

«УТВЕРЖДАЮ»

/ Директор ФГБУ ГНЦ «Институт физики  
высоких энергий» НИЦ «Курчатовский институт»  
доктор физико-математических наук, академик РАН



Иванов С.В.

30 мая 2016 г.

### Отзыв

ведущей организации – Федерального государственного бюджетного учреждения  
«Государственного научного центра Российской Федерации Института физики высоких  
энергий» НИЦ «Курчатовский институт»

на диссертацию Петросяна Давида Рафаеловича «Вырожденные суперинтегрируемые  
системы на трёхмерных пространствах отрицательной кривизны», представленную на  
соискание ученой степени кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.04.02 – теоретическая физика.

Диссертационная работа Петросяна Д.Р. посвящена изучению свойств  
вырожденных суперинтегрируемых систем, в частности, систем типа Кеплера-Кулона и  
гармонического осциллятора, на гиперболических трёхмерных пространствах. **Целью**  
работы является исследование классических и квантовых свойств вышеупомянутых  
систем. **Актуальность** работы определяется недостаточной изученностью подобных задач  
на пространствах размерности выше двух, а также востребованностью данных моделей  
при изучении явлений в различных областях прикладной физики. **Новизна и научная**  
**ценность** диссертационной работы Петросяна Д.Р. обусловлены детальностью  
исследования систем Кеплера-Кулона и гармонического осциллятора на гиперболоидах  
 $SO(2,2)/SO(2,1)$  и  $SO(3,1)/SO(2,1)$ , на которых суперинтегрируемые системы изучены в  
гораздо меньшей степени, чем на трёхмерной сфере  $S_3$  или на плоских пространствах  $E_3$  и

$E_{2,1}$ . Достоверность и обоснованность результатов, изложенных в диссертации, обеспечивается нахождением аналитических решений возникающих уравнений с использованием современных методов математического и функционального анализа.

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и списка литературы. Во введении приведен исторический анализ проблемы исследования суперинтегрируемых систем, систематическое изучение которых началось во второй половине двадцатого века. Приведены ссылки на предыдущие работы по тематике и обсуждена связь с прикладными физическими задачами.

Первая глава посвящена изучению систем гармонического осциллятора и Кеплера-Кулона на гиперболическом пространстве  $H_2^2 = SO(2,2)/SO(2,1)$  в рамках классической механики. Методом Гамильтона-Якоби найдены соответствующие траектории для разного диапазона значений энергии  $E$  и момента импульса  $L^2$ , в том числе и для случая  $L^2 < 0$ , которое является характерным свойством пространства  $H_2^2$ . Как и в случае евклидова пространства финитные траектории являются эллипсами а движение по ним – периодическим. Автором получены выражения для дополнительных интегралов движения, вектора Рунге-Ленца и тензора Демкова-Фрадкина, и построены алгебры динамической симметрии, являющиеся кубическими алгебрами Хиггса.

Во второй главе обсуждаются задачи, рассмотренные в первой главе, но уже с точки зрения квантовой механики. Решены соответствующие уравнения Шредингера в различных координатных системах и получены ортонормированные волновые функции. Найдены энергетические спектры и показано, что в отличии от системы Кеплера-Кулона, гармонический осциллятор имеет бесконечное число связанных состояний (главное квантовое число неограничено снизу). Для системы гармонического осциллятора автором также найдено межбазисное разложение дискретных волновых функций для случая сферических и цилиндрических координатных систем.

В третьей главе автор переходит к рассмотрению системы Кеплера-Кулона на однополостном гиперболическом пространстве  $H_1^3 = SO(3,1)/SO(2,1)$ . Для классической задачи, как и выше, решается уравнение Гамильтона-Якоби, находятся траектории и, в частности, демонстрируется, что финитные траектории замкнуты и движение по ним

является периодическим. Для квантового случая найдены волновые функции и спектр энергии. Для волновых функций дискретного спектра построено межбазисное разложение волновых функций для сферических и эллипико-параболических координатных систем. Остальная часть третьей главы посвящена изучению квантового гармонического осциллятора на двухполостном гиперboloиде  $H_3^1 = SO(3,1)/SO(3)$ . Уравнение Шредингера решено в сферических и цилиндрических координатных системах, и найдено межбазисное разложение волновых функций для всех значений энергии.

В заключении приводится краткий обзор полученных в работе результатов, а в приложении – часто используемые или слишком громоздкие для основного текста математические формулы.

В качестве недостатков диссертации Петросяна Д.Р. можно отметить следующее:

- В работе отсутствует сравнение с результатами, полученными при исследовании тех же систем в других трехмерных пространствах постоянной кривизны.
- Представляется также недостаточным анализ возможных применений полученных результатов к прикладным физическим задачам.

Сделанные замечания имеют стилистический характер и не принципиальны. Диссертация Петросяна Д.Р. представляет собой законченную научную работу, выполненную на высоком научном уровне. На основе результатов, представленных в диссертации, опубликованы четыре статьи и еще две приняты с опубликованию в журналах из списка, одобренного ВАК РФ, и индексируемых в системах World of Science и Scopus. Автореферат полно и корректно отражает содержание диссертации.

Диссертационная работа Петросяна Давида Рафаеловича «Вырожденные суперинтегрируемые системы на трёхмерных пространствах отрицательной кривизны» выполнена в соответствии со всеми требованиями, предъявляемыми ВАК РФ к кандидатским диссертациям, а ее автор бесспорно заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика.

Результаты диссертации Петросяна Д.Р. обсуждены и одобрены на семинаре Отдела теоретической физики ФГБУ ГНЦ ИФВЭ НИЦ «Курчатовский институт» 17 мая 2016 года.

Отзыв составил главный научный сотрудник  
Отдела теоретической физики ФГБУ ГНЦ ИФВЭ

НИЦ «Курчатовский институт»,  
доктор физико-математических наук

А.В. Разумов

Федеральное государственное бюджетное учреждение «Государственный научный центр Российской Федерации Институт физики высоких энергий» НИЦ «Курчатовский институт»

142281, Россия, Московская область, город Протвино, площадь Науки, дом 1

Телефон: (4967) 71-36-23

E-mail: Alexander.Razumov@ihep.ru

Подпись А.В. Разумова удостоверяю,  
ученый секретарь ФГБУ ГНЦ ИФВЭ  
НИЦ «Курчатовский институт»



Трохопенко Н.Н.