ОТЗЫВ
официального оппонента о диссертации
Петросяна Давида Рафаеловича
„Вырожденные суперинтегрируемые системы на трехмерных пространствах отрицательной кривизны“,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.04.02 – теоретическая физика.

Диссертация Д.Р. Петросяна посвящена изучению систем гармонического осциллятора и Кеплера-Кулона на трехмерных гиперболоидах в четырехмерном объемлющем пространстве, на поверхности которых реализуется геометрия пространств с постоянной кривизной: $(1+2)$ анти де Ситтера и $(1+2)$ де Ситтера. В работе рассматриваются как классический вариант данных задач, описываемый уравнениями Гамильтона-Якоби, так и квантовый случай, описываемый уравнениями Шредингера. Для классического случая получены уравнения движения и траектории движения, а в квантовом варианте вычислены волновые функции и получены спектры энергии.

Общая характеристика работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и списка литературы. Объем диссертации составляет 119 страниц а списке литературы насчитывает 125 ссылок, включая работы автора диссертации. Во введении представлен исторический и литературный обзор работ связанных с изучением суперинтегрируемых систем в пространствах разной размерности и кривизны. Дается обоснование актуальности исследования, приводится постановка целей и задач диссертации, также краткий обзор содержания работы.

В первой главе исследованы классические задачи систем гармонического осциллятора и Кеплера-Кулона на $SO(2,2)$ гиперболоиде. В начале главы обсуждены геометрия пространства, группа изометрии пространства и генераторы алгебры, представлены константы движения. Далее определены потенциалы гармонического осциллятора и системы Кеплера-Кулона и решаются соответствующие уравнения Гамильтона-Якоби, методом разделения переменных. В результате получены уравнения движения и построены траектории движения для разных значений аналога момента импульса и энергии. Следует отметить, что для связанных состояний траектории получаются замкнутыми и периодичными, а для системы Кеплера-Кулона выполняются аналоги трех законов Кеплера. Определены дополнительные константы движения, аналоги тензора Демкова-Фрадкина и вектора Рунге-Ленца и построены алгебры симметрии.

Во второй главе исследованы квантовые аналоги задач рассмотренных в первой главе. Определены уравнения Шредингера для соответствующих систем и получены ортонормированные волновые функции для связанных и не связанных состояний. Отметим, что для осциллятора это сделано в более чем в одной системе координат. Вычислены спектры энергий и для дискретного спектров показано, что уровни конечно вырождены по угловому квантовому числу и бесконечно вырождены по азимутальному квантовому числу. Важно отметить, что в отличии от системы Кеплера-Кулона, для которого главное квантовое число ограничено как сверху так и снизу, для системы гармонического осциллятора главное квантовое число ограничено лишь сверху и может принимать бесконечно большие отрицательные значения. Для системы гармонического осциллятора проведено разложение между волновыми функциями дискретного спектра в цилиндрических и эквидистантных координатных системах и показано что коэффициенты разложения выражаются полиномами Хана.

Третья глава начинается обсуждением системы Кеплера-Кулона на однополостном гиперболоиде $SO(3,1)$. Рассмотрены классический и квантовый случаи задачи, решены уравнения Гамильтона-Якоби и Шредингера. Для классической задачи получены уравнения движения и построены траектории для разных значений момента импульса и энергии. Для квантового случая получены ортонормированные волновые функции и спектр энергии для дискретных и непрерывных случаев, и для дискретного спектра произведено разложение между волновыми функциями в сферических и эллиптически-параболических координатных системах. В конце главы рассмотрена квантовая задача гармонического осциллятора на двухполостном гиперболоиде $SO(3,1)$ в сферических и цилиндрических координатах с получением ортонормированных волновых функций и спектра энергии. Далее произведено разложение волновых функций как для дискретного так и для непрерывного спектра, и показано что коэффициенты разложения вырождаются через полиномы Рака и Вильсона. В заключении приведены основные результаты диссертационной работы.

Научная новизна и достоверность результатов. В диссертационной работе проведено разностороннее исследование систем гармонического осциллятора и Кеплера-Кулона на трехмерных гиперболоидах с группами симметрии $SO(2,2)$ и $SO(3,1)$. Все результаты полученные в работе оригинальны и являются важными шагами изучения суперинтегрируемых систем в пространствах постоянной кривизны. Достоверность обеспечивается грамотным применением общепринятых методов математической и теоретической физики.

Результаты диссертации опубликованы в 4 статьях и еще 2 приняты на публикацию в журналах рекомендованных ВАК РФ.

Содержание автореферата корректно излагает содержание диссертации. Полученные результаты докладывались на семинарах и международных конференциях.

При оценке диссертационной работы следует отметить следующие недостатки:

1. Во введении диссертации обзор современной литературы представлен в достаточно схематичном виде.

2. В первой главе недостает исследования системы Кеплера-Кулона для случая $|z_0| < 1$, как это сделано для гармонического осциллятора.

3. Небрежно оформлен список литературы (23, 27, 43, 51, 70, 100, 105, 106, 109).

4. Трудно переоценить важность для теоретической физики точно решаемых задач, дающих полное описание системы. Точная решаемость напрямую связана с симметрией системы: чем выше симметрия, тем больше у системы интегралов движения.

В этой связи выделяются максимально симметричные пространства с постоянной кривизной (ППК). Единое описание ППК дал Р.И. Пименов (см. Литовский матем. сборник, 1966, т. 5, с. 457–486). В частности, рассмотренные в диссертации трехмерные ППК, реализуются на "сферах" $S_3(j_1, j_2) = (z_0^2 + j_1^2 z_1^2 + j_1^2 j_2^2 (z_2^2 + z_3^2) = R^2$, где $j_1 = 1, \iota_1, i,\ j_2 = 1, \iota_2, i,\ \iota_1^2 = \iota_2^2 = 0$. Параметр j_1 определяет кривизну ППК: положительную при $j_1 = 1$, отрицательную при $j_1 = i$ и нулевую при нильпотентном значении $j_1 = \iota_1$, что отвечает пределу $R \to \infty$ в обозначениях диссертанта. Параметр j_2 определяет сигнатуру метрики: $(+++)$ при $j_2 = 1$, $(+00)$ при $j_2 = \iota_2$, $(+--)$ при $j_2 = i$ — именно этот последний случай рассмотрен диссертантом. Итак, на гиперболоиде H_2^2 реализуется геометрия $S_3(1, i, 1)$ $(1 + 2)$ пространства анти де Ситтера с положительной кривизной. При $|z_0| \leq R$ описываются точки внутри светового конуса, а при $|z_0| \geq R$ — вне конуса. На гиперболоиде H_1^3 реализуется геометрия $S_3(i, i, 1)$ $(1 + 2)$ пространства де Ситтера с отрицательной кривизной. На мой взгляд, интерпретация в терминах внутренней геометрии ППК является более ясной и больше подчеркивает связи между разными ППК, которые могут быть получены из сферического пространства контракциями и аналитическими продолжениями (Н.А. Громов. Контракции и аналитические продолжения классических и квантовых групп. М.: Физматлит, 2012).

5. Интересно было бы рассмотреть данные системы при наличии электрического и магнитного полей.

Данные замечания однако не умаляют научную ценность и вышеперечисленные достоинства диссертации. Диссертационная работа Д.Р. Петросяна „Вырожденные суперинтегрируемые системы на трехмерных пространствах отрицательной кривизны“, является законченной исследовательской работой, соответствующей всем требованиям предъявляемыми ВАК РФ к кандидатским диссертациям, а его автор Д.Р. Петросян, несомненно, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика.

Официальный оппонент:
заведующий Отделом математики
Коми научного центра Уральского отделения РАН,
доктор физико-математических наук, профессор Н.А. Громов
25 мая 2016 г.

167982, г. Сыктывкар, ул. Коммунистическая, д. 24, Коми НЦ УрО РАН, Отдел математики
Громов Николай Алексеевич
Тел.: +7-(8212)215740
E-mail: gromov@dm.komisc.ru

Подпись Н.А. Громова заверяю
Ученый секретарь Коми НЦ УрО РАН
Н.В. Ладанова

26.05.2016 г