

ОТЗЫВ

Научного руководителя на диссертационную работу Петросяна Давида Рафаеловича «Вырожденные суперинтегрируемые системы на трехмерных пространствах постоянной отрицательной кривизны», представленной на соискание ученой степени кандидата физико – математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика в диссертационный совет Д 720. 001.01 ЛТФ имени Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Исследование движения классической или квантовой частицы в поле гармонического осциллятора как и движение в поле Кеплера-Кулона на пространствах постоянной кривизны, как и в евклидовом пространстве, имеет богатую историю. Введение гиперболической геометрии в закон всемирного тяготения можно найти уже в работах Лобачевского, который определил не только вид кеплеровского потенциала в виде гиперболического котангенса но и нашел траектории классического движения. Обобщение кеплеровского движения на сферическое или эллиптическое пространство сделано в работах Киллинга (1885) и Неймана (1886) где в качестве потенциала Кеплера-Кулона выступает тригонометрический котангенс.

Создание общей теории относительности и квантовой механики в 20-ом столетии стимулировали развитие теории интегрируемых и суперинтегрируемых систем (как теперь называются системы со скрытой симметрией) в римановых и псевдоримановых пространствах. Одними из первых, Шредингер (1940) и почти одновременно Инфельд (1941), методом факторизации, решили задачу об «атоме водорода» соответственно, на трехмерной сфере (вселенная Эйнштейна) и в трехмерном пространстве Лобачевского (модель открытой вселенной). Следующие продвижение в теории суперинтегрируемых систем связано с именами Хиггса, который объяснил случайное вырождение спектра энергии и нашел алгебру симметрии (так называемую алгебру Хиггса) атома водорода на сфере и белорусских ученых Богуша, Курочкина и Отчика которые решили аналогичную задачу для атома водорода на трехмерном гиперболоиде. В дальнейшем особое внимание многих исследователей (Винтернитц, Гроше, Даскалояннис, Калнинс, Миллер, Сисакян, и др.) привлекает задача классификации суперинтегрируемых систем, основанная на геометрии пространств постоянной кривизны, а также специальных пространств непостоянной кривизны допускающих максимальное число интегралов движения (пространства Дарбу). Решение этих задач значительно расширяют множество известных интегрируемых (суперинтегрируемых) систем, позволяет опробовать на них известные методы, широко используемые в классической и квантовой механике, такие как метод разделения переменных, метод интегрирования по траекториям, методы квантования Шредингера и Титчмарша и др.

В последнее десятилетие среди математиков и физиков вновь отмечается большой интерес к классическим и квантовым суперинтегрируемым моделям, связанный с открытием нового класса двумерных и многомерных потенциалов типа Эванса-Верье, Трембляя-Турбинера-Винтернитца и Пост-Винтернитца. В основе данных моделей лежат сингулярные суперинтегрируемые расширения потенциала Кеплера-Кулона и гармонического осциллятора.

Задача которая была поставлена перед Давидом Петросяном касается расширения класса известных трехмерных суперинтегрируемых систем на два гиперболических пространства отрицательной кривизны, а именно однополостный гиперболоид (мнимое пространство Лобачевского или пространство де Ситтера) и гиперболоид с группой изометрии $SO(2,2)$ (пространство анти де Ситтера). Выбранные пространства отрицательной кривизны являются наиболее сложными с точки зрения применения метода разделения переменных в уравнении

Гамильтона-Якоби и Шредингера. Как показано в недавних работах Калнинса и Миллера показано, что существует более 70 ортогональных систем координат допускающих разделение переменных в уравнении Гельмгольца, при этом многие из них не покрывают полностью поверхность однополостного и $SO(2,2)$ гиперболоидов. С другой стороны, как известно оба пространства играют важную роль в современной физике – являются моделями для релятивистского пространства времени постоянной кривизны, используются для решения уравнений Янга-Милса-Хиггса, применяются в теории рассеяния при описании нефизических областей для импульсов, при квантовании когерентных состояний и др.

Отправной точкой для исследования более сложных суперинтегрируемых моделей в диссертации были выбраны потенциалы Кеплера-Кулона и гармонического осциллятора - так называемые вырожденные суперинтегрируемые системы (то есть зависящие только от одной константы связи).

В первой главе, впервые в литературе, на гиперболоиде $SO(2,2)$ определены две классические задачи об гармоническом осцилляторе и движении в поле Кеплера-Кулона. Показано, что вместо обычного углового момента сохраняется Лоренцовский момент, квадрат которого может принимать как положительные так и отрицательные значения. Далее построены аналоги вектора Рунге-Ленца-Лапласа и тензор Демкова, доказано, что обе задачи принадлежат к классу максимально суперинтегрируемых систем и найдена кубическая алгебра симметрии (алгебра Хиггса). В рамках уравнения Гамильтона-Якоби построены траектории движения зависящие от псевдо-сферических координат. Доказано обобщение теоремы Бертрана для движение в поле гармонического осциллятора и задачи Кеплера на гиперболоиде $SO(2,2)$.

Во второй главе рассмотрена задача Шредингера для кулоновского потерциала и потенциала гармонического осциллятора. Показано что данные задачи в псевдо-сферической системе координат при положительных значениях квадрата Лоренцовского момента обладают как дискретным так и непрерывным спектром, причем дискретный спектр энергий определяется конечным числом связанных состояний и не зависит от угловых квантовых чисел. Тем самым доказано наличие случайного вырождения и алгебры динамической симметрии. Далее построены псевдо-сферические ортонормированные волновые функции. Для задачи об гармоническом осцилляторе найдены две дополнительные ортогональные системы координат, а именно, эквидистантная и цилиндрическая, покрывающих полностью поверхность гиперболоида и допускающих разделение переменных в уравнении Шредингера. Показано, что в одной из них диагонализуются одна из компонент тензора Демкова. Вычислены шредингеровские волновые функции, и найден полный (бесконечный) спектр энергий ограниченный по главному квантовому числу сверху константой связи и неограниченный снизу. Вычислены коэффициенты межбазисных разложений и показано, что они выражаются через известные полиномы дискретной переменной – полиномы Хана.

Третья глава посвящена решению классической (в рамках уравнения Гамильтона-Якоби) и квантовой задачи Кеплера-Кулона на однополостном гиперболоиде и квантовой задачи о гармоническом осцилляторе на двухполостном гиперболоиде. Найдены классические траектории движения в зависимости от квадрата углового момента и энергии. Показано, что все конечные орбиты замкнуты. С помощью известного подхода Титчмарша, решена задача о разложении произвольной функции на однополостном гиперболоиде по полной системе псевдо-сферических волновых функций. Тем самым построена ортонормированная система псевдо-сферических волновых функций как для случая дискретного так и непрерывного спектров. Показано, что существует аналог параболической системы координат, так называемая эллиптически-параболическая система координат, также допускающая разделение переменных в уравнении Шредингера для кулоновского потенциала. Построены волновые функции дискретного спектра в эллиптически-параболической системе координат, включающие как дискретные так и непрерывные значения константы разделения. Наконец решена задача о смешанных межбазисных

разложениях для гармонического осциллятора на двухполостном гиперboloиде. Показано, что они выражаются через полиномы Вильсона.

В целом диссертация Д.Р.Петросяна Рафеловича «Вырожденные суперинтегрируемые системы на трехмерных пространствах постоянной отрицательной кривизны» представляет собой законченное теоретическое исследование по вырожденным суперинтегрируемым системам в конфигурационном пространстве однополостный и $SO(2,2)$ гиперboloиды.

Результаты диссертации опубликованы в ведущих рецензируемых международных журналах и представлялись на международных конференциях.

При работе над своей диссертацией Д.Р.Петросян проявил большое трудолюбие, прекрасное знание основ классической и квантовой механики необходимых при решении поставленных перед ним задач, хорошее умение пользоваться необходимой литературой и завидное упорство по приодалению возникающих в течении работы трудностей.

Диссертация Петросяна Давида Рафеловича удовлетворяет всем требованиям предъявляемым к кандидатским диссертациям, а он сам безусловно заслуживает присвоения степени кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель

Г.С.Погосян

Доктор физ.-мат. наук
Директор Центра Перспективных Исследований
Ереванского Государственного Университета

Подпись Погосяна Г.С. заверяю
Декан физического факультета
Профессор Авакян Р.М.



22.03.2016г.