langle \Omega^{(\ell_1;n_1)} | \Omega^{(\ell_2;n_2)} \rangle := \int dz\, d\bar{z} \ \left(\Omega^{(\ell_1;n_1)}\right)^\dagger \ \Omega^{(\ell_2;n_2)} = \frac{\pi(n+\ell)!}{\ell!\, m^{n+1}}\, \delta^{\ell_1\ell_2}\, \delta^{n_1n_2} , \tag{2.97}$$

необходима для того, чтобы волновые функции образовывали полный ортогональный набор. Это условие ортогональности ограничивает n целочисленными значениями $n \geqslant -\ell$. Интеграл (2.97) сходится для $m > 0$. Энергия $\mathcal{E}^{(\ell;n)}$ положительна и ограничена снизу лишь при следующем ограничении на параметр κ:

$$0 \leqslant \kappa \leqslant 1/2 . \tag{2.98}$$

Волновые функции $\Omega^{(\ell;n)}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
&\nabla_z\, \Omega^{(\ell;n)} = im\, \Omega^{(\ell-1;n+1)}, \qquad (\nabla_z + im\bar{z})\, \Omega^{(\ell;n)} = im\, \Omega^{(\ell;n+1)}, \\
&\bar{\nabla}_{\bar{z}}\, \Omega^{(\ell;n)} = -i\,(\ell+1)\, \Omega^{(\ell+1;n-1)}, \qquad \left(\bar{\nabla}_{\bar{z}} - imz\right) \Omega^{(\ell;n)} = -i\,(\ell+n)\, \Omega^{(\ell;n-1)}, \\
&\nabla_z\, \Omega^{(0;n)} = 0, \qquad \left(\bar{\nabla}_{\bar{z}} - imz\right) \Omega^{(\ell;-\ell)} = 0 ,
\end{aligned} \tag{2.99}$$

которые следуют из определения (2.96). Операторы $(\nabla_z + im\bar{z})$, $\left(\bar{\nabla}_{\bar{z}} - imz\right)$ коммутируют с ковариантными импульсами ∇_z , $\bar{\nabla}_{\bar{z}}$. Используя (2.99), мы можем получить удобное представление для общей волновой суперфункции $\Omega^{(\ell;n)}$

$$\Omega^{(\ell;n)} = \frac{(-i)^n}{\ell! m^{\ell+n}} \left(\bar{\nabla}_{\bar{z}}\right)^\ell (\nabla_z + im\bar{z})^{\ell+n}\, \Omega^{(0;0)}(w), \tag{2.100}$$

где $\Omega^{(0;0)}(w)$ есть волновая функция основного состояния:

$$\Omega^{(0;0)}(w) = e^{-\frac{mz\bar{z}}{2}} . \tag{2.101}$$

Действуя на $\Omega^{(\ell;n)}$ суперзарядом Q^i, мы можем воспроизвести все другие собственные состояния гамильтониана $\hat{H}$ и внешнего $U(1)$ генератора $\hat{E}$. Следует принять во внимание физическое условие:

$$\bar{\eta}_j\, \Omega^{(\ell;n)} = 0 \ \Rightarrow\ \hat{\bar{Q}}_j\, \Omega^{(\ell;n)} = 0 . \tag{2.102}$$

Используя соотношения (2.99), легко найти следующие новые состояния:

$$\hat{Q}^i\, \Omega^{(\ell;n)} = im\sqrt{2}\, \eta^i\, \Omega^{(\ell-1;n+1)}, \quad \varepsilon_{ij} \hat{Q}^i\, \hat{Q}^j\, \Omega^{(\ell;n)} = -2m^2\, \varepsilon_{ij} \eta^i \eta^j\, \Omega^{(\ell-2;n+2)} . \tag{2.103}$$

Тогда суперволновые функции,

$$\begin{aligned}
&\Psi^{(\ell;n)} = a^{(\ell;n)}\Omega^{(\ell;n)} + b_i^{(\ell;n)}\eta^i\,\Omega^{(\ell-1;n+1)} + \frac{1}{2}\,c^{(\ell;n)}\,\varepsilon_{ij}\eta^i\eta^j\,\Omega^{(\ell-2;n+2)}, \quad \ell \geqslant 2\,,\\
&\Psi^{(1;n)} = a^{(1;n)}\,\Omega^{(1;n)} + b_i^{(1;n)}\eta^i\,\Omega^{(0;n+1)},\\
&\Psi^{(0;n)} = a^{(0;n)}\,\Omega^{(0;n)}\,,
\end{aligned} \qquad (2.104)$$

образуют полное гильбертово пространство квантовых состояний рассматриваемой модели. Заметим, что «основное состояние» ($\ell = 0$) и первый уровень ($\ell = 1$) специальные, в том смысле, что они включают неравное число бозонных и фермионных состояний. Собственные значения операторов $\hat{E}$ и $\hat{H}$ даются общими выражениями

$$\hat{E}\,\Psi^{(\ell;n)} = n\,\Psi^{(\ell;n)}, \qquad \hat{H}\,\Psi^{(\ell;n)} = \mathcal{E}^{(\ell;n)}\,\Psi^{(\ell;n)}\,, \quad \mathcal{E}^{(\ell;n)} = m\,(2\kappa n + \ell)\,. \qquad (2.105)$$

Основное состояние аннигилируется действием суперзарядов:

$$\hat{Q}^i\Omega^{(0;n)} = \hat{\bar{Q}}_i\Omega^{(0;n)} = 0\,. \qquad (2.106)$$

Истинное основное состояние соответствует нулевой энергии, т. е. $n = 0$ или $\kappa = 0\,,\ n \neq 0\,.$ Во втором варианте возникает вырождение, параметризованное числом $n\,.$ Для общего κ существует бесконечное число основных состояний ($\ell = 0$), зависящих от n и обладающих энергией $\mathcal{E}^{(0;n)} = 2\kappa m\,n\,.$ Действие суперзарядов на все эти состояния даёт ноль. Эти свойства квантовой $SU(2|1)$ системы находятся в резком контрасте с тем, что происходит в стандартной плоской $\mathcal{N} = 4$ механике мультиплета $(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{2})$ (см., например, [44, 45]).

Так как для каждого n мы имеем дело с конечномерными представлениями $SU(2|1)$, реализованными на суперволновых функциях, то операторы Казимира даются общим выражением (Б.3). Используя формулы (2.105) и (2.90), мы находим, что $\lambda = 1/2$ для любого $\Psi^{(\ell;n)}$ и

$$C_2(\ell) = (\ell - 1)\,\ell\,, \quad C_3(\ell) = (\ell - 1/2)\,(\ell - 1)\,\ell\,, \quad \beta(\ell) = \ell - 1/2\,. \qquad (2.107)$$

Состояния с $\ell = 0$ соответствуют числам $\lambda = \beta = 0\,.$ Эти значения совпадают со значениями для гармонического осциллятора (формула (2.33)). Таким образом, в рассматриваемой модели $(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{2})$ гильбертово пространство порождается теми же неприводимыми представлениями $SU(2|1)$, что и в модели осциллятора $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$. В отличие от последнего, любой фиксированный уровень ℓ содержит бесконечное число представлений параметризованных числом $n \geqslant -\ell\,.$ На каждом уровне ℓ фиксирован эквидистантный энергетический спектр с шагом $2\kappa m\,.$

Суперзаряды не зависят от κ и, как следствие, суперволновые функции $\Psi^{(\ell;n)}$ не содержат зависимости от κ в разложении по η. Параметр κ по-прежнему присутствует в гамильтониане (2.84) и во внутреннем генераторе $\hat{F}$. Как уже было упомянуто, в антикоммутаторе $\{\hat{Q}, \hat{\bar{Q}}\}$ появляется только комбинация $\hat{H} - m\hat{F}$, которая не содержит зависимости от κ.

Нормы всех суперволновых функций (2.104) положительно определены. Скалярное произведение (2.97) определяет нормы как

$$||\Psi^{(\ell;n)}||^2 = \frac{\langle\Psi^{(\ell;n)}|\Psi^{(\ell;n)}\rangle}{\langle\Omega^{(\ell;n)}|\Omega^{(\ell;n)}\rangle}. \tag{2.108}$$

Это даёт следующие явно положительные нормы:

$$\begin{aligned}
&||\Psi^{(\ell;n)}||^2 = \bar{a}^{(\ell;n)}a^{(\ell;n)} + \frac{\bar{b}^{(\ell;n)i}b_i^{(\ell;n)}}{m\ell} + \frac{\bar{c}^{(\ell;n)}c^{(\ell;n)}}{m^2\,(\ell-1)\,\ell}, \quad \ell \geqslant 2\,,\\
&||\Psi^{(1;n)}||^2 = \bar{a}^{(1;n)}a^{(1;n)} + \frac{\bar{b}^{(1;n)i}b_i^{(1;n)}}{m}, \quad ||\Psi^{(0;n)}||^2 = \bar{a}^{(0;n)}a^{(0;n)}.
\end{aligned} \tag{2.109}$$

2.3. Обобщённый киральный мультиплет

2.3.1. Переопределение суперпространства

Главное свойство суперпространства (1.6) состоит в том, что временная координата t связана с параметром центрального заряда H. Этот генератор коммутирует со всеми другими и естественным образом может быть идентифицирован с гамильтонианом в соответствующих моделях суперсимметричной квантовой механики.

В данном разделе мы будем иметь дело с другим фактор-пространством $SU(2|1)$:

$$\frac{SU(2|1) \rtimes U(1)_{\text{ext}}}{SU(2)_{\text{int}} \times U(1)_{\text{ext}}} = \frac{SU(2|1)}{SU(2)_{\text{int}}} \sim \frac{\{Q^i, \bar{Q}_j, \tilde{H}, I^i_j\}}{\{I^i_j\}}\,. \tag{2.110}$$

В новом фактор-пространстве гамильтониан $\tilde{H}$ является полным внутренним $U(1)_{\text{int}}$ генератором. Хотя $\tilde{H}$ не коммутирует с суперзарядами, соответствующие нётеровские заряды сохраняются из-за наличия в них явной зависимости от t. Такая же ситуация имеет место, например, в конформной и суперконформной механиках [4].

В элементе (1.6) должна быть сделана замена $H \to \tilde{H}$, порождающая элемент фактор-пространства $\tilde{g}$. Благодаря замене $\tilde{H} = H - mF$, эти два элемента связаны как

$$\tilde{g} = g\exp\{-imtF\}. \tag{2.111}$$

При левых сдвигах с фермионными генераторами координаты $\zeta = \left\{t, \theta_i, \bar{\theta}^k\right\}$ преобразуются по тем же формулам (1.16), поэтому они также могут рассматриваться в качестве параметров нового фактор-пространства. Отличие от первого типа суперпространства $SU(2|1)$ состоит в том, что $\tilde{H}$, кроме сдвигов t, надлежащим образом вращает и грассмановы координаты. Однако, существует реализация суперпространства $\left\{t, \theta_i, \bar{\theta}^k\right\}$, в котором гамильтониан $\tilde{H}$ принимает правильную форму генератора сдвига по времени.

Применяя те же формы Картана (1.9) и (1.11), легко найти соответствующие ковариантные производные:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^i &= e^{-\frac{imt}{2}} \Big\{ \left[1 + m\,\bar{\theta}^k\theta_k - \frac{3m^2}{8}\,(\theta)^2\,\left(\bar{\theta}\,\right)^2\right]\frac{\partial}{\partial\theta_i} - m\,\bar{\theta}^i\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j} - i\bar{\theta}^i\partial_t \\
&\quad - m\,\bar{\theta}^j\left(1 - m\,\bar{\theta}^k\theta_k\right)\tilde{I}^i_j \Big\}\,, \\
\bar{\mathcal{D}}_j &= e^{\frac{imt}{2}} \Big\{ -\left[1 + m\,\bar{\theta}^k\theta_k - \frac{3m^2}{8}\,(\theta)^2\,\left(\bar{\theta}\,\right)^2\right]\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^j} + m\,\bar{\theta}^k\theta_j\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^k} + i\theta_j\partial_t \\
&\quad + m\,\theta_k\left(1 - m\,\bar{\theta}^l\theta_l\right)\tilde{I}^k_j \Big\}\,, \\
\mathcal{D}_{(t)} &= \partial_t\,. \qquad (2.112)
\end{aligned}$$

Объекты в квадратных скобках совпадают с ковариантными производными (1.27) без матричного генератора $U(1)_{\rm int}$, который теперь лежит вне подгруппы стабильности. Нетривиальные $U(1)_{\rm int}$ преобразования ковариантных производных (1.27) теперь компенсируются преобразованиями зависящих от времени факторов в (2.112), так что новые ковариантные производные инертны относительно $U(1)_{\rm int}$. В отличие от (1.27), производные (2.112) претерпевают только $SU(2)_{\rm int}$ индуцированные преобразования (образующие подгруппу стабильности), в то время как подгруппа $U(1)_{\rm int}$ реализуется исключительно на координатах суперпространства. Суперагебра производных имитирует $su(2|1)$ супералгебру (1.1):

$$\begin{aligned}
&\{\mathcal{D}^i, \bar{\mathcal{D}}_j\} = 2m\tilde{I}^i_j + 2i\delta^i_j\mathcal{D}_{(t)}\,, \qquad \left[\tilde{I}^i_j, \tilde{I}^k_l\right] = \delta^k_j\tilde{I}^i_l - \delta^i_l\tilde{I}^k_j\,, \\
&\tilde{I}^i_j\bar{\mathcal{D}}_l = \delta^i_l\bar{\mathcal{D}}_j - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\bar{\mathcal{D}}_l\,, \qquad \tilde{I}^i_j\mathcal{D}^k = \frac{1}{2}\,\delta^i_j\mathcal{D}^k - \delta^k_j\mathcal{D}^i, \\
&\left[\mathcal{D}_{(t)}, \bar{\mathcal{D}}_l\right] = \frac{i}{2}\,m\,\bar{\mathcal{D}}_l\,, \qquad \left[\mathcal{D}_{(t)}, \mathcal{D}^k\right] = -\frac{i}{2}\,m\,\mathcal{D}^k. \qquad (2.113)
\end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что производным $\mathcal{D}^i$ и $\bar{\mathcal{D}}_i$ (а также координатам θ_i и $\bar{\theta}^i$) можно приписать противоположные заряды относительно внешнего $U(1)_{\rm ext}$ генератора F, который может быть формально сохранён в подгруппе стабильности (2.110). Однако, в отличие от внутреннего генератора F в (1.6), автоморфизм F в (2.110) никогда не появляется в правой части антикоммутаторов. В первом случае, $U(1)_{\rm int}$ инвариантность – необходимое следствие суперсимметрии и, следовательно, должна соблюдаться в любой соответствующей модели суперсимметричной механики. Во втором случае, симметрия относительно внешнего автоморфизма $U(1)_{\rm ext}$ не требуется суперсимметрией. Таким образом, эта инвариантность – лишь дополнительная возможность ограничений на модели суперсимметричной механики.

2.3.2. Обобщённые киральные $SU(2|1)$ суперполя

Стандартная форма киральных и антикиральных условий имеет вид

$$\text{(a)}\ \bar{\mathcal{D}}_i \Phi = 0\,, \qquad \text{(b)}\ \mathcal{D}^i \bar{\Phi} = 0\,. \tag{2.114}$$

В рамках суперпротранства (1.6), эти условия были однозначно заданы ковариантностью по отношению к подгруппе стабильности $U(2)_{\text{int}} = SU(2)_{\text{int}} \times U(1)_{\text{int}}$. В данном случае, подгруппа стабильности сужается до $SU(2)_{\text{int}}$. Тогда киральное условие (2.114) может быть обобщено как

$$\text{(a)}\ \tilde{\bar{\mathcal{D}}}_i \varphi = 0\,, \qquad \text{(b)}\ \tilde{\mathcal{D}}^i \bar{\varphi} = 0\,, \tag{2.115}$$

где

$$\tilde{\bar{\mathcal{D}}}_i = \cos\omega\,\bar{\mathcal{D}}_i - \sin\omega\,\mathcal{D}_i\,, \qquad \tilde{\mathcal{D}}^i = \cos\omega\,\mathcal{D}^i + \sin\omega\,\bar{\mathcal{D}}^i\,. \tag{2.116}$$

Очевидно, что в подходе на основе суперпространства (1.6), условия (2.115) не ковариантны по подгруппе $U(1)_{\text{int}}$, генератор которой умножает $\mathcal{D}_i$ и $\bar{\mathcal{D}}_i$ на сопряжённые фазовые факторы. В нашем случае $\mathcal{D}_i$ и $\bar{\mathcal{D}}_i$ не подвергаются индуцированным суперсимметрией $U(1)_{\text{int}}$ фазовым преобразованиям, т. е. киральные условия (2.115) $SU(2|1)$ ковариантны для любого ω. Линейные комбинации (2.116) можно интерпретировать как результат вращения дублета $\mathcal{D}_{i'i} := (\mathcal{D}_i, \bar{\mathcal{D}}_i)$ по однопараметрической подгруппе внешней группы $SU'(2)$, действующий на индекс дублета i'. Так как эта подгруппа не является автоморфизмом супералгебры (1.4), зависимость от ω не может быть удалена из (2.115), (2.116) переопределением грассмановых переменных θ_i , $\bar{\theta}^k$. Это возможно только в пределе $m = 0$, когда $SU'(2)$ повороты становятся группой автоморфизмов $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ супералгебры.

Условия (2.115) допускают существование киральных подпространств:

$$\hat{\zeta}_L = \left\{\hat{t}_L, \hat{\theta}_i\right\}, \qquad \hat{\zeta}_R = \left\{\hat{t}_R, \bar{\hat{\theta}}^i\right\}, \qquad \overline{(\hat{\zeta}_L)} = \hat{\zeta}_R \tag{2.117}$$

где левое подпространство $\hat{\zeta}_L$ определяется как

$$\hat{t}_L = t + i\,\bar{\hat{\theta}}^k \hat{\theta}_k\,, \qquad \hat{\theta}_i = \left(\cos\omega\,\theta_i e^{\frac{i}{2}mt} + \sin\omega\,\bar{\theta}_i e^{-\frac{i}{2}mt}\right)\left(1 - \frac{m}{2}\,\bar{\theta}^k\theta_k\right). \tag{2.118}$$

В базисе $\left\{\hat{t}_L, \hat{\theta}_i, \bar{\hat{\theta}}^k\right\}$ условие киральности (2.115a) сводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\hat{\theta}}^k}\,\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi\left(\hat{t}_L, \hat{\theta}_i\right). \tag{2.119}$$

Как и должно быть, координаты (2.118) замкнуты относительно $SU(2|1)$ преобразований

$$\begin{aligned}
&\delta\hat{\theta}_i = \cos\omega\left(\epsilon_i\, e^{\frac{i}{2}m\hat{t}_L} + m\,\bar{\epsilon}^k\hat{\theta}_k\hat{\theta}_i\, e^{-\frac{i}{2}m\hat{t}_L}\right) + \sin\omega\left(\bar{\epsilon}_i\, e^{-\frac{i}{2}m\hat{t}_L} + m\,\epsilon^k\hat{\theta}_k\hat{\theta}_i\, e^{\frac{i}{2}m\hat{t}_L}\right),\\
&\delta\hat{t}_L = 2i\cos\omega\,\bar{\epsilon}^k\hat{\theta}_k\, e^{-\frac{i}{2}m\hat{t}_L} - 2i\sin\omega\,\epsilon^k\hat{\theta}_k\, e^{\frac{i}{2}m\hat{t}_L}.
\end{aligned} \tag{2.120}$$

Кроме того, инвариантная мера в новом базисе $\left\{t, \hat{\theta}_i, \bar{\hat{\theta}}^k\right\}$ имеет вид

$$d\hat{\zeta} = dt\, d^2\hat{\theta}\, d^2\bar{\hat{\theta}}\left[1 + m\left(\cos\omega\,\bar{\hat{\theta}}^i + \sin\omega\,\hat{\theta}^i\right)\left(\cos\omega\,\hat{\theta}_i - \sin\omega\,\bar{\hat{\theta}}_i\right)\right]. \tag{2.121}$$

Уравнения (2.118) и (2.120) показывают, что в $SU(2|1)$ случае существует семейство неэквивалентных киральных подпространств, параметризованных параметром ω. В пределе $m = 0$ можно показать, что зависимость от ω полностью уничтожается переопределением грассмановых координат и параметров преобразований суперсимметрии. Это невозможно в $SU(2|1)$ случае, т. е. при $m \neq 0$.

Новые ковариантные производные (2.116) удовлетворяют соотношению

$$\{\tilde{\bar{\mathcal{D}}}_k, \tilde{\bar{\mathcal{D}}}_j\} = -\,2m\sin 2\omega\,\tilde{I}_{ij} \qquad \text{and c.c.}, \tag{2.122}$$

которое означает, что киральное суперполе φ не может нести какой-либо внешний $SU(2)_{\text{int}}$ индекс, т.е оно является синглетом по $SU(2)_{\text{int}}$. Левое киральное суперполе $\varphi(\hat{t}_L, \hat{\theta}_i)$, как и решение (2.115), задаётся стандартным разложением

$$\varphi(t_L, \hat{\theta}_i) = z + \sqrt{2}\,\hat{\theta}_k\xi^k + (\hat{\theta})^2 B, \qquad \overline{(\xi^i)} = \bar{\xi}_i\,. \tag{2.123}$$

Нечётные преобразования (2.120) индуцируют следующие преобразования компонентных полей в (2.123):

$$\begin{aligned}
&\delta z = -\sqrt{2}\cos\omega\,\epsilon_k\xi^k\, e^{\frac{i}{2}mt} - \sqrt{2}\sin\omega\,\bar{\epsilon}_k\xi^k\, e^{-\frac{i}{2}mt},\\
&\delta\xi^i = \sqrt{2}\,\bar{\epsilon}^i\left(i\cos\omega\,\dot{z} - \sin\omega\, B\right)e^{-\frac{i}{2}mt} - \sqrt{2}\,\epsilon^i\left(i\sin\omega\,\dot{z} + \cos\omega\, B\right)e^{\frac{i}{2}mt},\\
&\delta B = -\sqrt{2}\,\bar{\epsilon}_k\cos\omega\left(i\dot{\xi}^k + \frac{m}{2}\,\xi^k\right)e^{-\frac{i}{2}mt} + \sqrt{2}\,\epsilon_i\sin\omega\left(i\dot{\xi}^i - \frac{m}{2}\,\xi^i\right)e^{\frac{i}{2}mt}.
\end{aligned} \tag{2.124}$$

В частном случае, когда $\sin\omega = 0$, разложение по $\hat{\theta}$ суперполя φ принимает вид

$$\varphi\left(\hat{t}_L, \hat{\theta}_i\right) = z + \sqrt{2}\,\hat{\theta}_k\xi^k + (\hat{\theta})^2 B = z + \sqrt{2}\, e^{\frac{i}{2}m\hat{t}_L}\theta_k\xi^k + e^{im\hat{t}_L}\,(\theta)^2\, B\,. \tag{2.125}$$

Переопределение полей

$$z \to z\,, \quad e^{\frac{i}{2}m\hat{t}_L}\xi^i \;\to\; \xi^i, \quad e^{im\hat{t}_L}B \;\to\; B\,, \tag{2.126}$$

убирает из преобразований (2.124) зависимость от времени, и полученные преобразования тогда совпадают с преобразованиями (2.47) при $\kappa = 0$. Следовательно, частное суперполе

$\varphi\left(\hat t_L, \hat\theta_i\right)$ совпадает с (2.42), не обладающим внешним зарядом. Аналогичная эквивалентность имеет место для случая $\cos\omega = 0$. Для общего ω, зависимость от времени в преобразованиях (2.124) неустранима.

Наконец, отметим, что однопараметрическое семейство условий киральности (2.115), (2.116) на самом деле представляет собой наиболее общий выбор. Можно начать с (2.115a) с линейной комбинацией $\bar{\mathcal{D}}_i$ и $\mathcal{D}_i$ с комплексными коэффициентами. Затем, используя свободу умножения такого условия на произвольный ненулевой коэффициент и совершая надлежащее фазовое преобразование грассмановых координат, можно привести это условие к виду (2.115a).

2.3.3. Суперсимметричный осциллятор Кэлера

Общий кинетический лагранжиан. Наиболее общее $SU(2|1)$ инвариантное действие для обобщённого кирального суперполя $\varphi\left(\hat t_L, \hat\theta_i\right)$ задаётся произвольным потенциалом Кэлера $f\left(\varphi, \bar\varphi\right)$:

$$S_{\text{kin.}} = \int dt\, \mathcal{L}_{\text{kin.}} = \frac{1}{4}\int d\hat\zeta\, f\left(\varphi, \bar\varphi\right). \tag{2.127}$$

Соответствующий полный лагранжиан пишется как

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{kin.}} \;=\;& g\dot{\bar z}\dot z + \frac{i}{2}\, g\left(\bar\xi_i\dot\xi^i - \dot{\bar\xi}_i\xi^i\right) - \frac{i}{2}\,\bar\xi_k\xi^k\left(\dot{\bar z} g_{\bar z} - \dot z g_z\right) - \frac{1}{2}\left(\xi\right)^2\bar B g_z - \frac{1}{2}\left(\bar\xi\,\right)^2 B g_{\bar z}\\ & + g\bar B B + \frac{1}{4}\left(\xi\right)^2\left(\bar\xi\,\right)^2 g_{z\bar z} - \frac{i}{2}\, m\cos 2\omega\left(\dot{\bar z} f_{\bar z} - \dot z f_z\right) + \frac{m}{2}\, g\cos 2\omega\,\bar\xi_k\xi^k\\ & - \frac{m}{2}\sin 2\omega\left(\bar B f_{\bar z} + f_z B\right) + \frac{m}{4}\sin 2\omega\left[\left(\xi\right)^2 f_{zz} + \left(\bar\xi\,\right)^2 f_{\bar z\bar z}\right].\end{aligned} \tag{2.128}$$

Устраняя вспомогательные поля, мы получаем лагранжиан на массовой оболочке в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{kin.}} \;=\;& g\dot{\bar z}\dot z + \frac{i}{2}\, g\left(\bar\xi_i\dot\xi^i - \dot{\bar\xi}_i\xi^i\right) - \frac{i}{2}\,\bar\xi_k\xi^k\left(\dot{\bar z} g_{\bar z} - \dot z g_z\right) + \frac{1}{4}\left(\xi\right)^2\left(\bar\xi\,\right)^2 R\\ & - \frac{i}{2}\, m\cos 2\omega\left(\dot{\bar z} f_{\bar z} - \dot z f_z\right) + \frac{m}{2}\, g\cos 2\omega\,\bar\xi_k\xi^k - \frac{m^2}{4}\, g^{-1}\sin^2 2\omega\, f_z f_{\bar z}\\ & + \frac{m}{4}\sin 2\omega\left(\bar\xi\,\right)^2\left(f_{\bar z\bar z} - \frac{f_{\bar z} g_{\bar z}}{g}\right) + \frac{m}{4}\sin 2\omega\left(\xi\right)^2\left(f_{zz} - \frac{g_z f_z}{g}\right),\end{aligned} \tag{2.129}$$

где

$$R = g_{z\bar z} - \frac{g_z g_{\bar z}}{g}\,. \tag{2.130}$$

Лагранжиан инвариантен относительно преобразований на массовой оболочке

$$\begin{aligned}\delta z \;=\;& -\sqrt{2}\cos\omega\,\epsilon_k\xi^k\, e^{\frac{i}{2}mt} - \sqrt{2}\sin\omega\,\bar\epsilon_k\xi^k\, e^{-\frac{i}{2}mt},\\ \delta\xi^i \;=\;& \sqrt{2}\,\bar\epsilon^i\left[\cos\omega\,\dot z - \frac{1}{2}\, g^{-1}\sin\omega\left(m\,\sin 2\omega\, f_{\bar z} + \left(\xi\right)^2 g_z\right)\right] e^{-\frac{i}{2}mt}\\ & - \sqrt{2}\,\epsilon^i\left[i\sin\omega\,\dot z + \frac{1}{2}\, g^{-1}\cos\omega\left(m\,\sin 2\omega\, f_{\bar z} + \left(\xi\right)^2 g_z\right)\right] e^{\frac{i}{2}mt}.\end{aligned} \tag{2.131}$$

Лагранжиан (2.129) распознаётся как лагранжиан суперсимметричного осциллятора Кэлера [26], который зависит от напряжённости магнитного поля $m\cos 2\omega$ и частоты осциллятора Кэлера $(m\sin 2\omega)/2$. Бозонное ядро лагранжиана (2.129),

$$\mathcal{L}_{\text{kin.}}\,|_{\text{bos}} = g\dot{\bar z}\dot z - \frac{i}{2}\,m\cos 2\omega\,(\dot{\bar z} f_{\bar z} - \dot z f_z) - \frac{m^2}{4}\,g^{-1}\sin^2 2\omega\, f_z f_{\bar z}\,, \tag{2.132}$$

содержит дополнительные члены: потенциальный член осциллятора Кэлера $\sim g^{-1} f_{\bar z} f_z$ и член (Весса-Зумино) взаимодействия с постоянным магнитным полем на многообразии Кэлера. В пределе $m = 0$ все зависящие от ω члены в (2.128) и (2.129) исчезают. При выборе ω таком, что $\cos 2\omega = 0$ или $\sin 2\omega = 0$, потенциал осциллятора Кэлера или член Весса-Зумино могут быть устранены.

Суперпотенциал. Мера интегрирования $d\hat\zeta_L$ кирального подпространства инвариантна относительно преобразований (2.120):

$$d\hat\zeta_L = dt_L\, d^2\hat\theta, \qquad \delta\left(d\hat\zeta_L\right) = d\hat\zeta_L\left(\partial_{t_L}\delta t_L - \partial_{\hat\theta_i}\delta\hat\theta_i\right) = 0\,. \tag{2.133}$$

Благодаря этому свойству, можно определить общий внешний суперпотенциал

$$S_{\text{pot.}} = \int dt\,\mathcal{L}_{\text{pot.}} = \frac{\tilde m}{4}\left[\int d\hat\zeta_L\,\mathcal{U}(\varphi) + \int d\hat\zeta_R\,\bar{\mathcal{U}}(\bar\varphi)\right], \tag{2.134}$$

где $\mathcal{U}(\varphi)$ – произвольная голоморфная функция. Тогда, действие (2.134) даёт суперпотенциальный лагранжиан

$$\mathcal{L}_{\text{pot.}} = \frac{\tilde m}{4}\left[2\bar B\,\bar{\mathcal{U}}_{\bar z}\,(\bar z) + 2B\,\mathcal{U}_z\,(z) - (\xi)^2\,\mathcal{U}_{zz}\,(z) - \left(\bar\xi\right)^2\bar{\mathcal{U}}_{\bar z\bar z}\,(\bar z)\right]. \tag{2.135}$$

В пределе $m = 0$ это выражение переходит в суперпотенциал стандартного $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ мультиплета $(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{2})$. Общий лагранжиан вне массовой оболочки $\mathcal{L}_{\text{kin.}} + \mathcal{L}_{\text{pot.}}$, таким образом, включает следующий бозонный потенциальный член:

$$-\frac{B}{2}\,(m\sin 2\omega\, f_z - \tilde m\mathcal{U}_z) - \frac{\bar B}{2}\left(m\sin 2\omega\, f_{\bar z} - \tilde m\bar{\mathcal{U}}_{\bar z}\right) + g\bar B B. \tag{2.136}$$

Внутренний бозонный потенциал лагранжиана (2.129) на массовой оболочке модифицируется как

$$-\frac{m^2}{4g}\sin^2 2\omega\, f_z f_{\bar z} \;\to\; -\frac{1}{4g}\,(m\sin 2\omega f_z - \tilde m\,\mathcal{U}_z)\left(m\sin 2\omega\, f_{\bar z} - \tilde m\,\bar{\mathcal{U}}_{\bar z}\right). \tag{2.137}$$

Аналогичная модификация возникает для членов $\sim (\xi)^2$ и $\left(\bar\xi\right)^2$. Для простоты в дальнейшем мы не будем рассматривать вклад суперпотенциала.

В подходе, основанном на суперпространстве (1.6), киральная мера интегрирования (2.55) умножается на $U(1)_{\rm int}$ фазовый фактор, индуцированный $SU(2|1)$ суперсимметрией. Присутствие этого фактора накладывает жёсткие ограничения на вид допустимого суперпотенциала (2.56). Таких ограничений для суперпотенциала обобщённого кирального мультиплета не возникает.

Гамильтониан. Канонический гамильтониан, соответствующий лагранжиану (2.129),

$$\begin{aligned}\tilde{H} \;=\; & g^{-1}\left(p_z - \frac{i}{2}\,m\cos 2\omega\, f_z + \frac{i}{2}\,g_z\,\xi^k\bar{\xi}_k\right)\left(p_{\bar z} + \frac{i}{2}\,m\cos 2\omega\, f_{\bar z} - \frac{i}{2}\,g_{\bar z}\,\xi^k\bar{\xi}_k\right)\\ & - \frac{1}{4}\,(\xi)^2\left(\bar{\xi}\right)^2 R + \frac{m^2}{4}\,g^{-1}\sin^2 2\omega\, f_z f_{\bar z} + \frac{m}{2}\,g\cos 2\omega\,\xi^k\bar{\xi}_k\\ & - \frac{m}{4}\sin 2\omega\,\left(\bar{\xi}\right)^2\left(f_{\bar z\bar z} - \frac{f_{\bar z}g_{\bar z}}{g}\right) - \frac{m}{4}\sin 2\omega\,\left(\xi\right)^2\left(f_{zz} - \frac{g_z f_z}{g}\right). \end{aligned} \tag{2.138}$$

совпадает с гамильтонианом суперсимметричного осциллятора Кэлера $\mathcal{H}_0^{SUSY}$, который был впервые найден в [26]. В частном случае $\omega = 0$, гамильтониан $\tilde{H}$ воспроизводит выражение для разности генераторов $H - mF$ (2.59), (2.61).

Остальные сохраняющиеся заряды Нётер имеют вид

$$\begin{aligned} & Q^i = \sqrt{2}\,e^{\frac{i}{2}mt}\left[\cos\omega\,\xi^i\left(p_z - \frac{i}{2}\,mf_z + \frac{i}{2}\,g_z\,\xi^k\bar{\xi}_k\right) - \sin\omega\,\bar{\xi}^i\left(p_{\bar z} - \frac{i}{2}\,mf_{\bar z} - \frac{i}{2}\,g_{\bar z}\,\xi^k\bar{\xi}_k\right)\right],\\ & \bar{Q}_j = \sqrt{2}\,e^{-\frac{i}{2}mt}\left[\cos\omega\,\bar{\xi}_j\left(p_{\bar z} + \frac{i}{2}\,mf_{\bar z} - \frac{i}{2}\,g_{\bar z}\,\xi^k\bar{\xi}_k\right) + \sin\omega\,\xi_j\left(p_z + \frac{i}{2}\,mf_z + \frac{i}{2}\,g_z\,\xi^k\bar{\xi}_k\right)\right],\\ & I^i_j = g\left(\xi^i\bar{\xi}_j - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\xi^k\bar{\xi}_k\right). \end{aligned} \tag{2.139}$$

Скобки Пуассона (Дирака) применяются таким же образом, как и в (2.64).

Мы видим, что суперзаряды явно зависят от времени, и эта зависимость такова, что они удовлетворяют обобщённым законам сохранения:

$$\frac{d}{dt}\,Q^i = \partial_t Q^i + \{Q^i, \tilde{H}\} = 0\,, \qquad \frac{d}{dt}\,\bar{Q}_j = \partial_t \bar{Q}_j + \{\bar{Q}_j, \tilde{H}\} = 0\,. \tag{2.140}$$

Это можно легко проверить, используя скобки Пуассона

$$\{\tilde{H}, Q^i\} = \frac{i}{2}\,m\,Q^i, \qquad \{\tilde{H}, \bar{Q}_j\} = -\frac{i}{2}\,m\,\bar{Q}_j\,. \tag{2.141}$$

Обратим внимание на то, что для специальных случаев $\sin\omega = 0$ или $\cos\omega = 0$ зависимость от времени из суперзарядов в (2.139) может быть убрана переопределением фермионных переменных ξ^i и $\bar{\xi}_i$. После этого суперзаряды удовлетворяют стандартной форме закона сохранения и совпадают с суперарядами (2.74). Это находится в согласии с замечанием после формулы (2.124): для этих значений ω восстанавливается мультиплет $(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{2})$, определённый на суперпространстве (1.6) со стандартным киральным условием (2.41) и $\kappa = 0$.

Квантование. Используя такие же замены (2.63), мы квантуем систему аналогичным образом и получаем скобки (2.68). Для простоты мы будем использовать операторы (2.70) и операторы с противоположным знаком параметра деформации, $\nabla_z(-m)$, $\bar{\nabla}_{\bar{z}}(-m)$. Квантование в данном случае производится способом, аналогичным квантованию в разделе 2.2.5. Следуя этой процедуре, мы получаем квантовые операторы в виде[3]

$$\begin{aligned}
&\hat{Q}^i_{(cov)} = \sqrt{2}\, g^{-\frac{1}{2}} \left[\cos\omega\, \eta^i\, \nabla_z(m) - \sin\omega\, \bar{\eta}^i\, \bar{\nabla}_{\bar{z}}(-m)\right],\\
&\hat{\bar{Q}}_{(cov)j} = \sqrt{2}\, g^{-\frac{1}{2}} \left[\cos\omega\, \bar{\eta}_j\, \bar{\nabla}_{\bar{z}}(m) + \sin\omega\, \eta_j\, \nabla_z(-m)\right],\\
&\hat{I}^i_j = \eta^i\bar{\eta}_j - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\eta^k\bar{\eta}_k\,.
\end{aligned} \tag{2.142}$$

Они удовлетворяют $su(2|1)$ супералгебре (1.1) с квантовым гамильтонианом

$$\begin{aligned}
\hat{\tilde{H}} \;\; = \;\; & g^{-1}\Big[\bar{\nabla}_{\bar{z}}\left(m\cos 2\omega\right)\nabla_z\left(m\cos 2\omega\right) - \frac{1}{4}\,g^{-1}R\left(\eta\right)^2\left(\bar{\eta}\right)^2 + \frac{m^2}{4}\sin^2 2\omega\, f_z f_{\bar{z}}\\
& - \frac{m}{4}\sin 2\omega\left(\bar{\eta}\right)^2\left(f_{\bar{z}\bar{z}} - \frac{f_{\bar{z}}g_{\bar{z}}}{g}\right) - \frac{m}{4}\sin 2\omega\left(\eta\right)^2\left(f_{zz} - \frac{g_z f_z}{g}\right) + \frac{m}{2}\,g\cos 2\omega\,\eta^i\bar{\eta}_i\Big].
\end{aligned} \tag{2.143}$$

2.4. Мультиплет $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$

В $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ суперсимметрии мультиплет с набором полей $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$ описывается аналитическим гармоническим суперполем. Это основной $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ мультиплет, из которого можно получить все другие неприводимые мультиплеты и связанные с ними модели суперсимметричной механики с помощью различных вариантов гамильтоновой редукции [14] или, эквивалентно, калиброванием некоторых изометрий $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$ лагранжианов [8, 46, 47].

$SU(2|1)$ аналог мультиплета $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$ описывается суперполем q^{+a}, удовлетворяющим условиям[4]

$$\bar{\mathcal{D}}^+q^{+a} = \mathcal{D}^+q^{+a} = \mathcal{D}^{++}q^{+a} = 0\,, \qquad \tilde{F}q^{+a} = 0\,. \tag{2.144}$$

Эти условия выглядят так же, как и в плоском $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ суперпространства (кроме последнего) и имеют решение

$$q^{+a}\left(\zeta_{(A)}\right) = x^{ia}w^+_i + \theta^+\psi^a + \bar{\theta}^+\bar{\psi}^a - 2i\,\theta^+\bar{\theta}^+\dot{x}^{ia}w^-_i\,, \tag{2.145}$$

---

[3] Перейдём к картине, в которой суперзаряды не несут явной зависимости от t:

$$\psi \to U\psi, \qquad \left(\hat{Q}^i_{(cov)}\,,\, \hat{\bar{Q}}_{(cov)j}\right) \to U\left(\hat{Q}^i_{(cov)}\,,\, \hat{\bar{Q}}_{(cov)j}\right)U^{-1}, \qquad U = e^{it\hat{\tilde{H}}}.$$

[4] Для простоты, мы будем в рассматривать суперполе q^{+a}, которое не имеет внешнего заряда $\tilde{F}$.

где

$$\overline{(x^{ia})} = \epsilon_{ab}\epsilon_{ik}x^{kb}\,, \qquad \overline{(\psi^{a})} = \bar{\psi}_a\,. \tag{2.146}$$

Индексы $a = 1, 2$ – дублетные индексы группы Паули-Гюрси (Pauli-Gürsey) $SU(2)_{\rm PG}$, которая коммутирует с $SU(2|1)$. Фермионные поля $\psi^a, \bar{\psi}^a$ могут быть объединены в дублет внешней группы $SU'(2)$ как $(\psi^a, \bar{\psi}^a) := \psi^{i'a}$.

Аналитическое суперполе q^{+a} не содержит зависимости от m в его разложении по θ, однако неаналитический аналог q^{+a}, т. е. $q^{-a} := \mathcal{D}^{--}q^{+a}$, включает такую зависимость:

$$\begin{aligned} q^{-a} \;\; &= \;\; \left[1 + m\,\bar{\theta}^{+}\theta^{-} - m\,\bar{\theta}^{-}\theta^{+}\right] x^{ia}w_i^{-} + \theta^{-}\psi^{a} + \bar{\theta}^{-}\bar{\psi}^{a} + 2i\left(\bar{\theta}^{+}\theta^{-} + \bar{\theta}^{-}\theta^{+}\right)\dot{x}^{ia}w_i^{-} \\ &\quad + 2i\,\theta^{-}\bar{\theta}^{-}\left[\dot{x}^{ia}w_i^{+} + \theta^{+}\dot{\psi}^{a} + \bar{\theta}^{+}\dot{\bar{\psi}}^{a} - 2i\,\theta^{+}\bar{\theta}^{+}\ddot{x}^{ia}w_i^{-}\right]. \end{aligned} \tag{2.147}$$

Суперсимметричные преобразования q^{+a} определяются как частный случай общего закона преобразования (1.53),

$$\delta q^{+a} = -\,m\left(\bar{\theta}^{+}\epsilon^{-} + \theta^{+}\bar{\epsilon}^{-}\right)q^{+a}. \tag{2.148}$$

Отсюда можно найти преобразования полей

$$\begin{aligned} &\delta x^{ia} = -\,\epsilon^{i}\psi^{a} - \bar{\epsilon}^{i}\bar{\psi}^{a}, \\ &\delta\bar{\psi}_a = 2i\,\epsilon_k\dot{x}^k_a - m\,\epsilon_k x^k_a\,, \qquad \delta\psi^a = 2i\,\bar{\epsilon}^k\dot{x}^a_k + m\,\bar{\epsilon}^k x^a_k\,. \end{aligned} \tag{2.149}$$

2.4.1. Общее действие

В соответствии с общей структурой гармонического суперполевого действия (1.59), действие для мультиплета $(\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$ можно записать в виде

$$S\left(q^{\pm a}\right) = \int d\zeta_H\, K\left(q^{+}, q^{-}\right), \tag{2.150}$$

где K удовлетворяет условию

$$\tilde{F}K\left(q^{\pm a}\right) = \mathcal{D}^0 K\left(q^{\pm a}\right) = 0\,. \tag{2.151}$$

В отличие от плоского $\mathcal{N} = 4$ действия [10], функция K в действии (2.150) не содержит явных гармоник (1.58). Так как функция K является нейтральной, она может быть записана в виде функции двух нейтральных суперполевых аргументов, $K = K\left(q^2, X^{(ab)}\right)$, где

$$q^2 = 2\,q^{+a}q^{-}_a\,, \qquad X^{(ab)} = q^{+(a}q^{-b)} = \frac{1}{2}\left(q^{+a}q^{-b} + q^{+b}q^{-a}\right), \tag{2.152}$$

$$\mathcal{D}^{++}q^2 = \left(\mathcal{D}^{++}\right)^2 X^{(ab)} = 0\,, \qquad \mathcal{D}^0 q^2 = \mathcal{D}^0 X^{(ab)} = 0\,. \tag{2.153}$$

Можно показать, что эта функция представима в виде

$$K\left(q^2, X^{(ab)}\right) = -\,L\left(q^2\right) + \mathcal{D}^{++}L^{--}\left(q^2, X^{(ab)}\right). \tag{2.154}$$

Тогда действие (2.150) можно переписать как

$$S(q^2) = \int dt\,\mathcal{L} = -\int d\zeta_H\,L\left(q^2\right), \qquad \tilde{F}L\left(q^2\right) = \mathcal{D}^0 L\left(q^2\right) = 0\,, \tag{2.155}$$

где знак минус выбран для дальнейшего удобства. Соответствующий компонентный лагранжиан

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\;& G\left[\dot{x}^{ia}\dot{x}_{ia} + \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}_a\dot{\psi}^a - \dot{\bar{\psi}}_a\psi^a\right) + \frac{m}{2}\,\psi^a\bar{\psi}_a\right] - \frac{i}{2}\,\dot{x}^{ia}\partial_{ic}G\left(\psi_a\bar{\psi}^c + \psi^c\bar{\psi}_a\right)\\ &-\frac{\Delta_x G}{16}\left(\bar{\psi}\right)^2(\psi)^2 + \frac{m}{4}\,x^{ic}\partial_{ic}G\,\psi^a\bar{\psi}_a - \frac{m^2}{4}\,x^2\,G\,,\end{aligned} \tag{2.156}$$

записывается через конформно-плоскую метрику с конформным фактором G,

$$\begin{aligned}&G\left(x^2\right) = \Delta_x L\left(x^2\right) = 4x^2\,L''\left(x^2\right) + 8L'\left(x^2\right),\ \partial_{ia}G = 8x_{ia}\left(3L'' + x^2L'''\right),\\ &\partial_{ia} = \partial/\partial x^{ia}, \qquad \Delta_x = \epsilon^{ik}\epsilon^{ab}\partial_{ia}\partial_{kb}\,, \qquad x^2 = x^{ia}x_{ia}\,.\end{aligned} \tag{2.157}$$

Заметим, что $SU(2|1)$ суперсимметрия накладывает довольно жёсткие ограничения на структуру $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$ лагранжиана по сравнению со стандартной плоской $\mathcal{N}=4, d=1$ суперсимметрией. Так как в $SU(2|1)$ случае конформный фактор является функцией x^2, лагранжиан (2.156) инвариантен относительно $SU(2)_{\rm int}\times SU(2)_{\rm PG} \sim SO(4)$ симметрии. $SU'(2)$ симметрия на фермионах нарушена членом $\sim \psi^a\bar{\psi}_a = \psi^{1'a}\psi^{2'}_a$.

Простейший случай отвечает свободной системе с $G=1$:

$$S_{\rm free}(q^{\pm a}) = -\frac{1}{4}\int d\zeta_H\,q^{+a}q^-_a\,, \tag{2.158}$$

$$\mathcal{L}_{\rm free} = \dot{x}^{ia}\dot{x}_{ia} + \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}_a\dot{\psi}^a - \dot{\bar{\psi}}_a\psi^a\right) + \frac{m}{2}\,\psi^a\bar{\psi}_a - \frac{m^2}{4}\,x^{ia}x_{ia}\,. \tag{2.159}$$

2.4.2. Отсутствие инвариантных действий типа Весса-Зумино

Наиболее общее действие Весса-Зумино (или Черна-Саймонса) задаётся интегралом по аналитическому подпространству

$$S_{\rm WZ}(q^{+a}) = -\frac{i}{2}\int d\zeta^{--}_A\,L^{++}\left(q^{+a}, w^{\pm}_i\right). \tag{2.160}$$

Так как аналитическое суперполе (2.145) не деформировано параметром m, это действие совпадает с недеформированным действием Весса-Зумино для мультиплета $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$, вычисленным в [10]. Лагранжиан в компонентах пишется как

$$\mathcal{L}_{\rm WZ} = \mathcal{A}_{ia}\dot{x}^{ia} - \frac{i}{2}\,\mathcal{B}_{(ab)}\psi^a\bar{\psi}^b, \tag{2.161}$$

где

$$\mathcal{A}_{ia}\left(x^{ia}\right) := \int dw\, w_i^- \,\frac{\partial L^{++}}{\partial x^{+a}}\,, \qquad \mathcal{B}_{(ab)}\left(x^{ia}\right) := \int dw\, \frac{\partial^2 L^{++}}{\partial x^{+a}\partial x^{+b}}\,. \tag{2.162}$$

Отсюда видно, что внешнее калибровочное поле $\mathcal{A}_{ia}$ удовлетворяет условию самодуальности

$$\mathcal{F}_{kb\,ia} := \partial_{kb}\mathcal{A}_{ia} - \partial_{ia}\mathcal{A}_{kb} = \epsilon_{ki}\int du\, \frac{\partial^2 L^{++}}{\partial x^{+a}\,\partial x^{+b}} =: \epsilon_{ki}\mathcal{B}_{(ab)}\,, \tag{2.163}$$

и условию поперечной (кулоновской) калибровки

$$\partial_{ia}\mathcal{A}^{ia} = 0\,. \tag{2.164}$$

Лагранжиан (2.161) не является инвариантным относительно нечётных $SU(2|1)$ преобразований (2.149) при любом выборе L^{++}, так как его вариация

$$\delta\mathcal{L}_{\rm WZ} = -\,\partial_t\left[\mathcal{A}^{ia}\left(\epsilon^i\psi^a + \bar\epsilon^i\bar\psi^a\right)\right] + \frac{i}{2}\,m\,\mathcal{B}_{(ab)}\left(\epsilon^k\psi^a - \bar\epsilon^k\bar\psi^a\right)x^b_k \tag{2.165}$$

не сводится к полной производной из-за наличия деформированного слагаемого $\sim m$. Таким образом, действие Весса-Зумино отсутствует для $SU(2|1)$ мультиплета $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$.

2.4.3. Гамильтонов формализм

Классический гамильтониан

$$\begin{aligned} H \;=\; & \frac{1}{4G}\left[p^{ia} + \frac{i}{2}\left(\bar\psi_c\psi^a + \bar\psi^a\psi_c\right)\partial^{ic}G\right]\left[p_{ia} - \frac{i}{2}\left(\bar\psi_a\psi^b + \bar\psi^b\psi_a\right)\partial_{ib}G\right] \\ & + \frac{\Delta_x G}{16}\left(\bar\psi\right)^2(\psi)^2 - \frac{m}{4}\left(2G + x^{ic}\partial_{ic}G\right)\psi^a\bar\psi_a + \frac{m^2}{4}\,x^{ia}x_{ia}\,G \end{aligned} \tag{2.166}$$

может быть получен преобразованиями Лежандра лагранжиана (2.156). Также напрямую находим суперзаряды и остальные бозонные генераторы

$$\begin{aligned} & Q_i = \psi^a\left(p_{ia} + imx_{ia}G + \frac{i}{4}\,\psi_a\bar\psi^b\partial_{ib}G\right), \\ & \bar Q_i = \bar\psi^a\left(p_{ia} - imx_{ia}G - \frac{i}{4}\,\bar\psi_a\psi^b\partial_{ib}G\right), \\ & F = \frac{1}{2}\,G\,\psi^a\bar\psi_a\,, \qquad I_{ik} = ix^a_{(i}\,p_{k)a}\,. \end{aligned} \tag{2.167}$$

Скобки Пуассона для бозонов и скобки Дирака для фермионов определяются как

$$\begin{aligned} & \{p_{ia}, x^{kb}\} = -\,\delta^k_i\delta^b_a\,, \qquad \{\psi^a, \bar\psi_b\} = -\,iG^{-1}\delta^a_b\,, \\ & \{p_{ia}, \psi^b\} = \frac{1}{2}\,\psi^b G^{-1}\partial_{ia}G\,, \qquad \{p_{ia}, \bar\psi_b\} = \frac{1}{2}\,\bar\psi_b\,G^{-1}\partial_{ia}G\,. \end{aligned} \tag{2.168}$$

Для упрощения скобок, полезно сделать замены

$$\psi^a = G^{-\frac{1}{2}}\xi^a, \qquad \bar\psi_b = G^{-\frac{1}{2}}\bar\xi_b\,, \tag{2.169}$$

откуда

$$\{p_{ia}, x^{kb}\} = -\,\delta_i^k \delta_a^b\,, \qquad \{\xi^a, \bar\xi_b\} = -\,i\delta_b^a\,, \qquad \{p_{ia}, \xi^b\} = \{p_{ia}, \bar\xi_b\} = 0\,. \tag{2.170}$$

Эти скобки могут быть проквантованы стандартным образом:

$$p_{ia} = -\,i\partial_{ia}\,, \quad \bar\xi_a = \partial/\partial\xi^a, \quad \left[p_{ia}, x^{kb}\right] = -\,i\delta_i^k\delta_a^b\,, \quad \{\xi^a, \bar\xi_b\} = \delta_b^a\,. \tag{2.171}$$

Квантовые суперзаряды могут быть построены из классических (2.167) в соответствии с процедурой [44], которая была применена нами также в разделе 2.2.5. В данном случае, эта процедура приводит к суперзарядам

$$\begin{aligned} \hat Q_{(\mathrm{cov})i} &= -\,i\,\xi^a G^{-\frac12}\left[(\partial_{ia} - m x_{ia})G - \frac14\left(\xi_a\bar\xi^b - 2\delta_a^b\right)G^{-1}\partial_{ib}G\right], \\ \hat{\bar Q}_{(\mathrm{cov})i} &= -\,i\,\bar\xi^a G^{-\frac12}\left[(\partial_{ia} + m x_{ia})G + \frac14\left(\bar\xi_a\xi^b + 2\delta_a^b\right)G^{-1}\partial_{ib}G\right]. \end{aligned} \tag{2.172}$$

Вычисляя антикоммутатор квантовых суперзарядов, мы находим квантовый гамильтониан

$$\begin{aligned} \hat H_{(\mathrm{cov})} \;=\; & -\frac{1}{4G}\left[\partial^{ia} + \frac12\left(\xi^a\bar\xi_c - \bar\xi^a\xi_c\right)G^{-1}\partial^{ic}G\right]\left[\partial_{ia} + \frac12\left(\bar\xi_a\xi^b - \xi_a\bar\xi^b\right)G^{-1}\partial_{ib}G\right] \\ & + \frac{\Delta_x G}{16G^2}\left[(\xi)^2\left(\bar\xi\,\right)^2 - 2\xi^a\bar\xi_a\right] - \frac{m}{8}\left(2 + x^{ic}G^{-1}\partial_{ic}G\right)\left[\xi^a, \bar\xi_a\right] + \frac{m^2}{4}\,x^{ia}x_{ia}\,G - \frac{m}{2}\,, \end{aligned} \tag{2.173}$$

и остальные квантовые генераторы

$$\hat F = -\frac12\,\bar\xi_a\xi^a, \qquad \hat I_{ik} = x^a_{(i}\,\partial_{k)a}\,. \tag{2.174}$$

Взятые вместе, эти генераторы образуют центрально-расширенную супералгебру (1.4).

2.4.4. Свободная модель

В этом разделе мы подробно рассмотрим простейшую модель $G = 1$ со свободным лагранжианом (2.159). Квантовый гамильтониан свободной модели имеет вид

$$\hat H = -\,\frac14\left(\partial^{ia} - m x^{ia}\right)\left(\partial_{ia} + m x_{ia}\right) + \frac{m}{2}\,\bar\xi_a\xi^a. \tag{2.175}$$

Остальные $SU(2|1)$ генераторы могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} &\hat Q_i = -\,i\,\xi^a\left(\partial_{ia} - m x_{ia}\right), \qquad \hat{\bar Q}_i = -\,i\,\bar\xi^a\left(\partial_{ia} + m x_{ia}\right), \\ &\hat F = -\frac12\,\bar\xi_a\xi^a, \qquad \hat I_{ik} = x^a_{(i}\,\partial_{k)a}\,. \end{aligned} \tag{2.176}$$

Можно также определить, для рассматриваемого случая, генераторы алгебры $su(2)_{\mathrm{PG}}$

$$\hat E_{ab} = x^i_{(a}\,\partial_{ib)} - \bar\xi_{(a}\xi_{b)}\,, \quad \left[\hat E_{ab}, \hat E_{cd}\right] = \varepsilon_{cb}\hat E_{ad} - \varepsilon_{ad}\hat E_{cb}\,, \tag{2.177}$$

которые коммутируют со всеми $SU(2|1)$ генераторами.

Так как спектр гамильтониана должен быть ограничен снизу, мы налагаем на основное состояние $|0\rangle$ следующие физические условия:

$$\xi^a\,|0\rangle = 0\,, \qquad (\partial_{ia} + m x_{ia})\,|0\rangle = 0\,. \tag{2.178}$$

Решая их, мы получаем волновую функцию основного состояния, которая аннигилируется суперзарядами (2.176):

$$|0\rangle = e^{-\frac{m}{2}x^2}, \qquad \hat{Q}^i\,|0\rangle = \hat{\bar{Q}}_i\,|0\rangle = 0\,. \tag{2.179}$$

Все бозонные квантовые состояния могут быть построены действием операторов рождения $\nabla^{ia} := \partial^{ia} - m x^{ia}$ на $|0\rangle$. Бозонное состояние $|\ell\,; s\rangle$ определено как

$$|\ell\,; s\rangle = A_{(i_1 i_2 \ldots i_s)(a_1 a_2 \ldots a_s)} \nabla^{i_1 a_1} \nabla^{i_2 a_2} \ldots \nabla^{i_s a_s} \left(\nabla^{ia}\nabla_{ia}\right)^{\ell} |0\rangle, \tag{2.180}$$

где A – набор численных коэффициентов, симметричный по обоим $SU(2)_{\rm int}$ и $SU(2)_{\rm PG}$ индексам. Квантовое число $s/2$ отождествляется со старшим весом («изоспином») неприводимого представления группы $SU(2)_{\rm PG}$. Понятно, что это состояние имеет тот же изоспин $s/2$ по отношению к группе $SU(2)_{\rm int}$.

Действуя суперзарядами $\hat{\bar{Q}}_i$ на бозонные состояния $|\ell\,; s\rangle$, мы получим набор новых фермионных и бозонных состояний

$$\begin{aligned}
&\hat{\bar{Q}}_i\,|\ell\,; s\rangle = 2im\,\bar{\xi}^a\left[2\ell\nabla_{ia}\,|\ell-1\,; s\rangle + s b_{ia}\,|\ell\,; s-1\rangle\right],\\
&\hat{\bar{Q}}^i\hat{\bar{Q}}_i\,|\ell\,; s\rangle = -8\ell\,(2\ell+s)\,m^2\left(\bar{\xi}\right)^2\,|\ell-1\,; s\rangle.
\end{aligned} \tag{2.181}$$

Таким образом, бозонная волновая функция $|\ell\,; s\rangle$ расширяется до суперволновой функции $\Omega^{(\ell;s)}$, где $\Omega^{(0;0)} = |0\rangle$. Действие суперзарядов $\hat{Q}^i$ на $|\ell\,; s\rangle$ аннигилирует это состояние, т. е. $\hat{Q}^i\,|\ell\,; s\rangle = 0$. Действуя гамильтонианом (2.175) на $\Omega^{(\ell;s)}$, мы получаем его собственные значения:

$$H\,\Omega^{(\ell;s)} = \frac{m}{2}\,(2\ell+s)\,\Omega^{(\ell;s)}, \qquad m > 0\,. \tag{2.182}$$

Проанализируем вырождения суперволновой функции $\Omega^{(\ell;s)}$, используя обозначения (k, n) для конечномерных представлений группы $SU(2)_{\rm PG} \times SU(2)_{\rm int}$. Нетривиальная волновая функция $\Omega^{(0;s)}$ представляет собой суперпозицию $(s+1)^2$ бозонных и $s\,(s+1)$ фермионных состояний,

$$|0\,; s\rangle, \qquad \bar{\xi}_a\,|0\,; s-1\rangle, \qquad s > 0\,. \tag{2.183}$$

Следовательно, суперволновая функция $\Omega^{(0;s)}$ имеет вырождение $(2s+1)(s+1)$. Бозонные состояния соответствуют представлению $(s/2\,,s/2)$, а фермионные состояния – представлению $(s/2\,,(s-1)/2)$. С другой стороны, волновая функция $\Omega^{(\ell;s)}$ с $\ell>0$ имеет $4\,(s+1)^2$-кратное вырождение, являясь суперпозицией следующих состояний:

$$|\ell\,;s\rangle, \quad \bar{\xi}_a\nabla^{ia}\,|\ell-1\,;s\rangle, \quad \bar{\xi}_a\,|\ell\,;s-1\rangle, \quad \left(\bar{\xi}\right)^2|\ell-1\,;s\rangle, \quad \ell>0\,. \tag{2.184}$$

Здесь бозонные состояния (1-ое и 4-ое) образуют представления $(s/2\,,s/2)\oplus(s/2\,,s/2)$, а фермионные состояния – представления $(s/2\,,(s+1)/2)\oplus(s/2\,,(s-1)/2)$.

Для генераторов в реализации (2.176) и (2.177) операторы Казимира (Б.1) и (Б.2) приобретают следующую форму:

$$m^2C_2=\hat{H}\left(\hat{H}+m\right)-\frac{m^2}{2}\,\hat{E}^a_b\hat{E}^b_a\,, \qquad m^3C_3=\left(\hat{H}+\frac{m}{2}\right)C_2\,. \tag{2.185}$$

Последнее слагаемое в C_2 – это просто оператор Казимира группы $SU(2)_{\rm PG}$, который действует на $\Omega^{(\ell;s)}$ как

$$\frac{1}{2}\,\hat{E}^a_b\hat{E}^b_a\,\Omega^{(\ell;s)}=\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2}+1\right)\Omega^{(\ell;s)}. \tag{2.186}$$

Теперь, основываясь на (2.185), (2.186) и (2.182), мы легко находим собственные числа (Б.3), где

$$\beta=\frac{1}{2}\,(2\ell+s+1)\,, \quad \lambda=\frac{1}{2}\,(s+1)\,, \qquad \ell\neq 0\,. \tag{2.187}$$

Соответствующие квантовые состояния образуют типические $SU(2|1)$ представления. Атипические представления соответствуют нулевым собственным значениям операторов Казимира. Волновые функции $\Omega^{(0;s)}$ принадлежит этому подклассу при

$$\ell=0\,, \qquad \beta=\lambda=\frac{s}{2}\,. \tag{2.188}$$

Вырождение функции $\Omega^{(\ell;s)}$ может быть вычислено как произведение соответствующих размерностей $SU(2)_{\rm PG}$ и $SU(2|1)$ представлений. Результат совпадает с прямым подсчётом, приведенным выше. В типических случаях $\ell>0$ волновая функция $\Omega^{(\ell;s)}$ имеет вырождение $4\,(s+1)^2$. Типические представления всегда включают равное количество бозонов и фермионов. Волновая функция $\Omega^{(0;s)}$, соответствующая атипическому случаю, имеет вырождение $(2s+1)\,(s+1)$, включая $(s+1)^2$ бозонных и $s\,(s+1)$ фермионных состояний.

В качестве наглядного примера рассмотрим суперволновые функции простейших атипических и типических представлений $SU(2|1)$. Атипическая волновая функция $\Omega^{(0;1)}$ состоит из представлений $(1/2,1/2)$ для бозонов и $(1/2,0)$ для фермионных состояний:

$$\nabla^{ia}|0\rangle, \qquad \bar{\xi}_a|0\rangle. \tag{2.189}$$

Простейшая типическая волновая функция $\Omega^{(1;0)}$ имеет четырёхкратное вырождение:

$$\nabla^{ia}\nabla_{ia}\,|0\rangle, \qquad \bar{\xi}_a\nabla^{ia}\,|0\rangle, \qquad \big(\bar{\xi}\big)^2\,|0\rangle. \tag{2.190}$$

Бозонные состояния принадлежат представлению $(0,0)\oplus(0,0)$, в то время как фермионные состояния – представлению $(0,1/2)$.

2.5. Зеркальный мультиплет $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$

Стандартные мультиплеты $(\mathbf{n},\mathbf{4},\mathbf{4}-\mathbf{n})$ плоской $\mathcal{N}=4$, $d=1$ суперсимметрии имеют свои «зеркальные» (или «твистованные») аналоги, которые обладают тем же набором полей, но для которых две коммутирующие $SU(2)$ группы из группы автоморфизмов $SU(2)\times SU'(2)$ суперbegin алгебры $\mathcal{N}=4$, $d=1$ меняются ролями. Поскольку эти автоморфизмы входят в расширенную ими супералгебру совершенно симметричным образом, разница между двумя взаимно зеркальными мультиплетами проявляется только в тех моделях суперсимметричной квантовой механики, где эти мультиплеты присутствуют одновременно. В $SU(2|1)$ деформированном случае, симметрия между двумя бывшими группами автоморфизмов $SU(2)$ и $SU'(2)$ плоской супералгебры нарушена: первая группа $SU(2)$ становится внутренней группой $SU(2)_{\rm int}$, в то время как только генератор F из $SU'(2)$ выживает в супералгебре (1.4). Таким образом, можно ожидать существенную разницу между $SU(2|1)$ мультиплетами и их возможными зеркальными партнёрами. Здесь мы построим зеркальное версию $SU(2|1)$ мультиплета $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$ и покажем, что соответствующие модели действительно обнаруживают несколько серьёзных отличий от тех, которые рассматривлись в предыдущей главе 2.4. В частности, в зеркальном случае можно построить $SU(2|1)$ инвариантные суперполевые действия Весса-Зумино.

Рассмотрим зеркальный мультиплет $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$ [48, 49] в рамках гармонического $SU(2|1)$ суперпространства. Суперполя $\overline{(Y^A)}=\bar{Y}_A$, $A=1,2$, удовлетворяют условиям

$$\bar{\mathcal{D}}^+Y^A=\mathcal{D}^+\bar{Y}^A=\mathcal{D}^{++}Y^A=\mathcal{D}^{++}\bar{Y}^A=0\,, \quad \mathcal{D}^+Y^A=-\,\bar{\mathcal{D}}^+\bar{Y}^A. \tag{2.191}$$

С учетом действия генератора $\tilde{F}$ на спинорные ковариантные производные (1.50), условия (2.191) однозначно закрепляют $\tilde{F}$ заряд суперполей Y^A, $\bar{Y}^A$ как

$$m\tilde{F}\,\bar{Y}^A=-\,\frac{m}{2}\,\bar{Y}^A, \qquad m\tilde{F}\,Y^A=\frac{m}{2}\,Y^A. \tag{2.192}$$

Дублеты Y^A, $\bar{Y}^A$ группы $SU'(2)_{\rm PG}$ можно объединить также в дублет $Y^{1'A}$, $Y^{2'A}$ группы $SU'(2)$.

Уравнения (2.191) решаются в терминах суперполей, определенных на аналитических суперпространствах (1.65):

$$
\begin{aligned}
Y^A\left(\zeta^{(3)}_{(A)}\right) &= y^A - \theta^+\psi^{iA}w_i^- + \theta^-\psi^{iA}w_i^+ - 2i\,\theta^-\bar\theta^+\dot y^A + 2i\,\theta^-\theta^+\dot{\bar y}^A \\
&\quad - 2i\,\theta^-\theta^+\bar\theta^+\dot\psi^{iA}w_i^- + m\,\theta^-\bar\theta^+ y^A + m\,\theta^-\theta^+\bar y^A, \\
\bar Y^A\left(\bar\zeta^{(3)}_{(A)}\right) &= \bar y^A - \bar\theta^+\psi^{iA}w_i^- + \bar\theta^-\psi^{iA}w_i^+ - 2i\,\theta^+\bar\theta^-\dot{\bar y}^A + 2i\,\bar\theta^+\bar\theta^-\dot y^A \\
&\quad - 2i\,\bar\theta^-\theta^+\bar\theta^+\dot\psi^{iA}w_i^- - m\,\theta^+\bar\theta^-\bar y^A - m\,\bar\theta^+\bar\theta^- y^A, \qquad (2.193)
\end{aligned}
$$

где

$$\overline{(y^A)} = \bar y_A\,, \qquad \overline{(\psi^{iA})} = \psi_{iA}\,. \qquad (2.194)$$

Заметим, что Y^A состоит из набора полей $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$, но эти поля отличаются от предыдущего мультиплета $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$. Бозонные поля образуют комплексный $SU'(2)_{\rm PG}$ дублет y^A, который является синглетом группы $SU(2)_{\rm int}$ (хотя он по-прежнему вращается $U(1)_{\rm int}$ генератором F). Фермионные поля объединены в дублеты групп $SU'(2)_{\rm PG}$ и $SU(2)_{\rm int}$, но являются синглетами внутренней группы $U(1)_{\rm int}$.

Согласно общему трансформационному закону (1.53), суперполя Y^A, $\bar Y^A$ претерпевают преобразования

$$\delta Y^A = -\,m\left(\bar\theta^+\epsilon^- - \theta^+\bar\epsilon^-\right)Y^A, \qquad \delta\bar Y^A = m\left(\bar\theta^+\epsilon^- - \theta^+\bar\epsilon^-\right)\bar Y^A. \qquad (2.195)$$

Преобразования компонентных полей имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\delta y^A = -\,\epsilon_i\psi^{iA}, \qquad \delta\bar y^A = -\,\bar\epsilon_i\psi^{iA}, \\
&\delta\psi^{iA} = \bar\epsilon^i\left(2i\dot y^A - my^A\right) - \epsilon^i\left(2i\dot{\bar y}^A + m\bar y^A\right). \qquad (2.196)
\end{aligned}
$$

2.5.1. σ-модельное действие

Можно написать общее σ-модельное действие через функцию $\tilde L$ как

$$\tilde S\left(Y,\bar Y\right) = \int dt\,\tilde{\mathcal L} = \int d\zeta_H\,\tilde L\left(Y,\bar Y\right). \qquad (2.197)$$

Инвариантность достигается только при соблюдении условия

$$m\tilde F\tilde L\left(Y,\bar Y\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m\left(y^B\partial_B - \bar y^B\bar\partial_B\right)\tilde L\left(y,\bar y\right) = 0\,. \qquad (2.198)$$

Это условие необходимо только для случая $m \neq 0$, когда F появляется в качестве внутреннего генератора в супералгебре (1.4). В силу ограничения (2.198),

$$\tilde L(Y,\bar Y) = \tilde L(\mathcal U^A_B), \quad \mathcal U^A_B := Y^A\bar Y_B\,. \qquad (2.199)$$

Общий компонентный лагранжиан пишется как

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}} \;\; = \;\; & \left[2\,\dot{y}^A\dot{\bar{y}}_A + \frac{i}{2}\,\psi^{iA}\dot{\psi}_{iA} - \frac{i}{2}\,\psi^{iA}\psi_{iC}\left(\dot{y}^C\partial_A + \dot{\bar{y}}^C\bar{\partial}_A\right) + \frac{1}{48}\,\psi^{iA}\psi^k_A\psi^B_i\psi_{kB}\,\Delta_y\right]\tilde{G} \\ & - im\left(\dot{y}^A\bar{y}_A - y^A\dot{\bar{y}}_A\right)\tilde{G} + 2im\left(\dot{y}^A\partial_A\tilde{L} - \dot{\bar{y}}^A\bar{\partial}_A\tilde{L}\right) - m\,\psi^{iA}\psi^B_i\partial_A\bar{\partial}_B\tilde{L} \\ & + \frac{m}{4}\,\psi^{iA}\psi_{iC}\left(y^C\partial_A\tilde{G} - \bar{y}^C\bar{\partial}_A\tilde{G}\right) + \frac{m^2}{2}\,y^A\bar{y}_A\,\tilde{G} - m^2\left(y^A\partial_A\tilde{L} + \bar{y}^A\bar{\partial}_A\tilde{L}\right), \quad (2.200)\end{aligned}$$

где

$$\tilde{G} := \Delta_y\tilde{L}\,, \qquad \Delta_y = -\,2\,\epsilon^{AB}\partial_A\bar{\partial}_B\,, \qquad \partial_A = \frac{\partial}{\partial y^A}\,, \quad \bar{\partial}_B = \frac{\partial}{\partial\bar{y}^B}\,. \tag{2.201}$$

Простейшим инвариантным действием является свободное действие

$$\tilde{S}_{\rm free}\left(Y,\bar{Y}\right) = \frac{1}{4}\int d\zeta_H\,Y^A\bar{Y}_A\,, \tag{2.202}$$

которому соответствует компонентное действие

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\rm free} = 2\,\dot{y}^A\dot{\bar{y}}_A + \frac{i}{2}\,\psi^{iA}\dot{\psi}_{iA} - \frac{i}{2}\,m\left(\dot{y}^A\bar{y}_A - y^A\dot{\bar{y}}_A\right). \tag{2.203}$$

В отличие от недеформированного случая $m = 0$, лагранжиан (2.200) выживает при $\tilde{G} = 0$. Тогда, остаточный лагранжиан,

$$\tilde{\mathcal{L}}\,|_{\tilde{G}=0} \;\; = \;\; 2im\left(\dot{y}^A\partial_A\tilde{L} - \dot{\bar{y}}^A\bar{\partial}_A\tilde{L}\right) - m\,\psi^{iA}\psi^B_i\partial_A\bar{\partial}_B\tilde{L} - m^2\left(y^A\partial_A\tilde{L} + \bar{y}^A\bar{\partial}_A\tilde{L}\right), \tag{2.204}$$

инвариантен сам по себе и может рассматриваться как лагранжиан Весса-Зумино, который обращается в ноль в пределе $m = 0$. Условие $\tilde{G} = 0$ эквивалентно четырёхмерному уравнению Лапласа для $\tilde{L}$

$$\Delta_y\tilde{L} = 0\,. \tag{2.205}$$

Простейшее решение этого уравнения есть

$$\tilde{L} = c_{(AB)}Y^A\bar{Y}^B\,, \tag{2.206}$$

где $c_{(AB)}$ – произвольный постоянный триплет, который нарушает $SU(2)_{\rm PG}$ симметрию.

2.5.2. Действие Весса-Зумино

Для зеркального мультиплета $(\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$, действие Весса-Зумино может быть получено не только как специальный предел $SU(2|1)$ инвариантного σ-модельного действия, но также может быть построено независимо. Суперполевое действие Весса-Зумино может быть записано в виде интеграла по аналитическому суперпространству

$$\tilde{S}_{\rm WZ}\left(Y,\bar{Y}\right) = -\,\gamma\int d\zeta^{--}_{(A)}\,\left(\bar{\theta}^+\bar{\mathcal{D}}^+ + \theta^+\mathcal{D}^+\right)W\left(Y,\bar{Y}\right). \tag{2.207}$$

Так как мы интегрируем по аналитическому подпространству, мы должны наложить условие аналитичности (1.62) на суперполевой лагранжиан. Это эквивалентно условию

$$\bar{\mathcal{D}}^{+}\mathcal{D}^{+}W\left(Y,\bar{Y}\right)=0\quad\Rightarrow\quad\Delta_{y}W=0\,. \tag{2.208}$$

Можно определить 4-вектор $\tilde{\mathcal{A}}_{i'A}$ как

$$\tilde{\mathcal{A}}_{1'B}=i\partial_{B}W,\quad\tilde{\mathcal{A}}_{2'B}=-\,i\bar{\partial}_{B}W,\quad y^{A}=y^{1'A},\quad y^{2'A}=\bar{y}^{A}. \tag{2.209}$$

Тогда, из (2.208) вытекает условие самодуальности для $\tilde{\mathcal{A}}_{i'A}$

$$\partial_{i'A}\tilde{\mathcal{A}}_{k'B}-\partial_{k'B}\tilde{\mathcal{A}}_{i'A}=\epsilon_{i'k'}\tilde{\mathcal{B}}_{(AB)}\,,\quad\tilde{\mathcal{B}}_{(AB)}=-2i\partial_{(A}\bar{\partial}_{B)}W\,, \tag{2.210}$$

и условие поперечной (кулоновской) калибровки

$$\partial_{i'A}\tilde{\mathcal{A}}^{i'A}=0\,. \tag{2.211}$$

Кроме того, требование $SU(2|1)$ инвариантности приводит к новому ограничению на W при $m\neq 0$ (аналогично (2.198)):

$$m\tilde{F}W\left(Y,\bar{Y}\right)=0\qquad\Rightarrow\qquad m\left(y^{B}\partial_{B}-\bar{y}^{B}\bar{\partial}_{B}\right)W\left(y,\bar{y}\right)=0\,. \tag{2.212}$$

Это условие равнозначно инвариантности (2.207) относительно $U(1)_{\rm int}$ симметрии

$$W\left(Y^{A},\bar{Y}_{B}\right)=W(\mathcal{U}^{A}_{B})\,,\quad\mathcal{U}^{A}_{B}:=Y^{A}\bar{Y}_{B}\,. \tag{2.213}$$

В пределе $m=0$ матричный генератор $\tilde{F}$ становится внешним генератором автоморфизмов, а условие (2.212) выполняется тривиально, без наложения каких-либо ограничений на $W\left(Y_{A},\bar{Y}^{B}\right)$.

Компонентный лагранжиан, соответствующий действию (2.207), пишется как

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\rm WZ}=2\gamma\left\{i\left(\dot{y}^{A}\,\partial_{A}W-\dot{\bar{y}}^{A}\,\bar{\partial}_{A}W\right)-\frac{m}{2}\left(y^{A}\,\partial_{A}W+\bar{y}^{A}\bar{\partial}_{A}W\right)-\frac{1}{2}\,\psi^{iA}\psi^{B}_{i}\,\partial_{A}\bar{\partial}_{B}W\right\}. \tag{2.214}$$

Используя условия (2.208) и (2.212), можно непосредственно проверить, что этот лагранжиан инвариантен относительно преобразований суперсимметрии (2.196). Первый член в (2.214) можно компактно переписать через внешнее калибровочное поле как

$$i\left(\dot{y}^{A}\,\partial_{A}W-\dot{\bar{y}}^{A}\,\bar{\partial}_{A}W\right)=\dot{y}^{i'A}\mathcal{A}_{i'A}\,. \tag{2.215}$$

Отметим, что симметрия $SU'(2)$ нарушена в полном лагранжиане (2.214).

Очевидно, что лагранжиан (2.214) можно отождествить с лагранжианом (2.204), где

$$\tilde{G}=\Delta_{y}\tilde{L}\left(y,\bar{y}\right)=0\,,\qquad\tilde{L}\equiv W\,,\qquad m\sim\gamma\,. \tag{2.216}$$

Условие (2.212) эквивалентно условию (2.198).

2.5.3. Гамильтонов формализм и квантовые суперзаряды

В этом разделе мы будем исходить из гамильтониана

$$
\begin{aligned}
H \;\; = \;\; & -\frac{1}{2}\,\epsilon^{AB}\tilde{G}^{-1}\left[p_A - 2i\left(m\,\partial_A\tilde{L} + \gamma\,\partial_A f\right) + \frac{i}{2}\,\psi^{kD}\psi_{kA}\,\partial_D\tilde{G}\right] \times \\
& \left[\bar{p}_B + 2i\left(m\,\bar{\partial}_B\tilde{L} + \gamma\,\bar{\partial}_B f\right) + \frac{i}{2}\,\psi^{iC}\psi_{iB}\,\bar{\partial}_C\tilde{G}\right] - \frac{1}{48}\,\psi^{iA}\psi^{k}_{A}\psi^{B}_{i}\psi_{kB}\,\Delta_y\tilde{G} \\
& + \psi^{iA}\psi^{B}_{i}\left(m\,\partial_A\bar{\partial}_B\tilde{L} + \gamma\,\partial_A\bar{\partial}_B f\right) - \frac{i}{2}\,m\left(y^A p_A - \bar{y}^A\bar{p}_A\right), \qquad (2.217)
\end{aligned}
$$

который соответствует общему лагранжиану $\tilde{\mathcal{L}} + \tilde{\mathcal{L}}_{\rm WZ}$. Суперзаряды и остальные бозонные генераторы определяются следующими выражениями:

$$
\begin{aligned}
& Q^i = \psi^{iA}\left[p_A - 2i\left(m\,\partial_A\tilde{L} + \gamma\,\partial_A f\right) + \frac{i}{6}\,\psi^{kC}\psi_{kA}\,\partial_C\tilde{G}\right], \\
& \bar{Q}_i = \psi^{A}_{i}\left[\bar{p}_A + 2i\left(m\,\bar{\partial}_A\tilde{L} + \gamma\,\bar{\partial}_A f\right) + \frac{i}{6}\,\psi^{kC}\psi_{kA}\,\bar{\partial}_C\tilde{G}\right], \qquad (2.218) \\
& F = -\frac{i}{2}\left(y^A p_A - \bar{y}^A\bar{p}_A\right), \qquad I_{ik} = \frac{1}{2}\,\psi^{A}_{(i}\psi_{k)A}\,\tilde{G}\,. \qquad (2.219)
\end{aligned}
$$

Налагая сначала скобки Пуассона и Дирака как

$$
\begin{aligned}
& \{p_A, y^B\} = -\,\delta^B_A\,, \qquad \{\bar{p}_A, \bar{y}^B\} = -\,\delta^B_A\,, \qquad \{\psi^{iA}, \psi_{kB}\} = -\,i\tilde{G}^{-1}\delta^A_B\,\delta^i_k\,, \\
& \{p_A, \psi_{kB}\} = \frac{1}{2}\,\psi_{kB}\,\tilde{G}^{-1}\partial_A\,\tilde{G}\,, \qquad \{\bar{p}_A, \psi_{kB}\} = \frac{1}{2}\,\psi_{kB}\,\tilde{G}^{-1}\bar{\partial}_A\tilde{G}\,, \qquad (2.220)
\end{aligned}
$$

мы можем их упростить следующей заменой полей:

$$
\psi^{iA} = \tilde{G}^{-\frac{1}{2}}\xi^{iA}, \qquad (2.221)
$$

Тогда упрощённые скобки записываются в виде

$$
\{p_A, y^B\} = -\,\delta^B_A\,, \qquad \{\bar{p}_A, \bar{y}^B\} = -\,\delta^B_A\,, \qquad \{\xi^{iA}, \xi_{kB}\} = -\,i\delta^A_B\,\delta^i_k\,. \qquad (2.222)
$$

Как следующий шаг, мы квантуем эти скобки стандартным образом

$$
\begin{aligned}
& p_A = -\,i\partial_A\,, \qquad \bar{p}_A = -\,i\bar{\partial}_A\,, \qquad \xi_{iA} = \partial/\partial\xi^{iA}\,, \\
& \left[p_A, y^B\right] = -\,i\delta^B_A\,, \qquad \left[\bar{p}_A, \bar{y}^B\right] = -\,i\delta^B_A\,, \qquad \{\xi^{iA}, \xi_{kB}\} = \delta^A_B\,\delta^i_k\,. \qquad (2.223)
\end{aligned}
$$

Выполняя квантование классических суперзарядов по общей методике работы [44], мы получаем квантовые суперзаряды

$$
\begin{aligned}
& \hat{Q}^i_{(\rm cov)} = -\,i\,\xi^{iA}\tilde{G}^{-\frac{1}{2}}\left[\partial_A + 2\left(m\,\partial_A\tilde{L} + \gamma\,\partial_A f\right) - \frac{1}{6}\left(\xi^{kC}\xi_{kA} - 4\delta^C_A\right)\tilde{G}^{-1}\partial_C\tilde{G}\right], \\
& \hat{\bar{Q}}_{(\rm cov)i} = -\,i\,\xi^{A}_{i}\tilde{G}^{-\frac{1}{2}}\left[\bar{\partial}_A - 2\left(m\,\bar{\partial}_A\tilde{L} + \gamma\,\bar{\partial}_A f\right) - \frac{1}{6}\left(\xi^{kC}\xi_{kA} - 4\delta^C_A\right)\tilde{G}^{-1}\bar{\partial}_C\tilde{G}\right]. \quad (2.224)
\end{aligned}
$$

Антикоммутаторы квантовых суперзарядов дают квантовый гамильтониан в виде

$$\begin{aligned}\hat{H}_{(\mathrm{cov})} \;=\;& \frac{1}{4}\,\epsilon^{AB}\tilde{G}^{-1}\Big\{\,\Big[\partial_A + 2\,\Big(m\,\partial_A\tilde{L} + \gamma\,\partial_A f\Big) + \frac{1}{2}\,\xi_{kA}\xi^{kD}\,\tilde{G}^{-1}\partial_D\tilde{G}\Big]\times \\ & \Big[\bar{\partial}_B - 2\,\Big(m\,\bar{\partial}_B\tilde{L} + \gamma\,\bar{\partial}_B f\Big) + \frac{1}{2}\,\xi_{iB}\xi^{iC}\,\tilde{G}^{-1}\bar{\partial}_C\tilde{G}\Big]\,\Big\} \\ & + \frac{1}{48}\,\big[\xi^{iA}\xi^B_i\xi^k_B\xi_{kA} + 2\big]\,\tilde{G}^{-2}\Delta_y\tilde{G} + \xi^{iA}\xi^B_i\,\tilde{G}^{-1}\,\Big(m\,\partial_A\bar{\partial}_B\tilde{L} + \gamma\,\partial_A\bar{\partial}_B f\Big) \\ & - \frac{m}{2}\,\big(y^A\partial_A - \bar{y}^A\bar{\partial}_A\big) - \frac{m}{2}\,, \end{aligned} \tag{2.225}$$

и остальные квантовые генераторы:

$$\hat{F} = -\frac{1}{2}\,\big(y^A\partial_A - \bar{y}^A\bar{\partial}_A\big)\,, \qquad \hat{I}_{ik} = \frac{1}{2}\,\xi^A_{(i}\xi_{k)A}\,. \tag{2.226}$$

2.5.4. Простейшие примеры с $\tilde{G} = 1$

В качестве примера, сначала мы рассматриваем свободную модель с $\tilde{G} = 1$ вместе с лагранжианом (2.214), в котором W выбрана как

$$W = \frac{1}{4}\,c_{AB}\,y^A\bar{y}^B, \qquad c_{AB} = c_{BA}\,, \qquad \overline{(c_{AB})} = -\,c^{BA}. \tag{2.227}$$

Полный лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}_{\mathrm{free}} \;=\;& 2\,\dot{y}^A\dot{\bar{y}}_A + \frac{i}{2}\,\xi^{iA}\dot{\xi}_{iA} - \frac{i}{2}\,m\,\big(\dot{y}^A\bar{y}_A - y^A\dot{\bar{y}}_A\big) \\ & + \gamma\,c_{AB}\,\Big\{2i\,\big(\dot{y}^A\bar{y}^B - \dot{\bar{y}}^A y^B\big) - m\,\big(y^A\bar{y}^B + \bar{y}^A y^B\big) - \xi^{iA}\xi^B_i\Big\}. \end{aligned} \tag{2.228}$$

Триплет c_{AB} всегда можно привести к виду

$$c_{12} = c_{21} = 1\,, \qquad c_{11} = c_{22} = 0\,. \tag{2.229}$$

Для дальнейшего использования, мы определяем операторы

$$\nabla^{\pm}_A = \partial_A \pm \frac{1}{2}\,(m\,\epsilon_{AC} + \gamma\,c_{AC})\,\bar{y}^C, \quad \bar{\nabla}^{\pm}_B = \bar{\partial}_B \pm \frac{1}{2}\,(m\,\epsilon_{BD} - \gamma\,c_{BD})\,y^D, \tag{2.230}$$

которые образуют алгебру

$$\big[\nabla^{\pm}_A, \bar{\nabla}^{\pm}_B\big] = \mp\,(m\,\epsilon_{AB} + \gamma\,c_{AB})\,. \tag{2.231}$$

Используя эти операторы, мы получим квантовый гамильтониан

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{AB}\bar{\nabla}^{+}_B\nabla^{+}_A + \frac{\gamma}{4}\,c_{AB}\,\xi^{iA}\xi^B_i - \frac{m}{2}\,\big(y^A\partial_A - \bar{y}^A\bar{\partial}_A\big) + \frac{m}{2}\,, \tag{2.232}$$

и остальные $SU(2|1)$ генераторы

$$\begin{aligned} &\hat{Q}^i = -\,i\,\xi^{iA}\nabla^{+}_A\,, \qquad \hat{\bar{Q}}_i = -\,i\,\xi^B_i\bar{\nabla}^{+}_B\,, \\ &\hat{F} = -\frac{1}{2}\,\big(y^A\partial_A - \bar{y}^A\bar{\partial}_A\big)\,, \qquad \hat{I}_{ik} = \frac{1}{2}\,\xi^A_{(i}\xi_{k)A}\,. \end{aligned} \tag{2.233}$$

Мы будем строить бозонные волновые функции в терминах операторов $\nabla^{\pm}_{A}$, $\bar{\nabla}^{\pm}_{A}$, коммутаторы которых с гамильтонианом имеют вид

$$\left[\hat{H},\nabla^{+}_{A}\right] = \frac{\gamma}{2}\, c^{B}_{A}\, \nabla^{+}_{B}\,, \qquad \left[\hat{H},\bar{\nabla}^{+}_{A}\right] = \frac{\gamma}{2}\, c^{B}_{A}\, \bar{\nabla}^{+}_{B}\,,$$
$$\left[\hat{H},\nabla^{-}_{A}\right] = \frac{m}{2}\, \nabla^{-}_{A}\,, \qquad \left[\hat{H},\bar{\nabla}^{-}_{A}\right] = -\frac{m}{2}\, \bar{\nabla}^{-}_{A}\,. \tag{2.234}$$

Налагая следующие физические условия

$$\bar{\nabla}^{+}_{1}\,|0\rangle = \nabla^{+}_{1}\,|0\rangle = \bar{\nabla}^{-}_{A}\,|0\rangle = 0\,, \qquad \xi^{i2}\,|0\rangle = 0\,, \tag{2.235}$$

мы убеждаемся, что спектр гамильтониана(2.232) ограничен снизу для $\gamma > 0$ и $m > 0$, т. е. основное состояние $|0\rangle$ есть низший уровень. Из этих условий находим, что $m = \gamma$ и волновая функция основного состояния получается как

$$|0\rangle = e^{-my^{1}\bar{y}_{1}}. \tag{2.236}$$

Условия (2.235) жёстко определяют основное состояние $|0\rangle$ как состояние, аннигилируемое суперзарядами (2.233):

$$\hat{Q}^{i}\,|0\rangle = \hat{\bar{Q}}_{i}\,|0\rangle = 0\,. \tag{2.237}$$

Основное состояние приобретает минимальное значение энергии $E = 0$, и оператор Казимира C_2 равен нулю на нём.

Для выбора $\gamma = m$ гамильтониан (2.232) принимает вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{AB}\bar{\nabla}^{+}_{B}\nabla^{+}_{A} + \frac{m}{2}\,\xi^{i1}\xi^{2}_{i} - \frac{m}{2}\left(y^{A}\partial_{A} - \bar{y}^{A}\bar{\partial}_{A}\right), \tag{2.238}$$

где

$$\nabla^{\pm}_{1} = \partial_{1} \pm m\,\bar{y}_{1}\,, \quad \bar{\nabla}^{\pm}_{1} = \bar{\partial}_{1}\,, \quad \nabla^{\pm}_{2} = \partial_{2}\,, \quad \bar{\nabla}^{\pm}_{2} = \bar{\partial}_{2} \pm m\,y_{2}\,. \tag{2.239}$$

Бозонные состояния высших уровней строятся в терминах операторов ∇^{-}_{1} и $\bar{\nabla}^{+}_{2}$, которые коммутируют с гамильтонианом как

$$\left[\hat{H},\bar{\nabla}^{+}_{2}\right] = \frac{m}{2}\,\bar{\nabla}^{+}_{2}\,, \qquad \left[\hat{H},\nabla^{-}_{1}\right] = \frac{m}{2}\,\nabla^{-}_{1}\,. \tag{2.240}$$

Бозонное состояние $|\ell\,;n\rangle$ определяется как

$$|\ell\,;n\rangle = \left(\nabla^{-}_{1}\right)^{n}\left(\bar{\nabla}^{+}_{2}\right)^{\ell}|0\rangle. \tag{2.241}$$

Суперволновая функция $\Omega^{(\ell;n)}$ получаются в виде суммы соответствующих фермионных расширений $|\ell\,;n\rangle$, порождаемых действием суперзарядов

$$\hat{Q}^{i}\,|\ell\,;n\rangle = 2i\ell m\,\xi^{i1}\,|\ell-1\,;n\rangle, \quad \hat{Q}^{2}\,|\ell\,;n\rangle = 4\ell\,(\ell-1)\,m^{2}\,\xi^{i1}\xi^{1}_{i}\,|\ell-2\,;n\rangle,$$
$$\hat{\bar{Q}}_{i}\,|\ell\,;n\rangle = 0\,. \tag{2.242}$$

При этом $\Omega^{(0;0)} = |0\rangle$. Можно видеть, что функции $\Omega^{(0;n)}$ и $\Omega^{(1;n)}$ образуют синглетные и триплетные состояния, соответственно.

Вычисляем спектр гамильтониана (2.232) и находим, что

$$\hat{H}\,\Omega^{(\ell;n)} = \frac{m}{2}\,(\ell+n)\,\Omega^{(\ell;n)}, \qquad m>0\,. \tag{2.243}$$

Собственные значения операторов Казимира (Б.3) выражаются через

$$\begin{aligned} &\beta = \frac{\ell}{2}\,, \qquad \lambda = \frac{1}{2}\,, \quad \text{for} \quad \ell \neq 0\,, \\ &\beta = \lambda = 0\,, \quad \text{for} \quad \ell = 0\,. \end{aligned} \tag{2.244}$$

Операторы Казимира принимают нулевые собственные значения для $\ell = 0$ и $\ell = 1$. Следовательно, функции $\Omega^{(0;n)}$ и $\Omega^{(1;n)}$ соответствуют атипическим представлениям $SU(2|1)$ с неравным числом бозонных и фермионных состояний. Суперволновые функции $\Omega^{(\ell;n)}$ уровней $\ell \geqslant 2$ соответствуют типическим 4-компонентным представлениям $SU(2|1)$. Такие же вырождения по отношению к ℓ мы обнаружили в простейших свободных моделях мультиплетов $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$ и $(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{2})$.

Наконец, кратко обсудим интересный случай с $\gamma = 0\,,\ m \neq 0$. В этом случае гамильтониан становится чисто бозонным и коммутирует с операторами ξ^{iA} и $\nabla^{+}_{A}\,,\ \bar{\nabla}^{+}_{B}$, которые можно рассматривать как генераторы магнитных супертрансляций в пространстве отображения (лагранжиан (2.228) при $\gamma = 0$ инвариантен относительно сдвигов ξ^{iA} и y^{A}). Мы переписываем гамильтониан (2.232) как

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{AB}\nabla^{-}_{A}\bar{\nabla}^{-}_{B} + \frac{m}{2}\,. \tag{2.245}$$

Накладывая физическое условие $\bar{\nabla}^{-}_{A}\,\Psi_0 = 0$, мы определяем суперволновую функцию Ψ_0 с низшей энергией $m/2$:

$$\begin{aligned} &\Psi_0 = \left[g_0\left(y^A\right) + g_i\left(y^A\right)\xi^{i1} + g_1\left(y^A\right)\xi^{i1}\xi^{1}_{i}\right]|0\rangle, \\ &|0\rangle = e^{-\frac{m}{2}\,y^A\bar{y}_A}, \qquad \xi^{i2}\,|0\rangle = 0\,. \end{aligned} \tag{2.246}$$

Здесь $g_0\,, g_i\,, g_1$ – произвольные голоморфные полиномы переменной y^A, которые все могут быть получены действием $\bar{\nabla}^{+}_{B}$ на $|0\rangle$. При этом следует принять во внимание, что действие сопряжённого оператора даёт $\nabla^{+}_{B}\,|0\rangle = 0$. Бесконечное вырождение основного состояния Ψ_0 следует из вышеупомянутой симметрии лагранжиана (2.228) при $\gamma = 0$ относительно магнитных супертрансляций.

Операторы Казимира (Б.1), (Б.2) принимают нулевые собственные значения только на следующих состояниях из Ψ_0:

$$\Omega_0 = \left(\bar{\nabla}^{+}_{2} - \frac{1}{2}\,\xi^{i1}\xi^{1}_{i}\bar{\nabla}^{+}_{1}\right)|0\rangle, \qquad \Omega^{i} = \xi^{i1}|0\rangle. \tag{2.247}$$

Эти состояния (одно бозонное и два фермионных) образуют фундаментальное атипическое представление супергруппы $SU(2|1)$. Суперзаряды (2.233) действуют на эти состояния следующим образом:

$$\begin{aligned} &\hat{Q}^i\,\Omega_0 = im\,\Omega^i, \qquad \hat{\bar{Q}}_i\,\Omega_0 = 0\,, \\ &\hat{Q}^k\,\Omega^i = 0\,, \qquad \hat{\bar{Q}}_k\,\Omega^i = -\,i\delta^i_k\,\Omega_0\,. \end{aligned} \tag{2.248}$$

Все остальные состояния соответствуют 4-компонентным типическим представлениям супергруппы $SU(2|1)$. Например, состояние $|0\rangle$ является компонентой следующего $SU(2|1)$ супермультиплета

$$|0\rangle\,, \quad \xi^1_i\bar{\nabla}^+_1|0\rangle\,, \quad \left(\frac{1}{2}\,\xi^{1i}\xi^1_i\bar{\nabla}^+_1\bar{\nabla}^+_1 - \bar{\nabla}^+_1\bar{\nabla}^+_2\right)|0\rangle\,. \tag{2.249}$$

Таким образом, функция основного состояния Ψ_0 представляется в виде бесконечной суммы несинглетных состояний $SU(2|1)$. Иными словами, среди состояний, из которых состоит Ψ_0, нет состояний, одновременно уничтожаемых действием суперзарядов $\hat{Q}^i$ и $\hat{\bar{Q}}_i$. Таким образом, $SU(2|1)$ суперсимметрия спонтанно нарушена в случае $\gamma = 0$. Вариант с $\gamma \neq m$, $m \neq 0$ также приводит к спонтанному нарушению $SU(2|1)$ суперсимметрии.

Глава 3

Суперконформные модели

В этой главе мы найдём тригонометрическую реализацию суперконформных генераторов на координатах суперпространства $SU(2|1)$ и сформулируем подробную процедуру построения суперполевых действий для суперконформных лагранжианов тригонометрического типа [30] на примере мультиплета $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$. Аналогичным образом будут построены суперконформные лагранжианы для мультиплетов $(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{2})$ и $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$.

3.1. Вложение супералгебры $su(2|1)$ в $D\,(2,1;\alpha)$

Наиболее общая $\mathcal{N}=4$, $d=1$ суперконформная алгебра есть $D\,(2,1;\alpha)$ [4, 50, 51]. Эта супералгебра содержит 8 суперзарядов и 9 бозонных генераторов со следующими ненулевыми (анти)коммутаторами:

$$\{Q_{\alpha ii'},Q_{\beta jj'}\}=2\left[\epsilon_{ij}\epsilon_{i'j'}T_{\alpha\beta}+\alpha\,\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{i'j'}J_{ij}-(1{+}\alpha)\,\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{ij}L_{i'j'}\right], \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
&[T_{\alpha\beta},Q_{\gamma ii'}]=-i\,\epsilon_{\gamma(\alpha}Q_{\beta)ii'}\,, \qquad [T_{\alpha\beta},T_{\gamma\delta}]=i\left(\epsilon_{\alpha\gamma}T_{\beta\delta}+\epsilon_{\beta\delta}T_{\alpha\gamma}\right),\\
&[J_{ij},Q_{\alpha ki'}]=-i\,\epsilon_{k(i}Q_{\alpha j)i'}\,, \qquad [J_{ij},J_{kl}]=i\left(\epsilon_{ik}J_{jl}+\epsilon_{jl}J_{ik}\right),\\
&[L_{i'j'},Q_{\alpha ik'}]=-i\,\epsilon_{k'(i'}Q_{\alpha ij')}\,, \qquad [L_{i'j'},L_{k'l'}]=i\left(\epsilon_{i'k'}L_{j'l'}+\epsilon_{j'l'}L_{i'k'}\right).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Бозонная подалгебра есть сумма 3 взаимно коммутирующих алгебр $su(2)\oplus su'(2)\oplus so(2,1)$ с генераторами J_{ik} , $L_{i'k'}$ и $T_{\alpha\beta}$, соответственно. Перестановка α как $\alpha\leftrightarrow-(1+\alpha)$ означает перестановку $SU(2)$ генераторов как $J_{ik}\leftrightarrow L_{i'k'}$ [1]. Эрмитово сопряжение генераторов выполняется по следующим правилам:

$$\begin{aligned}
&(Q_{\alpha ii'})^\dagger=\epsilon^{ij}\epsilon^{i'j'}Q_{\alpha jj'}\,, \quad (T_{\alpha\beta})^\dagger=T_{\alpha\beta}\,,\\
&(J_{ij})^\dagger=\epsilon^{ik}\epsilon^{jl}J_{kl}\,, \quad (L_{i'j'})^\dagger=\epsilon^{i'k'}\epsilon^{j'l'}L_{k'l'}\,.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$\mathcal{N}=4$, $d=1$ супералгебра Пуанкаре определяется как подалгебра $D\,(2,1;\alpha)$:

$$\{Q_{1ii'},Q_{1jj'}\}=2\epsilon_{ij}\epsilon_{i'j'}\hat{H}. \tag{3.4}$$

Бозонный генератор $\hat{H}$ является одним из генераторов стандартной конформной алгебры $so(2,1)$, которые определены как

$$\hat{H}:=T_{11}\,, \qquad \hat{K}:=T_{22}\,, \qquad \hat{D}:=T_{12}\,, \tag{3.5}$$

$$\left[\hat{D},\hat{H}\right]=-i\hat{H}, \qquad \left[\hat{D},\hat{K}\right]=i\hat{K}, \qquad \left[\hat{H},\hat{K}\right]=2i\hat{D}. \tag{3.6}$$

---

[1] Более общо, эквивалентные супералгебры связаны через замены $\alpha\to-(1+\alpha),\ \alpha^{-1}$.

В вырожденном случае $\alpha=-1$ можно сохранить все восемь суперзарядов $Q_{\alpha i i'}$ и только 6 бозонных генераторов $T_{\alpha\beta}$, J_{ij}, которые образуют вместе супералгебру $psu(1,1|2)$ без центральных зарядов. Вторая группа $SU(2)$ с генераторами $L_{i'j'}$ выпадает из антикоммутаторов (3.1). Тем не менее, $L_{i'j'}$ могут рассматриваться как генераторы некоторой дополнительной группы автоморфизмов $SU'(2)$. Таким же образом можно поступить в случае $\alpha=0$, где группы $SU'(2)$ и $SU(2)$ меняются местами. В случаях $\alpha=-1$ и $\alpha=0$ супергруппа $D\,(2,1;\alpha)$ сводится к полупрямому произведению

$$\alpha=-1,0, \qquad D\,(2,1;\alpha)\cong PSU(1,1|2)\rtimes SU(2)_{\text{ext}}\,, \tag{3.7}$$

где внешняя группа автоморфизмов $SU(2)_{\text{ext}}$ соответствует генераторам $L_{i',j'}$, либо J_{ij}. В этих исключительных случаях можно расширить $psu(1,1|2)$ надлежащим $SU(2)_{\text{ext}}$ триплетом центральных зарядов [6]. Если эти центральные заряды постоянны, то триплет может быть сокращён до одного центрального заряда, что означает расширение $psu(1,1|2)$ до $su(1,1|2)$ и одновременное сужение $SU(2)_{\text{ext}}$ до $U(1)_{\text{ext}}$.

Мы будем рассматривать самое общее вложение супералгебры $su(2|1)$ в $D\,(2,1;\alpha)$. Для этого мы перейдём к новому базису в $D\,(2,1;\alpha)$ с помощью следующих линейных преобразований:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{ik}Q_{1k1'}=:-\frac{1}{2}\left(S^i+Q^i\right), \qquad Q_{1j2'}=:-\frac{1}{2}\left(\bar{S}_j+\bar{Q}_j\right),\\
&\varepsilon^{ik}Q_{2k1'}=:\frac{i}{\mu}\left(Q^i-S^i\right), \qquad Q_{2j2'}=:-\frac{i}{\mu}\left(\bar{Q}_j-\bar{S}_j\right),\\
&T_{22}=:\frac{2}{\mu^2}\left[\mathcal{H}-\frac{1}{2}\left(T+\bar{T}\right)\right], \qquad T_{11}=:\frac{1}{2}\left[\mathcal{H}+\frac{1}{2}\left(T+\bar{T}\right)\right],\\
&T_{12}=T_{21}=:\frac{i}{2\mu}\left(T-\bar{T}\right), \qquad \mu\neq 0\,,\\
&L_{1'1'}=:-iC, \quad L_{2'2'}=:i\bar{C}, \quad L_{1'2'}=L_{2'1'}=:-iF, \qquad J^i_j=:-iI^i_j\,.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Параметр μ является действительным параметром размерности массы. В новом базисе, (анти)коммутаторы (3.1), (3.2) принимают вид

$$\begin{aligned}
&\{Q^i,\bar{Q}_j\}=-\,2\alpha\mu\,I^i_j+2\delta^i_j\left[\mathcal{H}+(1+\alpha)\,\mu\,F\right],\\
&\{S^i,\bar{S}_j\}=2\alpha\mu\,I^i_j+2\delta^i_j\left[\mathcal{H}-(1+\alpha)\,\mu\,F\right],\\
&\{S^i,\bar{Q}_j\}=2\delta^i_jT, \qquad \{Q^i,\bar{S}_j\}=2\delta^i_j\bar{T},\\
&\{Q^i,S^k\}=-2\,(1+\alpha)\,\mu\,\varepsilon^{ik}C\,, \qquad \{\bar{Q}_j,\bar{S}_k\}=2\,(1+\alpha)\,\mu\,\varepsilon_{jk}\bar{C}\,,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
&\left[I^i_j,I^k_l\right]=\delta^k_jI^i_l-\delta^i_lI^k_j\,,\\
&\left[I^i_j,\bar{Q}_l\right]=\frac{1}{2}\,\delta^i_j\bar{Q}_l-\delta^i_l\bar{Q}_j\,, \qquad \left[I^i_j,Q^k\right]=\delta^k_jQ^i-\frac{1}{2}\,\delta^i_jQ^k,\\
&\left[I^i_j,\bar{S}_l\right]=\frac{1}{2}\,\delta^i_j\bar{S}_l-\delta^i_l\bar{S}_j\,, \qquad \left[I^i_j,S^k\right]=\delta^k_jS^i-\frac{1}{2}\,\delta^i_jS^k\,,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$
\begin{aligned}
&[C,\bar{C}] = 2F, \qquad [F,C] = C, \qquad [F,\bar{C}] = -\bar{C},\\
&[C,\bar{Q}_j] = -\varepsilon_{jl}S^l, \qquad [C,\bar{S}_j] = -\varepsilon_{jl}Q^l,\\
&[\bar{C},Q^i] = -\varepsilon^{ik}\bar{S}_k\,, \qquad [\bar{C},S^i] = -\varepsilon^{ik}\bar{Q}_k\,,\\
&[F,\bar{Q}_l] = -\frac{1}{2}\,\bar{Q}_l\,, \qquad [F,Q^k] = \frac{1}{2}\,Q^k\,,\\
&[F,\bar{S}_l] = -\frac{1}{2}\,\bar{S}_l\,, \qquad [F,S^k] = \frac{1}{2}\,S^k\,,
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&[T,Q^i] = -\mu\,S^i, \quad [T,\bar{S}_j] = -\mu\,\bar{Q}_j\,, \quad [\bar{T},\bar{Q}_j] = \mu\,\bar{S}_j\,, \quad [\bar{T},S^i] = \mu\,Q^i\,,\\
&[\mathcal{H},\bar{S}_l] = -\frac{\mu}{2}\,\bar{S}_l\,, \quad [\mathcal{H},S^k] = \frac{\mu}{2}\,S^k\,, \quad [\mathcal{H},\bar{Q}_l] = \frac{\mu}{2}\,\bar{Q}_l\,, \quad [\mathcal{H},Q^k] = -\frac{\mu}{2}\,Q^k\,,\\
&[T,\bar{T}] = -2\mu\,\mathcal{H}, \qquad [\mathcal{H},T] = \mu\,T, \qquad [\mathcal{H},\bar{T}] = -\mu\,\bar{T}\,.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Бозонный сектор, состоящий из трёх взаимно коммутирующих алгебр, задаётся следующим набором генераторов:

$$
su(2)\oplus su'(2)\oplus so(2,1) \equiv \{I^i_k\}\oplus\{F,C,\bar{C}\}\oplus\{\mathcal{H},T,\bar{T}\}\,.
\tag{3.13}
$$

Согласно (3.3) и (3.8), правила сопряжения определяются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\left(Q^k\right)^\dagger = \bar{Q}_k\,, \qquad \left(S^k\right)^\dagger = \bar{S}_k\,, \qquad (F)^\dagger = F\,, \qquad (C)^\dagger = \bar{C}\,,\\
&\left(I^k_i\right)^\dagger = I^i_k\,, \qquad \mathcal{H}^\dagger = \mathcal{H}\,, \qquad (T)^\dagger = \bar{T}\,.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Здесь новый оператор Гамильтона $\mathcal{H}$ определён как

$$
\mathcal{H} = \hat{H} + \frac{\mu^2}{4}\,\hat{K}\,.
\tag{3.15}
$$

Для любого $\mu \neq 0$, переопределение (3.8) не содержит особенностей, и формулы (3.9) – (3.12) позволяют получить эквивалентную форму исходной супералгебры $D\,(2,1;\alpha)$. После возвращения к первоначальным суперконформным генераторам, любая зависимость (анти)коммутационных соотношений от μ исчезает, но она по-прежнему сохраняется в реализации $D\,(2,1;\alpha)$ на координатах $SU(2|1)$ суперпространства (см. ниже). Беря предел $\mu = 0$ в этом базисе, мы получаем стандартную параболическую реализацию $D\,(2,1;\alpha)$ в плоском $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ суперпространстве.

В новом базисе суперконформной алгебры $D\,(2,1;\alpha)$ проявляются некоторые замечательные свойства этой супералгебры, которые не видны в стандартном базисе.

i. Легко увидеть, что суперконформная алгебра (3.9) – (3.12) включает в качестве подалгебры супералгебру $su(2|1)$, определённую как

$$\begin{aligned}
&\{Q^i, \bar{Q}_j\} = -\,2\alpha\mu\, I^i_j + 2\delta^i_j\,[\mathcal{H} + (1+\alpha)\,\mu\, F]\,,\\
&\left[I^i_j, \bar{Q}_l\right] = \frac{1}{2}\delta^i_j\bar{Q}_l - \delta^i_l\bar{Q}_j\,, \qquad \left[I^i_j, Q^k\right] = \delta^k_j Q^i - \frac{1}{2}\delta^i_j Q^k,\\
&\left[F, \bar{Q}_l\right] = -\frac{1}{2}\,\bar{Q}_l\,, \qquad \left[F, Q^k\right] = \frac{1}{2}\,Q^k,\\
&\left[\mathcal{H}, \bar{Q}_l\right] = \frac{\mu}{2}\,\bar{Q}_l\,, \qquad \left[\mathcal{H}, Q^k\right] = -\frac{\mu}{2}\,Q^k.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Эти соотношения совпадают с (1.4) при следующем отождествлении:

$$m(\mu) = -\alpha\mu\,, \tag{3.17}$$

$$H(\mu) = \mathcal{H} + \mu\, F. \tag{3.18}$$

Заметим, что замыкание $SU(2|1)$ суперзарядов зависит от параметра α, поскольку $SU(2)$ и $SU'(2)$ генераторы $J_{ij} = -iI_{ij}$ и $L_{i'j'} \sim \left\{F, C, \bar{C}\right\}$ появляются в антикоммутаторах (3.1) с факторами α и $1+\alpha$ соответственно. Генератор F в (3.16) происходит из алгебры $su'(2)$, в то время как алгебра $su(2)$ с генераторами I_{ij} является подалгеброй (3.16), $su(2) \subset su(2|1)$.

ii. Из (3.9) – (3.12) видно, что есть другое вложение $su(2|1) \subset D\,(2,1;\alpha)$, в котором суперзаряды $S^i, \bar{S}_j$ также генерируют супералгебру $su(2|1)$, но с противоположным по знаку параметром μ по сравнению с (3.16). Как следует из (3.9) – (3.12), все остальные генераторы T, $\bar{T}$, C, $\bar{C}$ появляются в антикоммутаторах суперзарядов $(Q^i, \bar{Q}_j)$ с $(S_i, \bar{S}^j)$. Таким образом, супералгебра $D\,(2,1;\alpha)$ может быть представлена в виде замыкания двух её $su(2|1)$ подалгебр, которые переходят друг в друга при отражении $\mu \to -\mu$. Это свойство аналогично тому, как $\mathcal{N}=1$, $d=4$ суперконформную группу $SU(2,2|1)$ можно рассматривать в качестве замыкания её двух разных $OSp(1,4)$ подгрупп, которые связаны друг с другом через аналогичное отражение радиуса пространства анти-де Ситтера как параметра деформации $\mathcal{N}=1$, $d=4$ суперсимметрии Пуанкаре [52]. В дальнейшем, это наблюдение будет полезно для построения $D\,(2,1;\alpha)$ инвариантного подкласса $SU(2|1)$ инвариантных действий.

iii. Ещё одна особенность связана с наличием композитного параметра деформации $m = -\alpha\mu$ в (3.16). Он обращается в ноль не только в стандартном пределе $\mu = 0$, но также в пределе $\alpha = 0$ с $\mu \neq 0$. Супералгебра (3.16) при $\alpha = 0$ переходит в $\mathcal{N}=4$ супералгебру

$$\begin{aligned}
&\{Q^i, \bar{Q}_j\} = 2\delta^i_j\,(\mathcal{H} + \mu\, F)\,,\\
&\left[F, \bar{Q}_l\right] = -\frac{1}{2}\,\bar{Q}_l\,, \qquad \left[F, Q^k\right] = \frac{1}{2}\,Q^k,\\
&\left[\mathcal{H}, \bar{Q}_l\right] = \frac{\mu}{2}\,\bar{Q}_l\,, \qquad \left[\mathcal{H}, Q^k\right] = -\frac{\mu}{2}\,Q^k.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Эта алгебра всё ещё образует подалгебру в $D(2,1;\alpha=0)$. Тем не менее, она не совпадает со стандартной плоской $\mathcal{N}=4$, $d=1$ супералгеброй Пуанкаре в пределе $\mu=0$, потому что антикоммутатор в (3.19) порождает сумму $\mathcal{H}+\mu F$. Генераторы I_i^j становятся генераторами автоморфизмов алгебры (3.19) и супералгебры $psu(1,1|2)$, в то время как генератор F остаётся внутренним $U(1)$ генератором. Вся супералгебра $D(2,1;\alpha=0)$ теперь может рассматриваться как замыкание супералгебры (3.19) и её $\mu\to-\mu$ аналога.

Супералгебры (3.19) и (3.4) могут рассматриваться как $\mathcal{N}=4$, $d=1$ супералгебры Пуанкаре. Однако, в отличие от (3.4), супералгебра (3.19) вложена в суперконформную алгебру по-другому, с гамильтонианом $H=\mathcal{H}+\mu F$ (3.18), вместо стандартного определения $\hat{H}$ (3.4). В пределе $\mu\to 0$ разница между генераторами $\mathcal{H}$, H и $\hat{H}$ исчезает.

iv. Стоит отметить, что параметр α характеризует только модели суперконформной механики, в то время как в $SU(2|1)$ моделях нет никакой зависимости от этого параметра. Таким образом, в случае суперконформных моделей мы имеем дело с парой параметров α и μ. В частном случае $\alpha=-1$ мы имеем $m=\mu$.

v. Кроме суперпространств (1.6) и (2.110), мы можем рассмотреть ещё одно $SU(2|1)$ суперпространство, которое определено как фактор-пространство

$$\frac{SU(2|1)\rtimes U(1)_{\text{ext}}}{SU(2)\times U(1)_{\text{int}}}\sim\frac{\{Q^i,\bar{Q}_j,\mathcal{H},F,I_j^i\}}{\{I_j^i,F\}}\,. \tag{3.20}$$

В случае $\alpha=-1$, убирая генератор F из (3.20), мы получаем суперпространство (2.110) с параметром деформации $m=\mu$.

vi. В пределе $\alpha=0$ мы переходим к фактор-пространству

$$\frac{(\mathcal{N}=4,d=1)\rtimes U(1)_{\text{ext}}}{U(1)_{\text{int}}}\sim\frac{\{Q^i,\bar{Q}_j,\mathcal{H},F\}}{\{F\}}\,, \tag{3.21}$$

где $(\mathcal{N}=4,d=1)\rtimes U(1)_{\text{ext}}$ соответствует алгебре (3.19). Подставляя $\alpha=0$ во все формулы, соответствующие выбору (3.20), мы приходим к суперпространству (3.21) и соответствующему суперполевому формализму.

3.2. Суперконформные генераторы

Суперконформные генераторы (3.9) – (3.12) могут быть реализованы на $SU(2|1)$ суперпространстве (3.20). Элемент этого фактор-пространства определяется как

$$g_1=\exp\left\{\left(1+\frac{2\alpha\mu}{3}\,\bar{\theta}^k\theta_k\right)\left(\theta_iQ^i+\bar{\theta}^j\bar{Q}_j\right)\right\}\exp\{it\mathcal{H}\}, \tag{3.22}$$

где координаты $\{t, \theta_i, \bar{\theta}^k\}$ совпадают с определением (1.8). Из-за соотношения (3.18), элементы (3.22) и (1.8) связаны как

$$g_1 = g \exp\{-i\mu t F\}\,. \tag{3.23}$$

В частном случае $\alpha = 0$ в (3.22), элемент фактор-пространства параметризуется координатами плоского суперпространства $\zeta_{(\alpha=0)} = \big\{t, \theta_i, \bar{\theta}^k\big\}$.

На самом деле, элемент (3.22) совпадает с элементом фактор-пространства конформной супергруппы $D(2,1;\alpha)$:

$$\frac{\{Q^i, \bar{Q}_j, S^i, \bar{S}_j, \mathcal{H}, T, \bar{T}, F, C, \bar{C}, I^i_j\}}{\{I^i_j, F, C, \bar{C}, T - \bar{T}, \mathcal{H} - \frac{1}{2}\left(T + \bar{T}\right), S^i - Q^i, \bar{S}_k - \bar{Q}_k\}}\,. \tag{3.24}$$

Генераторы, помещённые в знаменатель, действительно образуют замкнутую алгебру.

Исключая матричные части генераторов, можно получить $SU(2|1)$ суперзаряды через замену $m = -\alpha\mu$ в (1.25):

$$Q^i = \frac{\partial}{\partial\theta_i} + 2\alpha\mu\,\bar{\theta}^i\bar{\theta}^k\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^k} + i\bar{\theta}^i\partial_t\,, \qquad \bar{Q}_j = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^j} - 2\alpha\mu\,\theta_j\theta_k\frac{\partial}{\partial\theta_k} + i\theta_j\partial_t\,. \tag{3.25}$$

Они генерируют $su(2|1)$ супералгебру (3.16) с бозонными генераторами

$$\begin{aligned} I^i_j &= \left(\bar{\theta}^i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^j} - \theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right) - \frac{1}{2}\delta^i_j\left(\bar{\theta}^k\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^k} - \theta_k\frac{\partial}{\partial\theta_k}\right), \\ \mathcal{H} &= i\partial_t - \frac{\mu}{2}\left(\bar{\theta}^k\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^k} - \theta_k\frac{\partial}{\partial\theta_k}\right), \qquad F = \frac{1}{2}\left(\bar{\theta}^k\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^k} - \theta_k\frac{\partial}{\partial\theta_k}\right). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Дополнительные суперзаряды суперконформной алгебры $D\,(2,1;\alpha)$ определены как

$$\begin{aligned} S^i &= e^{-i\mu t}\Big\{\Big[1 - (1+2\alpha)\,\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k - \frac{1}{4}\,(1+2\alpha)^2\,\mu^2\,(\theta)^2\,\big(\bar{\theta}\,\big)^2\Big]\frac{\partial}{\partial\theta_i} \\ &\quad + 2\,(1+\alpha)\,\mu\,\bar{\theta}^i\theta_k\frac{\partial}{\partial\theta_k} + i\bar{\theta}^i\left[1 + (1+2\alpha)\,\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k\right]\partial_t\Big\}, \\ \bar{S}_j &= e^{i\mu t}\Big\{\Big[1 - (1+2\alpha)\,\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k - \frac{1}{4}\,(1+2\alpha)^2\,\mu^2\,(\theta)^2\,\big(\bar{\theta}\,\big)^2\Big]\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^j} \\ &\quad - 2\,(1+\alpha)\,\mu\,\theta_j\bar{\theta}^k\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^k} + i\theta_j\left[1 + (1+2\alpha)\,\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k\right]\partial_t\Big\}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Их антикоммутаторы с (3.25) дают новые бозонные генераторы

$$\begin{aligned} T &= e^{-i\mu t}\left\{i\left[1 - \frac{1}{4}\,(1+2\alpha)\,\mu^2\,(\theta)^2\,\big(\bar{\theta}\,\big)^2\right]\partial_t + \mu\left[1 - (1+2\alpha)\,\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k\right]\theta_i\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right\}, \\ \bar{T} &= e^{i\mu t}\left\{i\left[1 - \frac{1}{4}\,(1+2\alpha)\,\mu^2\,(\theta)^2\,\big(\bar{\theta}\,\big)^2\right]\partial_t - \mu\left[1 - (1+2\alpha)\,\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k\right]\bar{\theta}^i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^i}\right\}, \\ C &= e^{-i\mu t}\varepsilon_{jl}\left[1 + (1+2\alpha)\,\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k\right]\bar{\theta}^j\frac{\partial}{\partial\theta_l}\,, \\ \bar{C} &= e^{i\mu t}\varepsilon^{jl}\left[1 + (1+2\alpha)\,\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k\right]\theta_j\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^l}\,. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Дополнительные ε, $\bar{\varepsilon}$ преобразования порождаются суперзарядами (3.27),

$$\begin{aligned}
\delta\theta_i &= \left[1 - (1+2\alpha)\,\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k - \frac{1}{4}\,(1+2\alpha)^2\,\mu^2\,(\theta)^2\left(\bar{\theta}\,\right)^2\right]\varepsilon_i\,e^{-i\mu t} + 2\,(1+\alpha)\,\mu\,\varepsilon_k\bar{\theta}^k\theta_i\,e^{-i\mu t},\\
\delta\bar{\theta}^i &= \left[1 - (1+2\alpha)\,\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k - \frac{1}{4}\,(1+2\alpha)^2\,\mu^2\,(\theta)^2\left(\bar{\theta}\,\right)^2\right]\bar{\varepsilon}^i\,e^{i\mu t} - 2\,(1+\alpha)\,\mu\,\bar{\varepsilon}^k\theta_k\bar{\theta}^i\,e^{i\mu t},\\
\delta t &= i\left(\bar{\varepsilon}^k\theta_k e^{i\mu t} + \varepsilon_k\bar{\theta}^k e^{-i\mu t}\right)\left[1 + (1+2\alpha)\,\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k\right], \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

$SU(2|1)$ инвариантная мера интегрирования (1.18) преобразуется как

$$\delta_\varepsilon\,d\zeta = 2\mu\,d\zeta\left(1 - \mu\,\bar{\theta}^k\theta_k\right)\left(\bar{\varepsilon}^i\theta_i\,e^{i\mu t} - \varepsilon_i\bar{\theta}^i\,e^{-i\mu t}\right). \qquad (3.30)$$

Начиная с нового элемента (3.22) и принимая во внимание (3.23), можно вычислить соответствующие ковариантные производные:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^i \;&=\; e^{-\frac{i}{2}\mu t}\Big\{\left[1 - \alpha\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k - \frac{3}{8}\,\alpha^2\mu^2\,(\theta)^2\left(\bar{\theta}\,\right)^2\right]\frac{\partial}{\partial\theta_i} + \alpha\mu\,\bar{\theta}^i\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j} - i\bar{\theta}^i\partial_t\\
&\quad -\,(1+\alpha)\,\mu\,\bar{\theta}^i\tilde{F} + \alpha\mu\,\bar{\theta}^j\left(1 + \alpha\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k\right)\tilde{I}^i_j\Big\},\\
\bar{\mathcal{D}}_j \;&=\; e^{\frac{i}{2}\mu t}\Big\{-\left[1 - \alpha\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k - \frac{3}{8}\,\alpha^2\mu^2\,(\theta)^2\left(\bar{\theta}\,\right)^2\right]\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^j} - \alpha\mu\,\bar{\theta}^k\theta_j\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^k} + i\theta_j\partial_t\\
&\quad +\,(1+\alpha)\,\mu\,\theta_j\tilde{F} - \alpha\mu\,\theta_k\left(1 + \alpha\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k\right)\tilde{I}^k_j\Big\},\\
\mathcal{D}_{(t)} \;&=\; \partial_t\,. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Вместе с матричными генераторами $\tilde{I}^i_k$, $\tilde{F}$ они повторяют супералгебру (3.16). В частном случае $\alpha = -1$, матричный генератор $\tilde{F}$ исчезает из (3.31), что согласуется с (3.16) при $\alpha = -1$ (см. (2.112)). В этом случае, (3.20) совпадает (2.110) с $\tilde{H} = \mathcal{H}$ и $m = \mu$. В случае $\alpha = 0$ ковариантные производные соответствуют фактор-пространству (3.21), в определении которого отсутствуют генераторы I^i_k.

Переопределение (3.17) позволяет избежать сингулярности при $\alpha = 0$. Генераторы (3.25) – (3.28) при значении $\alpha = 0$ образуют соответствующую супералгебру $D\,(2,1;\alpha = 0)$. В этом случае, мы имеем дело с фактор-пространством (3.21) с алгеброй (3.19). Таким образом, реализация суперконформных генераторов записана в универсальной форме в соответствии с обоими вариантами $\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$, т. е. для $\alpha \in \mathbb{R}$. Это же относится и к ковариантным производным (3.31).

Любая зависимость алгебры (3.9) – (3.12) от μ естественным образом пропадает при переходе к (анти)коммутационным соотношениям (3.1), (3.2). Тем не менее, в реализации генераторов (3.8) на координатах суперпространства зависимость от μ всё ещё сохраняется. Таким образом, параметр μ является параметром деформации реализации генераторов (3.8) на суперпространстве. Эта новая деформированная реализация соответствует тригонометрическому типу $\mathcal{N}=4$ суперконформной механики [30]. В пределе $\mu \to 0$ тригонометрические генераторы алгебры (3.1), (3.2) переходят в суперконформные генераторы параболического типа [4, 6, 29].

На координате t тригонометрическая форма конформных генераторов $\{\mathcal{H}, T, \bar{T}\}$ записывается в виде

$$\mathcal{H} = i\partial_t\,, \qquad T = ie^{-i\mu t}\partial_t\,, \qquad \bar{T} = ie^{i\mu t}\partial_t\,, \tag{3.32}$$

Стандартные $so(2,1)$ генераторы (3.5), определённые в (3.8), выражаются как

$$\hat{H} = \frac{i}{2}\,(1+\cos\mu t\,)\,\partial_t\,, \quad \hat{K} = \frac{2i}{\mu^2}\,(1-\cos\mu t\,)\,\partial_t\,, \quad \hat{D} = \frac{i}{\mu}\sin\mu t\,\partial_t\,. \tag{3.33}$$

В пределе $\mu \to 0$ эти генераторы превращаются в параболические генераторы

$$\hat{H} = i\partial_t\,, \qquad \hat{D} = it\partial_t\,, \qquad \hat{K} = it^2\partial_t\,. \tag{3.34}$$

Как обсуждалось выше, те же свойства присущи всей совокупности $D(2,1;\alpha)$ генераторов (3.8) для $\mu \neq 0$.

Основная причина для рассмотрения базиса (3.32) состоит в том, что генератор $\mathcal{H} = \hat{H} + \frac{1}{4}\,\mu^2\hat{K}$ реализуется в нём как производная по времени, $\mathcal{H} = i\partial_t$ [27]. Ещё одна особенность этого базиса касается генератора Картана (диагонального генератора) конформной алгебры [28]. Гамильтониан $\mathcal{H}$ в (3.32) является диагональным, в то время как в параболическом базисе (3.34) таковым генератором алгебры $so(2,1)$ является оператор дилатаций $\hat{D}$. Таким образом, квантово-механическая система должна быть решена в терминах собственных значений и собственных состояний квантового гамильтониана $\mathcal{H} = \hat{H} + \frac{1}{4}\,\mu^2\hat{K}$. Именно такой гамильтониан совпадает с улучшенным гамильтонианом $d=1$ конформной механики [28], который обеспечивает ограниченный снизу энергетической спектр[2].

3.3. Альтернативная реализация суперконформных генераторов

Согласно (3.9), суперзаряды Q образуют супералгебру $su(2|1)$ с параметром деформации μ, в то же время суперзаряды S образуют такую же супералгебру $su(2|1)$ с параметром $-\mu$. Аналогично, для случая $\alpha = 0$ деформированные алгебры имеют параметры противоположного знака. В пределе $\mu = 0$ суперзаряды становятся плоскими $\mathcal{N}=4$, $d=1$ генераторами.

---

[2] Ортогональная комбинация $\mathcal{H}_{\rm h} = \hat{H} - \frac{1}{4}\,\mu^2\hat{K}$ соответствует гиперболическому случаю.

Здесь мы покажем, что после соответствующего переопределения координат $SU(2|1)$ суперпространства весь набор суперконформных генераторов может быть построен в терминах деформированных суперзарядов $Q(\mu)$ и $S(\mu) \equiv Q(-\mu)$.

Новые координаты $\left\{t, \tilde{\theta}_j, \bar{\tilde{\theta}}^i\right\}$ представляют фактор-пространство (3.20) и связаны с использовавшимися ранее координатами (1.7) как

$$\begin{aligned}
&\tilde{\theta}_j = e^{\frac{i}{2}\mu t}\theta_j\left[1 + \frac{1}{2}\left(1+2\alpha\right)\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k\right],\\
&\bar{\tilde{\theta}}^i = \overline{\left(\tilde{\theta}_j\right)} = e^{-\frac{i}{2}\mu t}\bar{\theta}^i\left[1 + \frac{1}{2}\left(1+2\alpha\right)\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k\right].
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Суперзаряды (3.25) в новых координатах приобретают вид

$$\begin{aligned}
Q^i &= e^{\frac{i}{2}\mu t}\Big\{\left[1 + \frac{1}{2}\left(1+2\alpha\right)\mu\,\bar{\tilde{\theta}}^k\tilde{\theta}_k - \frac{1}{16}\left(1+2\alpha\right)\mu^2\,(\tilde{\theta})^2\big(\bar{\tilde{\theta}}\,\big)^2\right]\frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}_i}\\
&\quad - \left(1+\alpha\right)\mu\,\bar{\tilde{\theta}}^i\tilde{\theta}_k\frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}_k} + \alpha\mu\,\bar{\tilde{\theta}}^i\bar{\tilde{\theta}}^k\frac{\partial}{\partial\bar{\tilde{\theta}}^k} + i\bar{\tilde{\theta}}^i\left[1 - \frac{1}{2}\left(1+2\alpha\right)\mu\,\bar{\tilde{\theta}}^k\tilde{\theta}_k\right]\partial_t\Big\},\\
\bar{Q}_j &= e^{-\frac{i}{2}\mu t}\Big\{\left[1 + \frac{1}{2}\left(1+2\alpha\right)\mu\,\bar{\tilde{\theta}}^k\tilde{\theta}_k - \frac{1}{16}\left(1+2\alpha\right)\mu^2\,(\tilde{\theta})^2\big(\bar{\tilde{\theta}}\,\big)^2\right]\frac{\partial}{\partial\bar{\tilde{\theta}}^j}\\
&\quad + \left(1+\alpha\right)\mu\,\tilde{\theta}_j\bar{\tilde{\theta}}^k\frac{\partial}{\partial\bar{\tilde{\theta}}^k} - \alpha\mu\,\tilde{\theta}_j\tilde{\theta}_k\frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}_k} + i\tilde{\theta}_j\left[1 - \frac{1}{2}\left(1+2\alpha\right)\mu\,\bar{\tilde{\theta}}^k\tilde{\theta}_k\right]\partial_t\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Новая форма суперзарядов (3.27) запишется как

$$\begin{aligned}
S^i &= e^{-\frac{i}{2}\mu t}\Big\{\left[1 - \frac{1}{2}\left(1+2\alpha\right)\mu\,\bar{\tilde{\theta}}^k\tilde{\theta}_k - \frac{1}{16}\left(1+2\alpha\right)\mu^2\,(\tilde{\theta})^2\big(\bar{\tilde{\theta}}\,\big)^2\right]\frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}_i}\\
&\quad + \left(1+\alpha\right)\mu\,\bar{\tilde{\theta}}^i\tilde{\theta}_k\frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}_k} - \alpha\mu\,\bar{\tilde{\theta}}^i\bar{\tilde{\theta}}^k\frac{\partial}{\partial\bar{\tilde{\theta}}^k} + i\bar{\tilde{\theta}}^i\left[1 + \frac{1}{2}\left(1+2\alpha\right)\mu\,\bar{\tilde{\theta}}^k\tilde{\theta}_k\right]\partial_t\Big\},\\
\bar{S}_j &= e^{\frac{i}{2}\mu t}\Big\{\left[1 - \frac{1}{2}\left(1+2\alpha\right)\mu\,\bar{\tilde{\theta}}^k\tilde{\theta}_k - \frac{1}{16}\left(1+2\alpha\right)\mu^2\,(\tilde{\theta})^2\big(\bar{\tilde{\theta}}\,\big)^2\right]\frac{\partial}{\partial\bar{\tilde{\theta}}^j}\\
&\quad - \left(1+\alpha\right)\mu\,\tilde{\theta}_j\bar{\tilde{\theta}}^k\frac{\partial}{\partial\bar{\tilde{\theta}}^k} + \alpha\mu\,\tilde{\theta}_j\tilde{\theta}_k\frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}_k} + i\tilde{\theta}_j\left[1 + \frac{1}{2}\left(1+2\alpha\right)\mu\,\bar{\tilde{\theta}}^k\tilde{\theta}_k\right]\partial_t\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Заметим, что они получаются из суперзарядов (3.36) только через изменение знака μ, $S(\mu) \equiv Q(-\mu)$. Бозонные генераторы (3.26) записаны в виде

$$\begin{aligned}
&I^i_j = \left(\bar{\tilde{\theta}}^i\frac{\partial}{\partial\bar{\tilde{\theta}}^j} - \tilde{\theta}_j\frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}_i}\right) - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\left(\bar{\tilde{\theta}}^k\frac{\partial}{\partial\bar{\tilde{\theta}}^k} - \tilde{\theta}_k\frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}_k}\right),\\
&F = \frac{1}{2}\left(\bar{\tilde{\theta}}^k\frac{\partial}{\partial\bar{\tilde{\theta}}^k} - \tilde{\theta}_k\frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}_k}\right), \qquad \mathcal{H} = i\partial_t\,.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

В этой новой реализации гамильтониан $\mathcal{H}$ принимает правильную форму как генератор сдвига по времени. Остальная часть бозонных генераторов (3.28) записывается в виде

$$
\begin{aligned}
T &= e^{-i\mu t}\Big\{ i\left[1-\frac{1}{4}\,(1+2\alpha)\,\mu^2\,(\tilde\theta)^2\big(\bar{\tilde\theta}\,\big)^2\right]\partial_t+\frac{\mu}{2}\left(\bar{\tilde\theta}^k\frac{\partial}{\partial\bar{\tilde\theta}^k}+\tilde\theta_k\frac{\partial}{\partial\tilde\theta_k}\right) \\
&\quad+\frac{1}{2}\,(1+2\alpha)\,\mu^2\,\bar{\tilde\theta}^i\tilde\theta_i\left(\bar{\tilde\theta}^k\frac{\partial}{\partial\bar{\tilde\theta}^k}-\tilde\theta_k\frac{\partial}{\partial\tilde\theta_k}\right)\Big\}, \\
\bar T &= e^{i\mu t}\Big\{ i\left[1-\frac{1}{4}\,(1+2\alpha)\,\mu^2\,(\tilde\theta)^2\big(\bar{\tilde\theta}\,\big)^2\right]\partial_t-\frac{\mu}{2}\left(\bar{\tilde\theta}^k\frac{\partial}{\partial\bar{\tilde\theta}^k}+\tilde\theta_k\frac{\partial}{\partial\tilde\theta_k}\right) \\
&\quad+\frac{1}{2}\,(1+2\alpha)\,\mu^2\,\bar{\tilde\theta}^i\tilde\theta_i\left(\bar{\tilde\theta}^k\frac{\partial}{\partial\bar{\tilde\theta}^k}-\tilde\theta_k\frac{\partial}{\partial\tilde\theta_k}\right)\Big\}, \\
C &= \varepsilon_{jl}\bar{\tilde\theta}^j\frac{\partial}{\partial\tilde\theta_l}\,, \qquad \bar C \,=\, \varepsilon^{jl}\tilde\theta_j\frac{\partial}{\partial\bar{\tilde\theta}^l}\,.
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

Суперзаряды (3.36) и (3.37) приобретают экспоненциальные факторы $\sim e^{\pm\frac{i}{2}\mu t}$, которые необходимы для обеспечения правильных коммутационных отношений с $\mathcal{H}=i\partial_t$. Генераторы $su(2)$ и $su'(2)$ не содержат никакой зависимости от μ, в то время как $so(2,1)$ генераторы T и $\bar T$ связаны друг с другом через отражение $\mu\leftrightarrow-\mu$, $T(-\mu)=\bar T(\mu)$. Таким образом, то свойство, что супералгебра $D(2,1;\alpha)$ получается как результат замыкания суперзарядов $\big(Q_i(\mu)\,,\ \bar Q^j(\mu)\big)$ и $\big(S_i(\mu)=Q_i(-\mu)\,,\ \bar S^j(\mu)=\bar Q^j(-\mu)\big)$, становится явным в новой параметризации $SU(2|1)$ суперпространства.

Для дальнейшего использования мы приведём новую форму $SU(2|1)$ инвариантной меры (1.18):

$$
d\tilde\zeta = dt\,d^2\tilde\theta\,d^2\bar{\tilde\theta}\left(1+\mu\,\bar{\tilde\theta}^k\tilde\theta_k\right). \tag{3.40}
$$

При ε, $\bar\varepsilon$ преобразованиях, она преобразуется как

$$
\delta_\varepsilon\,d\tilde\zeta = 2\mu\,d\tilde\zeta\left[1-\frac{1}{2}\,(3+2\alpha)\,\mu\,\bar{\tilde\theta}^k\tilde\theta_k\right]\left(\bar\varepsilon^i\tilde\theta_i e^{\frac{i}{2}\mu t}-\varepsilon_i\bar{\tilde\theta}^i e^{-\frac{i}{2}\mu t}\right). \tag{3.41}
$$

Наконец, отметим существование другого аналитического базиса в $SU(2|1)$ гармоническом суперпространстве (1.33), $\tilde\zeta_H=\left(t_{(A)},\tilde\theta^\pm,\bar{\tilde\theta}^\pm,w^\pm_i\right)$, где

$$
\begin{aligned}
&\tilde\theta^+ = \theta^+e^{\frac{i}{2}\mu t_{(A)}}, \qquad \tilde\theta^- = \theta^-e^{\frac{i}{2}\mu t_{(A)}}\left[1-(1+\alpha)\,\mu\,\bar\theta^-\theta^+\right], \\
&\bar{\tilde\theta}^+ = \bar\theta^+e^{-\frac{i}{2}\mu t_{(A)}}, \qquad \bar{\tilde\theta}^- = \bar\theta^-e^{-\frac{i}{2}\mu t_{(A)}}\left[1+(1+\alpha)\,\mu\,\bar\theta^+\theta^-\right].
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

Эти координаты связаны с (3.35) следующим простым переопределением:

$$
\tilde\theta^\pm=\tilde\theta^i w^\pm_i\,, \qquad \bar{\tilde\theta}^\pm=\bar{\tilde\theta}^i w^\pm_i\,, \qquad t_{(A)}=t-i\left(\bar{\tilde\theta}^-\tilde\theta^+ +\bar{\tilde\theta}^+\tilde\theta^-\right). \tag{3.43}
$$

Можно проверить, что аналитическое подпространство $\left\{t_{(A)},\bar{\tilde\theta}^+,\tilde\theta^+,w^\pm_i\right\}$ сохраняет свою замкнутость относительно суперконформных преобразований.

3.4. Мультиплет $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$

Для изучения суперконформных свойств супермультиплета $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$ мы переформулируем условия (2.1) в суперпространстве (3.20) через ковариантные производные (3.31):

$$\varepsilon^{lj}\bar{\mathcal{D}}_l\,\bar{\mathcal{D}}_j\,X = \varepsilon_{lj}\mathcal{D}^l\,\mathcal{D}^j\,X = 0\,, \qquad \left[\mathcal{D}^i,\bar{\mathcal{D}}_i\right]X = -\,4\alpha\mu\,X - 4c\,. \tag{3.44}$$

В итоге мы получим решение

$$\begin{aligned} X \;\;=\;\; & \left[1+\alpha\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k+\alpha^2\mu^2\,(\theta)^2\left(\bar{\theta}\,\right)^2\right]x+\frac{\ddot{x}}{4}\,(\theta)^2\left(\bar{\theta}\,\right)^2+\bar{\theta}^j\theta_i\,B^i_j+c\,\bar{\theta}^j\theta_j\left(1+2\alpha\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k\right) \\ & -i\,\bar{\theta}^k\theta_k\left(\theta_i\,\dot{\psi}^i\,e^{\frac{i}{2}\mu t}+\bar{\theta}^j\,\dot{\bar{\psi}}_j\,e^{-\frac{i}{2}\mu t}\right)+\left[1+\frac{1}{2}\,(1+4\alpha)\,\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k\right]\left(\theta_i\,\psi^i\,e^{\frac{i}{2}\mu t}-\bar{\theta}^j\,\bar{\psi}_j\,e^{-\frac{i}{2}\mu t}\right), \end{aligned} \tag{3.45}$$

которое эквивалентно решению (2.2), в котором выполнена замена $m = -\alpha\mu$ и произведено следующее переопределение фермионных полей:

$$\psi^i \to \psi^i e^{\frac{i}{2}\mu t}, \qquad \bar{\psi}_j \to \bar{\psi}_j e^{-\frac{i}{2}\mu t}. \tag{3.46}$$

Это переопределение обеспечивает действие генератора гамильтониана $\mathcal{H}$ на все компоненты этого суперполя в виде чистой производной по времени $i\partial_t$ без дополнительных $U(1)$ преобразований. В пределе $\mu = 0$ суперполе X становится обычным суперполем стандартного мультиплета $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$.

Ковариантность условий (3.44), как наиболее важное требование, должна сохраняться относительно всей суперконформной группы $D\,(2,1;\alpha)$. Из этого требования действительно можно восстановить суперзаряды (3.27) и бозонные генераторы (3.28) как дифференциальные операторы, действующие на суперпространстве (3.20). Кроме того, оно означает, что эти дополнительные генераторы для мультиплета $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$ должны быть расширены надлежащими весовыми членами. Суперконформная ковариантность связей (3.44) предполагает дополнительное условие

$$c\,\mathcal{D}_l\,\mathcal{D}^l\left(1-\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k\right)\left(\bar{\varepsilon}^i\theta_i\,e^{i\mu t}-\varepsilon_i\bar{\theta}^i\,e^{-i\mu t}\right)=0\,. \tag{3.47}$$

Можно показать, что при $c \neq 0$ это условие выполняется только в случае $\alpha = -1$, когда суперконформная группа, сохраняющая ковариантность связей (3.44), нарушена до супергруппы $PSU(1,1|2)\rtimes U(1)_{\rm ext}$. В случае $c = 0$ при $\alpha = -1$, восстанавливается ковариантность относительно полной супергруппы $PSU(1,1|2)\rtimes SU(2)_{\rm ext}$.

Расширенные весовыми членами суперзаряды S^i и $\bar{S}_j$ подразумевают следующий закон пассивных преобразований суперполя X при выборе $c = 0$:

$$\delta_\varepsilon X\,\big|_{c=0} = 2\alpha\mu\left(1-\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k\right)\left(\bar{\varepsilon}^i\theta_i\,e^{i\mu t}-\varepsilon_i\bar{\theta}^i\,e^{-i\mu t}\right)X\,\big|_{c=0}\;. \tag{3.48}$$

В случае $c \neq 0$ при $\alpha = -1$, мы имеем аналогичные преобразования

$$\delta_\varepsilon X\,|_{c\neq 0,\alpha=-1} = -\,2\mu\left(1-\mu\,\bar\theta^k\theta_k\right)\left(\bar\varepsilon^i\theta_i\,e^{i\mu t}-\varepsilon_i\bar\theta^i\,e^{-i\mu t}\right)X\,|_{c\neq 0,\alpha=-1}\,. \tag{3.49}$$

Коммутируя (3.48) (или (3.49)) с нечётными преобразованиями (3.25), можно найти весовые члены, соответствующие генераторам (3.28) [A7].

Бозонная редукция конформных генераторов с весовыми членами записывается в следующем виде:

$$\mathcal{H} = i\partial_t\,,\qquad T = e^{-i\mu t}\left(i\partial_t+\alpha\mu\right),\qquad \bar T = e^{i\mu t}\left(i\partial_t-\alpha\mu\right). \tag{3.50}$$

Здесь, безразмерный параметр α может быть идентифицирован с масштабной размерностью (scaling dimension) λ_D для мультиплета $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$ [30].

3.4.1. Суперконформное действие при $\alpha \neq 0$ и $c = 0$

Суперконформное действие мультиплета $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$ при нулевом значении $c = 0$ можно записать в суперполевой формулировке как

$$S^{(\alpha)}_{\rm sc}(X) = -\int d\zeta\, f^{(\alpha)}_{\rm sc}(X)\,, \tag{3.51}$$

где соответствующая суперполевая функция $f(X)$ определена как в моделях параболической суперконформной механики [4]:

$$f^{(\alpha)}_{\rm sc}(X) = \begin{cases} \frac{1}{8(\alpha+1)}\,X^{-\frac{1}{\alpha}} & \text{for } \alpha\neq -1,0\,,\\ \frac{1}{8}\,X\ln X & \text{for } \alpha = -1\,. \end{cases} \qquad\Rightarrow\qquad g(x) = \frac{x^{-\frac{1}{\alpha}-2}}{8\alpha^2}\,. \tag{3.52}$$

Из формул (3.48) и (3.30) можно вывести, что действие (3.51) действительно инвариантно по отношению к суперконформной группе $D\,(2,1;\alpha)$. Проводя интегрирование по грассмановым переменным в суперполевом действии (3.51), мы вычисляем компонентный лагранжиан в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(\alpha)}_{\rm sc} \;=\;& \dot x^2 g(x) + i\left(\bar\psi_i\dot\psi^i-\dot{\bar\psi}_i\psi^i\right)g(x) - B^i_j\left(\frac12\,\delta^j_i\,\bar\psi_k\psi^k-\bar\psi_i\psi^j\right)g'(x)\\ &+\frac12\,B^i_jB^j_i\,g(x)-\frac14\,(\psi)^2\left(\bar\psi\,\right)^2g''(x)-\alpha^2\mu^2x^2g(x)\,. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Заметим, что лагранжиан зависит только от μ^2, а не от μ.

Воспользовавшись переопределением (3.46), можно переписать преобразования (2.4) как

$$\begin{aligned} \delta x \;=\;& \bar\epsilon^k\bar\psi_k\,e^{-\frac{i}{2}\mu t}-\epsilon_k\psi^k\,e^{\frac{i}{2}\mu t},\qquad \delta\psi^i = e^{-\frac{i}{2}\mu t}\left(i\bar\epsilon^i\dot x+\alpha\mu\,\bar\epsilon^i x+\bar\epsilon^k B^i_k\right),\\ \delta B^i_j \;=\;& -\,2i\left[\epsilon_j\dot\psi^i\,e^{\frac{i}{2}\mu t}+\bar\epsilon^i\dot{\bar\psi}_j\,e^{-\frac{i}{2}\mu t}-\frac12\,\delta^i_j\left(\epsilon_k\dot\psi^k\,e^{\frac{i}{2}\mu t}+\bar\epsilon^k\dot{\bar\psi}_k\,e^{-\frac{i}{2}\mu t}\right)\right]\\ &-\,(1+2\alpha)\,\mu\left[\bar\epsilon^i\bar\psi_j\,e^{-\frac{i}{2}\mu t}-\epsilon_j\psi^i\,e^{\frac{i}{2}\mu t}-\frac12\delta^i_j\left(\bar\epsilon^k\bar\psi_k\,e^{-\frac{i}{2}\mu t}-\epsilon_k\psi^k\,e^{\frac{i}{2}\mu t}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Лагранжиан (3.53), будучи функцией μ^2, инвариантен также относительно аналогичных нечётных $SU(2|1)$ преобразований

$$\begin{aligned}
\delta x &= \bar\varepsilon^k \bar\psi_k\, e^{\frac{i}{2}\mu t} - \varepsilon_k \psi^k\, e^{-\frac{i}{2}\mu t}, \qquad \delta\psi^i = e^{\frac{i}{2}\mu t}\left(i\bar\varepsilon^i \dot x - \alpha\mu\,\bar\varepsilon^i x + \bar\varepsilon^k B^i_k\right), \\
\delta B^i_j &= -\,2i\left[\varepsilon_j \dot\psi^i\, e^{-\frac{i}{2}\mu t} + \bar\varepsilon^i \dot{\bar\psi}_j\, e^{\frac{i}{2}\mu t} - \frac{1}{2}\delta^i_j\left(\varepsilon_k \dot\psi^k\, e^{-\frac{i}{2}\mu t} + \bar\varepsilon^k \dot{\bar\psi}_k\, e^{\frac{i}{2}\mu t}\right)\right] \\
&\quad +\,(1+2\alpha)\,\mu\left[\bar\varepsilon^i \bar\psi_j\, e^{\frac{i}{2}\mu t} - \varepsilon_j \psi^i\, e^{-\frac{i}{2}\mu t} - \frac{1}{2}\delta^i_j\left(\bar\varepsilon^k \bar\psi_k\, e^{\frac{i}{2}\mu t} - \varepsilon_k \psi^k\, e^{-\frac{i}{2}\mu t}\right)\right], \qquad (3.55)
\end{aligned}$$

которые соответствуют суперзарядам S^i и $\bar S_j$. Мы видим, что (3.54) и (3.55) связаны заменой $\mu \to -\mu$ в соответствии со структурой $D(2,1;\alpha)$, как замыкания двух $su(2|1)$ супералгебр.

Параболические преобразования полей мультиплета $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$ могут быть получены в две стадии из тригонометрических преобразований (3.54), (3.55). Сначала переходим к новым инфинитезимальным параметрам $\{\epsilon', \bar\epsilon'\}$, $\{\varepsilon', \bar\varepsilon'\}$ с противоположными размерностями переопределением старых параметров:

$$\epsilon_i = \frac{1}{2}\,\epsilon'_i + \frac{i}{\mu}\,\varepsilon'_i\,, \quad \varepsilon_i = \frac{1}{2}\,\epsilon'_i - \frac{i}{\mu}\,\varepsilon'_i\,, \qquad \text{and c.c.}. \qquad (3.56)$$

Это переопределение соответствует переходу к оригинальному базису $D(2,1;\alpha)$ суперзарядов. Только после этого мы берём предел $\mu \to 0$ и получаем параболические суперконформные преобразования. Эта процедура является универсальной и может быть выполнена для преобразований суперполей, компонентных полей и координат суперпространства. Таким образом, можно, например, вывести параболические преобразования меры интегрирования (1.18), которая становится стандартной плоской мерой $dt\, d^2\theta\, d^2\bar\theta$ в пределе $\mu = 0$.

Пользуясь заменами (2.11) – (2.13), мы находим соответствующую (3.52) функцию $V(y)$:

$$V(y) = -\frac{y}{2\alpha}\,, \qquad V'(y) = -\frac{1}{2\alpha}\,, \qquad \frac{V'(y)-1}{V(y)} = \frac{1+2\alpha}{y}\,. \qquad (3.57)$$

В результате, мы получаем суперконформный лагранжиан в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(\alpha)}_{\rm sc} &= \frac{\dot y^2}{2} + \frac{i}{2}\left(\bar\chi_i \dot\chi^i - \dot{\bar\chi}_i \chi^i\right) + \tilde B^i_j \tilde B^j_i - \frac{1+2\alpha}{y}\,\tilde B^j_i\left(\delta^i_j \bar\chi_k \chi^k - 2\bar\chi_j \chi^i\right) \\
&\quad - \frac{(1+3\alpha)\,(1+2\alpha)}{2y^2}\,(\chi)^2\,(\bar\chi\,)^2 - \frac{\mu^2}{8}\,y^2. \qquad (3.58)
\end{aligned}$$

Он инвариантен при следующих $SU(2|1)$ преобразованиях

$$
\begin{aligned}
\delta y &= \bar\epsilon^k\bar\chi_k\, e^{-\frac{i}{2}\mu t} - \epsilon_k\chi^k\, e^{\frac{i}{2}\mu t}, \\
\delta\chi^i &= e^{-\frac{i}{2}\mu t}\left[i\bar\epsilon^i\dot y - \frac{\mu}{2}\,\bar\epsilon^i y + 2\,\bar\epsilon^k\tilde B^i_k + \chi^i\left(\bar\epsilon^k\bar\chi_k - \epsilon_k\chi^k\, e^{i\mu t}\right)\frac{1+2\alpha}{y}\right], \\
\delta\tilde B^i_j &= -\,i\left[\epsilon_j\dot\chi^i\, e^{\frac{i}{2}\mu t} + \bar\epsilon^i\dot{\bar\chi}_j\, e^{-\frac{i}{2}\mu t} - \frac{1}{2}\delta^i_j\left(\epsilon_k\dot\chi^k\, e^{\frac{i}{2}\mu t} + \bar\epsilon^k\dot{\bar\chi}_k\, e^{-\frac{i}{2}\mu t}\right)\right] \\
&\quad -\frac{\mu}{2}\,(1+2\alpha)\left[\bar\epsilon^i\bar\chi_j\, e^{-\frac{i}{2}\mu t} - \epsilon_j\chi^i\, e^{\frac{i}{2}\mu t} - \frac{1}{2}\delta^i_j\left(\bar\epsilon^k\bar\chi_k\, e^{-\frac{i}{2}\mu t} - \epsilon_k\chi^k\, e^{\frac{i}{2}\mu t}\right)\right] \\
&\quad +\tilde B^i_j\left(\bar\epsilon^k\bar\chi_k\, e^{-\frac{i}{2}\mu t} - \epsilon_k\chi^k\, e^{\frac{i}{2}\mu t}\right)\frac{1+2\alpha}{y} \\
&\quad +i\dot y\left[\epsilon_j\chi^i\, e^{\frac{i}{2}\mu t} + \bar\epsilon^i\bar\chi_j\, e^{-\frac{i}{2}\mu t} - \frac{1}{2}\delta^i_j\left(\epsilon_k\chi^k\, e^{\frac{i}{2}\mu t} + \bar\epsilon^k\bar\chi_k\, e^{-\frac{i}{2}\mu t}\right)\right]\frac{1+2\alpha}{y}\,. \qquad (3.59)
\end{aligned}
$$

Меняя в этих преобразованиях μ на $-\mu$, получаем ε преобразования, связанные с дополнительными генераторами $S(\mu) = Q(-\mu)$. Поскольку лагранжиан (3.58) зависит только от μ^2, то он автоматически инвариантен относительно ε преобразований и, следовательно, относительно полной супергруппы $D(2,1;\alpha)$. Это общее правило также применимо к суперконформным лагранжианам других $SU(2|1)$ мультиплетов.

В данном случае мы имеем дело с суперконформной механикой тригонометрического типа [30]. Гиперболические действия могут быть получены из тригонометрических заменой $\mu^2 \to -\mu^2$. Другой тип суперконформной механики связан с параболическими преобразованиями, и его суперполевое описание основано на стандартном $\mathcal{N}=4$, $d=1$ суперпространстве. Разница лишь в том, что тригонометрическое действие (3.58) имеет дополнительный осцилляторный член. В пределе $\mu \to 0$ восстанавливается параболический тип суперконформной механики.

3.4.2. Суперконформное действие при $\alpha = -1$ и $c \neq 0$

Теперь рассмотрим случай $c \neq 0$, для которого суперконформная инвариантность требует $\alpha = -1$ ($m = \mu$). Суперполевые связи (3.44) ковариантны по отношению к супергруппе $PSU(1,1|2) \rtimes U(1)_{\rm ext}$. Суперполевое действие пишется как обобщение лагранжиана (3.51) при $\alpha = -1$ на случай $c \neq 0$:

$$
S^{(\alpha=-1)}_{\rm sc}(X) = -\int d\zeta\, X\ln X\,. \qquad (3.60)
$$

Соответствующий лагранжиан,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(\alpha=-1,\,c)}_{\rm sc} &= \frac{\dot x^2}{x} + \frac{i}{x}\left(\bar\psi_i\dot\psi^i - \dot{\bar\psi}_i\psi^i\right) + \frac{B^i_jB^j_i}{2x} + \frac{B^i_j}{x^2}\left(\frac{1}{2}\,\delta^j_i\,\bar\psi_k\psi^k - \bar\psi_i\psi^j\right) \\
&\quad -\frac{1}{2x^3}\,(\psi)^2\left(\bar\psi\,\right)^2 - \mu^2x + \frac{c\,\bar\psi_i\psi^i}{x^2} - \frac{c^2}{x}\,, \qquad (3.61)
\end{aligned}
$$

содержит новый член $\sim \bar{\psi}\psi$, который нарушает симметрию $D(2,1;\alpha=-1)$ до $PSU(1,1|2) \rtimes U(1)_{\rm ext}$. Этот лагранжиан инвариантен относительно преобразований суперсимметрии, в которых $\delta\psi^i$ является обобщением соответствующих преобразований (3.54), (3.55):

$$\delta\psi^i = e^{-\frac{i}{2}\mu t}\left(i\bar{\epsilon}^i\dot{x} - \mu\,\bar{\epsilon}^i x + \bar{\epsilon}^k B^i_k + c\,\bar{\epsilon}^i\right) + e^{\frac{i}{2}\mu t}\left(i\bar{\varepsilon}^i\dot{x} + \mu\,\bar{\varepsilon}^i x + \bar{\varepsilon}^k B^i_k + c\,\bar{\varepsilon}^i\right). \tag{3.62}$$

Преобразования бозонных полей такие же, как в (3.54), (3.55).

Переходя к действию со свободным кинетическим лагранжианом, мы находим функцию $V(y)$:

$$V(y) = \frac{y}{2}\,, \qquad V'(y) = \frac{1}{2}\,, \qquad \frac{V'(y)-1}{V(y)} = -\frac{1}{y}\,. \tag{3.63}$$

В соответствии с (2.15), суперконформный лагранжиан (3.58) обобщается для этого специального случая как

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(\alpha=-1,\,c)}_{\rm sc} \;\; = \;\; & \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{i}{2}\left(\bar{\chi}_i\dot{\chi}^i - \dot{\bar{\chi}}_i\chi^i\right) + \tilde{B}^i_j\tilde{B}^j_i + \frac{\tilde{B}^j_i}{y}\left(\delta^i_j\bar{\chi}_k\chi^k - 2\bar{\chi}_j\chi^i\right) \\ & - \frac{1}{y^2}\left(\chi\right)^2\left(\bar{\chi}\,\right)^2 + \frac{c}{2y^2}\,\bar{\chi}_i\chi^i - \frac{\mu^2y^2}{8} - \frac{c^2}{8y^2}\,.\end{aligned} \tag{3.64}$$

Лагранжиан на массовой оболочке,

$$\mathcal{L}^{(\alpha=-1,\,c)}_{\rm sc} = \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{i}{2}\left(\bar{\chi}_i\dot{\chi}^i - \dot{\bar{\chi}}_i\chi^i\right) - \frac{1}{4y^2}\left(\chi\right)^2\left(\bar{\chi}\,\right)^2 + \frac{c}{2y^2}\,\bar{\chi}_i\chi^i - \frac{\mu^2y^2}{8} - \frac{c^2}{8y^2}\,, \tag{3.65}$$

как суперконформный лагранжиан, был ранее найден в [31]. Подход, основанный на суперпространстве $SU(2|1)$, позволил нам найти суперполевую форму лагранжиана (3.65) вне массовой оболочки.

3.4.3. Суперконформное действие при $\alpha = 0$ и $c = 0$

Глядя на лагранжиан (3.53), можно заметить, что предел $\alpha \to -0$ расходится, а противоположный предел $\alpha \to +0$ даёт $\mathcal{L}^{(\alpha=0)}_{\rm sc} = 0$. Тем не менее, можно однозначно определить этот предел для лагранжиана (3.53), вводя неоднородный параметр ρ [30].

Мы можем получить правильный предел $\alpha \to 0$, если переопределить лагранжиан (3.53), сдвигая поле x как

$$x \to x + \frac{\rho}{\alpha}\,. \tag{3.66}$$

Лагранжиан (3.53) тогда перепишется как

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\rm sc}^{(\alpha,\,\rho)} \;&=\; \frac{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}{8}\,(\alpha x+\rho)^{-\frac{1}{\alpha}-2}\left[\dot{x}^2 + i\left(\bar{\psi}_i\dot{\psi}^i - \dot{\bar{\psi}}_i\psi^i\right) + \frac{1}{2}\,B^i_jB^j_i\right] \\
&\quad+ \frac{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\,(1+2\alpha)}{8}\,B^i_j\left(\frac{1}{2}\,\delta^j_i\,\bar{\psi}_k\psi^k - \bar{\psi}_i\psi^j\right)(\alpha x+\rho)^{-\frac{1}{\alpha}-3} \\
&\quad- \frac{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\,(1+2\alpha)\,(1+3\alpha)}{32}\,(\psi)^2\left(\bar{\psi}\,\right)^2(\alpha x+\rho)^{-\frac{1}{\alpha}-4} - \frac{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\mu^2}{8}\,(\alpha x+\rho)^{-\frac{1}{\alpha}}\,.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Отбрасывая расходящийся фактор $\sim\,(\alpha/\rho)^{\frac{1}{\alpha}}$, мы переходим к пределу $\alpha\to 0$ и получаем лагранжиан

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\rm sc}^{(\alpha=0,\,\rho)} \;&=\; e^{-\frac{x}{\rho}}\left[\dot{x}^2 + i\left(\bar{\psi}_i\dot{\psi}^i - \dot{\bar{\psi}}_i\psi^i\right) + \frac{1}{2}\,B^i_jB^j_i\right] + \frac{B^i_j}{\rho}\left(\frac{1}{2}\,\delta^j_i\,\bar{\psi}_k\psi^k - \bar{\psi}_i\psi^j\right)e^{-\frac{x}{\rho}} \\
&\quad- \frac{1}{4\rho^2}\,(\psi)^2\left(\bar{\psi}\,\right)^2 e^{-\frac{x}{\rho}} - \mu^2\rho^2 e^{-\frac{x}{\rho}}.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Следуя той же методике, как в (2.11) – (2.13), мы можем получить лагранжиан, который совпадает с (3.58) при $\alpha=0$ [30]. Для обеспечения суперконформной инвариантности в этом случае нужно добавить к преобразованиям (3.54), (3.55) для $\alpha=0$ неоднородные части

$$\delta_{(\rho)}\psi^i = \rho\mu\left(\bar{\epsilon}^i e^{-\frac{i}{2}\mu t} - \bar{\varepsilon}^i e^{\frac{i}{2}\mu t}\right), \quad \delta_{(\rho)}x = \delta_{(\rho)}B^i_k = 0\,. \tag{3.69}$$

Эта модификация влечёт за собой появление неоднородных частей в конформных преобразованиях x,

$$Tx = e^{-i\mu t}\,(i\dot{x}+\rho\mu)\,, \qquad \bar{T}x = e^{i\mu t}\,(i\dot{x}-\rho\mu)\,. \tag{3.70}$$

Стандарнтные конформные $so(2,1)$ генераторы, определённые в (3.5) и (3.8), действуют на x как

$$\begin{aligned}
\hat{H}x &= \frac{i}{2}\,(1+\cos\mu t\,)\,\dot{x} - \frac{i}{2}\,\rho\mu\sin\mu t\,, \\
\hat{K}x &= \frac{2i}{\mu^2}\,(1-\cos\mu t\,)\,\dot{x} + \frac{2i}{\mu}\,\rho\sin\mu t\,, \\
\hat{D}x &= \frac{i}{\mu}\sin\mu t\,\dot{x} + i\rho\cos\mu t\,.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Суперполевое действие с лагранжианом (3.51) не определено при значении $\alpha=0$. Тем не менее, суперполевое описание (3.68) можно дать в рамках фактор-пространства (3.21) с алгеброй (3.19). В соответствии с (3.45), суперполе $X\,|_{\alpha=0}$ записывается в виде

$$\begin{aligned}
X\,|_{\alpha=0} \;&=\; x + \frac{\ddot{x}}{4}\,(\theta)^2\left(\bar{\theta}\,\right)^2 - i\bar{\theta}^k\theta_k\left(\theta_i\,\dot{\psi}^i\,e^{\frac{i}{2}\mu t} + \bar{\theta}^j\,\dot{\bar{\psi}}_j\,e^{-\frac{i}{2}\mu t}\right) \\
&\quad+ \left(1+\frac{\mu}{2}\,\bar{\theta}^k\theta_k\right)\left(\theta_i\,\psi^i\,e^{\frac{i}{2}\mu t} - \bar{\theta}^j\,\bar{\psi}_j\,e^{-\frac{i}{2}\mu t}\right) + \bar{\theta}^j\theta_i\,B^i_j\,.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Данное суперполе удовлетворяет стандартным связям мультиплета $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$,

$$\varepsilon^{lj}\bar{\mathcal{D}}_l\,\bar{\mathcal{D}}_j\,X=\varepsilon_{lj}\mathcal{D}^l\,\mathcal{D}^j\,X=0\,,\qquad\left[\mathcal{D}^i,\bar{\mathcal{D}}_i\right]X=0\,,\tag{3.73}$$

где ковариантные производные (3.31) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^i &= e^{-\frac{i}{2}\mu t}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}-i\bar{\theta}^i\partial_t-\mu\,\bar{\theta}^i\tilde{F}\right),\\
\bar{\mathcal{D}}_j &= e^{\frac{i}{2}\mu t}\left(-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^j}+i\theta_j\partial_t+\mu\,\theta_j\tilde{F}\right),\qquad(3.74)\\
\left\{\mathcal{D}^i,\bar{\mathcal{D}}_j\right\} &= 2\delta^i_j\left(i\partial_t+\mu\tilde{F}\right).\qquad(3.75)
\end{aligned}$$

Тогда компонентный лагранжиан (3.68) воспроизводится из суперполевого действия

$$S^{(\alpha=0,\,\rho)}_{\rm sc}(X)=\int dt\,\mathcal{L}^{(\alpha=0,\,\rho)}_{\rm sc}=-\,\rho^2\int dt\,d^2\theta\,d^2\bar{\theta}\,e^{-\frac{X}{\rho}-\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k}.\tag{3.76}$$

Пассивное суперполевое преобразование X включает в себя только неоднородную часть

$$\delta_{(\rho)}X=-\,\rho\mu\left(\bar{\epsilon}^k\theta_k-\epsilon_k\bar{\theta}^k\right)+\rho\mu\left(1+\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k\right)\left(\bar{\varepsilon}^k\theta_ke^{i\mu t}-\varepsilon_k\bar{\theta}^ke^{-i\mu t}\right),\tag{3.77}$$

так как однородная часть (3.48) исчезает при $\alpha=0$.

3.5. Мультиплет $(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{2})$

В киральном мультиплете тригонометрические (параболические) суперконформные действия можно определить только для случаев $\alpha=-1$ и $\alpha=0$, в которых суперконформная группа сводится к супергруппе $SU(1,1|2)$ с центральным зарядом b.

Суперконформные лагранжианы при этом всегда сводятся к сумме свободного кинетического лагранжиана

$$\mathcal{L}^{\rm kin.}_{\rm sc}=\dot{\bar{z}}\dot{z}+\frac{i}{2}\left(\bar{\xi}_i\dot{\xi}^i-\dot{\bar{\xi}}_i\xi^i\right)+\bar{B}B-\frac{\mu^2}{4}\,z\bar{z}\,,\tag{3.78}$$

и суперпотенциала

$$\mathcal{L}^{\rm pot.}_{\rm sc}=\nu\left(\frac{2B}{z}+\frac{\xi_i\xi^i}{z^2}\right)+\text{c.c.}\,.\tag{3.79}$$

Тригонометрический свободный лагранжиан является деформацией параболического свободного лагранжиана [40] осцилляторным потенциальным членом $\sim-\mu^2z\bar{z}$. Обобщение кирального условия (2.115) приводит к суперконформным преобразованиям с супералгеброй $su(1,1|2)$, которая расширена тремя центральными зарядами:

$$Z_1=b\cos2\lambda\,,\qquad Z_2=b\sin2\lambda\,,\qquad Z_3=-b\sin2\lambda\,,\qquad(Z_1)^2-Z_2Z_3=b^2.\tag{3.80}$$

Так как $SU'(2)$ повороты могут свести количество центральных зарядов к одному, то параметр λ не является существенным, и его можно исключить из преобразований суперконформной симметрии.

Полные суперсимметричные преобразования можно записать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\delta z = -\sqrt{2}\,\epsilon_k \xi^k e^{\frac{i}{2}\mu t} - \sqrt{2}\,\varepsilon_k \xi^k e^{-\frac{i}{2}\mu t}, \\
&\delta \xi^i = \sqrt{2}\,\bar\epsilon^i \left(i\dot z - b\mu z\right) e^{-\frac{i}{2}\mu t} + \sqrt{2}\,\bar\varepsilon^i \left(i\dot z + b\mu z\right) e^{\frac{i}{2}\mu t} - \sqrt{2}\,\epsilon^i B e^{\frac{i}{2}\mu t} - \sqrt{2}\,\varepsilon^i B e^{-\frac{i}{2}\mu t}, \\
&\delta B = -\sqrt{2}\,\bar\epsilon_k \left[i\dot\xi^k - \left(b - \frac{1}{2}\right)\mu\,\xi^k\right] e^{-\frac{i}{2}\mu t} - \sqrt{2}\,\bar\varepsilon_k \left[i\dot\xi^k + \left(b - \frac{1}{2}\right)\mu\,\xi^k\right] e^{\frac{i}{2}\mu t}.
\end{aligned}
\tag{3.81}
$$

Отсюда видно, что преобразования с параметрами ϵ и ε представляют собой деформации стандартного плоского закона $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ преобразований параметрами μ и $-\mu$.

3.6. Мультиплет $(\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$

Как обсуждалось в разделе 2.5, прямая эквивалентность между взаимно зеркальными мультиплетами $(\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$ в общем случае нарушена. Однако, тригонометрические (а также параболические) суперконформные модели обоих $(\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$ мультиплетов эквивалентны относительно замены $\alpha \leftrightarrow -(1+\alpha)$, которая соответствует перестановке $SU(2)$ и $SU'(2)$ генераторов в $D(2,1;\alpha)$. Поэтому достаточно написать лагранжианы для стандартного мультиплета $(\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$. Выполняя в (2.156), при специальном выборе $G = \left(x^{ia}x_{ia}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$, замену

$$
\psi^a \to \psi^a e^{\frac{i}{2}\mu t}, \qquad \bar\psi^a \to \bar\psi^a e^{-\frac{i}{2}\mu t},
\tag{3.82}
$$

мы получаем лагранжиан

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\rm sc}^{(\alpha\neq 0)} \;=\; & \Bigg[\dot x^{ia}\dot x_{ia} + \frac{i}{2}\left(\bar\psi_a\dot\psi^a - \dot{\bar\psi}_a\psi^a\right) - \frac{i}{2}\left(\psi_a\bar\psi^c + \psi^c\bar\psi_a\right)\dot x^{ia}\partial_{ic} - \frac{1}{16}\left(\bar\psi\,\right)^2(\psi)^2\,\Delta_x \\
& - \frac{\alpha^2\mu^2}{4}\,x^{ia}x_{ia}\Bigg]\left(x^{ia}x_{ia}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.
\end{aligned}
\tag{3.83}
$$

Тогда преобразования (2.149) переходят в следующие преобразования

$$
\begin{aligned}
&\delta x^{ia} = -\,\epsilon^i\psi^a e^{\frac{i}{2}\mu t} - \bar\epsilon^i\bar\psi^a e^{-\frac{i}{2}\mu t}, \\
&\delta\bar\psi_a = \left(2i\epsilon_k\dot x^k_a + \alpha\mu\,\epsilon_k x^k_a\right)e^{\frac{i}{2}\mu t}, \qquad \delta\psi^a = \left(2i\bar\epsilon^k\dot x^a_k - \alpha\mu\,\bar\epsilon^k x^a_k\right)e^{-\frac{i}{2}\mu t},
\end{aligned}
\tag{3.84}
$$

относительно которых лагранжиан (3.83) инвариантен. Вводя неоднородный параметр ρ , мы получаем лагранжиан для $\alpha = 0$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\rm sc}^{(\alpha=0)} \;=\; & \Bigg[\dot x^{ia}\dot x_{ia} + \frac{i}{2}\left(\bar\psi_a\dot\psi^a - \dot{\bar\psi}_a\psi^a\right) - \frac{i}{2}\,\dot x^{ia}\left(\psi_a\bar\psi^c + \psi^c\bar\psi_a\right)\partial_{ic} - \frac{1}{16}\left(\bar\psi\,\right)^2(\psi)^2\,\Delta_x \\
& - \frac{\mu^2\rho^2}{4}\Bigg]\exp\left\{\frac{2\rho^{ia}x_{ia}}{\rho^2}\right\},
\end{aligned}
\tag{3.85}
$$

и неоднородные преобразования

$$\begin{aligned}
\delta x^{ia} &= -\,\epsilon^i\psi^a e^{\frac{i}{2}\mu t} - \bar\epsilon^i\bar\psi^a e^{-\frac{i}{2}\mu t},\\
\delta\bar\psi_a &= \big(2i\epsilon_k\dot x^k_a + \mu\,\epsilon_k\rho^k_a\big)\,e^{\frac{i}{2}\mu t}, \qquad \delta\psi^a = \big(2i\bar\epsilon^k\dot x^a_k - \mu\,\bar\epsilon^k\rho^a_k\big)\,e^{-\frac{i}{2}\mu t}.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Инвариантность (3.83) и (3.85) относительно ε преобразований, которые получаются заменой $\mu \to -\mu$ в (3.84) и (3.86), выполняется автоматически.

Можно проверить, что лагранжиан (2.161) обладает тригонометрической суперконформной симметрией $PSU(1,1|2)$ при $\alpha = 0$ и $\rho = 0$, т. е. он инвариантен относительно (3.84) при $\alpha = 0$. Супергруппа $PSU(1,1|2)$ содержит подгруппу $SU(2|1)$, но последняя не совпадает с мировой супергруппой $SU(2|1)$. В данном случае мировая супергруппа порождается супералгеброй (3.19). Зеркальный аналог лагранжиана (2.161) при $\alpha = -1$ инвариантен относительно супергруппы $SU(2|1)$, которая ассоциируется с $SU(2|1)$ суперпространством. При этом лагранжианы (3.85) и (2.161) инвариантны относительно разных типов суперконформных преобразований (3.84) ($\alpha = 0$) и (3.86), соответственно, поэтому они не могут рассматриваться вместе как единый суперконформный лагранжиан.

С другой стороны, лагранжиан (2.161) инвариантен относительно недеформированных преобразований

$$\delta x^{ia} = -\,\epsilon^i\psi^a - \bar\epsilon^i\bar\psi^a, \qquad \delta\bar\psi_a = 2i\epsilon_k\dot x^k_a\,, \qquad \delta\psi^a = 2i\bar\epsilon^k\dot x^a_k\,. \tag{3.87}$$

которые образуют плоскую $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ суперсимметрию. Скобки Ли этих дополнительных преобразований с тригонометрическими преобразованиями при $\alpha = 0$ дают новые бозонные генераторы

$$\sim e^{\pm\frac{i}{2}\mu t}\, i\partial_t\,.$$

Коммутируя новые бозонные генераторы с конформными генераторами (3.32), мы находим, что бозонная подалгебра расширяется до бесконечномерной алгебры Вирасоро [53]

$$[L_k, L_n] = (k-n)\,L_{k+n}\,, \qquad L_n = \frac{2i}{\mu}\,e^{\frac{i}{2}n\mu t}\,\partial_t\,, \qquad k, n \in \mathbb{Z}\,. \tag{3.88}$$

Таким образом, лагранжиан Весса-Зумино (2.161) также обладает бесконечномерной симметрией относительно $\mathcal{N} = 4$ супергруппы Вирасоро в версии Рамона без центральных зарядов [30].

Заключение

В диссертационной работе предложен и исследован новый тип моделей $\mathcal{N}=4\,, d=1$ суперсимметричной механики. Эти модели обладают мировой $SU(2|1)$ суперсимметрией, которая представляет собой деформацию стандартной $\mathcal{N}=4\,, d=1$ суперсимметрии параметром m размерности массы. С использованием суперполей на фактор-пространствах супергруппы $SU(2|1)$ построены классические и квантовые модели для супермультиплетов $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$, $(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{2})$ и $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$. Показано, что ранее известные модели “Weak Supersymmetry” и “Super Kähler Oscillator” естественно воспроизводятся из суперполевого $SU(2|1)$ описания. Для описания мультиплетов $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$ (обычного и его зеркального аналога) было построено гармоническое $SU(2|1)$ суперпространство. Как оказалось, модели для этих двух мультиплетов деформированы существенно по-разному, т. е. в деформированном случае мы имеем дело с 2 разными типами неэквивалентных моделей. Таким образом, зеркальность в $SU(2|1)$ случае «искривлена».

Во второй главе построено гильбертово пространство суперволновых функций для простых примеров рассматриваемых мультиплетов и проанализирована структура соответствующих квантовых состояний. Некоторые особенности квантового спектра находят естественное объяснение в рамках теории $SU(2|1)$ представлений. Показано, что собственные значения операторов Казимира играют определяющую роль в структуре суперволновых функций. Отличительным фактом является наличие нетривиальных атипических $SU(2|1)$ представлений с неравным количеством бозонных и фермионных состояний, на которых операторы Казимира принимают нулевые значения.

В третьей главе представлена реализация суперпространства тригонометрического типа для $\mathcal{N}=4\,, d=1$ суперконформной суперсимметрии $D(2,1;\alpha)$, с $m=-\alpha\mu\,$. Эта реализация дана на суперпространстве $SU(2|1)$ при $\alpha\neq 0$ и на $U(1)$ деформированном $\mathcal{N}=4\,, d=1$ суперпространстве при $\alpha=0\,$. В пределе $\mu=0$ соответствующие суперконформные модели становятся моделями стандартной параболической суперконформной механики, построенными на основе стандартных $\mathcal{N}=4\,, d=1$ суперполей. Общим свойством лагранжианов суперконформной механики является их зависимость от квадрата параметра деформации $\mu\,$. Это позволяет представить суперконформные преобразования полей как замыкание двух видов деформированных $SU(2|1)$ преобразований с параметрами μ и $-\mu\,$.

Возможным направлением дальнейших исследований является разработка аналогичного $d=1$ суперполевого формализма для супергрупп с большим рангом $\mathcal{N}>4$ как искривлённых аналогов суперсимметрии Пуанкаре (1). Подходящим кандидатом для деформированной

$\mathcal{N} = 8$, $d = 1$ суперсимметрии является супергруппа $SU(2|2)$ с 8 суперзарядами. Супергруппа $SU(2|2)$ в качестве подгруппы содержит 2 коммутирующие $SU(2)$ группы, и поэтому эта супергруппа допускает в качестве своих фактор-пространств, помимо аналога гармонического суперпространства, также аналог би-гармонического суперпространства [11].

На самом деле, это супергруппа может иметь три независимых центральных заряда, и два из них могут быть идентифицированы с координатами светового конуса как $d = 2$ операторы трансляции. Тогда центрально расширенная алгебра $su(2|2)$ может быть использована в качестве $d = 2$ слабой суперсимметрии. Возникает вопрос – можно ли построить нетривиальные $d = 2$ σ-модели, основанные на $SU(2|2)$ деформации плоской $\mathcal{N} = (4,4)$ $d = 2$ суперсимметрии? Проблема обобщения $d = 1$ слабой суперсимметрии до $d = 2$ была поставлена в [23]. Следует подчеркнуть, что различные версии $SU(2|2)$ суперсимметрии (on-shell) уже появлялись в литературе в качестве мировой суперсимметрии в рамках редукции Полмайера для $AdS_3 \times S^3$ и $AdS_5 \times S^5$ суперструн [54–56], а также в качестве мировой суперсимметрии $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричных моделей Ландау [35]. Соответствующий суперполевой формализм вне массовой оболочки может помочь в получении более полного представления о структуре симметрии этих и подобных им $d = 1, 2$ теорий.

В том, что касается деформированных моделей $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной механики, рассмотренных в диссертации, мы можем перечислить ещё несколько возможных направлений дальнейшего исследования:

- Мультиплет $(\mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{1})$ может быть исследован аналогичным образом в целях дополнения картины исследования основных $SU(2|1)$ мультиплетов и исследования многочастичных квантово-механических моделей с различными типами $SU(2|1)$ мультиплетов.

- Ещё одна проблема состоит в построении $SU(2|1)$ аналогов нелинейных мультиплетов $(\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$ [48] и $(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{2})$ [6, 7].

- Кроме того, существует проблема воспроизведения различных $SU(2|1)$ моделей суперсимметричной механики на основе размерной редукции многомерных теорий с искривлённой суперсимметрией. В недавней работе [22] для вычисления энергии вакуума была проведена размерная редукция $d = 4$, $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных киральных моделей на искривлённом пространстве $S^3 \times \mathbb{R}$, где соответствующая супералгебра деформирована до $su(2|1)$. В результате, размерная редукция приводит к моделям $SU(2|1)$ суперсимметричной механики. Это даёт ещё одно возможное направление исследований, имеющее целью установление связи этой конструкции с $SU(2|1)$ суперсимметричной механикой, обсуждаемой в диссертации.

Благодарности

Выражаю благодарность своему научному руководителю и соавтору Евгению Алексеевичу Иванову за постановку актуальных задач и помощь в их решении, а также соавторам Михаилу Гойхману и Франческо Топпану. Отдельно выражаю благодарности Алексею Петровичу Исаеву, Сергею Олеговичу Кривоносу, Армену Петросовичу Нерсессяну, Андрею Вольдемаровичу Смилге и Сергею Алексеевичу Федоруку за поддержку, полезные комментарии, ценные замечания и интерес к рассмотренным в диссертации задачам.

Приложение A

Модель Ландау на фермионном фактор-пространстве

Модель Ландау описывает заряженную частицу, движущуюся на плоскости под воздействием однородного магнитного поля, ортогонального к плоскости [57]. Сферический вариант модели Ландау (модель Хэлдейна) описывает заряженную частицу на сфере $S^2 \backsim SU(2)/U(1)$ в поле монополя Дирака, помещённого в центр [58]. Эти модели имеют много приложений, в частности, в квантовом эффекте Холла.

Суперсимметричная модель Ландау, о которой пойдёт здесь речь, описывает нерелятивистскую суперчастицу, движущуюся на супермногообразии $SU(2|1)/U(2)$. Отличительной чертой этой модели является отсутствие на супермногообразии бозонных координат (полей), т. е. соответствующее фактор-пространство $SU(2|1)/U(2)$ является чисто фермионным супермногообразием.

Фермионные координаты фактор-пространства $SU(2|1)/U(2)$ образуют комплексный дублет $d = 1$ полей $\xi^i = \xi^i(t), \bar{\xi}_i = \overline{(\xi^i)},\ i = 1, 2$. Эти поля удовлетворяют голоморфному закону преобразований

$$\delta\xi^i = \epsilon^i - \bar{\epsilon}_k \xi^k \xi^i\,, \qquad \bar{\epsilon}^i = \overline{(\epsilon_i)}. \tag{A.1}$$

Нечётные $SU(2|1)$ преобразования могут быть выражены в терминах $SU(2|1)$ фермионных генераторов $Q^{\dagger j}$, Q_i:

$$\delta\xi^i = \left(\epsilon^k Q_k + \bar{\epsilon}_k Q^{\dagger k}\right)\xi^i. \tag{A.2}$$

В отличие от (1.1), здесь рассматривается супералгебра $su(2|1)$ без центрального заряда и без деформирующего параметра m , который при желании можно ввести. (Анти)коммутационные соотношения $su(2|1)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&\left\{Q_i, Q^{\dagger j}\right\} = I^j_i - \delta^j_i F\,, \qquad [F, Q_i] = \frac{1}{2}\,Q_i\,, \qquad \left[F, Q^{\dagger k}\right] = -\frac{1}{2}\,Q^{\dagger k},\\
&\left[I^i_j, I^k_l\right] = \delta^k_j I^i_l - \delta^i_l I^k_j\,, \quad \left[I^i_j, Q^{\dagger l}\right] = \frac{1}{2}\,\delta^i_j Q^{\dagger l} - \delta^l_j Q^{\dagger i}\,, \quad \left[I^i_j, Q_k\right] = \delta^i_k Q_k - \frac{1}{2}\,\delta^i_k Q_j.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Все остальные (анти)коммутаторы равны нулю.

Инвариантный лагранжиан, параметризованный переменными ξ^i,

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{\bar{\xi}}_k \dot{\xi}^k}{1 - \xi^k \bar{\xi}_k} + \frac{\dot{\bar{\xi}}_i \xi^i\, \dot{\xi}^k \bar{\xi}_k}{\left(1 - \xi^k \bar{\xi}_k\right)^2} - i\kappa\, \frac{\bar{\xi}_i \dot{\xi}^i - \dot{\bar{\xi}}_i \xi^i}{1 - \xi^k \bar{\xi}_k}\,, \tag{A.4}$$

описывает d=1 σ-модель на фермионном фактор-пространстве $SU(2|1)/U(2)$. Определяя потенциал Кэлера на этом пространстве как

$$K = \ln\left(1 - \xi^k \bar{\xi}_k\right)\,, \tag{A.5}$$

мы можем задать метрику

$$g^i_j = \partial_j \partial^{\bar{i}} K = \frac{\delta^i_j}{1 - \xi^k \bar{\xi}_k} - \frac{\xi^i \bar{\xi}_j}{\left(1 - \xi^k \bar{\xi}_k\right)^2}\,, \qquad (g^{-1})^i_j = \left(1 - \xi^k \bar{\xi}_k\right)\left(\delta^i_j + \xi^i \bar{\xi}_j\right), \tag{A.6}$$

и калибровочные связности

$$A_i = -\,i\partial_i K = \frac{i\bar{\xi}_i}{1 - \xi^k \bar{\xi}_k}\,, \quad \bar{A}^i = i\partial^{\bar{i}} K = \frac{i\xi^i}{1 - \xi^k \bar{\xi}_k}\,, \qquad \bar{A}^i = -\overline{(A_i)}. \tag{A.7}$$

Тогда лагранжиан (A.4) можно переписать в виде

$$\mathcal{L} = g^i_j \dot{\bar{\xi}}_i \dot{\xi}^j + \kappa\left(\dot{\xi}^i A_i + \dot{\bar{\xi}}_i \bar{A}^i\right). \tag{A.8}$$

Действительный параметр κ является аналогом величины напряжённости однородного магнитного поля. Импульсы, канонически сопряженные переменным ξ^i и $\bar{\xi}_i$, определены выражениями

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} = -g^k_i \dot{\bar{\xi}}_k + \kappa A_i, \qquad \bar{\pi}^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\xi}}_i} = g^i_k \dot{\xi}^k + \kappa \bar{A}^i. \tag{A.9}$$

Тогда гамильтониан записывается в виде

$$H = \left(g^{-1}\right)^i_j \left(\bar{\pi}^j - \kappa \bar{A}^j\right)\left(\pi_i - \kappa A_i\right). \tag{A.10}$$

Явные выражения для сохраняющихся зарядов Нётер, соответствующих нечётным $SU(2|1)$ преобразованиям (A.1), имеют вид

$$Q_i = -\,\pi_i + \bar{\xi}_i \bar{\xi}_k \bar{\pi}^k - i\kappa\,\bar{\xi}_i\,, \qquad Q^{\dagger i} = \bar{\pi}^i + \xi^i \xi^k \pi_k + i\kappa\,\xi^i. \tag{A.11}$$

A.1. Каноническое квантование

Выполняя стандартную замену

$$\pi_i \to -i\partial_i, \qquad \bar{\pi}^i \to -i\partial^{\bar{i}}\,, \tag{A.12}$$

мы получаем квантовый гамильтониан в виде

$$H = \frac{1}{2}\left(g^{-1}\right)^i_j \left[\nabla^{(\kappa)}_i,\ \nabla^{(\kappa)\bar{j}}\right] = \left(g^{-1}\right)^i_j \nabla^{(\kappa)}_i \nabla^{(\kappa)\bar{j}} - 2\kappa\,. \tag{A.13}$$

Здесь «полуковариантные» производные $\nabla^{(\kappa)\bar{j}}$, $\nabla^{(\kappa)}_i$,

$$\nabla^{(\kappa)}_i = \partial_i + \frac{\kappa\bar{\xi}_i}{1 - \xi^k \bar{\xi}_k}\,, \qquad \nabla^{(\kappa)\bar{j}} = \partial^{\bar{j}} + \frac{\kappa\xi^j}{1 - \xi^k \bar{\xi}_k}\,, \tag{A.14}$$

удовлетворяют следующим антикоммутационным соотношениям:

$$\left\{\nabla^{(\kappa)}_i,\ \nabla^{(\kappa)}_j\right\} = 0\,, \quad \left\{\nabla^{(\kappa)\bar{i}},\ \nabla^{(\kappa)\bar{j}}\right\} = 0\,, \quad \left\{\nabla^{(\kappa)}_i, \nabla^{(\kappa')\bar{j}}\right\} = (\kappa + \kappa')\, g^j_i\,. \tag{A.15}$$

Квантовые $SU(2|1)$ генераторы могут быть получены из классических выражений (А.11):

$$
\begin{aligned}
&Q_i = -\,\partial_i + \bar\xi_i\bar\xi_j\partial^{\bar j} + \kappa\,\bar\xi_i\,, \qquad Q^{\dagger i} = -\,\partial^{\bar i} - \xi^i\xi^j\partial_j + \kappa\,\xi^i, \\
&J_i^j = \bar\xi_i\,\frac{\partial}{\partial\bar\xi_j} - \xi^j\,\frac{\partial}{\partial\xi^i} - \frac{\delta_i^j}{2}\left(\bar\xi_k\,\frac{\partial}{\partial\bar\xi_k} - \xi^k\,\frac{\partial}{\partial\xi^k}\right), \quad F = \frac{1}{2}\left(\bar\xi_k\,\frac{\partial}{\partial\bar\xi_k} - \xi^k\,\frac{\partial}{\partial\xi^k}\right) + 2\kappa\,. \qquad \text{(А.16)}
\end{aligned}
$$

Используя явный вид (А.13) для H, можно проверить, что $SU(2|1)$ генераторы (А.16) действительно коммутируют с гамильтонианом. Операторы Казимира (Б.1) и (Б.2), для реализации (А.16), можно выразить через гамильтониан (А.13) в виде

$$
C_2 = H + 4\kappa^2, \qquad C_3 = 6\kappa H - 12\kappa + 2\kappa\,(2\kappa - 1)\,(4\kappa - 1)\,. \qquad \text{(А.17)}
$$

В следующем разделе мы построим полный набор волновых суперфункций и найдём соответствующие энергетические уровни.

А.2. Волновые функции и энергетический спектр

Низший уровень Ландау $\ell = 0$ (вакуум) с волновой функцией Ψ_0 определяется условием киральности (см. [33])

$$
\nabla^{(\kappa)\bar j}\Psi_0 = 0 \quad \to \quad \Psi_0 = \frac{1}{\left(1 - \xi^k\bar\xi_k\right)^{\kappa}}\,\Omega_0(\xi)\,, \qquad \text{(А.18)}
$$

где аналитическая волновая функция определяется разложением

$$
\Omega_0(\xi) = c^0 + \xi^i\,c_i^0 + \xi^i\xi^k\,c_{ik}^0\,. \qquad \text{(А.19)}
$$

Волновые суперфункции[1], соответствующие возбужденным уровням Ландау, можно построить действием ковариантных $\nabla^{(\kappa')}$ на киральные суперфункции, которые должны иметь соответствующие внешние $SU(2)$ индексы. Это следует из требования, что полная волновая функция является $SU(2)$ синглетом. Волновая суперфункция для $\ell = 1$ определяется как

$$
\Psi_1 = \nabla_k^{(\kappa-1)}\Phi^k, \qquad \text{(А.20)}
$$

где Φ^k является киральной суперфункцией в фундаментальном представлении $U(2)$:

$$
\nabla^{(\kappa)\bar j}\Phi^k = 0 \quad \to \quad \Phi^k = \frac{1}{\left(1 - \xi^k\bar\xi_k\right)^{\kappa}}\,\Omega^k(\xi)\,. \qquad \text{(А.21)}
$$

---

[1] Преобразования компонент волновой суперфункции Ψ можно найти из её преобразования,

$$
\delta\Psi(\xi,\bar\xi) = \left(\epsilon^k Q_k + \bar\epsilon_k Q^{\dagger k}\right)\Psi(\xi,\bar\xi)\,,
$$

которое полностью определяется квантовыми суперзарядами (А.16).

Второй уровень Ландау задаётся волновой функцией

$$\Psi_2 = \nabla_i^{(\kappa-1)}\nabla_k^{(\kappa+1)}\Phi^{[ik]}, \tag{A.22}$$

где $\Phi^{[ik]}$ – киральная суперфункция. Она выражается через голоморфную суперфункцию $\Omega^{[ik]}(\xi)$ таким же образом, как и в (A.18) и (A.21). Так как невозможно определить антисимметричный тензор более высокого ранг, чем для этого уровня, то этот уровень является последним в спектре.

Уровни Ландау соответствуют следующим собственным значениям:

$$H\Psi_0 = -2\kappa\Psi_0\,, \qquad H\Psi_1 = -\Psi_1\,, \qquad H\Psi_2 = 2\kappa\Psi_2\,. \tag{A.23}$$

Требуя, что энергия возбужденных уровней Ландау не превышает энергии низшего уровня, мы должны ограничить κ значениями

$$\kappa \geqslant 1/2\,. \tag{A.24}$$

Согласно (A.17), мы можем найти соответствующие собственные значения операторов Казимира C_2 и C_3:

$$\begin{aligned}
&C_2 = 2\kappa\,(2\kappa-1)\,, \qquad C_3 = 2\kappa\,(2\kappa-1)\,(4\kappa-1)\,, \qquad \ell = 0\,,\\
&C_2 = (2\kappa+1)\,(2\kappa-1)\,, \qquad C_3 = 4\kappa\,(2\kappa-1)\,(2\kappa+1)\,, \qquad \ell = 1\,,\\
&C_2 = 2\kappa\,(2\kappa+1)\,, \qquad C_3 = 2\kappa\,(2\kappa+1)\,(4\kappa+1)\,, \qquad \ell = 2\,.
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Эти значения можно представить общей формулой, приведённой в (Б.3), как

$$\ell = 0: \qquad \lambda \;= \frac{1}{2}\,, \quad \beta = \frac{4\kappa-1}{2}\,, \tag{A.26}$$

$$\ell = 1: \qquad \lambda \;= 1\,, \quad \beta = 2\kappa\,, \tag{A.27}$$

$$\ell = 2: \qquad \lambda \;= \frac{1}{2}\,, \quad \beta = \frac{4\kappa+1}{2}\,. \tag{A.28}$$

Для значений $\kappa > 1/2$ мы имеем дело с типическими $SU(2|1)$ представлениями, т. е. операторы Казимира имеют ненулевые собственные значения. При специальном значении $\kappa = 1/2$ собственные значения (A.25) для уровней Ландау $\ell = 0$ и $\ell = 1$ равны нулю. Таким образом, при $\kappa = 1/2$ все состояния на этих уровнях Ландау должны расщепиться на неприводимые атипические $SU(2|1)$ представления.

Приложение Б

$SU(2|1)$ представления

Конечномерные $SU(2|1)$ представления [59] характеризуются параметрами λ и β. Параметр λ («старший вес») – положительное полуцелое или целое число, и произвольное вещественное число β связано с собственными значениями $U(1)_{\rm int}$ генератора $\tilde{H}$ из (1.1). Операторы Казимира супералгебры (1.1) определяются следующим образом:

$$m^2 C_2 = \tilde{H}^2 - \frac{m^2}{2}\, I^i_j I^j_i + \frac{m}{4}\left[Q^i, \bar{Q}_i\right], \tag{Б.1}$$

$$m^3 C_3 = \frac{m^2}{2}\,(1 + 2C_2)\,\tilde{H} - \frac{m}{8}\left[m I^i_k - \delta^i_k\,\tilde{H}\right]\left[Q^k, \bar{Q}_i\right]. \tag{Б.2}$$

Собственные значения этих операторов Казимира можно записать в виде

$$C_2 = \beta^2 - \lambda^2, \qquad C_3 = \beta\, C_2\,. \tag{Б.3}$$

Ненулевые значения операторов Казимира определяют типические представления $SU(2|1)$. В случае $|\beta| = \lambda$, операторы Казимира имеют нулевые собственные значения и $SU(2|1)$ представления становятся атипическими. Типические и атипические представления имеют размерности 8λ и $4\lambda + 1$, соответственно. Фундаментальное представление $SU(2|1)$ является атипическим и соответствует выбору $|\beta| = \lambda = 1/2$.

Список публикаций по теме диссертации

A1. M. Goykhman, E. Ivanov, and S. Sidorov, "Super Landau Models on Odd Cosets," *Phys. Rev.* **D87**, (2013) 025026, `arXiv:1208.3418 [hep-th]`.

A2. E. Ivanov and S. Sidorov, "Deformed Supersymmetric Mechanics," *Class. Quant. Grav.* **31** (2014) 075013, `arXiv:1307.7690 [hep-th]`.

A3. E. Ivanov and S. Sidorov, "Super Kähler oscillator from SU(2|1) superspace," *J. Phys.* **A47** (2014) 292002, `arXiv:1312.6821 [hep-th]`.

A4. S. Sidorov, "Deformed $\mathcal{N} = 4$, d = 1 supersymmetry," *Phys. Part. Nucl. Lett.* **11**, (2014) 971–973.

A5. E. Ivanov and S. Sidorov, "New Type of $\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric Mechanics," *Springer Proc. Math. Stat.* **111** (2014) 51–66.

A6. E. Ivanov and S. Sidorov, "New type of $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric quantum mechanics," *AIP Conf. Proc.* **1606** (2014) 374–385.

A7. E. Ivanov, S. Sidorov, and F. Toppan, "Superconformal mechanics in SU(2|1) superspace," *Phys. Rev.* **D91**, (2015) 085032, `arXiv:1501.05622 [hep-th]`.

A8. E. Ivanov and S. Sidorov, "SU(2|1) mechanics and harmonic superspace," `arXiv:1507.00987 [hep-th]`.

Список литературы

1. K. Becker, M. Becker, and J. Schwarz, *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction.* Cambridge University Press, 2006.
2. E. Witten, “Dynamical Breaking of Supersymmetry,” *Nucl. Phys.* **B188** (1981) 513.
3. E. Witten, “Constraints on Supersymmetry Breaking,” *Nucl. Phys.* **B202** (1982) 253.
4. S. Fedoruk, E. Ivanov, and O. Lechtenfeld, “Superconformal Mechanics,” *J. Phys.* **A45** (2012) 173001, `arXiv:1112.1947 [hep-th]`.
5. S. Bellucci, A. Galajinsky, E. Ivanov, and S. Krivonos, “AdS(2) / CFT(1), canonical transformations and superconformal mechanics,” *Phys. Lett.* **B555** (2003) 99–106, `arXiv:hep-th/0212204`.
6. E. Ivanov, S. Krivonos, and O. Lechtenfeld, “N=4, d = 1 supermultiplets from nonlinear realizations of $D(2,1;\alpha)$,” *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 1031–1050, `arXiv:hep-th/0310299`.
7. S. Bellucci, A. Beylin, S. Krivonos, A. Nersessian, and E. Orazi, “N=4 supersymmetric mechanics with nonlinear chiral supermultiplet,” *Phys. Lett.* **B616** (2005) 228–232, `arXiv:hep-th/0503244`.
8. F. Delduc and E. Ivanov, “Gauging N=4 Supersymmetric Mechanics,” *Nucl. Phys.* **B753** (2006) 211–241, `arXiv:hep-th/0605211`.
9. E. Ivanov, “Nonlinear (4, 8, 4) Multiplet of N=8, d=1 Supersymmetry,” *Phys. Lett.* **B639** (2006) 579–585, `arXiv:hep-th/0605194`.
10. E. Ivanov and O. Lechtenfeld, “N=4 supersymmetric mechanics in harmonic superspace,” *JHEP* **09** (2003) 073, `arXiv:hep-th/0307111`.
11. E. Ivanov and J. Niederle, “Bi-Harmonic Superspace for N=4 Mechanics,” *Phys. Rev.* **D80** (2009) 065027, `arXiv:0905.3770 [hep-th]`.
12. S. J. Gates, Jr. and L. Rana, “Ultramultiplets: A New representation of rigid 2-d, N=8 supersymmetry,” *Phys. Lett.* **B342** (1995) 132–137, `arXiv:hep-th/9410150`.
13. A. Pashnev and F. Toppan, “On the classification of N extended supersymmetric quantum mechanical systems,” *J. Math. Phys.* **42** (2001) 5257–5271, `arXiv:hep-th/0010135`.

14. S. Bellucci, S. Krivonos, A. Marrani, and E. Orazi, "'Root' action for N=4 supersymmetric mechanics theories," *Phys. Rev.* **D73** (2006) 025011, `arXiv:hep-th/0511249`.

15. K. Hasebe, "Supersymmetric quantum Hall effect on fuzzy supersphere," *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 206802, `arXiv:hep-th/0411137`.

16. K. Hasebe, "Quantum Hall liquid on a noncommutative superplane," *Phys. Rev.* **D72** (2005) 105017, `arXiv:hep-th/0503162`.

17. Z. Ezawa, *Quantum Hall Effects: Field Theoretical Approach and Related Topics*. World Scientific, 2000.

18. G. Festuccia and N. Seiberg, "Rigid Supersymmetric Theories in Curved Superspace," *JHEP* **06** (2011) 114, `arXiv:1105.0689 [hep-th]`.

19. T. T. Dumitrescu, G. Festuccia, and N. Seiberg, "Exploring Curved Superspace," *JHEP* **08** (2012) 141, `arXiv:1205.1115 [hep-th]`.

20. I. B. Samsonov and D. Sorokin, "Superfield theories on S^3 and their localization," *JHEP* **04** (2014) 102, `arXiv:1401.7952 [hep-th]`.

21. I. B. Samsonov and D. Sorokin, "Gauge and matter superfield theories on S^2," *JHEP* **09** (2014) 097, `arXiv:1407.6270 [hep-th]`.

22. B. Assel, D. Cassani, L. Di Pietro, Z. Komargodski, J. Lorenzen, and D. Martelli, "The Casimir Energy in Curved Space and its Supersymmetric Counterpart," *JHEP* **07** (2015) 043, `arXiv:1503.05537 [hep-th]`.

23. A. V. Smilga, "Weak supersymmetry," *Phys. Lett.* **B585** (2004) 173–179, `arXiv:hep-th/0311023`.

24. D. Robert and A. V. Smilga, "Supersymmetry vs ghosts," *J. Math. Phys.* **49** (2008) 042104, `arXiv:math-ph/0611023`.

25. S. Bellucci and A. Nersessian, "(Super)oscillator on CP**N and constant magnetic field," *Phys. Rev.* **D67** (2003) 065013, `arXiv:hep-th/0211070`. [Erratum: Phys. Rev.D71,089901(2005)].

26. S. Bellucci and A. Nersessian, "Supersymmetric Kahler oscillator in a constant magnetic field," in *International Seminar on Supersymmetries and Quantum Symmetries SQS 03 Dubna, Russia, July 24-29, 2003.* 2004. `arXiv:hep-th/0401232`.

27. G. Papadopoulos, “New potentials for conformal mechanics,” *Class. Quant. Grav.* **30** (2013) 075018, `arXiv:1210.1719 [hep-th]`.

28. V. de Alfaro, S. Fubini, and G. Furlan, “Conformal Invariance in Quantum Mechanics,” *Nuovo Cim.* **A34** (1976) 569.

29. E. Ivanov, S. Krivonos, and O. Lechtenfeld, “New variant of N=4 superconformal mechanics,” *JHEP* **03** (2003) 014, `arXiv:hep-th/0212303`.

30. N. L. Holanda and F. Toppan, “Four types of (super)conformal mechanics: D-module reps and invariant actions,” *J. Math. Phys.* **55** (2014) 061703, `arXiv:1402.7298 [hep-th]`.

31. S. Bellucci and S. Krivonos, “Potentials in N=4 superconformal mechanics,” *Phys. Rev.* **D80** (2009) 065022, `arXiv:0905.4633 [hep-th]`.

32. E. Ivanov, L. Mezincescu, and P. K. Townsend, “A Super-Flag Landau model,” `arXiv:hep-th/0404108`.

33. E. Ivanov, L. Mezincescu, A. Pashnev, and P. K. Townsend, “Odd coset quantum mechanics,” *Phys. Lett.* **B566** (2003) 175–182, `arXiv:hep-th/0301241`.

34. A. Beylin, T. L. Curtright, E. Ivanov, L. Mezincescu, and P. K. Townsend, “Unitary Spherical Super-Landau Models,” *JHEP* **10** (2008) 069, `arXiv:0806.4716 [hep-th]`.

35. V. Bychkov and E. Ivanov, “N=4 Supersymmetric Landau Models,” *Nucl. Phys.* **B863** (2012) 33–64, `arXiv:1202.4984 [hep-th]`.

36. S. M. Kuzenko and D. Sorokin, “Superconformal structures on the three-sphere,” *JHEP* **10** (2014) 80, `arXiv:1406.7090 [hep-th]`.

37. A. S. Galperin, E. A. Ivanov, V. I. Ogievetsky, and E. S. Sokatchev, *Harmonic Superspace*. Cambridge University Press, 2001.

38. A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitsyn, V. Ogievetsky, and E. Sokatchev, “Unconstrained N=2 Matter, Yang-Mills and Supergravity Theories in Harmonic Superspace,” *Class. Quant. Grav.* **1** (1984) 469–498. [Erratum: Class. Quant. Grav.2,127(1985)].

39. A. Galperin, E. Ivanov, and O. Ogievetsky, “Harmonic space and quaternionic manifolds,” *Annals Phys.* **230** (1994) 201–249, `arXiv:hep-th/9212155`.

40. E. A. Ivanov, S. O. Krivonos, and V. M. Leviant, “Geometric Superfield Approach to Superconformal Mechanics,” *J. Phys.* **A22** (1989) 4201.

41. E. A. Ivanov, S. O. Krivonos, and A. I. Pashnev, “Partial supersymmetry breaking in N=4 supersymmetric quantum mechanics,” *Class. Quant. Grav.* **8** (1991) 19–40.

42. V. Berezovoi and A. Pashnev, “On the structure of the N=4 supersymmetric quantum mechanics in D = 2 and D = 3,” *Class. Quant. Grav.* **13** (1996) 1699, `arXiv:hep-th/9506094`.

43. S. Bellucci and A. Nersessian, “A Note on N=4 supersymmetric mechanics on Kahler manifolds,” *Phys. Rev.* **D64** (2001) 021702, `arXiv:hep-th/0101065`.

44. A. V. Smilga, “How to quantize supersymmetric theories,” *Nucl. Phys.* **B292** (1987) 363.

45. E. A. Ivanov and A. V. Smilga, “Dirac Operator on Complex Manifolds and Supersymmetric Quantum Mechanics,” *Int. J. Mod. Phys.* **A27** (2012) 1230024, `arXiv:1012.2069 [hep-th]`.

46. F. Delduc and E. Ivanov, “Gauging N=4 supersymmetric mechanics II: (1,4,3) models from the (4,4,0) ones,” *Nucl. Phys.* **B770** (2007) 179–205, `arXiv:hep-th/0611247`.

47. F. Delduc and E. Ivanov, “The Common origin of linear and nonlinear chiral multiplets in N=4 mechanics,” *Nucl. Phys.* **B787** (2007) 176–197, `arXiv:0706.0706 [hep-th]`.

48. F. Delduc and E. Ivanov, “N = 4 mechanics of general (4, 4, 0) multiplets,” *Nucl. Phys.* **B855** (2012) 815–853, `arXiv:1107.1429 [hep-th]`.

49. S. Fedoruk, E. Ivanov, and A. Smilga, “$\mathcal{N} = 4$ mechanics with diverse (4, 4, 0) multiplets: Explicit examples of hyper-Kähler with torsion, Clifford Kähler with torsion, and octonionic Kähler with torsion geometries,” *J. Math. Phys.* **55** (2014) 052302, `arXiv:1309.7253 [hep-th]`.

50. L. Frappat, P. Sorba, and A. Sciarrino, “Dictionary on Lie superalgebras,” `arXiv:hep-th/9607161`.

51. L. Frappat, A. Sciarrino, and P. Sorba, *Dictionary on Lie Algebras and Superalgebras*. No. v. 1 in Dictionary on Lie Algebras and Superalgebras. Academic Press, 2000.

52. E. A. Ivanov and A. S. Sorin, “The Structure Of Representations Of Conformal Supergroup In The Osp(1,4) Basis,” *Teor. Mat. Fiz.* **45** (1980) 30–45. [Theor. Math. Phys.45,862(1980)].

53. P. S. Howe and P. K. Townsend, “Chern-Simons quantum mechanics,” *Class. Quant. Grav.* **7** (1990) 1655–1668.

54. T. J. Hollowood and J. L. Miramontes, “The $AdS_5 \times S_5$ Semi-Symmetric Space Sine-Gordon Theory,” *JHEP* **05** (2011) 136, `arXiv:1104.2429 [hep-th]`.

55. M. Goykhman and E. Ivanov, “Worldsheet Supersymmetry of Pohlmeyer-Reduced $AdS_n \times S^n$ Superstrings,” *JHEP* **09** (2011) 078, `arXiv:1104.0706 [hep-th]`.

56. D. M. Schmidtt, “Supersymmetry Flows, Semi-Symmetric Space Sine-Gordon Models And The Pohlmeyer Reduction,” *JHEP* **03** (2011) 021, `arXiv:1012.4713 [hep-th]`.

57. L. Landau, “Diamagnetismus der Metalle,” *Zeitschrift für Physik* **64** no. 9-10, (1930) 629–637.

58. F. D. M. Haldane, “Fractional quantization of the Hall effect: A Hierarchy of incompressible quantum fluid states,” *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 605–608.

59. M. Scheunert, W. Nahm, and V. Rittenberg, “Irreducible Representations of the OSP(2,1) and SPL(2,1) Graded Lie Algebras,” *J. Math. Phys.* **18** (1977) 155.