

РАССЕЯНИЕ АДРОНОВ
ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ
И КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОДХОД
В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В. Р. Гарсеванишвили, В. А. Матвеев,
Л. А. Слепченко

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ДУБНА

АННОТАЦИЯ

В работе дан обзор методов и некоторых результатов квази-потенциального подхода к процессам столкновения адронов при высоких энергиях.

ABSTRACT

A review of methods and some results of quasipotential approach to high-energy hadron collisions is given.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретический фундамент понимания процессов сильных взаимодействий при высоких энергиях составляют такие общие принципы квантовой теории поля, как причинность, унитарность и доказанные на их основе дисперсионные соотношения для амплитуды рассеяния [1].

На основе общих предположений об аналитичности и унитарности амплитуды рассеяния можно получить ряд строгих следствий и ограничений для физически наблюдаемых величин [2]. Изучение аналитических свойств в рамках двойного спектрального представления составляет базу для различных приближенных схем в теории сильных взаимодействий [3, 4].

Успешное применение дисперсионных соотношений послужило импульсом для фундаментальных работ по асимптотическому подходу в квантовой теории поля. Определенные предположения о характере асимптотического поведения позволяют получить ряд важных следствий, доступных экспериментальной проверке. Первое соотношение такого рода — равенство полных сечений взаимодействий частиц и античастиц при высоких энергиях [5]. На основе теоремы Фрагмена — Линделефа выведен ряд важных соотношений между сечениями различных процессов [6].

Эксперименты на современных ускорителях устанавливают ряд закономерностей во взаимодействии адронов высоких энергий. Детальный анализ данных показывает стремление полных сечений с ростом энергии к постоянному пределу. При малых углах рассеяние носит дифракционный характер, дифференциальные сечения упругих процессов характеризуются быстрым (экспоненциальным) падением с ростом квадрата переданного импульса. Результаты недавних измерений дифференциальных сечений упругого pp -рассеяния на ускорителе ИФВЭ [7] показали монотонный рост параметра наклона дифракционного пика при возрастании энергии в интервале 12—70 Гэ². Такое поведение находится в согласии с общими принципами квантовой теории поля и подтверждает идею о росте эффективного радиуса сильных взаимодействий [8]. Дифракционный характер высокоэнергетического рассеяния позволяет привлечь методы, близкие к квазиклассическим, эйкональному приближению [9], квантовомеханическому рассеянию на гладких потенциалах [10]. Было предложено много различных моделей, основанных на модификациях оптического формализма, представления прицельного параметра, многополюсных реджонных моделей [11—17].

В терминах многократного рассеяния с использованием некоторых простых предположений о динамике взаимодействия адронов получены модельные объяснения различных явлений в рассеянии на малые и большие углы: структура в угловых распределениях, характерная смена режима с ростом переданного импульса и другие. В ряде работ [18] развивается реджионная техника, обсуждается учет разрезов в комплексной l -плоскости, возникающих в результате кратного обмена полюсами Редже, в связи с различными задачами рассеяния при высоких энергиях [19].

Ниже сосредоточим наше внимание на использовании квазипотенциального описания рассеяния адронов при высоких энергиях [20—23]. Подход, развиваемый в работах [20—23], основывается на квазипотенциальном уравнении Логунова и Тавхелидзе для амплитуды рассеяния в квантовой теории поля [24, 25].

Идейно квазипотенциальный подход близок к оптической модели ядра, т. е. к рассмотрению рассеяния нуклонов на ядрах по типу рассеяния света полупроницаемой оптической средой. При этом задача рассеяния рассматривается не как проблема многих тел, а как задача движения нуклона в поле, описываемом комплексным потенциалом.

Квазипотенциальное уравнение в применении к высокоэнергетическому рассеянию адронов позволяет дать единое описание основных закономерностей рассеяния на малые и большие углы, трактовать неупругие процессы и др.

Отметим ту эвристическую роль, которую сыграл обычный потенциальный подход при изучении процессов взаимодействия адронов при высоких энергиях. В рамках теории потенциального рассеяния была сформулирована теория полюсов Редже [26], впервые указано на наличие разрезов в комплексной плоскости углового момента [27], доказаны двойные дисперсионные представления. Эйкональное представление, рассматриваемое сейчас в релятивистской теории поля [12, 28], давно знакомо в потенциальном рассеянии.

§ 1. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ И СВОЙСТВА ЛОКАЛЬНОГО КВАЗИПОТЕНЦИАЛА

Рассмотрим простейший случай рассеяния двух бесспиновых частиц равных масс. В этом случае квазипотенциальное уравнение для амплитуды рассеяния имеет вид

$$T(p, k; E) = V[(p-k)^2; E] + \int \frac{dq}{\sqrt{m^2 + q^2}} \times \\ \times \frac{V[(p-q)^2; E] T(q, k; E)}{q^2 + m^2 - E^2 - i0}, \quad (1.1)$$

где E — энергия; p , k и q — относительные импульсы системы центра инерции в начальном, конечном и промежуточном состояниях соответственно.

Физическая, релятивистски-инвариантная амплитуда определяется из условия

$$T(s, t) = 32 \pi^3 T(E; \mathbf{p}, \mathbf{k}) \Big|_{\substack{s=4(\mathbf{p}^2+m^2)=4(k^2+m^2)=4E^2 \\ t=-(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2}} \quad (1.2)$$

Уравнение (1.1) представляет собой обобщение уравнения Липмана—Швингера на случай квантовой теории поля. Однако в отличие от квантовой механики квазипотенциал V в уравнении (1.1) является, вообще говоря, комплексной функцией, параметрически зависящей от энергии. Мнимая часть квазипотенциала обусловлена неупругими процессами в системе двух частиц и является положительно определенной величиной.

Строго можно доказать, что условие положительности мнимой части квазипотенциала обеспечивает выполнение условия

$$SS^+ \leq 1 \quad (1.3)$$

для матрицы рассеяния S двух частиц [29]. Для чисто вещественного квазипотенциала, например, имеем релятивистское условие двух-частичной унитарности.

Как показано в работах [24, 25], для случая слабой связи существует регулярный метод построения локального квазипотенциала, использующий разложение амплитуды рассеяния в ряд теории возмущений.

Квазипотенциал, построенный этим методом, дает решение уравнения (1.1), совпадающее на поверхности энергии с физической амплитудой рассеяния. Указанный метод в работе [30] использовался для исследования уровней энергий позитрония и водородоподобных атомов в рамках квантовой электродинамики.

В случае сильных взаимодействий регулярного метода построения квазипотенциала не существует. Поэтому подход к рассеянию адронов при высоких энергиях, развиваемый нами, основан на феноменологическом выборе квазипотенциала в уравнении (1.1).

В действительности мы будем пользоваться следующими общими принципами.

А. Существованием локального квазипотенциала $V(s, \mathbf{r})$, дающего адекватное описание рассеяния адронов при высоких энергиях.

Б. Положительной определенностью мнимой части квазипотенциала

$$\text{Im } V(s, \mathbf{r}) \geq 0. \quad (1.4)$$

В. Гладким и несингулярным поведением квазипотенциала как функции относительной координаты двух частиц.

Последний принцип, по-видимому, касается динамики взаимодействия адронов при высоких энергиях и означает, что в высокоэнергетических столкновениях адроны ведут себя как протяженные объекты с конечными размерами [31—33].

Важным следствием п.В является квазиклассический характер рассеяния, когда длины волн сталкивающихся частиц становятся

гораздо меньше эффективной области взаимодействия. Результатом такого рассмотрения является эйконоальное представление для амплитуды рассеяния на малые углы [20—23] и экспоненциальное спадание с энергией амплитуды рассеяния на большие углы [33]. Далее п. В позволяет найти амплитуду рассеяния в виде сходящегося ряда борновских приближений.

Интересно отметить, что при определенных условиях только первые несколько членов борновского ряда дают существенный вклад в амплитуду рассеяния при больших переданных импульсах. С другой стороны, экспериментальные данные указывают на то, что упругое рассеяние адронов при высоких энергиях и малых передачах импульса имеет дифракционный характер и приближенно описывается чисто мнимой амплитудой следующего вида:

$$T(s, t) \approx i s \sigma_{\text{полн}}(\infty) e^{a(s)it}. \quad (1.5)$$

Амплитуда (1.5) обеспечивает постоянство полного сечения и экспоненциальное спадание дифференциального сечения с возрастанием квадрата переданного импульса. Величина $a(s)$, связанная с параметром наклона дифракционного пика, вообще говоря, медленно меняется с энергией. Естественно рассматривать выражение (1.5) как борновское приближение для амплитуды рассеяния. Соответствующий локальный квазипотенциал может быть найден фурье-преобразованием и имеет гауссовский вид

$$V(s, r) = i s g_0 \left(\frac{\pi}{a} \right)^{3/2} e^{-\frac{r^2}{4a}}. \quad (1.6)$$

Здесь

$$\sigma_{\text{полн}}(\infty) = 32 \pi^3 g_0 \quad (1.7)$$

и g_0 — положительный параметр.

Локальный квазипотенциал (1.6) имеет положительно определенную мнимую часть и является гладкой несингулярной функцией r . Рассмотрим (1.6) как простейший вид квазипотенциала, который удовлетворяет всем принципам, перечисленным выше, а также требованию дифракционного поведения при малых переданных импульсах. В дальнейшем мы покажем, что квазипотенциал (1.6) передает основные свойства рассеяния адронов на малые и большие углы.

Подчеркнем, что некоторые результаты не зависят от конкретного вида квазипотенциала и имеют общий характер. Обсудим кратко связь между квазипотенциальным подходом и подходом, основанным на гипотезе полюсов Редже.

Несколько лет назад было предположено [34], что дифракционное поведение в рассеянии адронов высоких энергий возникает при обмене реджевским полюсом Померанчука в t -канале с амплитудой

$$T_P(s, t) = -\beta(t) s^{\alpha_P(t)} \frac{1 + e^{-i\pi\alpha_P(t)}}{\sin \pi\alpha_P(t)}. \quad (1.8)$$

Действительно, если предположить линейный рост траектории и гладкое поведение вычетной функции, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_p(t) &= 1 + \alpha' t; \\ \beta(t) &= \beta(0) e^{bt}, \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

то получим выражение (1.5) с

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{полн}}(\infty) &= \beta(0); \\ a(s) &= b + \alpha' \ln(s). \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Однако, как хорошо известно, одиночный полюс Померанчука, если он существует, дает очень грубое приближение для амплитуды рассеяния при высокой энергии. Вообще говоря, появляется бесконечная последовательность реджевских разрезов в комплексной плоскости углового момента, которую необходимо учитывать [18]. К сожалению, несмотря на значительные усилия в исследовании реджевских разрезов, пока нет однозначного пути вычисления их вкладов.

По этой причине квазипотенциальный подход имеет существенное преимущество, так как он позволяет простым путем находить поправки к борновскому члену типа (1.5).

Необходимо отметить также, что здесь рассматривается довольно упрощенная модель чисто упругого рассеяния. В промежуточной области энергий необходимо учитывать вторичные эффекты, такие, как, например, обмен неглавными полюсами Редже или обмен резонансами в прямом канале. Чтобы провести это самосогласованным образом, необходимо использовать требования аналитичности и кроссинг-симметрии в виде конечно-энергетических правил сумм [35, 36].

§ 2. УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ НА МАЛЫЕ УГЛЫ

Рассмотрим упругое рассеяние на малые углы при высоких энергиях

$$\left| \frac{t}{s} \right| \ll 1, \quad as \gg 1,$$

где параметр a связан с эффективным размером области взаимодействия соотношением $4a = R^2$.

Будем считать квазипотенциал гауссовского типа в уравнении (1.1) чисто мнимым, а ниже обсудим ситуацию, возникающую при других параметризациях квазипотенциала.

2.1. Малые передаваемые импульсы

Рассмотрим сначала случай малых передаваемых импульсов и высоких энергий:

$$a|t| < 1, \quad as \gg 1. \quad (2.1)$$

В этом случае уравнение (1.1) может быть решено методом итераций

$$T(\Delta^2; E) = V(\Delta^2; E) + \delta T(\Delta^2; E) + \dots; \Delta^2 = -t. \quad (2.2)$$

Первая поправка к борновскому приближению имеет следующий вид:

$$\delta T(\Delta^2; E) = \int \frac{dq}{\sqrt{m^2 + q^2}} \cdot \frac{V[(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2; E] V[(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2; E]}{q^2 + m^2 - E^2 - i0} = \\ = (isg_0)^2 e^{at/2} A(\Delta^2; E), \quad (2.3)$$

где

$$A(\Delta^2; E) = \int \frac{dq}{\sqrt{m^2 + q^2}} \cdot \frac{e^{-2a(q-\lambda)^2}}{q^2 + m^2 - E^2 - i0}; \quad \lambda = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{k}}{2}. \quad (2.4)$$

Интегрируя по углам, имеем

$$A(\Delta^2; E) = \frac{\pi}{2a\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q dq}{\sqrt{m^2 + q^2}} \cdot \frac{e^{-2a(q-\lambda)^2}}{q^2 + m^2 - E^2 - i0}, \quad (2.5)$$

где $\lambda = \left| \frac{\mathbf{p} + \mathbf{k}}{2} \right|$, или на поверхности энергии

$$\lambda = \sqrt{p^2 + t/4} = p \cos \frac{\theta}{2}. \quad (2.6)$$

Перепишем (2.5) в следующем виде:

$$A = R + iI, \quad (2.7)$$

где

$$I = \frac{\pi^2}{4a\lambda \sqrt{p^2 + m^2}} \{e^{-2a(p-\lambda)^2} - e^{-2a(p+\lambda)^2}\}; \quad (2.8)$$

R определяется главным значением интеграла (2.5). В пределе высоких энергий и малых передач

$$I = \frac{\pi^2}{as} + O\left(\frac{1}{s^2}\right); \quad (2.9a)$$

$$R = \frac{\pi^2}{as} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi as}} + O\left(\frac{1}{s^2}\right). \quad (2.9b)$$

Таким образом, первые два члена ряда (2.2) дают

$$T(\Delta^2; E) = isg_0 e^{at} - isg_0 \frac{\pi^2 g_0}{a} (1 + ia) e^{at/2} + \dots, \quad (2.10)$$

где $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi as}}$.

Условия применимости борновского приближения

$$\frac{\pi^2 g_0}{a} < 1; \quad a|t| < 2 \ln \frac{a}{\pi^2 g_0}. \quad (2.11)$$

При этих условиях амплитуда (2.10) описывает дифракционное рассеяние при малых передачах импульса с наклоном дифракцион-

ного пика $A \approx 2a$. Вблизи точки

$$t \approx -\frac{2}{a} \ln \frac{a}{\pi^2 g_0}, \quad (2.12)$$

где поправка становится сравнимой с первым борновским приближением в дифференциальном сечении рассеяния, может наблюдаться минимум. Из (2.10) при $t = 0$ получим для полного сечения

$$\sigma_{\text{полн}} = 32 \pi^3 g_0 \left(1 - \frac{\pi^2 g_0}{a} \right). \quad (2.13)$$

Если считать параметр a логарифмически растущей функцией энергии, то легко видеть, что полное сечение к своему асимптотическому пределу

$$\sigma_{\text{полн}}(\infty) = 32 \pi^3 g_0 \quad (2.14)$$

будет стремиться снизу [37, 18]. При постоянном g_0 этот результат остается в силе при учете всего ряда борновских приближений. Не вступая в противоречие с условием унитарности, следующим из уравнения (1.1), можно считать параметр g_0 убывающей функцией энергии, стремящейся к некоторому постоянному значению β_0 при $s \rightarrow \infty$, например

$$g_0 = \beta_0 \left(1 + \frac{\gamma_0}{\ln s/s_0} \right).$$

Как легко видеть, в этом случае при определенных ограничениях на константу γ_0 можно получить падение сечения в предасимптотической области.

Далее, в приближении (2.10) отношение реальной части амплитуды к мнимой определяется равенством

$$\rho(s, t) = \frac{\text{Re } T(s, t)}{\text{Im } T(s, t)} = \frac{\pi^2 g_0}{a \sqrt{2\pi a s}} e^{-at/2} \quad (2.15)$$

и является малой, положительно определенной величиной.

Отметим, что наблюдаемое на эксперименте поведение полного сечения и реальной части амплитуды не противоречит, вообще говоря, приведенному рассмотрению и может быть объяснено как эффект влияния неведущих полюсов Редже или резонансов в прямом канале. Во всяком случае, малость реальной части амплитуды при высоких энергиях и малых передаваемых импульсах не противоречит эксперименту. Поэтому в последующем рассмотрении мы будем пренебрегать реальной частью амплитуды при высоких энергиях и малых углах рассеяния.

2.2. Большие передаваемые импульсы

Рассмотрим теперь рассеяние при больших передачах импульса вне дифракционной области, когда

$$\left| \frac{t}{s} \right| \ll 1; \quad a|t| > 1. \quad (2.16)$$

В этом случае амплитуда рассеяния может быть найдена в виде сходящегося ряда борновских приближений

$$T(\Delta^2; E) = \sum_{n=0}^{\infty} T^{(n+1)}, \quad (2.17)$$

где

$$T^{(n)} = i s g_0 \frac{e^{at/n}}{n \cdot n!} \left(-\frac{4\pi^2 g_0}{a} \right)^{n-1}. \quad (2.17a)$$

(Вычисление n -го борновского приближения $T^{(n)}$ см. в приложении А.)

Легко видеть, что при больших передаваемых импульсах основной вклад в сумму (2.17) дают члены с большим номером n .

Изучим асимптотическое поведение ряда (2.17) в пределе $a|t| \gg 1$. Используя преобразование Ватсона — Зоммерфельда, перепишем ряд (2.17) в виде

$$T(\Delta^2; E) = \frac{as}{8\pi^2} \int_C \frac{dz e^{-\sigma z - \omega/z}}{2z\Gamma(z+1) \sin \pi z}, \quad (2.18)$$

где

$$\sigma = \ln \frac{a}{4\pi^2 g_0}; \quad \omega = a|t|. \quad (2.19)$$

Контур интегрирования C охватывает положительную вещественную полуось в направлении против часовой стрелки и включает целые точки $z = 1, 2, \dots$

Можно показать, что в области (2.16) основной вклад в интеграл (2.18) дает первый член разложения функции $\frac{1}{\sin \pi z}$ в ряд

$$\frac{1}{\sin \pi z} = \mp 2i \sum_{n=0}^{\infty} e^{\pm 2i\pi z (n+1/2)} \quad (2.20)$$

на верхнем и нижнем берегах контура C соответственно. Используя метод перевала, получаем

$$T(\Delta^2; E) \rightarrow -\frac{isa}{4\pi^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-2\sqrt{2a|t|} \operatorname{sh} \gamma + \frac{\gamma}{2}}}{\sqrt{a|t|} \operatorname{ch} \gamma} \right\} \quad (2.21)$$

$$a|t| \gg 1.$$

Параметр γ связан с перевальной точкой z_0 соотношением

$$z_0 = \sqrt{2a|t|} e^{-\gamma} \quad (2.22)$$

и определяется из следующего условия:

$$e^{2\gamma} + 2\gamma = 2(\sigma - i\pi + \ln \sqrt{2a|t|}). \quad (2.23)$$

Формула (2.21) может быть переписана в виде

$$T(\Delta^2; E) \rightarrow \frac{i s \alpha}{\sqrt{a|t|}} e^{-\beta \sqrt{a|t|}} \cos \psi(s, t), \quad (2.24)$$

$a|t| \gg 1$, где параметры α и β — медленно меняющиеся функции s и t .

Таким образом, в области (2.16) амплитуда рассеяния является экспоненциально падающей функцией передачи импульса $\sqrt{|t|}$ с возможными осцилляциями [19] вблизи точек, где

$$\psi(s, t) = \pi(k + 1/2); \quad k - \text{целое.} \quad (2.25)$$

Однако, как видно из (2.23), при достаточно больших передачах осцилляции, если они существуют, должны сгладиться и амплитуда рассеяния примет вид

$$T(\Delta^2; E) \rightarrow -\frac{isa}{2\pi^2} (\ln 2\omega)^{1/4} \frac{e^{-\sqrt{2\omega \ln 2\omega}}}{\sqrt{2\omega \ln 2\omega}}, \quad (2.26)$$

$$\omega = a|t| \rightarrow \infty.$$

2.3. Эйкональное описание рассеяния на малые углы

Эйкональное приближение для амплитуды рассеяния, известное уже давно в нерелятивистской квантовой механике [9], очень популярно в последнее время. Оно основано на квазиклассической картине высокоэнергетического рассеяния, когда длины волн сталкивающихся частиц гораздо меньше эффективных размеров области взаимодействия.

Мы увидим, что квазиклассический характер высокоэнергетического рассеяния адронов на малые углы существенным образом связан с несингулярным, или гладким, поведением квазипотенциала как функции относительной координаты двух частиц.

Обсудим сначала свойства решения (2.17). Подставляя формулу

$$\frac{e^{at/n}}{n} = \frac{1}{4\pi a} \int e^{i\rho\Delta_{\perp}} e^{-\frac{\rho^2 n}{4a}} d^2\rho \quad (2.27)$$

[где $t = -\Delta_{\perp}^2$; $\Delta_{\perp} = \mathbf{p} - \mathbf{k}$ меняется в плоскости, перпендикулярной к вектору $\frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{k})$] в (2.17), получаем

$$T(\Delta^2; E) = \frac{s}{(2\pi)^3} \int d^2\rho e^{i\Delta_{\perp} \rho} \left(\frac{e^{2i\chi} - 1}{2i} \right), \quad (2.28)$$

где

$$2i\chi = -\frac{4\pi^2 g_0}{a} e^{-\rho^2/4a}. \quad (2.29)$$

Формула (2.28) — не что иное, как эйкональное представление амплитуды в области высоких энергий с фазовой функцией $\chi(\rho)$, связанной с квазипотенциалом соотношением

$$\chi(\rho) = \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} V(s, \sqrt{\rho^2 + z^2}) dz. \quad (2.30)$$

Очевидно, это представление будет иметь место для широкого класса гладких квазипотенциалов.

Чтобы показать это, удобно рассмотреть квазипотенциальное уравнение для волновой функции двух частиц в \mathbf{r} -пространстве

$$(E^2 - m^2 + \nabla^2) \psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\omega} V(s, \mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}), \quad (2.31)$$

где

$$\omega = \sqrt{m^2 - \nabla^2}. \quad (2.32)$$

Наличие оператора ω делает уравнение (2.31) нелокальным. Однако при условии несингулярного, или гладкого, поведения квазипотенциала $V(s, \mathbf{r})$ уравнение (2.31) в пределе высоких энергий принимает эффективно локальный вид. Действительно, будем искать решение уравнения (2.31) в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\rho z} \varphi(\mathbf{r}), \quad (2.33)$$

где $\varphi(\mathbf{r})$ предполагается медленно меняющейся функцией и

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

Легко видеть, что на пространстве медленно меняющихся функций в пределе высоких энергий $p \rightarrow \infty$

$$e^{-i\rho z} \omega e^{i\rho z} \rightarrow p - i \nabla_z + O(1/p) \quad (2.34a)$$

или

$$e^{-i\rho z} \frac{1}{\omega} e^{i\rho z} \rightarrow \frac{1}{p} + O(1/p^2). \quad (2.34b)$$

Таким образом, функция $\varphi(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению

$$-2ip \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial z} = \frac{1}{p} V(s, \mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}), \quad (2.35)$$

которое совпадает с соответствующим уравнением, следующим из уравнения Клейна—Гордона с эффективным потенциалом $\frac{1}{p} V(s, \mathbf{r})$.

В результате получаем эйкональное представление (2.28) с фазовой функцией $\chi(\rho)$, определяемой соотношением (2.30). Таким образом, нет необходимости рассматривать эйкональное или, как обычно его называют, глауберовское, представление как первичный динамический принцип (см., например, работу [11]). Оно является следствием допущения о несингулярном характере взаимодействия адронов при высоких энергиях.

В последние годы было предпринято много попыток сформулировать эйкональное представление для амплитуды рассеяния, основывающееся только на общих принципах, таких, как релятивистская инвариантность, унитарность и аналитичность, не ограничиваясь малыми углами рассеяния [12]. Надо думать, однако, что в этих выводах в неявном виде вводятся дополнительные допущения.

2.4. Подход, основанный на условии унитарности

Весьма привлекательным является подход к описанию рассеяния адронов при высоких энергиях, основанный на уравнении унитарности в квантовой теории поля [38, 39]. Здесь мы коротко обсудим этот подход и его связь с квазипотенциальным методом.

Уравнение унитарности для амплитуды рассеяния двух бесспиновых частиц равных масс имеет вид

$$\text{Im } T(s, t) = \int d\omega T(s, t') T^*(s, t'') + F(s, t), \quad (2.36)$$

где в системе центра инерции

$$\left. \begin{aligned} t &= -(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2; \\ t' &= -(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2; \\ t'' &= -(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2; \\ s &= 4(m^2 + \mathbf{p}^2) = 4(m^2 + \mathbf{q}^2) = 4(m^2 + \mathbf{k}^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

и

$$d\omega = \frac{1}{8\pi^2} \cdot \frac{dq dq'}{2q_0 2q'_0} \delta(p + p' - q - q') \quad (2.38)$$

связано с фазовым объемом двух частиц. Величина $F(s, t)$, известная под названием функции перекрытия Ван Хофа, представляет собой вклад неупругих состояний в уравнение (2.36).

Удобно выбрать следующие направления импульсов:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p} + \mathbf{k} &= (2p_z, 0, 0); \\ \mathbf{k} - \mathbf{p} &= (0, \Delta_{\perp}) \end{aligned} \right\} \quad (2.39a)$$

или

$$\mathbf{p} = \left(p_z, \frac{\Delta_{\perp}}{2} \right); \quad \mathbf{k} = \left(p_z, -\frac{\Delta_{\perp}}{2} \right). \quad (2.39b)$$

Из уравнений (2.39) следует, что

$$\left. \begin{aligned} s &= 4(m^2 + p_z^2) + \Delta_{\perp}^2; \\ t &= -\Delta_{\perp}^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

При высоких энергиях и малых углах рассеяния, когда $\left| \frac{t}{s} \right| \ll 1$, имеем

$$s \approx 4p_z^2, \quad t = -\Delta_{\perp}^2 = -(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{p}_{\perp})^2. \quad (2.41)$$

Допустив, что основной вклад в интеграл в уравнении (2.36) происходит от области малых углов, в уравнение (2.36) можно подставить

$$t' = -(\mathbf{p}_{\perp} - \mathbf{q}_{\perp})^2; \quad t'' = -(\mathbf{q}_{\perp} - \mathbf{k}_{\perp})^2. \quad (2.42)$$

По той же причине имеем

$$\int d\omega \rightarrow \frac{1}{8\pi^2 s} \int_{4q_{\perp}^2 \leq s} d^2 q_{\perp}. \quad (2.43)$$

Таким образом, в этом приближении уравнение унитарности (2.36) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{Im } T [s_{\perp}, -(\mathbf{p}_{\perp} - \mathbf{k}_{\perp})^2] &= \frac{1}{8\pi^2 s} \int_{4q_{\perp}^2 \leq s} d^2 q_{\perp} T [s_{\perp}, -(\mathbf{p}_{\perp} - \mathbf{q}_{\perp})^2] \times \\ &\times T^+ [s_{\perp}, -(\mathbf{q}_{\perp} - \mathbf{k}_{\perp})^2] + F[s_{\perp}, -(\mathbf{p}_{\perp} - \mathbf{k}_{\perp})^2]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Если предположить, что область интегрирования в уравнении (2.44) может быть расширена вне круга $4q_{\perp}^2 \leq s$ на всю плоскость поперечного импульса, то получим известную формулу свертки

$$\text{Im } T = \frac{1}{8\pi^2 s} T * T^+ + F. \quad (2.45)$$

Отметим, однако, что такое расширение является нетривиальным и требует продолжения за массовую поверхность. Во всяком случае, оно связано с допущением о несингулярном характере взаимодействия адронов при высоких энергиях. Рассмотрим теперь приближение чисто мнимой амплитуды

$$T(s, t) = isA(s, t) \quad (2.46)$$

и допустим [38], что функция перекрытия имеет гауссовский вид

$$F(s, t) = \sigma_{\text{неупр}} e^{at}. \quad (2.47)$$

Уравнение (2.45) легко решить, используя преобразование Фурье

$$A(s, t) = \int d^2 \rho e^{i\rho \Delta_{\perp}} a(s, \rho), \quad (2.48)$$

где $t = -\Delta_{\perp}^2$. В результате получим уравнение

$$a(s, \rho) = \frac{1}{2} a^2(s, \rho) + \frac{\sigma_{\text{неупр}}}{4\pi a} e^{-\rho^2/4a} \quad (2.49)$$

со следующим решением*:

$$a(s, \rho) = 1 - \sqrt{1 - \eta(s, \rho)}, \quad (2.50)$$

где

$$\eta(s, \rho) = \frac{\sigma_{\text{неупр}}}{2\pi a} e^{-\rho^2/4a}. \quad (2.51)$$

Считая, что

$$\eta(s, \rho) < 1, \quad (2.52)$$

* Мы выбираем решение, которое исчезает при $F(s, t) \rightarrow 0$.

разложим решение (2.50) в ряд по степеням $\eta(s, \rho)$:

$$a(s, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{e^{-n\rho^2/4a}}{2n-1} \left(\frac{\sigma_{\text{неупр}}}{8\pi a} \right)^n. \quad (2.53)$$

Подставляя выражение (2.53) в формулу (2.48), получаем для амплитуды рассеяния

$$T(s, t) = i s \sigma_{\text{неупр}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{e^{at/n}}{2n(2n-1)} \left(\frac{\sigma_{\text{неупр}}}{8\pi a} \right)^{n-1}. \quad (2.54)$$

Таким образом, для амплитуды рассеяния при высоких энергиях и малых углах рассеяния получаем ряд типа (2.17), но с коэффициентами, знакопостоянными и значительно медленно убывающими с ростом n .

Знакопостоянство членов такого ряда в некоторых работах отмечалось как недостаток этого подхода, поскольку оно затрудняет объяснение провалов и осцилляций в дифференциальном сечении рассеяния.

Другая трудность состоит в следующем. Можно показать, что сумма ряда (2.54) с ростом передачи спадает как $e^{-\sqrt{|t|}}$, в то время как функция перекрытия (2.47) спадает как e^t . Известно, однако, что при больших передачах нет существенной разницы между поведением упругих и неупругих процессов. В противоположность этому квазипотенциальное уравнение (1.1) соответствует уравнению унитарности с довольно сложной функцией перекрытия:

$$F(s, t) = s\beta e^{at} + s\beta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{at/n}}{n \cdot n!} (2^n - 3) \left(\frac{-4\pi^2 g_0}{a} \right)^{n-1}, \quad (2.55)$$

где $\beta = 32\pi^3 g_0$.

Выражение (2.55) может быть получено прямым расчетом с использованием ряда (2.17) и условия унитарности.

Легко видеть, что ряд (2.55) обладает теми же свойствами, что и амплитуда упругого рассеяния.

2.5. Применение к упругому pp -рассеянию

Проведем сравнение результатов, полученных на основе квазипотенциального уравнения (1.1), с экспериментальными данными о высокоэнергетическом pp -рассеянии на малые углы.

При рассмотрении конкретных физических процессов необходимо учитывать, вообще говоря, спиновую структуру амплитуды рассеяния.

Например, в случае упругого pp -рассеяния имеется пять независимых инвариантных амплитуд, которые могут быть выбраны

в спиральном базисе следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| T \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right. \right\rangle; \\ T_2 &= \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| T \left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right. \right\rangle; \\ T_3 &= \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \left| T \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right. \right\rangle; \\ T_4 &= \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \left| T \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right. \right\rangle; \\ T_5 &= \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| T \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right. \right\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

Однако лишь две из них T_1 и T_3 , которые соответствуют процессам без переворота спина, дают ненулевой вклад при рассеянии вперед. При ненулевых углах рассеяния относительная величина спин-флипových амплитуд T_2, T_4, T_5 может быть определена из значения параметра поляризации, который при высоких энергиях не превышает 10% и убывает с ростом энергии [40].

Оставшиеся амплитуды без переворота спина T_1 и T_3 приближенно равны друг другу, что является следствием истинно упругого характера рассеяния при высоких энергиях, идущего в основном с обменом нулевыми квантовыми числами в перекрестных каналах.

Таким образом, при описании рассеяния неполяризованных протонов на протонах высоких энергий можно ограничиться рассмотрением одной амплитуды $T \approx T_1 \approx T_3$ в рамках квазипотенциального уравнения (1.1) для бесспиновых частиц*. Полное и дифференциальное сечения рассеяния неполяризованных протонов на протонах связаны с амплитудой $T(\Delta^2; E)$, удовлетворяющей квазипотенциальному уравнению следующим образом:

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{8\pi^3}{\rho E} T(E; \Delta^2 = 0); \quad (2.57a)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = -4\pi \left| \frac{\pi^2 T(E, \Delta^2)}{\rho E} \right|^2, \quad t = -\Delta^2. \quad (2.57b)$$

Решение (2.17) уравнения (1.1) с квазипотенциалом (1.6) в области малых углов рассеяния зависит от двух вещественных параметров a и g_0 , входящих в определение квазипотенциала.

Численные значения этих параметров могут быть найдены из экспериментальных данных при нулевых и малых переданных импульсах, т. е. из полного сечения и ширины дифракционного пика

* Это предположение может, однако, оказаться несправедливым в области больших углов рассеяния $\theta \approx 90^\circ$, где требование перекрестной симметрии делает, вообще говоря, необходимым учет также и спин-флипových амплитуд.

1/A с помощью следующих формул:

$$\sigma_{\text{полн}} = 8\pi a I(x), \quad x = \frac{4\pi^2 g_0}{a}; \quad (2.58a)$$

$$A = \frac{d}{dt} \ln \left[\frac{d\sigma}{dt} \right]_{t=0} = 2a \frac{1}{I(x)} \int_0^x \frac{d\xi}{\xi} I(\xi); \quad (2.58b)$$

$$I(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n \cdot n!} = \int_0^x \frac{d\xi}{\xi} (1 - e^{-\xi}). \quad (2.59)$$

Мы провели сравнение результатов, полученных выше, с экспериментальными данными об упругом pp -рассеянии при $p_L = 8,5$; 12,4 и 18,4 Гэв/с [41—42]. Теоретические кривые на рис. 1 и 2 соответствуют следующим значениям параметров g_0 и a :

$$\begin{aligned} p_L = 8,5 \frac{\text{Гэв}}{c}, \quad g_0 = 0,13 \left(\frac{\text{Гэв}}{c} \right)^{-2}, \quad a = 2,6 \left(\frac{\text{Гэв}}{c} \right)^{-2}; \\ p_L = 12,4 \frac{\text{Гэв}}{c}, \quad g_0 = 0,12 \left(\frac{\text{Гэв}}{c} \right)^{-2}, \quad a = 2,8 \left(\frac{\text{Гэв}}{c} \right)^{-2}; \\ p_L = 18,4 \frac{\text{Гэв}}{c}, \quad g_0 = 0,14 \left(\frac{\text{Гэв}}{c} \right)^{-2}, \quad a = 3,8 \left(\frac{\text{Гэв}}{c} \right)^{-2}, \end{aligned}$$

вычисленным с использованием экспериментальных значений полных сечений [43] и ширин дифракционных пиков [41] при соответствующих энергиях*. Как видно из рис. 1 и 2, теоретические кривые достаточно хорошо воспроизводят поведение дифференциального сечения упругого pp -рассеяния, равно как и положения дифракционных минимумов, и их зависимость от энергии.

Интересно отметить, что численное значение параметра a для рассмотренной области энергий соответствует эффективному радиусу взаимодействия $R \approx \frac{1}{2\mu} = 0,71$ ферми или $a = 3,3 (\text{Гэв}/c)^{-2}$, который определяется положением ближайшей особенности в t -канале в случае упругого рассеяния. Кроме того, при этих энергиях полное сечение очень близко к своему геометрическому значению:

$$\sigma_{\text{полн}} \approx 2\pi R^2 = \frac{\pi}{2\mu^2} = 32 \text{ мбарн.}$$

Заметим, что качественный анализ упругого pp -рассеяния при высоких энергиях с различных точек зрения проведен также в работах [11—17, 38, 39]. Вблизи точек, где сумма (2.17) обращается в нуль, необходим, вообще говоря, учет следующих членов разложения амплитуды по обратным степеням импульса p . Это ведет к так называемому «заполнению минимумов». Далее (рис. 3) показано

* Численные значения этих и других параметров, вычисленных в работе, содержат неопределенности, обусловленные ошибками в соответствующих экспериментальных данных.

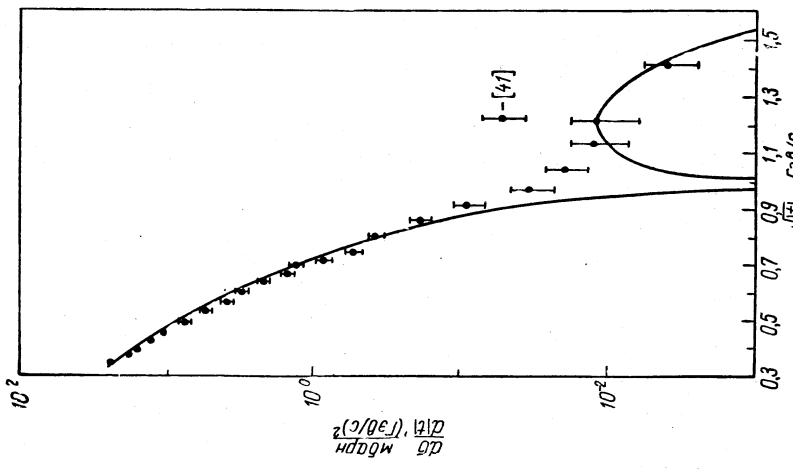


Рис. 1. pp -Рассеяние при $p_L = 12,4$ Гэв/с.

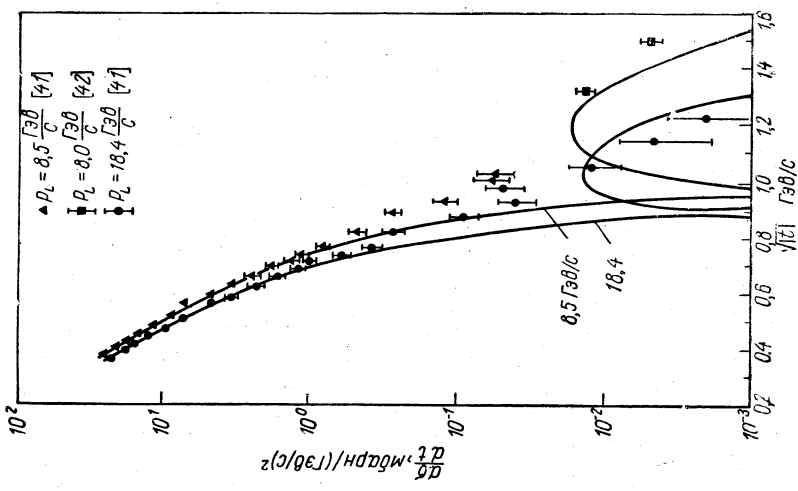


Рис. 2. pp -Рассеяние при $p_L = 8,5; 8,0$ и $18,4$ Гэв/с.

поведение дифференциального сечения упругого pp -рассеяния при $p_L = 8,5 \text{ Гэв}/c$ в области передач $0 \leq |t| < 0,6 (\text{Гэв}/c)^2$. Существование небольшого «плеча» при $|t| \approx 0,3 (\text{Гэв}/c)^2$ находится в согласии с результатами теоретических расчетов. Аналогичное поведение наблюдается и при других энергиях.

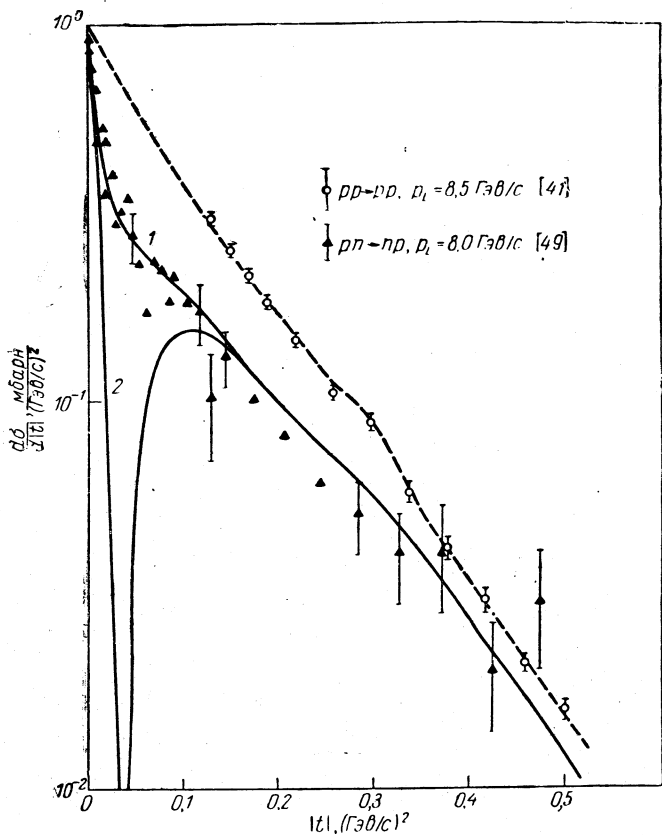


Рис. 3. pn -Перезарядка при $p_L = 8,0 \text{ Гэв}/c$ и pp -упругое рассеяние при $p_L = 8,5 \text{ Гэв}/c$. Сечение pp -рассеяния нормировано на $1 \text{ мбарн}/(\text{Гэв}/c)^2$ при $t = 0$.

§ 3. РАССЕЯНИЕ НА БОЛЬШИЕ УГЛЫ

Рассмотрим теперь рассеяние двух частиц при высоких энергиях и фиксированном угле рассеяния:

$$as \gg 1, \quad \left| \frac{t}{s} \right| \approx \sin^2 \frac{\theta}{2} = \text{фикс.} \quad (3.1)$$

В этом случае ряд борновских приближений для амплитуды рассеяния имеет вид (см. приложение Б)

$$T(\Delta^2; E) = i s g_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n!)^2} \cdot \frac{e^{at/n}}{n^{3/2}} \left(\frac{i s g_0 \pi \sqrt{\pi} e^{\varphi(\theta)}}{t p a \sqrt{a}} \right)^{n-1}, \quad (3.2)$$

где

$$\varphi(\theta) = 1 - \frac{\theta}{2 \operatorname{tg} \theta/2}. \quad (3.3)$$

Функция $\varphi(\theta)$ достаточно мала, и мы ею пренебрежем. Легко видеть, что при $a|t| \gg 1$ основной вклад в сумму (3.2) дают члены с $n \gg 1$ и может быть использована формула Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$. В результате

$$T(\Delta^2; E) = i s g_0 \frac{e^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{at/n}}{n^{5/2}} (-i\gamma)^{n-1}. \quad (3.4)$$

$\theta = \text{фикс}$
 $s \rightarrow \infty$

Здесь
$$\gamma = \frac{g_0 e^2}{p \sin^2 \theta/2} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{3/2} = \frac{s g_0 e^2}{|t| p} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{3/2}. \quad (3.5)$$

Используем представление

$$\frac{e^{at/n}}{n^{5/2}} = \frac{1}{(4\pi a)^{5/2}} \int d^5 r e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}} [e^{-r^2/4a}]^n, \quad (3.6)$$

где $t = -\Delta^2 = -\mathbf{q}^2$, \mathbf{r} — вектор в некотором пятимерном вспомогательном пространстве.

Используя (3.6), перепишем ряд (3.4) в интегральной форме

$$T(\Delta^2, E) = i s g_0 \frac{e^2}{2\pi (4\pi a)^{5/2}} \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}} \frac{e^{-r^2/4a}}{1 + i\gamma e^{-r^2/4a}}. \quad (3.7)$$

$\theta = \text{фикс}$
 $s \rightarrow \infty$

После интегрирования по углам получим

$$T(E; \mathbf{q}^2) = i s g_0 \frac{2\pi e^2}{3 (4\pi a)^{5/2}} \frac{1}{iq} \int_{-\infty}^{+\infty} r^3 dr e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}} \frac{e^{-r^2/4a}}{1 + i\gamma e^{-r^2/4a}}. \quad (3.8)$$

Интеграл в (3.8) может быть взят с помощью теоремы о вычетах; в результате имеем

$$T(E, \mathbf{q}^2) \rightarrow \frac{q p r_0^3}{12\pi^2} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_0}, \quad \text{где } q = \sqrt{|t|}. \quad (3.9)$$

Положение полюсов подынтегрального выражения определяется из уравнения

$$1 + i\gamma e^{-r_0^2/4a} = 0 \quad (3.10)$$

или

$$r_0^2 = -2\pi i a \left(1 + \frac{2i}{\pi} \ln \gamma \right). \quad (3.11)$$

Полнос в верхней полуплоскости, дающий основной вклад, расположен в точке

$$r_0 = i \sqrt{2\pi i a \left(1 + \frac{2i}{\pi} \ln \gamma\right)}. \quad (3.12)$$

При промежуточных энергиях, когда второй член в уравнении (3.11) может быть отброшен, т. е. $r_0^2 = -2\pi i a$, мы получим следующее выражение для дифференциального сечения при больших углах:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\pi a}{3}\right)^2 q^2 e^{-2q \sqrt{\pi a}}, \quad q = \sqrt{|t|}. \quad (3.13)$$

Интересной особенностью результата (3.13) является тот факт, что при больших передачах импульса, соответствующих большому углу, $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ слабо зависит от энергии. Единственная зависимость от энергии входит через параметр a , связанный с шириной пика рассеяния вперед.

При достаточно высоких энергиях, когда в уравнении (3.11) основной вклад дает первый член, получаем следующее асимптотическое поведение для дифференциального сечения

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \xrightarrow[\substack{\theta = \text{фикс.} \\ s \rightarrow \infty}]{} s \left(\frac{a \sin \frac{\theta}{2} \ln s}{3}\right)^2 e^{-c(\theta) \sqrt{2as \ln s}}, \quad (3.14)$$

где $c(\theta) = 2 \sin \theta/2$.

Интересным является то обстоятельство, что при логарифмическом росте параметра a с энергией получается следующая из строгих результатов теории поля оценка на нижнюю границу убывания амплитуды рассеяния на фиксированный угол при высоких энергиях [44, 45].

Обсудим коротко приложение этих результатов к описанию упругого pp -рассеяния на большие углы. Как видно из предыдущего рассмотрения в области лабораторных импульсов $p_L = 10 \div 20 \text{ Гэв}/c$, параметры a и g_0 равны приблизительно

$$a \approx 3,0 \left(\frac{\text{Гэв}}{c}\right)^{-2}; \quad g_0 \approx 0,13 \left(\frac{\text{Гэв}}{c}\right)^{-2}. \quad (3.15)$$

Условие сходимости ряда (3.4) $|\gamma| < 1$ для этих численных значений параметров a и g_0 выглядит так:

$$|t| > 0,3 \sqrt{s} \text{ Гэв}. \quad (3.16)$$

Теоретическая кривая на рис. 4, построенная с использованием формулы (3.13) и параметров (3.15), передает характер спадания и абсолютное значение дифференциального сечения в области больших углов рассеяния [46—48], ограниченных условием (3.16). Подчеркнем, что, согласно сноске на стр. 106, эти результаты неприменимы, вообще говоря, в области углов $\theta \approx 90^\circ$.

§ 4. РАССЕЯНИЕ НАЗАД

Как видно из § 3, амплитуда рассеяния на большие углы (3.9) экспоненциально падает с ростом энергии. Таким образом, решение уравнения (1.1) с квазипотенциалом (1.6) приводит к экспоненциально малому сечению рассеяния назад частиц высоких энергий, что

в ряде случаев противоречит эксперименту. Как было указано в работе [21], этот факт объясняется пренебрежением обменными силами в системе двух частиц.

Ниже мы покажем, как обменные силы могут быть учтены в рамках квазипотенциального уравнения, и используем результаты для анализа экспериментальных данных об упругом *pp*-рассеянии назад [42].

При учете обменных сил амплитуда рассеяния может быть представлена в виде суммы двух величин:

$$T(p, k; E) = G(p, k; E) + H(p, k; E), \quad (4.1)$$

которые удовлетворяют системе квазипотенциальных уравнений*:

$$G = g + g \times G + h \times H, \quad (4.2a)$$

$$H = h + h \times G + g \times H. \quad (4.2b)$$

Операция умножения в

формулах (4.2) означает интегрирование согласно формуле (1.1). Величины g и h — фурье-образы «прямой» и «обменной» частей квазипотенциала соответственно:

$$g(s, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dr e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} V(s, r) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad t = -(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2; \quad (4.3a)$$

* Система уравнений (4.2) эквивалентна паре уравнений для амплитуд с определенной четностью, рассмотренных в работе [24].

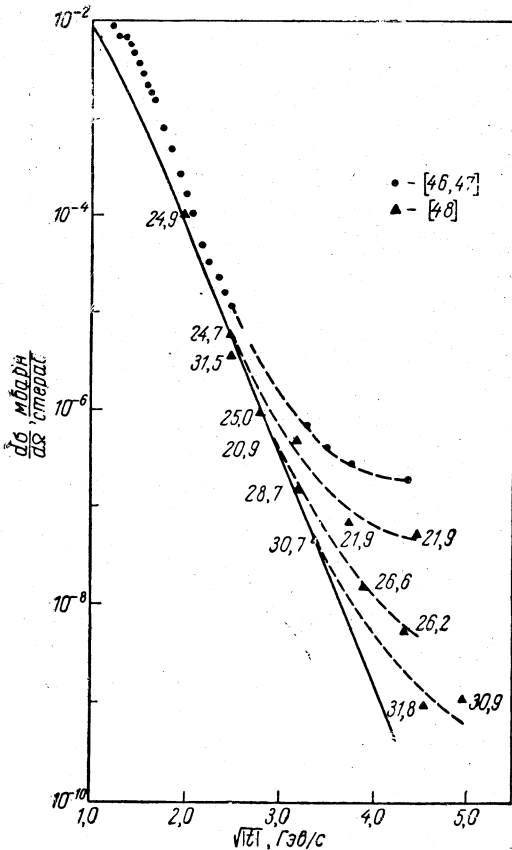


Рис. 4. *pp*-Рассеяние на большие углы.

Цифры на рисунке означают энергии налетающих частиц в лабораторной системе отсчета. Пунктирные линии соединяют точки приблизительно равных энергий.

$$h(s, u) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dr e^{i\mathbf{p}r} V_e(s, r) \hat{P} e^{-i\mathbf{k}r}, \quad u = -(\mathbf{p} + \mathbf{k})^2, \quad (4.36)$$

где \hat{P} — оператор перестановки координат.

В качестве квазипотенциала прямого взаимодействия используем выражение (1.6), откуда следует, что $g(s, t) = i s g_0 e^{at}$. Обменная часть квазипотенциала определяется вкладом перекрестного u -канала. Учитывая условие

$$\left| \frac{h(s, 0)}{s g_0} \right| \ll 1 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty, \quad (4.4)$$

можно пренебречь последним членом в уравнении (4.2a). Итерируя полученную систему уравнений, находим

$$H = h + h \times G + G \times h + G \times h \times G, \quad (4.5)$$

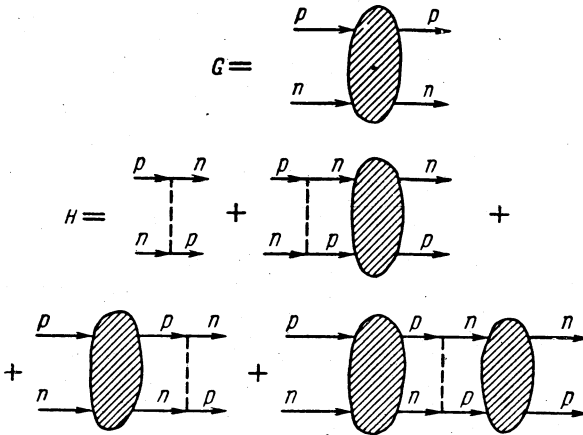


Рис. 5. Схематическое изображение амплитуд G и H .

где G определяется решением уравнения (1.1) с квазипотенциалом (1.6). Символически выражение для амплитуды H изображено на рис. 5.

Предположим теперь, что обменный квазипотенциал может быть представлен в виде суммы

$$h(s, u) = \sum_i h_i(s) e^{b_i u}, \quad (4.6)$$

причем $\left| \frac{h_i(s)}{s g_0} \right| \ll 1$ при больших энергиях.

В этом случае в области $\left| \frac{u}{s} \right| \ll 1$ амплитуда обменного рассеяния H может быть найдена в следующем виде:

$$H(\mathbf{q}'^2; E) = \sum_i H_i(\mathbf{q}'^2; E), \quad (4.7)$$

где

$$H_i(q'^2; E) = h_i(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ae^{\frac{ab_i}{a+nb_i}u}}{(a+nb_i)n!} \left(-\frac{4\pi^2 g_0}{a} \right)^n, \quad (4.8)$$

$$u = -q'^2.$$

Полученные результаты были использованы при анализе упругого pn -рассеяния назад при энергии $p_L = 8 \text{ Гэв/с}$ и $|u| < 0,6 (\text{Гэв/с})^2$. При этом для обменного потенциала было взято выражение типа (4.6), в котором учитывалось лишь два члена. Параметры h_1 и h_2 предполагались для простоты вещественными, причем были рассмотрены случаи как равных, так и противоположных знаков величин h_i . Параметры a и g_0 , входящие в определение упругой части

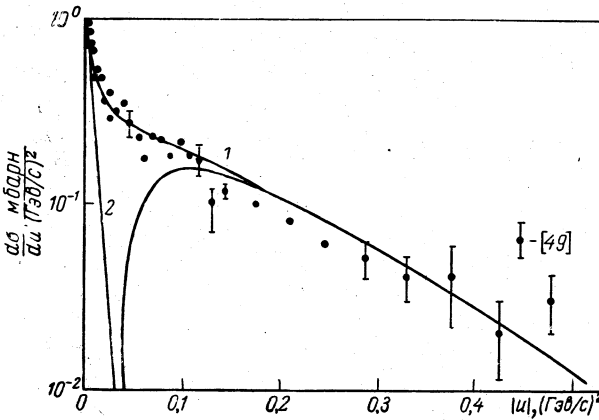


Рис. 6. pn -Рассеяние назад при $p_L = 8,0 \text{ Гэв/с}$.

потенциала, были определены на основе экспериментальных данных о pp -рассеянии вперед при $p_L = 8,5 \text{ Гэв/с}$:

$$g_0 = 0,13 \left(\frac{\text{Гэв}}{c} \right)^{-2}; \quad a = 2,6 \left(\frac{\text{Гэв}}{c} \right)^{-2}.$$

Теоретические кривые 1 и 2 на рис. 6, соответствующие равным и противоположным знакам величин h_1 и h_2 , вычислены при следующих значениях параметров h_i и b_i .

Равные знаки (кривая 1):

$$|h_1| = 0,07; \quad b_1 = 110 (\text{Гэв/с})^{-2};$$

$$|h_2| = 0,30; \quad b_2 = 1,8 (\text{Гэв/с})^{-2}.$$

Противоположные знаки (кривая 2):

$$|h_1| = 0,29; \quad b_1 = 34 (\text{Гэв/с})^{-2};$$

$$|h_2| = 0,30; \quad b_2 = 1,8 (\text{Гэв/с})^{-2}.$$

На рис. 3 те же кривые изображены для сравнения вместе с кривой дифференциального сечения упругого pp -рассеяния при $p_L = 8,5 \text{ ГэВ}/c$, нормированного к $1 \text{ мбарн}/(\text{ГэВ}/c)^2$ при $t = 0$. Сравнение с экспериментом показывает, что предпочтителен случай равных знаков. Отметим, однако, что данное рассмотрение без учета спиновой зависимости имеет лишь качественный характер.

§ 5. ПРОЦЕССЫ ПЕРЕЗАРЯДКИ И НЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ

Обобщим квазипотенциальный подход на случай неупругих квазидвухчастичных процессов и проведем сравнение результатов с данными по рождению изобар в pp -столкновениях.

Рассмотрим многоканальную задачу квазидвухчастичного рассеяния бесспиновых частиц с массой m_i ($i=1, 2, \dots, n$). Квазипотенциальное уравнение для амплитуд перехода $T_{ik \rightarrow jl}(E, \mathbf{p}, \mathbf{k})$ может быть записано символически в матричной форме

$$T = V + \int d\mathbf{q} [VF] T, \quad (5.1)$$

где

$$[VF]_{ik \rightarrow jl} = V_{ik \rightarrow jl}(E, (\mathbf{p} - \mathbf{q})^2) F_{jl}(E, \mathbf{q}). \quad (5.2)$$

Величины $F_{ik}(E, \mathbf{q})$ связаны с массами промежуточных частиц следующим образом:

$$F_{ik}(E, \mathbf{q}) = \frac{\omega_i + \omega_k}{\omega_i \omega_k} \cdot \frac{2}{(\omega_i + \omega_k)^2 - s - i0}, \quad (5.3)$$

где $\omega_i = \sqrt{m_i^2 + \mathbf{q}^2}$, $s = (E_1 + E_2)^2$.

При условии гладкости обобщенного квазипотенциала при высоких энергиях можно пренебречь отклонением масс m_i от некоторой средней массы m . В результате уравнение (5.1) принимает вид [50]

$$T = V + V \times T, \quad (5.4)$$

где

$$[V \times T]_{ik \rightarrow jl} = \sum_{i' k'} \int \frac{d\mathbf{q}}{V \mathbf{q}^2 + m^2} \cdot \frac{V_{ik \rightarrow i' k'}(E, (\mathbf{p} - \mathbf{q})^2) T_{i' k' \rightarrow jl}(E, \mathbf{q}, \mathbf{k})}{(\mathbf{q}^2 + m^2 - E^2 - i0)}. \quad (5.5)$$

Рассмотрим нашу задачу применительно к процессам рождения изобар в pp -столкновениях.

Введем следующие обозначения для элементов матрицы амплитуды переходов:

$$T = T_{pp \rightarrow pp}; \quad T^* = T_{pp \rightarrow pN^*} \quad (5.6)$$

и аналогично для обобщенного квазипотенциала. В дальнейшем в уравнениях мы будем пренебрегать членами, связанными с «дважды неупругими» переходами при рассеянии протона или изобары на протоне. На возможность подобного пренебрежения указывает экспериментальный факт о малости сечений возбуждения изобар по

сравнению с сечением упругого pp -рассеяния при высоких энергиях в дифракционной области [51]. Можно показать, что, если воспользоваться так называемой приведенной системой уравнений с использованием обозначений (5.6), система (5.4) может быть эффективно записана в виде двухканального уравнения:

$$T = V + V \times T + V^* \times T^*, \quad (5.7a)$$

$$T^* = V^* + V^* \times T + V \times T^*. \quad (5.7b)$$

Итерируя полученную систему, найдем для амплитуды рождения изобары следующее решение:

$$T^* = V^* + T \times V^* + V \times T^* + T \times V^* \times T. \quad (5.8)$$

Здесь величина T — амплитуда pp -рассеяния, которая удовлетворяет одноканальному уравнению с квазипотенциалом гауссовского типа [20, 22]:

$$V(E, (\mathbf{p}-\mathbf{k})^2) = isg_0 e^{at}; \quad (5.9)$$

$$s = 4E^2; \quad t = -(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2.$$

Используем полученные здесь результаты для описания процессов рождения изобар с изотопическим спином $I = 1/2$. Ввиду квазиупругого характера этих процессов, идущих без обмена ненулевых квантовых чисел в t -канале, сопоставим этим процессам квазипотенциал V^* типа (5.9), т. е.

$$V^*(E, (\mathbf{p}-\mathbf{k})^2) = isg^* e^{bt}, \quad (5.10)$$

где g^* , вообще говоря, комплексное число.

Приведем связь квазипотенциальной амплитуды с дифференциальным сечением рождения (с учетом нормировки квазипотенциальной амплитуды)

$$\left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_{\text{рожд}} = \frac{4\pi}{s} \left| \frac{32\pi^3 T^*}{8\pi \sqrt{s}} \right|^2.$$

Рассмотрим свойства нуклонных изобар с изотопическим спином $I = 1/2$. К ним относятся следующие три резонанса: $N^*(1.4)$, $N^*(1.52)$ и $N^*(1.69)$ с массами 1400; 1518 и 1688 Мэв соответственно.

$N^*(1.4)$ представляет собой сильно возбужденное состояние нуклона при очень малых переданных импульсах (в области $|t| \sim \sim 10^{-2} (\text{Гэв}/c)^2$), $N^*(1.52)$ и $N^*(1.69)$ — слабо возбужденные состояния.

Измерения Брукхейвенской группы [52] дают в области $|t| \sim \sim (0,01 - 0,8) (\text{Гэв}/c)^2$ следующие значения наклонов дифракционного пика*:

$$B = (14,4 \pm 2,5) (\text{Гэв}/c)^{-2} \text{ для } N^* (1.4);$$

$$B = (3,83 \pm 0,37) (\text{Гэв}/c)^{-2} \text{ для } N^* (1.52);$$

$$B = (5,25 \pm 0,48) (\text{Гэв}/c)^{-2} \text{ для } N^* (1.69).$$

* Используется параметризация дифференциального сечения

$$\frac{d\sigma}{dt} = A e^{Bt}.$$

Как видно, самая легкая изобара имеет наклон в два раза больше упругого $A \approx (8 - 9) (\Gamma_{эв}/c)^{-2}$, а две другие — приблизительно равные друг другу наклоны, составляющие половину наклона сечения упругого pp -рассеяния.

Рассмотрим выражение (5.8). В области малых переданных импульсов можно выписать решение в следующем виде:

$$T^* = \varphi(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ae^{\frac{ab}{a+nb}} t}{(a+nb) n!} \left(-\frac{4\pi^2 g_0}{a} \right)^n, \quad (5.11)$$

$$\varphi(s) = isg^*.$$

Перепишем это решение в представлении прицельного параметра (см. приложение В):

$$T^* = \frac{\varphi(s)}{(2\pi)^3} \int d^2\rho e^{i\Delta\rho} \chi^*(\rho, b) e^{2i\chi(\rho, a)}. \quad (5.12)$$

где $\chi(\rho, a) = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{+\infty} V(s, \sqrt{\rho^2 + z^2}) dz$;

$$\chi^*(\rho, b) = \frac{1}{\varphi(s)} \int_{-\infty}^{+\infty} V^*(s, \sqrt{\rho^2 + z^2}) dz \quad (5.13)$$

есть так называемые функции эйконала, а $V(s, r)$, $V^*(s, r)$, — фурье-образы квазипотенциалов (5.9) и (5.10). Формула (5.12) дает наглядное представление о процессе рождения изобар с последующим многократным упругим перерассеянием.

В формуле (5.11) используем экспериментальные значения параметров наклона в рождении изобары [52]. Параметры упругого pp -рассеяния, а также аналог связи с измеряемыми величинами для неупругого взаимодействия берутся из работы [22].

Приведем значения параметров теоретических кривых, которые вычислялись из экспериментальных наклонов при $p_L = 20 \Gamma_{эв}/c$:

$$\begin{aligned} \text{для } N^*(1.4) \quad b &= 7 \quad (\Gamma_{эв}/c)^{-2}; \\ \text{для } N^*(1.52) \quad b &= 1,4 \quad (\Gamma_{эв}/c)^{-2}; \\ \text{для } N^*(1.69) \quad b &= 1,5 \quad (\Gamma_{эв}/c)^{-2}. \end{aligned}$$

Результаты расчетов представлены на графиках (рис. 7—9), где проводится сравнение с экспериментальными данными [55] в области передач $|t| = 0 \div 5 (\Gamma_{эв}/c)^2$ при энергии налетающих протонов в лабораторной системе $20 \Gamma_{эв}/c$. На рис. 7 и 8 отложена для сравнения усредненная кривая упругого pp -рассеяния.

Как видно из графиков, теоретические кривые хорошо ложатся на экспериментальные точки в области применимости решения (5.11), отвечающей относительно малым углам. Минимумы, соответствующие экспериментальным провалам, лежат в области $|t| \approx 1,6 -$

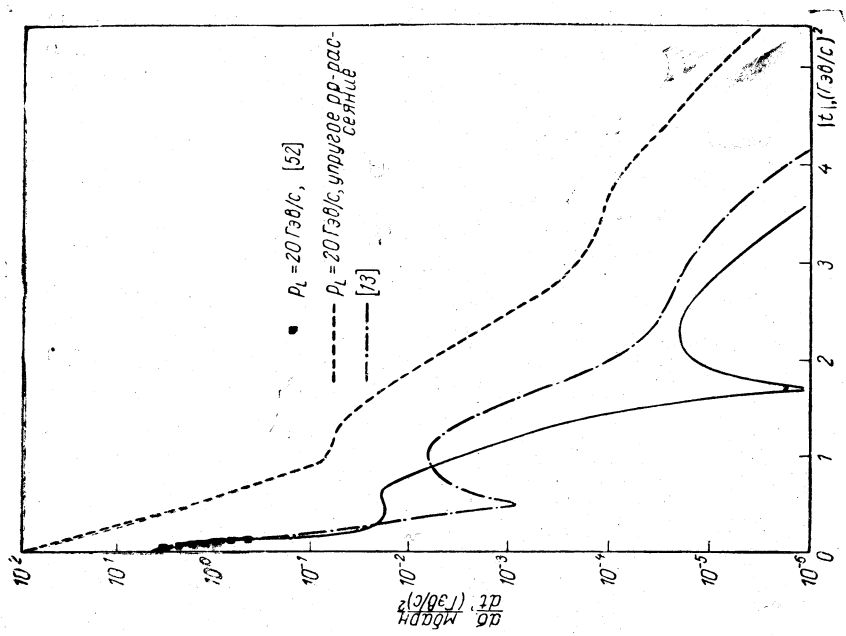


Рис. 8. Рождение N^* (1.4) изобары в рр-столкновениях при $P_L = 20$ ГэВ/с.

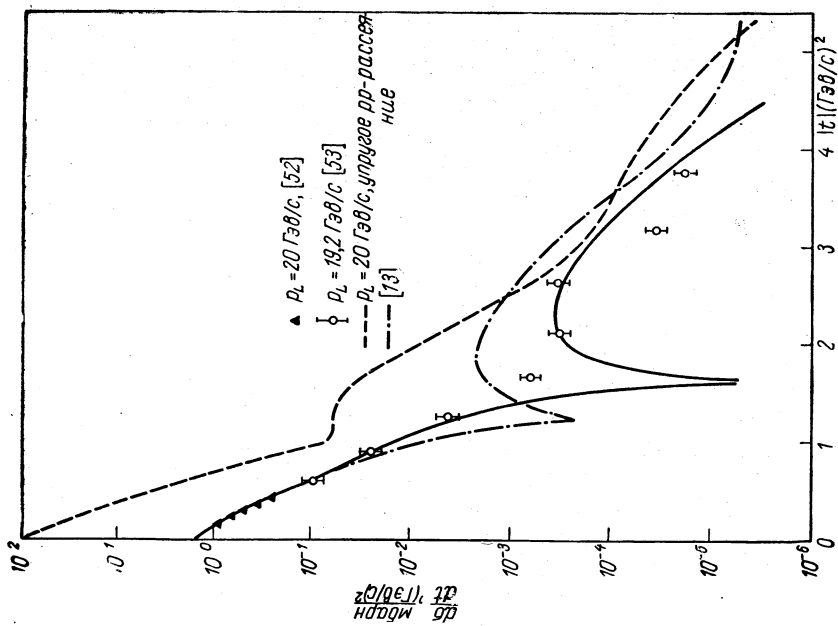


Рис. 7. Рождение N^* (1.69) изобары в рр-столкновениях при $P_L = 20$ ГэВ/с.

— $1,8 (\text{Гэв}/c)^{2*}$. Последующий выход на новый режим указывает на переходы от одиночного к двойному и т. д. перерасеянию.

Таким образом, модель с упругим перерасеянием в рождении изобар хорошо согласуется с соответствующей экспериментальной ситуацией. Интересно отметить экспериментальные указания в пользу такой картины для этих процессов [51].

Полное сечение возбуждения $pp \rightarrow pN_{I=1/2}^*$ почти постоянно и не зависит от энергии выше $p_L = 10 \text{ Гэв}/c$. Это аналогично поведе-

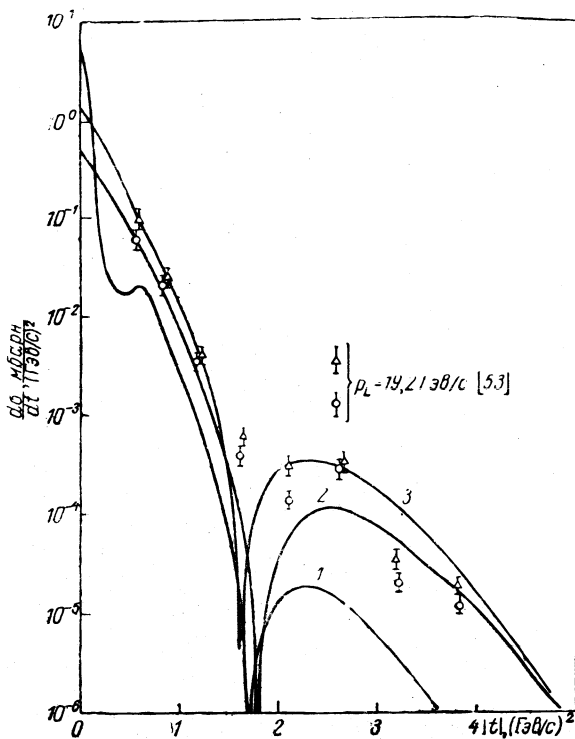


Рис. 9. Сравнительный график сечений рождений изобар:

1 — N^* (1.4); 2 — N^* (1.52); 3 — N^* (1.69).

нию $\sigma_{\text{упр}}$ в упругом pp -рассеянии и подтверждает тот факт, что данные процессы протекают без изменения внутренних квантовых чисел.

Для сравнения на рис. 7 и 8 нанесены теоретические кривые работы [13], которые вычислялись в модели с перерасеяниями на полюсе Померанчука на основе формулы Глаубера.

* Вопрос о наличии нуля в амплитуде обсуждался в работе [22].

Отметим, что модельным описаниям рождения изобар при высоких энергиях посвящен также ряд работ [54].

Рассмотрим уравнение (5.11) в области больших фиксированных углов, т. е. при

$$\left| \frac{t}{s} \right| = \sin^2 \frac{\theta}{2} = \text{фикс.} \quad (3.1)$$

Решение уравнения в этой области можно записать в виде

$$T^* \rightarrow c(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+\gamma)^{2n}}{n! \Gamma(n+\gamma)} \cdot \frac{e^{\frac{at}{n+\gamma}}}{(n+\gamma)^{3/2}} \left(\frac{isg_0 \pi \sqrt{\pi}}{atp \sqrt{a}} \right)^n, \quad (5.14)$$

где

$$c(s) = sg^* e^{\nu\Phi(\theta)} \gamma^{3/2} \Gamma(\gamma) \quad (5.15)$$

$n\gamma = a/b$, $\Phi(\theta)$ определена в работе [20]. Рассмотрим процессы $pp \rightarrow pN^*$ в области высоких энергий и больших передач импульса для изобар $N^*(1.52)$ и $N^*(1.69)$. Тогда в хорошем приближении $\gamma = \frac{a}{b} \approx 2$ и формула (5.14) примет вид

$$T^* \approx c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)^{2n}}{n! \Gamma(n+2)(n+2)^{3/2}} e^{\frac{at}{n+2}} (-ix)^n, \quad (5.16)$$

$$x = \frac{sg_0}{|t|p} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{3/2}.$$

Так как в области больших углов доминирующую роль в сумме играют номера $n \gg 1$, можно использовать формулу Стирлинга для факториалов и преобразовать амплитуду к виду

$$T^* \approx c \frac{e^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{at}{n+1}}}{(n+1)^{5/2}} (-ixe^2)^{n-1}. \quad (5.17)$$

Сравнивая (5.17) с результатом для амплитуды упругого рассеяния на фиксированный угол [22] и проводя аналогичные вычисления, получаем дифференциальное сечение рождения в области (3.1)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) \rightarrow cq^2 e^{-2q\sqrt{\pi a}}, \quad (5.18)$$

$\theta = \text{фикс}, s \rightarrow \infty.$

Константа c в (5.18) определена для значения $\gamma \approx 2$. Мы видим, что в формулу дифференциального сечения рождения на большой фиксированный угол входит только значение параметра наклона упругого рассеяния a . Таким образом, аналогия между угловыми распределениями рождения изобары N^* и упругим pp -рассеянием указывает, что должен существовать общий механизм, ответственный за эти процессы на большие углы, независимо от деталей конечного

состояния. Имеются экспериментальные факты [53], указывающие на это интересное свойство, а именно, что упругие и неупругие угловые распределения (для pp -системы) в области больших углов имеют одинаковый наклон, не зависящий от их соотношения при малых передачах импульса.

§ 6. РАССЕЯНИЕ СКАЛЯРНОЙ ЧАСТИЦЫ НА СПИНОРНОЙ

При изучении высокоэнергетического рассеяния адронов представляет интерес рассмотрение спиновых эффектов. В рамках квазипотенциального подхода это сводится к выводу и исследованию квазипотенциальных уравнений для частиц со спином.

Рассмотрим случай взаимодействующих частиц со спинами 0 и 1/2 и исследуем соответствующее уравнение в пределе высоких энергий. Не останавливаясь подробно на выводе, выпишем квазипотенциальное уравнение для волновой функции двух частиц в рассматриваемом случае*:

$$\left[E\gamma_0 - (\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + M) \left(1 + \frac{\omega}{W} \right) \right] \Psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\omega} \int V_E(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \Psi(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (6.1)$$

где $\omega = \sqrt{\mu^2 + \mathbf{p}^2}$; $W = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}$; μ и M — массы скалярной и спинорной частиц соответственно; E — полная энергия; \mathbf{p} — импульс в системе центра инерции; $(\gamma_0, \boldsymbol{\gamma})$ — матрицы Дирака.

Проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно показать, что в пределе высоких энергий квазипотенциальное уравнение (6.1) в случае локального квазипотенциала в координатном представлении переходит в уравнение типа Дирака с эффективным квазипотенциалом $\frac{1}{p}V(s, \mathbf{r})$:

$$[\varepsilon + i\alpha\nabla - \beta M - \beta V_{\text{эфф}}(s, \mathbf{r})] \Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (6.2)$$

где $\varepsilon = E/2$. Это уравнение в случае скалярного квазипотенциала приводит к следующей амплитуде рассеяния [56]:

$$T(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \Phi_0^*(\mathbf{p}) [a + \sigma_y b] \Phi_0(\mathbf{k}). \quad (6.3)$$

Здесь a и b — так называемые неспин-флиповая и спин-флиповая амплитуды соответственно; σ_y — матрица Паули. Амплитуды a и b имеют вид:

$$a = -ip \int_0^\infty \rho d\rho J_0(\rho\Delta) \{e^{i\chi_0} \cos \chi_1 - 1\}, \quad (6.4a)$$

$$b = -ip \int_0^\infty \rho d\rho J_1(\rho\Delta) e^{i\chi_0} \sin \chi_1. \quad (6.4b)$$

* Рассмотрению квазипотенциальных уравнений для двух спиновых частиц посвящен ряд работ [55].

Функции $\chi_0(\rho)$ и $\chi_1(\rho)$, называемые функциями эйконала, связаны с квазипотенциалом:

$$\chi_0(\rho) = \frac{1}{2ip} \int_{-\infty}^{+\infty} dz [V_{\text{эфф}}^2 + 2mV_{\text{эфф}}], \quad (6.5a)$$

$$\chi_1(\rho) = \frac{1}{2ip} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{\partial V_{\text{эфф}}}{\partial \rho}. \quad (6.5b)$$

Полученные результаты могут быть использованы, например, для анализа экспериментальных данных по πN - и KN -рассеяниям.

Отметим, что в работе [57] проведено рассмотрение этого круга задач на основе уравнения Шредингера в предположении о несингулярном поведении потенциала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы привели обсуждение некоторых результатов квазипотенциального подхода к процессам столкновения адронов при высоких энергиях.

Близкая связь уравнений квазипотенциального метода в квантовой теории поля с квантовомеханическим формализмом уравнения Шредингера в сочетании с физическим допущением о несингулярном характере взаимодействия адронов при высоких энергиях составляет базу данного подхода и делает его удобным инструментом в изучении закономерностей процессов столкновения адронов при высоких энергиях.

Теоретические результаты, полученные на основе квазипотенциального уравнения с квазипотенциалом гауссовского типа, находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными.

Авторы выражают глубокую благодарность Н. Н. Боголюбову за стимулирующие обсуждения рассматриваемых здесь вопросов и ценные замечания, А. Н. Тавхелидзе за постоянное внимание, интерес к работе, полезные обсуждения и плодотворное сотрудничество, Д. И. Блохинцеву, С. С. Герштейну, С. В. Голоскокову, В. Г. Кадышевскому, А. А. Логунову, М. А. Маркову, М. А. Мествиришвили, Р. М. Мурадян, Нгуен Ван Хьеу, М. К. Поливанову, В. И. Саврину, Я. А. Смородинскому, Л. Д. Соловьеву, Н. Е. Тюрину, О. А. Хрусталеву, В. П. Шелесту, Д. В. Ширкову за многочисленные плодотворные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Вычислим вклад $n+1$ итераций в амплитуду рассеяния (2.1) $T(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E)$ в области высоких энергий и малых углов рассеяния

$$T^{(n+1)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E) = (i s g_0)^{n+1} \iint \dots \int \frac{dq_1 \dots dq_n}{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} \times$$

$$\times \frac{\exp \left\{ -a(p - q_1)^2 + \sum_{l=1}^{n-1} (q_l - q_{l+1})^2 + (q_n - k)^2 \right\}}{\prod_{l=1}^n (q_l^2 - p^2 - i0)}, \quad (\text{A.1})$$

где $\varepsilon_l = \sqrt{q_l^2 + m^2}$ $l=1, 2, \dots, n$. Сделаем замену переменных: $\Delta_l = q_l - \lambda_l$, $l=1, 2, \dots, n$, где

$$\lambda_l = q_l^{\text{экстр}} = \frac{(n+1-l)p + lk}{n+1}, \quad l=1, 2, \dots, n \quad (\text{A.2})$$

экстремальные импульсы квадратичной формы в показателе экспоненты в выражении (A.1). Введем ортогональные векторы $l = \frac{p+k}{2}$, $r = \frac{p-k}{2}$, ($lr=0$) и перепишем выражение (A.2)

$$\lambda_l = l + \frac{n-2l+1}{n+1} r = l + r_l, \quad l=1, 2, \dots, n, \quad (\text{A.3})$$

где $r_l = \frac{n-2l+1}{n+1} r$. Тогда показатель экспоненты можно разделить на вклад в точке экстремума и остаток:

$$\begin{aligned} (p - q_1)^2 + (q_n - k)^2 + \sum_{l=1}^{n-1} (q_l - q_{l+1})^2 &= \frac{(p-k)^2}{n+1} + 2 \left[\sum_{l=1}^n \Delta_l^2 - \sum_{l=1}^{n-1} \Delta_l \Delta_{l+1} \right] = \\ &= \frac{(p-k)^2}{n+1} + \Delta_1^2 + \Delta_n^2 + \sum_{l=1}^{n-1} (\Delta_l - \Delta_{l+1})^2. \end{aligned}$$

В новых переменных (A.1) примет вид

$$\begin{aligned} T^{(n+1)}(p, k; E) &= (i \operatorname{sg}_0)^{n+1} e^{\frac{at}{n+1}} \iint \dots \int \frac{d\Delta_1 \dots d\Delta_n}{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} \times \\ &\times \frac{\exp \left\{ -2a \left[\sum_{l=1}^n \Delta_l^2 - \sum_{l=1}^{n-1} \Delta_l \Delta_{l+1} \right] \right\}}{\prod_{l=1}^n [(\Delta_l + \lambda_l)^2 - p^2 - i0]}. \end{aligned}$$

Разбиваем интегрирование по Δ на продольную и поперечные составляющие относительно вектора l :

$$\Delta = (\Delta_{\perp}; \Delta), \quad (\Delta_{\perp} l) = 0;$$

$$\begin{aligned} T^{(n+1)}(p, k; E) &= (i \operatorname{sg}_0)^{n+1} e^{\frac{at}{n+1}} \iint \dots \int d^2 \Delta_{\perp}^{(1)} \dots d^2 \Delta_{\perp}^{(n)} \times \\ &\times \exp \left\{ -2a \left[\sum_{l=1}^n \Delta_{\perp}^{(l)2} - \sum_{l=1}^{n-1} \Delta_{\perp}^{(l)} \Delta_{\perp}^{(l+1)} \right] \right\} I_n; \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

$$I_n = \iint \dots \int \frac{d\Delta_1 \dots d\Delta_n}{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} \cdot \frac{\exp \left\{ -2a \left[\sum_{l=1}^n \Delta_l^2 - \sum_{l=1}^{n-1} \Delta_l \Delta_{l+1} \right] \right\}}{\prod_{l=1}^n [\Delta_l^2 + 2\Delta_l l + (\Delta_{\perp}^{(l)} + r)^2 - i0]}.$$

Представим каждый знаменатель в виде разложения на два полюса:

$$\frac{1}{[\dots]_k} = \frac{1}{2l} \left(\frac{1}{\Delta_k + \frac{(\mathbf{r} + \Delta_{\perp}^k)^2}{2l} - i0} - \frac{1}{\Delta_k + 2l - \frac{(\mathbf{r} + \Delta_{\perp}^k)^2}{2l} + i0} \right).$$

Можно показать, что в области больших энергий и малых углов

$$|l| \gg 1, \quad |\mathbf{r}| \ll 1, \quad l^2 = p^2 + t/4$$

основной вклад будет вносить первый полюс. Тогда

$$I_n \approx \frac{1}{(2l^2)^n} \left\{ \iint \dots \int d\Delta_1 \dots d\Delta_n \frac{\exp \left\{ -2a \left[\sum_1^n \Delta_l^2 - \sum_1^{n-1} \Delta_l \Delta_{l+1} \right] \right\}}{\prod_{l=1}^n \left(\Delta_l + \frac{\Delta_{\perp}^{(l)^2}}{2l} - i0 \right)} - J_n \right\},$$

где учтено, что при тех же предположениях $\varepsilon_k \approx l$ ($k=1, 2, \dots, n$) и J_n есть вклад неглавных полюсов. Представим каждый гауссовский множитель

в спектральной форме $e^{-a\Delta^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Delta z} v(z) dz$. Учитывая определение

θ -функции в пределе $\frac{\Delta_{\perp}^{(l)^2}}{2l} \rightarrow 0$, нетрудно получить

$$I_n \approx \frac{1}{(2l^2)^n} \left\{ \frac{(2\pi i)^n}{(n+1)!} - J_n \right\}.$$

Таким образом, главный вклад в амплитуду рассеяния в данной области

$$T^{(n+1)}(p, k; E) \approx (i sg_0)^{n+1} e^{\frac{at}{n+1}} \left(\frac{2\pi i}{2l^2} \right)^n \frac{1}{(n+1)!} \iint \dots \int d^2 \Delta_1 \dots d^2 \Delta_n \times \\ \times \exp \left\{ -2a \left[\sum_1^n \Delta_{\perp}^{l^2} - \sum_1^{n-1} \Delta_{\perp}^l \Delta_{\perp}^{l+1} \right] \right\}.$$

Используя известную формулу

$$\iint \dots \int d^2 \Delta_1 \dots d^2 \Delta_n \exp \left\{ -a \sum_{\alpha, \beta} C_{\alpha\beta} \Delta_{\alpha} \Delta_{\beta} \right\} = \left(\frac{\pi}{a} \right)^n \frac{1}{\text{Det } C} \quad (\text{A.5})$$

и учитывая, что в нашем случае $\text{Det } C = n+1$, получаем окончательно

$$T^{(n+1)}(p, k; E) \approx (i sg_0)^{n+1} \frac{e^{\frac{at}{n+1}}}{(n+1)!} \left(\frac{2\pi i}{2l^2} \right)^n \left(\frac{\pi}{a} \right)^n \frac{1}{n+1} = \\ = i sg_0 \left(-\frac{4\pi^2 g_0}{a} \right)^n \frac{e^{\frac{at}{n+1}}}{(n+1)(n+1)!}. \quad (\text{A.6})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Проведем вычисление $T^{(n+1)}(p, k; E)$ в области (3.1). В дальнейшем мы будем использовать обозначения приложения А. Рассмотрим

$$T^{(n+1)}(p, k; E) = (i sg_0)^{n+1} e^{\frac{at}{n+1}} \iint \dots \int \frac{d^3 \Delta_1 \dots d^3 \Delta_n}{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} \times$$

$$\times \frac{\exp \left\{ -2a \left[\sum_{l=1}^n \Delta_l^2 - \sum_{l=1}^{n-1} \Delta_l \Delta_{l+1} \right] \right\}}{\prod_{l=1}^n [(\Delta_l + \lambda_l)^2 - p^2 - i0]} \quad (\text{Б.1})$$

В пределе высоких энергий, не предполагая малости угла рассеяния

$$\varepsilon_l = \sqrt{(\Delta_l + \lambda_l)^2 + m^2} \approx |\lambda_l| = p \sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{(n+1-l)l}{(n+1)^2}} \quad (\text{Б.2})$$

$$l = 1, 2, \dots, n,$$

где λ_l определена в (А.2), θ -- угол рассеяния в системе центра инерции, так как

$$\lambda_l^2 - p^2 = -4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{l(n+1-l)}{(n+1)^2};$$

$$\prod_{l=1}^n (\Delta_l^2 + 2\Delta_l \lambda_l + \lambda_l^2 - p^2 - i0) \approx \prod_{l=1}^n (\lambda_l^2 - p^2 - i0) =$$

$$= \frac{(-4p^2 \sin^2 \theta/2)^n}{(n+1)^{2n}} \prod_{l=1}^n l(n+1-l) = \frac{t^n (n!)^2}{(n+1)^{2n}}. \quad (\text{Б.3})$$

Учитывая (Б.2), (Б.3), из (Б.1) получаем

$$T^{(n+1)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E) = \frac{(i s g_0)^{n+1} (n+1)^{2n}}{p^n t^n (n!)^2} \cdot \frac{e^{\frac{at}{n+1}}}{\prod_{l=1}^n \sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{(n+1-l)l}{(n+1)^2}}} \times$$

$$\times \iint \dots \int d\Delta_1 \dots d\Delta_n \exp \left\{ -2a \left[\sum_{l=1}^n \Delta_l^2 - \sum_{l=1}^{n-1} \Delta_l \Delta_{l+1} \right] \right\}. \quad (\text{Б.4})$$

Интегрирование в (Б.4) ведется по 3-импульсам Δ . Используем трехмерный аналог формулы (А.5). Тогда

$$T^{(n+1)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E) = i s g_0 \left(\frac{i s g_0 \pi \sqrt{\pi}}{p t a \sqrt{a}} \right)^n \frac{(n+1)^{2n} e^{\frac{at}{n+1}}}{(n!)^2 (n+1)^{3/2}} \times$$

$$\times \frac{1}{\prod_{l=1}^n \sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{(n+1-l)l}{(n+1)^2}}}. \quad (\text{Б.5})$$

Рассмотрим функцию

$$f_n(\gamma) = \prod_{l=1}^n \left(1 - \gamma \frac{l}{n+1} \right), \quad \text{где } \gamma = 2i \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\theta/2},$$

$$|f_n(\gamma)| = \prod_{l=1}^n \sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{(n+1-l)l}{(n+1)^2}},$$

и вычислим $\ln f_n(\gamma)$ для $n \gg 1$

$$\begin{aligned} \ln f_n(\gamma) &= \sum_{l=1}^n \ln \left(1 - \gamma \frac{l}{n+1} \right) \approx \int_0^n \ln \left(1 - \gamma \frac{l}{n} \right) dl = \\ &= -n \left[1 + \frac{1-\gamma}{\gamma} \ln(1-\gamma) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\prod_{l=1}^n \sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{(n+1-l)l}{(n+1)^2}} \approx e^{-n\varphi(\theta)}, \quad n \gg 1,$$

где $\varphi(\theta) = 1 + \operatorname{Re} \frac{1-\gamma}{\gamma} \ln(1-\gamma) = 1 - \frac{\theta}{2 \operatorname{tg} \theta/2}$.

Подставляя это выражение в (Б.5), получаем вклад в $T^{(n+1)}$ в области (3.1):

$$T^{(n+1)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E) \cong i \operatorname{sg}_0 \left(\frac{i \operatorname{sg}_0 e^{\varphi(\theta)} \pi \sqrt{\pi}}{a \sqrt{a} p t} \right)^n \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{e^{\frac{at}{n+1}}}{(n+1)^{3/2}}. \quad (\text{Б.6})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Вычислим $H = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n H^{(n; k)}$ в области (4.4), где

$$H^{(n; k)} = \underbrace{g \otimes g \otimes \dots \otimes g}_{k-1} \otimes \underbrace{h \otimes g \otimes \dots \otimes g}_{n-k+1}, \quad (\text{В.1})$$

а $g(s, t)$, $h(s, u)$ определены формулами (4.3). Выпишем $H^{(n; k)}$ в явной форме:

$$\begin{aligned} H^{(n; k)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E) &= (i \operatorname{sg}_0)^n h_0(s) \iint \dots \int \frac{dq_1 \dots dq_n}{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} \times \\ &\exp \left\{ -a[(\mathbf{p} - \mathbf{q}_1)^2 + \dots + (\mathbf{q}_{k-2} - \mathbf{q}_{k-1})^2] - b(\mathbf{q}_{k-1} + \mathbf{q}_k)^2 - \right. \\ &\left. - a[(\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k+1})^2 + \dots + (\mathbf{q}_n - \mathbf{k})^2] \right\} \\ &\times \frac{1}{\prod_{l=1}^n (\mathbf{q}_l^2 - p^2 - i0)}. \end{aligned}$$

Введем по аналогии с (А.2) систему экстремальных импульсов и сделаем замену

$$\Delta_i = \mathbf{q}_i - \lambda'_i; \quad i = 1, 2, \dots, k-1;$$

$$\Delta_i = \mathbf{q}_i - \lambda_i, \quad i = k, k+1, \dots, n;$$

где $\lambda'_l = \frac{[a + (n-l)b] \mathbf{p} - l b \mathbf{k}}{a + nb} = 1 + \mathbf{r}'_l, \quad l = 1, 2, \dots, k-1; \quad (\text{В.2})$

$$\lambda_l = \frac{-(n+1-l)b \mathbf{p} + [a + b(l-1)] \mathbf{k}}{a + nb} = -1 + \mathbf{r}_l, \quad l = k, \dots, n \quad (\text{В.2}')$$

и $\mathbf{r}'_l = \frac{a + (n-2l)b}{a + nb} \mathbf{r}, \quad l = 1, 2, \dots, k-1;$

$$\mathbf{r}_l = \frac{a - [n-2(l-1)]b}{a + nb} \mathbf{r}, \quad l = k, k+1, \dots, n.$$

Отметим, что в отличие от приложения А здесь используются обозначения

$$l = \frac{p-k}{2}, \quad r = \frac{p+k}{2}.$$

Выражение для показателя экспоненты преобразуется после замены переменных следующим образом:

$$\begin{aligned} & a [(p-q_1)^2 + \dots + (q_{k-2} - q_{k-1})^2] + b (q_{k-1} + q_k)^2 + \\ & + a [q_k - q_{k+1})^2 + \dots + (q_n - k)^2] = \frac{ab}{a+bn} (p+k)^2 + \\ & + a \left[\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k-1}}^{n-1} (\Delta_l - \Delta_{l+1})^2 + \Delta_1^2 + \Delta_n^2 \right] + b (\Delta_{k-1} + \Delta_k)^2. \end{aligned} \quad (B.3)$$

Учитывая (B.2) и (B.2'),

$$\begin{aligned} H^{(n; k)} = & (i \operatorname{sg}_0)^n h_0(s) e^{\frac{ab}{a+bn} u} \iint \dots \int \frac{d\Delta_1 \dots d\Delta_n}{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{k-1} [(\Delta_i + \lambda_i')^2 - \rho^2 - i0]} \times \\ & \times \frac{1}{\prod_{j=k}^n [(\Delta_j + \lambda_j)^2 - \rho^2 - i0]} \exp \left\{ -a \left[\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k-1}}^{n-1} (\Delta_l - \Delta_{l+1})^2 + \Delta_1^2 + \Delta_n^2 \right] - \right. \\ & \left. - b (\Delta_{k-1} + \Delta_k)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Разбиваем Δ на составляющие вдоль 1 и $\perp 1$:

$$\Delta = (\Delta_{\perp}, \Delta), \quad (\Delta_{\perp} \cdot 1) = 0$$

и вычисляем соответствующий интеграл по продольным составляющим

$$\begin{aligned} D^{(n; k)} = & \iint \dots \int \frac{d\Delta_1 \dots d\Delta_n}{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} \times \\ & \exp \left\{ -a \left[\sum_1^{n-1} (\Delta_l - \Delta_{l+1})^2 + \Delta_1^2 + \Delta_n^2 \right] - b (\Delta_{k-1} + \Delta_k)^2 \right\} \\ & \times \frac{1}{\prod_{i=1}^{k-1} [\dots] \prod_{j=k}^n [\dots]}. \end{aligned}$$

Выделяя аналогично приложению А вклады главных полюсов в области $\theta \approx \pi$, учитывая $l^2 = \rho^2 + u/4$, используя спектральные представления

$$e^{-a\Delta^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Delta z} v(z) dz; \quad e^{-b\Delta^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Delta z} u(z) dz$$

и определение θ -функции, получаем

$$\begin{aligned} D^{(n; k)} \simeq & \left(\frac{2\pi i}{2l^2} \right)^n \frac{1}{(n-k+1)! (k-1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} u(z) dz \times \\ & \times \left[\int_z^{\infty} v(x) dx \right]^{n-k+1} \left[\int_{-\infty}^z v(y) dy \right]^{k-1}. \end{aligned}$$

Взяв гауссовскую квадратуру по поперечным составляющим Δ с учетом, что $\text{Det } C = a^{n-1} (a + nb)$, получим

$$H^{(n; k)} \simeq (i s g_0)^n h_0(s) e^{\frac{ab}{a+bn} u} \left(\frac{\pi}{a}\right)^n \frac{a}{a+nb} \times \\ \times \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u(z) dz \left[\int_z^{\infty} v(x) dx \right]^{n-k+1} \left[\int_{-\infty}^z v(y) dy \right]^{k-1}}{(n-k+1)! (k-1)!} \quad (\text{B.4})$$

Окончательно результат суммирования по k можно представить в виде

$$H \simeq h_0(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a e^{\frac{ab}{a+bn} u}}{(a+nb) n!} \left(-\frac{4\pi^2 g_0}{a}\right)^n \quad (\text{B.5})$$

или в эйкональной форме

$$H \cong \frac{h_0(s)}{(2\pi)^3} \int e^{i\Delta\rho} d^2\rho \bar{\chi}(\rho, b) e^{2i\chi(\rho, a)}, \quad (\text{B.6})$$

$$\text{где } \chi(\rho, a) = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{+\infty} V(s, \sqrt{\rho^2 + z^2}) dz; \\ \bar{\chi}(\rho, b) = \frac{1}{h_0(s)} \int_{-\infty}^{+\infty} V_e(s, \sqrt{\rho^2 + z^2}) dz \quad (\text{B.7})$$

функции эйконала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., Гостехиздат, 1958.
2. Epstein H. Rigorous Theoretical Considerations on High Energy Scattering, in Topical Conference on High Energy Collisions of Hadrons, CERN, Geneva, 1968.
- 2a. Logunov A. A., Nguyen Van Hieu. On Some Consequences of Analyticity and Unitarity, in Topical Conference on High Energy Collisions of Hadrons, CERN, Geneva, 1968.
3. Новый метод в теории сильных взаимодействий. Сб. статей. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
4. Ширков Д. В., Серебряков В. В., Мещеряков В. А. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. М., «Наука», 1967.
5. Померанчук И. Я. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **34**, 725 (1958).
6. Логунов А. А., Нгуен Ван Хьеу, Тодоров И. Т. «Успехи физ. наук», **88**, 51 (1966).
7. Bezpogikh G. G. et al. Preprint JINR E1-4628, Dubna, 1969.
8. Логунов А. А., Нгуен Ван Хьеу. Препринт СТФ 69-4, Серпухов, 1969.
9. Moliere G. Z. für Naturforsch., **2A**, B3 (1947). Glauber R. J. Lectures in Theoretical Physics. Vol. 1, Interscience Publishers, N. Y., 1959.
10. Логунов А. А., Мествиршвили М. А. Phys. Lett., **24B**, 620 (1967). Саврин В. И., Хрусталева О. А. Препринт ИФВЭ 68-19-К, Серпухов, 1968.

11. Arnold R. C. Phys. Rev., **153**, 1523 (1967); Torgerson R. Phys. Rev., **143**, 1194 (1966).
12. Islam M. M. Impact Parameter Description of High Energy Scattering. Lectures in Theoretical Physics, Vol. XB, 1968.
13. Frautschi S., Margolis B. Nuovo cimento, **56A**, 1155 (1968); **57A**, 427 (1968); Frautschi S., Kofoed-Hansen O., Margolis B. Nuovo cimento, **61A**, 41 (1969).
14. Cohen-Tannoudji G., Morel A., Navelet H. Nuovo cimento, **48A**, 1075 (1967); Rivers R. J., Saunders L. M. Nuovo cimento, **58A**, 385 (1968).
15. Chiu C. B., Finkelstein J. Nuovo cimento, **57A**, 649 (1968).
16. Finkelstein J., Jacob M. Nuovo cimento, **56A**, 681 (1968).
17. Chou T. T., Yang C. N. Phys. Rev., **170**, 1591 (1968); Phys. Rev., **175**, 1832 (1968); Durand L., Lipès R. Phys. Rev. Lett., **20**, 637 (1968).
18. Грибов В. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **53**, 654 (1968); Gribov V. N., Померанчук И. Я., Тер-Мартirosian К. А. Phys. Rev., **139B**, 184 (1965).
19. Ансельм А. А., Дятлов И. Т. «Ядерная физика», **6**, 591 (1967); Грибов В. Н., Мигдал А. А. «Ядерная физика», **8**, 1002 (1968); Тер-Мартirosian К. А. В сб. «Труды Международной теоретической школы по физике высоких энергий». Попрадске Плесо. Чехословакия, 1967, стр. 43.
20. Garsevanishvili V. R., Matveev V. A., Slepchenko L. A., Tavkhelidze A. N. Preprint JINR E2-4251, Dubna, 1969. Talk Given at the Coral Gables Conference, Miami, Gordon and Breach Science Publishers, p. 74, 1969.
21. Garsevanishvili V. R., Matveev V. A., Slepchenko L. A., Tavkhelidze A. N. Phys. Lett., **29B**, 191 (1969).
22. Гарсеванишвили В. Р., Голоскоков С. В., Матвеев В. А., Слещенко Л. А. «Ядерная физика», **10**, 627 (1969); Препринт ОИЯИ E2-4361, Дубна, 1969.
23. Garsevanishvili V. R., Matveev V. A., Slepchenko L. A., Tavkhelidze A. N. Preprint ICTP, IC/69/87, Trieste, 1969.
24. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. Nuovo cimento, **29**, 380 (1963).
25. Tavkhelidze A. N. Lectures on Quasipotential Method in Field Theory. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1964; Кадышевский В. Г., Тавхелидзе А. Н. Квазипотенциальный метод в релятивистской задаче двух тел. В сборнике, посвященном 60-летию Н. Н. Боголюбова. М., «Наука», 1969, стр. 261.
26. В сб. «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях». М., Изд-во иностр. лит., 1963.
27. Arvizov V. A., Varbashov V. M., Logunov A. A., Nguyen Van Hieu, Tavkhelidze A. N., Faustov R. N., Filiprov A. T. Phys. Lett., **4**, 272 (1963).
28. Барбашов В. М., Кулешов С. П. и др. Препринт ОИЯИ E2-4612, Дубна, 1969.
29. Боголюбов П. Н. Препринт ОИЯИ E2-4417, 1969; Int. Rep. ICTP, IC/69/77, Trieste, 1969.
30. Фаустов Р. Н. Лекции в международной зимней школе теоретической физики, ОИЯИ, Дубна, 1964.
31. Blokhintsev D. I. Nuovo cimento, **30**, 1094 (1963); Блохинцев Д. И., Барашенков В. С., Барбашов В. М. «Успехи физ. наук», **68**, 417 (1959).
32. Wu T. T., Yang C. N. Phys. Rev., **137B**, 708 (1965).
33. Alliluyev S. P., Gershtein S. S., Logunov A. A. Phys. Lett., **18**, 195 (1965).
34. Грибов В. Н., Померанчук И. Я. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **42**, 1682 (1962).

35. Logunov A. A., Soloviev L. D., Tavkhelidze A. N. Phys. Lett., **24B**, 181 (1967).
36. Rivers R. J. Phys. Rev. Lett., **22**, 85 (1969); Jenkovsky L. L., Lendyela I., Tutik R. S. Preprint ITF 63-30, Kiev, 1969.
37. Акимов В. И., Дрёмин И. М., Ройзен И. И., Чернавский Д. С. «Ядерная физика», **7**, 629 (1968).
38. Amati D., Cini M., Stanghellini A. Nuovo cimento, **30**, 193 (1963); Van Hove L. Lectures Given at the Cargese Summer school, 1963.
39. Саврин В. И., Хрусталеv О. А. «Ядерная физика», **8**, 1016 (1968); Андреев И. В., Дрёмин И. М. «Ядерная физика», **8**, 814 (1968).
40. Nilsson S. Nucleon — Nucleon interaction High Energy. International School on Elementary Particle Physics. Herceg Novi, 1968.
41. Harting D. et al. Nuovo cimento, **38**, 60 (1965).
42. Ogar J. et al. Phys. Rev., **152**, 1162 (1966).
43. Galbraith W. et al. Phys. Rev., **138B**, 913 (1965).
44. Cerulus F., Martin A. Phys. Lett., **8**, 80 (1964).
45. Logunov A. A., Mestvirishvili M. A. Phys. Lett., **24B**, 583 (1967).
46. Allaby J. V. et al. Phys. Lett., **25B**, 156 (1967).
47. Allaby J. V. et al. Phys. Lett., **28B**, 67 (1968).
48. Coccioni G. et al. Phys. Rev., **138B**, 165 (1965).
49. Manning G. et al. Nuovo cimento, **41**, 167 (1966).
50. Logunov A. A., Nguyen Van Hieu, Khrustalev O. A. Nucl. Phys., **50**, 295 (1964); Хелашвили А. А. Сообщ. АН ГрузССР, **42**, 555 (1966).
51. Belletini G. — Two-Body Intermediate and High Energy Collisions, Rapporteur's Talk, 14th International Conference on High Energy Physics, Vienna, 1968.
52. Anderson E. W. et al. Phys. Rev. Lett., **16**, 855 (1966).
53. Allaby J. V. et al. Phys. Lett., **28B**, 229 (1968); Анкенбрандт С. Н. et al. Phys. Rev., **170**, 1233 (1968).
54. Jacob M., Pokorski S. Nuovo cimento, **61A**, 233 (1969); Chiu C. B., Finkelstein J. Nuovo cimento, **59A**, 92 (1969); Arnold R. C. Phys. Rev., **157**, 1292 (1967).
55. Десмиров Г. М., Стоянов Д. Ц. Препринт ОИЯИ Р-1568, Дубна, 1964; Матвеев В. А., Мугадян Р. М., Tavkhelidze A. N. Preprint JINR E-2-3498, Dubna, 1967; Kadyshevsky V. G., Mateeв M. D. Nuovo cimento, **55A**, 275 (1968); Хелашвили А. А. Препринт ОИЯИ Р2-4327, Дубна, 1969.
56. Kuleshov S. P., Matveev V. A., Sissakian A. N. Preprint JINR E2-4455, Dubna, 1969.
57. Khrustalev O. A., Savrin V. I., Tsurin N. Ye. Preprint JINR E2-4479, Dubna, 1969.