К ВОПРОСУ О МОДЕЛЬНОМ ГАМИЛЬТОНИАНЕ В ТЕОРИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

Н. Н. Боголюбов

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ДУБНА

АННОТАЦИЯ

Рассматривается система фермионов с притяжением, описываемая модельным гамильтонианом теории сверхпроводимости с факторизующимся ядром. Получены асимптотически точные (при $V \to \infty$) оценки для минимального собственного значения гамильтониана, корреляционных функций и функций Грина.

ABSTRACT

A system of fermions with attraction described by the model Hamiltonian of the theory of superconductivity with separable interaction is considered. Asimptotically exact estimation (as $V \to \infty$) for the minimal eigenvalue of the Hamiltonian, correation functions and Green's functions are obtained.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Простейшая модельная система, рассматриваемая в теории сверхпроводимости, характеризуется гамильтонианом, в котором оставлено взаимодействие частиц лишь с противоположными импульсами и спинами:

$$H = \sum_f T(f) a_f^+ a_f - \frac{1}{2V} \sum_{f, f'} \lambda(f) \lambda(f') a_f^+ a_{-f}^+ a_{-f'} a_{f'}, \tag{1.1}$$

где $f = (\mathbf{p}, s)$, $s = \pm 1$; $\mathbf{p}$ — вектор импульса. При фиксировании $V = L^3$

$$p_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad p_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \quad p_z = \frac{2\pi}{L} n_z,$$

n_x, n_y, n_z — целые числа; $-f = (-\mathbf{p}, -s)$.

Наконец, $T(f) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu$, где $\mu > 0$ — химический потенциал,

$$\lambda(f) = \begin{cases} J \cdot \varepsilon(s) & \text{для } \left| \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu \right| \leqslant \Delta, \\ 0 & \text{для } \left| \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu \right| > \Delta; \end{cases}$$

$$\varepsilon(s) = \pm 1, \quad J = \text{const}.$$

Применение метода Бардина — Купера — Шриффера [1] и метода компенсации опасных диаграмм приводит в данном случае к одинаковому результату. Более того, в статье [2] было показано, что гамильтониан типа (1.1) представляет большой методический интерес, так как здесь мы имеем одну из весьма немногих, полностью решаемых задач статистической физики.

В упомянутой статье было установлено, что для этой задачи мы можем получить асимптотически точное (при $V \to \infty$) выражение свободной энергии.

Этот результат там был найден следующим образом: гамильтониан (1.1) особым способом разбивался на две части H_0 и H_1. Задача с гамильтонианом H_0 решалась точно. Для учета влияния H_1 применялась теория возмущений. Показывалось, что любой n-й член соответствующего разложения становится асимптотически малым при $V \to \infty$, в связи с чем и делалось заключение о том, что влиянием H_1 можно, вообще, пренебречь после предельного перехода $V \to \infty$. Разумеется, рассуждения такого рода не могут претендовать на математическую строгость, но надо, однако, подчеркнуть, что в задачах статистической физики часто используются еще более грубые приемы. Весьма распространены, например, приближенные методы, основанные на избирательном суммировании в каком-то смысле «главных членов» ряда теории возмущений, причем остальные члены, хотя они даже и не стремятся к нулю при $V \to \infty$, отбрасываются.

Сомнения в справедливости результатов заметки [2] возникли и в связи с тем, что различные попытки использовать обычную диаграммную технику Фейнмана (без учета «аномальных спариваний» $\overline{a_f\, a_{-f}}$, $\overline{a^+_{-f}\, a^+_f}$, к которым приводит каноническое u-, v-преобразование) не давали ожидаемого результата. Более того, в работе [3] автор, основываясь на суммировании некоторого класса диаграмм Фейнмана, получает решение, принципиально отличное от решения, полученного в статьях [1, 2], и считает эти последние неверными.

В работе [4] изучена цепочка зацепляющихся уравнений для функций Грина без применения теории возмущений. В ней показано, что функции Грина для гамильтониана H_0 удовлетворяют всей этой цепочке уравнений для точного гамильтониана $H = H_0 + H_1$ с ошибкой порядка $1/V$. Этим подтверждаются результаты заметки [2] и выявляется «неэффективность» добавки H_1.

Однако можно остановиться и на чисто математической точке зрения. Как только мы фиксировали гамильтониан, скажем в форме (1.1), мы имеем уже вполне определенную математическую задачу, которую и следует решать строго, без каких-то бы ни было «физических предположений». В этом случае приближенные выражения удовлетворяют точным уравнениям с погрешностью порядка $1/V$, и нам следует оценить разность между самыми точными и приближенными выражениями.

Имея в виду полную ясность в вопросе о поведении динамической системы с гамильтонианом (1.1), мы и станем в настоящей работе именно на такую чисто математическую точку зрения.

Будем изучать гамильтониан (1.1) при температуре $\theta = 0$ и строго покажем, что относительная разность $(E - E_0)/E_0$ между наименьшими энергетическими уровнями H и H_0, а также между соответствующими функциями Грина стремится к нулю при $V \to \infty$, получим оценки для порядка убывания.

Из методических соображений удобно расссматривать несколько более общий гамильтониан, содержащий члены, представляющие источники для рождения и уничтожения пар:

$$\mathcal{H} = \sum_f T(f)\, a_f^+ a_f - \nu \sum_f \frac{\lambda(f)}{2} (a_{-f} a_f + a_f^+ a_{-f}^+) -$$

$$- \frac{1}{2V} \sum_{f,\, f'} \lambda(f)\, \lambda(f')\, a_f^+ a_{-f}^+ a_{-f'} a_{f'}, \qquad (1.2)$$

где ν — параметр, который будем считать бо́льшим или равным нулю.

Заметим, что случай $\nu<0$ рассматривать не надо, так как он приводится к случаю $\nu>0$ тривиальным изменением калибровки ферми-операторов:

$$a_f \to \mathrm{i}\, a_f; \qquad a_f^+ \to -\mathrm{i}\, a_f^+.$$

Подчеркнем, что случай $\nu>0$ будет рассматриваться исключительно из тех соображений, что он представляет интерес для понимания ситуации в реальном случае $\nu = 0$.

Для предпринимаемого исследования не нужны будут те конкретные свойства функций $\lambda(f)$, $T(f)$, о которых говорилось выше. Вполне достаточно будет выполнения следующих общих условий:

1) функции $\lambda(f)$, $T(f)$ вещественны, кусочно непрерывны, обладают условиями симметрии

$$\lambda(-f) = -\lambda(f); \qquad T(-f) = T(f);$$

2) $\lambda(f)$ равномерно ограничена во всем пространстве, $T(f) \to \infty$ при $|f| \to \infty$;

3) $\frac{1}{V} \sum_f |\lambda(f)| \leqslant \mathrm{const}$ при $V \to \infty$;

4) $\lim\limits_{V\to\infty} \frac{1}{2V} \sum\limits_f \frac{\lambda^2(f)}{\sqrt{\lambda^2(f)\, x + T^2(f)}} > 1$ при достаточно малых положительных x.

Представим $\mathcal{H}$ (1.2) в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \tag{1.3}$$

где

$$\mathcal{H}_0 = \sum_f T(f)\, a_f^+ a_f - {}$$
$$- \frac{1}{2} \sum_f \lambda(f) \left\{ (\nu + \sigma^*)\, a_{-f}\, a_f + (\nu + \sigma)\, a_f^+ a_{-f}^+ \right\} + \frac{|\sigma|^2 V}{2}, \tag{1.4}$$

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{1}{2V} \left(\sum_f \lambda(f)\, a_f^+ a_{-f}^+ - V\sigma^* \right) \left(\sum_f \lambda(f)\, a_{-f}\, a_f - V\sigma \right). \tag{1.5}$$

Здесь σ — некоторое комплексное число.

Заметим, что если σ определить из условия минимума наименьшего собственного значения $\mathcal{H}_0$, а $\mathcal{H}_1$ отбросить, то придем к хорошо известному приближенному решению, которое рассматривалось в работах [1, 2 и 4]. Здесь наша задача будет состоять в нахождении оценок для отклонения минимальных собственных значений $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}$ и для отклонения соответствующих функций Грина. Покажем, что эти отклонения будут исчезать в процессе предельного перехода* $V \to \infty$.

§ 2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ГАМИЛЬТОНИАНА

1. В этом параграфе мы установим некоторые общие свойства модельного гамильтониана $\mathcal{H}$ (1.2). Рассмотрим числа заполнения $n_f = a_f^+ a_f$ и покажем, что разности $n_f - n_{-f}$ являются интегралами движения. Действительно,

$$a_{-f}\, a_f\,(n_f - n_{-f}) - (n_f - n_{-f})\, a_{-f}\, a_f = 0,$$

а также

$$a_f^+\, a_{-f}^+\,(n_f - n_{-f}) - (n_f - n_{-f})\, a_f^+\, a_{-f}^+ = 0,$$

поэтому

$$\mathcal{H}\,(n_f - n_{-f}) - (n_f - n_{-f})\,\mathcal{H} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(n_f(t) - n_{-f}(t)\right) = 0. \qquad (2.1)$$

2. Покажем, что для волновой функции $\Phi_{\mathcal{H}}$, соответствующей наименьшему собственному значению гамильтониана $\mathcal{H}$, можем положить

$$(n_f - n_{-f})\,\Phi_{\mathcal{H}} = 0 \qquad (2.2)$$

при любом f.

Для доказательства этого допустим обратное. Так как $(n_f - n_{-f})$ коммутируют с $\mathcal{H}$ (и друг с другом), всегда можно выбрать $\Phi_{\mathcal{H}}$ так, чтобы она являлась собственной функцией для всех этих операторов:

$$n_f - n_{-f} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}.$$

---

* За последнее время появились работы [7—12], в которых были развиты новые методы нахождения асимптотически точных выражений для многовременных корреляционных функций, функций Грина в случае произвольных температур θ. Были построены также оценки для нахождения точных при $V \to \infty$ выражений для свободных энергий для модельных систем типа БКШ. На основе анализа и обобщения этих работ удалось сформулировать новый принцип — принцип минимакса [12] для целого класса модельных задач статистической физики.

Обозначим K_0, K_-, K_+ соответственно совокупность индексов f, для которых

$$(n_f - n_{-f})\,\Phi_{\mathscr{H}} = 0, \qquad f \in K_0;$$
$$(n_f - n_{-f} - 1)\,\Phi_{\mathscr{H}} = 0, \qquad f \in K_+;$$
$$(n_f - n_{-f} + 1)\,\Phi_{\mathscr{H}} = 0, \qquad f \in K_-.$$

Допущение сводится к тому, что множества K_+, K_- не пустые и что*

$$\langle \Phi^*_{\mathscr{H}}\, \mathscr{H}\, \Phi_{\mathscr{H}} \rangle \leqslant \langle \varphi^*\, \mathscr{H}\, \varphi \rangle$$

для любой функции φ.

Потребуем далее, чтобы φ удовлетворяла дополнительным условиям:

$$(n_f - n_{-f})\,\varphi = 0. \tag{2.3}$$

Заметим теперь, что если $f \in K_+$, то $n_f = 1$, $n_{-f} = 0$, а если $f \in K_-$, то $n_f = 0$; $n_{-f} = 1$. Поэтому $\Phi_{\mathscr{H}}$ можно представить в виде прямого произведения

$$\Phi_{\mathscr{H}} = \Phi_{K_0}\, \Phi_{K_+}\, \Phi_{K_-},$$

где

$$\Phi_{K_+} = \prod_{f \in K_+} \delta(n_f - 1)\,\delta(n_{-f}); \quad \Phi_{K_-} = \prod_{f \in K_-} \delta(n_f)\,\delta(n_{-f} - 1),$$

а Φ_{K_0} является функцией только тех n_f, у которых $f \in K_0$:

$$\Phi_{K_0} = F(\ldots n_f \ldots); \quad \langle \Phi^+_{K_0}\, \Phi_{K_0} \rangle = 1, \quad f \in K_0.$$

Заметим далее, что

$$a_{-f}\, a_f\, \delta(n_f - 1)\,\delta(n_{-f}) = 0; \quad a_{-f}\, a_f\, \delta(n_f)\,\delta(n_{-f} - 1) = 0;$$
$$a^+_f\, a^+_{-f}\, \delta(n_f - 1)\,\delta(n_{-f}) = 0; \quad a^+_f\, a^+_{-f}\, \delta(n_f)\,\delta(n_{-f} - 1) = 0,$$

поэтому

$$a_{-f}\, a_f\, \Phi_{K_+}\, \Phi_{K_-} = 0; \quad a^+_f\, a^+_{-f}\, \Phi_{K_+}\, \Phi_{K_-} = 0,$$

если $f \in K_+$ или K_-.

---

* Символом $\langle \Phi^* \Psi \rangle$ будем обозначать скалярное произведение функций Φ и Ψ.

Следовательно,

$$\mathcal{H}\Phi_{\mathcal{H}} = \Bigl\{\sum_{f\in K_+} T(f) + \sum_{f\in K_-} T(f) + \sum_{f\in K_0} T(f)\,n_f -$$

$$-\frac{\nu}{2}\sum_{f\in K_0}\lambda(f)\left(a_{-f}a_f + a_f^+ a_{-f}^+\right) -$$

$$-\frac{1}{2V}\sum_{f\in K_0}\sum_{f'\in K_0}\lambda(f)\lambda(f')\,a_f^+ a_{-f}^+ a_{-f'} a_f\Bigr\}\Phi_{\mathcal{H}}.$$

И, стало быть,

$$\langle\Phi_{\mathcal{H}}^*\mathcal{H}\Phi_{\mathcal{H}}\rangle = \sum_{f\in K_+} T(f) + \sum_{f\in K_-} T(f) +$$

$$+\Bigl\langle\Phi_{K_0}^*\Bigl\{\sum_{f\in K_0} T(f)\,n_f - \frac{\nu}{2}\sum_{f\in K_0}\lambda(f)\left(a_{-f}a_f + a_f^+ a_{-f}^+\right) -$$

$$-\frac{1}{2V}\sum_{f\in K_0}\sum_{f'\in K_0}\lambda(f)\lambda(f')\,a_f^+ a_{-f}^+ a_{-f'} a_{f'}\Bigr\}\Phi_{K_0}\Bigr\rangle.$$

Разделим теперь множество $K_+ + K_-$ на два множества

$$K_+ + K_- = Q_+ + Q_-$$

таким образом, что в Q_+ войдут те индексы f из $K_+ + K_-$, для которых $T(f) \geqslant 0$, а в Q_- те из $K_+ + K_-$, для которых $T(f) < 0$. Ввиду симметрии $T(f) = T(-f)$ индекс f входит в Q_+ или Q_- всегда одновременно с $-f$.

Имеем

$$\langle\Phi_{\mathcal{H}}^*\mathcal{H}\Phi_{\mathcal{H}}\rangle = \sum_{f\in Q_+} |T(f)| - \sum_{f\in Q_-} |T(f)| +$$

$$+\Bigl\langle\Phi_{K_0}^*\Bigl\{\sum_{f\in K_0} T(f)\,n_f - \frac{\nu}{2}\sum_{f\in K_0}\lambda(f)\left(a_{-f}a_f + a_f^+ a_{-f}^+\right) -$$

$$-\frac{1}{2V}\sum_{f\in K_0}\sum_{f'\in K_0}\lambda(f)\lambda(f')\,a_f^+ a_{-f}^+ a_{-f'} a_{f'}\Bigr\}\Phi_{K_0}\Bigr\rangle.$$

Построим теперь функцию φ также в виде простого произведения, положив

$$\varphi = \Phi_{K_0}\Phi_{Q_+}\Phi_{Q_-},$$

где

$$\Phi_{Q_+} = \prod_{f\in Q_+}\delta(n_f)\,\delta(n_{-f});\qquad \Phi_{Q_-} = \prod_{f\in Q_-}\delta(n_f - 1)\,\delta(n_{-f} - 1).$$

(Здесь именно существенно, что f одновременно с $-f$ принадлежит Q_+ или Q_-). Для такой функции

$$\langle \varphi^* \mathscr{H} \varphi \rangle = -2 \sum_{f \in Q_-} |T(f)| +$$

$$+ \left\langle \Phi^*_{K_0} \left\{ \sum_{f \in K_0} T(f)\, n_f - \frac{\nu}{2} \sum_{f \in K_0} \lambda(f) \left(a_{-f}\, a_f + a^+_f\, a^+_{-f} \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{2V} \sum_{f \in K_0} \sum_{f' \in K_0} \lambda(f)\, \lambda(f')\, a^+_f\, a^+_{-f}\, a_{-f'}\, a_{f'} \right\} \Phi_{K_0} \right\rangle - \frac{1}{2V} \sum_{f \in Q_-} \lambda^2(f).$$

Как видно,

$$\langle \Phi^*_{\mathscr{H}}\, \mathscr{H}\, \Phi_{\mathscr{H}} \rangle > \langle \varphi^*\, \mathscr{H}\, \varphi \rangle.$$

С другой стороны, по способу построения φ удовлетворяет всем дополнительным условиям (3), и мы пришли к противоречию с формулой (2). Таким образом, наше утверждение доказано. Из утверждения (2.2), в частности, вытекает, что полный импульс для $\Phi_{\mathscr{H}}$ равен нулю:

$$\sum_{\mathbf{f}} \mathbf{f} n_{\mathbf{f}}\, \Phi_{\mathscr{H}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{f}} \mathbf{f} \left(n_f - n_{-f} \right) \Phi_{\mathscr{H}} = 0. \tag{2.4}$$

Как следует из ранее сказанного, собственную функцию Φ для наименьшего собственного значения $\mathscr{H}$ можно всегда искать в классе функций φ, подчиненных дополнительным условиям (2.3). Заметим, что для этого специального класса φ, удовлетворяющих условию (2.3), гамильтониан $\mathscr{H}$ можно выразить через амплитуды Паули.

Рассмотрим операторы

$$b_f = a_{-f}\, a_f; \qquad b^+_f = a^+_f\, a^+_{-f}.$$

Независимо от дополнительных условий имеем

$$b_f\, b_{f'} = b_{f'}\, b_f; \quad b^+_f\, b^+_{f'} = b^+_{f'}\, b^+_f; \quad b^2_f = 0; \quad b^{+2}_f = 0;$$

$$b_f\, b^+_{f'} - b^+_{f'}\, b_f = 0; \quad f \neq f'.$$

Кроме того, с учетом дополнительных условий имеем

$$b^+_f\, b_f + b_f\, b^+_f = n_f\, n_{-f} + (1 - n_f)(1 - n_{-f}) = 1,$$

так как n_f и n_{-f} одновременно либо оба равны нулю, либо оба равны единице.

Итак, на рассматриваемом классе (2.3) операторы b_f, b_f^+ являются амплитудами Паули. На этом классе функций гамильтониан (1.2) имеет вид

$$\mathscr{H}=2\left\{\sum_{f>0} T(f)\, b_f^+ b_f - \frac{\nu}{2}\sum_{f>0}\lambda(f)\{b_f+b_f^+\} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{V}\sum_{\substack{f>0\\ f'>0}}\lambda(f)\lambda(f')\, b_f^+ b_{f'}\right\}. \qquad (2.5)$$

Мы выделили класс индексов $f>0$, чтобы все операторы b_f были различны, так как $b_f = -b_{-f}$. Гамильтониан такого типа рассматривался в нашей работе [5].

§ 3. ОЦЕНКА СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ГАМИЛЬТОНИАНА (1.2) СВЕРХУ

Рассмотрим теперь вопрос об оценке сверху минимального собственного значения гамильтониана $\mathscr{H}$. Будем исходить из представления гамильтониана $\mathscr{H}$ в виде (1.2). Обозначим $E_{\mathscr{H}}$ наименьшее собственное значение гамильтониана $\mathscr{H}$ (1.2) и $E_0(\sigma)$ — наименьшее собственное значение гамильтониана $\mathscr{H}_0$ (1.4). Заметим, что оператор $\mathscr{H}_1<0$, и поэтому минимальное собственное значение гамильтониана $\mathscr{H}_0$ больше минимального собственного значения гамильтониана $\mathscr{H}=\mathscr{H}_0+\mathscr{H}_1$

$$E_0(\sigma)\geqslant E_{\mathscr{H}} \qquad (3.1)$$

при любом σ. Таким образом, минимальные собственные значения гамильтониана $\mathscr{H}_0$ мажорируют минимальное собственное значение $\mathscr{H}$. Наилучшая оценка получится при σ, дающем $\min E_0(\sigma)$.

Перейдем теперь к вычислению собственных значений гамильтониана $\mathscr{H}_0$. Совершая соответствующее каноническое преобразование, диагонализирующее квадратичную форму $\mathscr{H}_0$ (1.4), получаем тождество:

$$\mathscr{H}_0=\sum_f \sqrt{\lambda^2(f)(\nu+\sigma^*)(\nu+\sigma)+T^2(f)}\times$$
$$\times\left(a_f^+ u_f + a_{-f} v_f^*\right)\left(u_f a_f + v_f a_{-f}^+\right)+$$
$$+\frac{1}{2}V\left\{\sigma^*\sigma-\frac{1}{V}\sum_f\left[\sqrt{\lambda^2(f)(\nu+\sigma^*)(\nu+\sigma)+T^2(f)}-T(f)\right]\right\}, \qquad (3.2)$$

где

$$\left.\begin{aligned} u_f&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{T(f)}{\sqrt{\lambda^2(f)(\nu+\sigma^*)(\nu+\sigma)+T^2(f)}}},\\ v_f&=\frac{-\varepsilon(f)}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{T(f)}{\sqrt{\lambda^2(f)(\nu+\sigma^*)(\nu+\sigma)+T^2(f)}}}\;\frac{\sigma+\nu}{|\sigma+\nu|}.\end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

Здесь

$$\lambda(f)=\varepsilon(f)\,|\lambda(f)|; \quad \varepsilon(f)=\operatorname{sign}\lambda(f). \tag{3.4}$$

Очевидно,

$$u(-f)=u(f); \quad v(-f)=-v(f); \quad u^2+|v|^2=1, \tag{3.5}$$

где u вещественно, v комплексно.

Отсюда видно, что амплитуды

$$\left.\begin{aligned} \alpha_f &= u_f\, a_f + v_f\, a^+_{-f}; \\ \alpha_f^+ &= u_f\, a_f^+ + v_f^*\, a_{-f} \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

фермионные. Следовательно, выражение для $\mathscr{H}_0$ можно переписать в виде

$$\mathscr{H}_0=\sum \sqrt{\lambda^2(f)(\nu+\sigma^*)(\nu+\sigma)+T^2(f)}\ \alpha_f^+\alpha_f+$$
$$+\frac{1}{2}V\left\{\sigma^*\sigma-\frac{1}{V}\sum_f\left[\sqrt{(\nu+\sigma^*)(\nu+\sigma)\lambda^2(f)+T^2(f)}-T(f)\right]\right\}. \tag{3.7}$$

Очевидно, что $\min\mathscr{H}_0$ будет достигаться для чисел заполнения $\alpha_f^+\alpha_f=0$. Следовательно, для энергии основного состояния гамильтониана $\mathscr{H}_0$ получаем

$$E_0(\sigma)=\frac{1}{2}V\left\{\sigma^*\sigma-\frac{1}{V}\sum_f\left[\sqrt{\lambda^2(f)(\nu+\sigma^*)(\nu+\sigma)+T^2(f)}-T(f)\right]\right\}. \tag{3.8}$$

Для улучшения оценки $E_{\mathscr{H}}$ сверху необходимо взять $\min E_0(\sigma)$.

Рассмотрим отдельно следующие случаи:

1. **Случай $\nu=0$.** Положим $x=\sigma^*\sigma>0$, тогда $E_0(\sigma)=\frac{1}{2}VF(\sigma^*\sigma)$, где

$$F(x)=x-\frac{1}{V}\sum_f\left\{\sqrt{\lambda^2(f)\,x+T^2(f)}-T(f)\right\}.$$

В этом случае, как видно из условия минимума, можно определить только модуль σ, но не ее фазу. Имеем

$$F'(x)=1-\frac{1}{2V}\sum_f\frac{\lambda^2(f)}{\sqrt{\lambda^2(f)\,x+T^2(f)}};$$

$$F''(x)=\frac{1}{4V}\sum_f\frac{\lambda^4(f)}{\left(\sqrt{\lambda^2(f)\,x+T^2(f)}\right)^3}.$$

Как видно, $F''(x)>0$ в интервале $0\leq x\leq\infty$, и поэтому $F'(x)$ может иметь в этом интервале не больше одного корня. Принимая во внимание свойства функций $\lambda(f)$ и $T(f)$ (см. § 1), будем иметь $F'(0)<0$; $F'(\infty)>0$. И, следовательно, в интервале $0<x<\infty$ существует одно-единственное решение уравнения $F'(x)=0$, которое и реализует абсолютный минимум. Таким образом, окончательно имеем

$$\frac{V}{2}\min F(x)\geqslant E_{\mathscr{H}} \qquad (0<x<\infty). \tag{3.9}$$

2. **Случай $\nu>0$.** Положим $(\nu+\sigma^*)(\nu+\sigma)=x$ (очевидно, что $x>0$) и заметим, что

$$\sigma^*\sigma=x+\nu^2-\nu(\sigma+\nu+\sigma^*+\nu)=$$
$$=(\sqrt{x}-\nu)^2+\nu\left\{2\sqrt{x}-(\sigma+\nu+\sigma^*+\nu)\right\}.$$

Корню здесь, как всегда, приписываем знак $+$. Тогда

$$\sigma+\nu=\sqrt{x}\,e^{i\varphi};\qquad \sigma^*+\nu=\sqrt{x}\,e^{-i\varphi}$$

и

$$\sigma^*\sigma=(\sqrt{x}-\nu)^2+2\nu\sqrt{x}\,(1-\cos\varphi).$$

Поэтому

$$E_0(\sigma)=\frac{V}{2}F(x)+V\nu\sqrt{x}\,(1-\cos\varphi), \tag{3.10}$$

где

$$F(x)=(\sqrt{x}-\nu)^2-\frac{1}{V}\sum_f\left\{\sqrt{\lambda^2(f)\,x+T^2(f)}-T(f)\right\}.$$

Имеем далее:

$$F'(x)=1-\frac{\nu}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2V}\sum_f\frac{\lambda^2(f)}{\sqrt{\lambda^2(f)\,x+T^2(f)}};$$

$$F''(x)=\frac{\nu}{2x^{3/2}}+\frac{1}{4V}\sum_f\frac{\lambda^4(f)}{(\lambda^2(f)\,x+T^2(f))^{3/2}}.$$

Так как $F''(x)>0$, видим, что $F'(x)$ не может иметь больше одного корня в интервале $[0,\infty]$. Но $F'(0)=-\infty$, $F'(\infty)=1$. Поэтому существует x_0 в интервале $0<x_0<\infty$, для которого $F'(x_0)=0$. Как раз при этом значении x_0 функция $F(x)$ имеет абсолютный минимум.

Из (3.10) видно, что единственно возможный выбор σ, соответствующий абсолютному минимуму, будет

$$x=x_0,\qquad \varphi=0. \tag{3.11}$$

Таким образом, имеем

$$\sigma+\nu=\sqrt{x},\qquad \sigma=\sqrt{x}-\nu.$$

Итак, в данном случае ($\nu>0$) определится и фаза σ. Как видим, σ должно быть вещественным. Имеем также

$$\frac{V}{2}\min F(x)\geqslant E_{\mathscr{H}} \qquad (0<x<\infty). \tag{3.12}$$

Простые соображения, использованные в работе [2], показывают, что в формуле (1.3) дополнительный член $\mathscr{H}-\mathscr{H}_0=\mathscr{H}_1$ неэффективен при $V\to\infty$. Однако строгое установление этого свойства затрудняется тем, что мы имеем только оценку сверху для $E_{\mathscr{H}}$ и не имеем аналогичной оценки снизу. Было бы, вообще, желательно аннулировать член

$$\left(\sum_f \lambda(f)\,a_f^+\,a_{-f}^+-V\sigma^*\right)\left(\sum_f \lambda(f)\,a_{-f}\,a_f-V\sigma\right).$$

Этого можно было бы добиться, взяв за σ не число, а оператор

$$L=\frac{1}{V}\sum_f \lambda(f)\,a_{-f}\,a_f.$$

Но с оператором нельзя делать канонических преобразований от фермионов a к фермионам α. Мы, однако, постараемся обобщить тождество (3.2) на такой случай. Надо только будет правильно установить порядок операторов. Именно таким путем и докажем теоремы о том, что с помощью $\mathscr{H}_0$ можно получить асимптотически точное решение для $\mathscr{H}$ при $V\to\infty$.

§ 4. ОЦЕНКА СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ГАМИЛЬТОНИАНА СНИЗУ

Для того чтобы получить оценку гамильтониана (1.2) снизу, обобщим прежде всего тождество (1.3) таким образом, чтобы обратить в нуль член $\mathscr{H}_1$ (1.5). Это можно сделать, рассматривая σ не как c-число, а как некоторый оператор L:

$$L=\frac{1}{V}\sum_f a_{-f}\,a_f\,\lambda(f). \tag{4.1}$$

Вместо c-числа $(\nu+\sigma^*)(\nu+\sigma)$ введем операторы

$$K=(L+\nu)(L^++\nu)+\beta^2, \qquad \widetilde{K}=(L^++\nu)(L+\nu)+\beta^2, \tag{4.2}$$

где β — некоторая константа.

Введем теперь операторы:

$$\begin{aligned} p_f&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{K\lambda^2(f)+T^2(f)}+T(f)}\,; \qquad p_f=p_f^+;\\ q_f&=-\frac{\varepsilon(f)}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{K\lambda^2(f)+T^2(f)}-T(f)}\cdot\frac{1}{\sqrt{K}}(L+\nu). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Очевидно,

$$p_f q_f = -\frac{\lambda(f)}{2}(L+\nu); \qquad (4.4)$$

$$p_f^2 = \frac{1}{2}\{\sqrt{K\lambda^2(f)+T^2(f)}+T(f)\}; \qquad (4.5)$$

$$q_f^+ q_f = (L^+ + \nu)\frac{1}{2K}\{\sqrt{K\lambda^2(f)+T^2(f)}-T(f)\}(L+\nu). \qquad (4.6)$$

Принимая во внимание, что для любого оператора ξ имеет место тождество

$$\xi^+ F(\xi\xi^+)\xi = \xi^+\xi F(\xi^+\xi), \qquad (4.7)$$

выражение (4.8) можно записать в виде

$$q_f^+ q_f = (L^+ + \nu)(L+\nu)\frac{1}{2\tilde{K}}\left\{\sqrt{\tilde{K}\lambda^2(f)+T^2(f)}-T(f)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\tilde{K}\lambda^2(f)+T^2(f)}-T(f)\right\} - \frac{\beta^2}{2\tilde{K}}\left\{\sqrt{\tilde{K}\lambda^2(f)+T^2(f)}-T(f)\right\}. \qquad (4.8)$$

Применяя в дальнейшем лемму II (см. Приложение формулы П1.9—П1.10), напишем

$$q_f^+ q_f = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\lambda^2(f)\left(K+\frac{2s}{V}\right)+T^2(f)}-T(f)\right\} -$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\lambda^2(f)\left(K+\frac{2s}{V}\right)+T^2(f)}-\sqrt{\lambda^2(f)\tilde{K}+T^2(f)}\right\} -$$

$$-\frac{\beta^2}{2\tilde{K}}\left\{\sqrt{\tilde{K}\lambda^2(f)+T^2(f)}-T(f)\right\}. \qquad (4.9)$$

Заметим, что второй член справа не отрицателен, а s — верхняя грань выражения $\frac{1}{V}\sum_f |\lambda(f)|^2$:

$$\frac{1}{V}\sum_f |\lambda(f)|^2 \leqslant s. \qquad (4.10)$$

Кроме того, имеем

$$p_f^2 = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2(f)+T^2(f)}+T(f)\right\} -$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2(f)+T^2(f)}-\sqrt{K\lambda^2(f)+T^2(f)}\right\}. \qquad (4.11)$$

Рассмотрим теперь формулу

$$\Omega = \sum_f (a_f^+ p_f + a_f q_f^+)(p_f a_f + q_f a_{-f}^+). \tag{4.12}$$

Используя равенство $q_f^+ q_f = q_{-f}^+ q_{-f}$ и (4.4), получаем

$$\Omega = \sum_f a_f^+ p_f^2 a_f + \sum_f a_f q_f^+ q_f a_f^+ -$$

$$- \sum_f \frac{\lambda(f)}{2} \{(L^+ + \nu) a_{-f} a_f + a_f^+ a_{-f}^+ (L + \nu)\} + R_1, \tag{4.13}$$

где

$$R_1 = \sum_f \frac{\lambda(f)}{2} \{(L^+ a_{-f} - a_{-f} L^+) a_f + a_f^+ (a_{-f}^+ L - L a_{-f}^+)\}. \tag{4.14}$$

Заметим, что

$$\sum_f \frac{\lambda(f)}{2} \{(L^+ + \nu) a_{-f} a_f + a_f^+ a_{-f}^+ (L + \nu)\} =$$

$$= V L^+ L + \frac{V}{2} (\nu L + \nu L^+) \tag{4.15}$$

и, следовательно,

$$\Omega + \frac{V}{2} L^+ L - \sum_f a_f^+ p_f^2 a_f - \sum_f a_f q_f^+ q_f a_f^+ =$$

$$= -\frac{V}{2} \{L^+ L + \nu (L + L^+)\} + R_1. \tag{4.16}$$

Или, в силу (4.9) и (4.11), имеем

$$\sum_f \{a_f^+ p_f + a_{-f} q_f^+\} \{p_f a_f + q_f a_{-f}^+\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_f a_f^+ \left\{ \sqrt{\left(K + \frac{2s}{V}\right) \lambda^2(f) + T^2(f)} - \sqrt{K \lambda^2(f) + T^2(f)} \right\} a_f +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_f a_f \left\{ \sqrt{\left(K + \frac{2s}{V}\right) \lambda^2(f) + T^2(f)} - \sqrt{\widetilde{K} \lambda^2(f) + T^2(f)} \right\} a_f^+ +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_f a_f \frac{\beta^2}{2\widetilde{K}} \left\{ \sqrt{\widetilde{K} \lambda^2(f) + T^2(f)} - T(f) \right\} a_f^+ -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_f a_f^+ \left\{ \sqrt{\left(K + \frac{2s}{V}\right) \lambda^2(f) + T^2(f)} + T(f) \right\} a_f -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_f a_f\left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2(f)+T^2(f)}-T(f)\right\}a_f^+ + \frac{V}{2}L^+L=$$

$$=-\frac{V}{2}\{L^+L+\nu(L+L^+)\}+R_1. \qquad (4.17)$$

Введем обозначения:

$$\Delta_1=\frac{1}{2}\sum_f a_f^+\left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2+T^2}-\sqrt{K\lambda^2+T^2}\right\}a_f; \quad (4.18)$$

$$\Delta_2=\frac{1}{2}\sum_f a_f\left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2+T^2}-\sqrt{\widetilde{K}\lambda^2+T^2}\right\}a_f^+; \quad (4.19)$$

$$\Delta_3=\frac{1}{2}\sum_f a_f\frac{\beta^2}{2\widetilde{K}}\left\{\sqrt{\widetilde{K}\lambda^2+T^2}-T\right\}a_f^+. \qquad (4.20)$$

Тогда в силу леммы II (см. Приложение, формулы П1.9, П1.10)

$$\Omega\geqslant 0; \quad \Delta_1\geqslant 0; \quad \Delta_2\geqslant 0; \quad \Delta_3\geqslant 0. \qquad (4.21$$

Итак,

$$\Omega+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3-\frac{1}{2}\sum_f a_f^+\left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2+T^2}+T\right\}a_f-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_f a_f\left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2+T^2}-T\right\}a_f^+ + \frac{V}{2}L^+L=$$

$$=-\frac{V}{2}\{L^+L+\nu(L+L^+)\}+R_1. \qquad (4.22)$$

Положим

$$R_2=\frac{1}{2}\sum_f a_f^+\left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2+T^2}\;a_f-\right.$$

$$\left.-a_f\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2+T^2}\right\}; \qquad (4.23)$$

$$R_3=\frac{1}{2}\sum_f a_f\left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2+T^2}\;a_f^+-\right.$$

$$\left.-a_f^+\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2+T^2}\right\}. \qquad (4.24)$$

Тогда

$$\Omega+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3-R_2-R_3+\frac{V}{2}L^+L-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_f a_f^+a_f\left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2+T^2}+T\right\}-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_f a_f a_f^+\left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2+T^2}-T\right\}=$$
$$=-\frac{V}{2}\left\{L^+L+\nu\left(L+L^+\right)\right\}+R_1. \tag{4.25}$$

Но

$$\frac{1}{2}\sum_f a_f^+a_f\left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2+T^2}+T\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_f a_f a_f^+\left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2+T^2}-T\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_f\left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2+T^2}-T\right\}+\sum_f T(f)a_f^+a_f. \tag{4.26}$$

Следовательно,

$$\Omega+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3-R_1-R_2-R_3+\frac{V}{2}\left(L^+L-LL^+\right)+$$
$$+\frac{1}{2}V\left[LL^+-\frac{1}{V}\sum_f\left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2+T^2}-T\right\}\right]=$$
$$=\sum_f T(f)a_f^+a_f-\frac{V}{2}\left\{L^+L+\nu\left(L+L^+\right)\right\}=$$
$$=\sum_f T(f)a_f^+a_f-\nu\sum_f\frac{\lambda(f)}{2}\left(a_{-f}a_f+a_f^+a_{-f}^+\right)-$$
$$-\frac{1}{2V}\sum_{ff'}\lambda(f)\lambda(f')a_f^+a_{-f}^+a_{-f'}a_{f'}=\mathscr{H}. \tag{4.27}$$

Итак, окончательно будем иметь

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}V\left\{LL^+-\frac{1}{V}\sum_f\left[\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2(f)+T^2(f)}-T(f)\right]\right\}+$$
$$+\Omega+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3-R_1-R_2-R_3+\frac{V}{2}\left(L^+L-LL^+\right). \tag{4.28}$$

Соотношение (4.28) представляет тождественное преобразование гамильтониана (1.2). Первый член формулы (4.28) будем рассматривать как главный, что касается членов R_1, R_2 и R_3, то мы покажем, что они асимптотически малы, а члены Ω, Δ_1, Δ_2 и Δ_3 опустим. Так как они положительны (4.21), то получим оценку для $\mathscr{H}$ снизу.

Легко показать, что при учете (2.2)

$$-R_1+\frac{V}{2}(L^+L-LL^+)=-\frac{1}{V}\sum_f \lambda^2(f), \tag{4.29}$$

где, согласно (4.10), $\frac{1}{V}\sum_f \lambda^2(f)\leqslant s$. Далее, в силу леммы IV (неравенство П1.30)

$$|R_2|+|R_3|\leqslant C, \tag{4.30}$$

где

$$C=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{V}\sum_f|\lambda(f)|^2\left[1+\frac{|\lambda(f)|\left(\frac{1}{V}\sum|\lambda(f)|+V\right)}{2\frac{1}{V}\sum|\nu(f)|^2+V\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}}\right]\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2}\,dt. \tag{4.31}$$

Итак, для любой нормированной функции Φ в силу (4.21) справедливо неравенство

$$\langle\Phi^*\mathscr{H}\Phi\rangle\geqslant-(s+C)+\frac{1}{2}V\left\langle\Phi^*\left(LL^+-\frac{1}{V}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\sum_f\left[\sqrt{\left\{(L+\nu)(L^++\nu)+\beta^2+\frac{2s}{V}\right\}\lambda^2+T^2(f)}-T(f)\right]\right)\Phi\right\rangle.$$

Но s и C не зависят от β. Поэтому, совершая предельный переход $\beta\to 0$, находим

$$\langle\Phi^*\mathscr{H}\Phi\rangle\geqslant-(2s+C)+\frac{1}{2}V\left\langle\Phi^*\left\{LL^*+\frac{2s}{V}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{V}\sum_f\left[\sqrt{\left\{(L+\nu)(L^++\nu)+\frac{2s}{V}\right\}\lambda^2(f)+T^2(f)}-T(f)\right]\right\}\Phi\right\rangle. \tag{4.32}$$

Имеем далее

$$\left.\begin{aligned}LL^+&=(L+\nu)(L^++\nu)-\nu\{L+\nu+L^++\nu\}+\nu^2;\\LL^++\frac{2s}{V}&=\left\{(L+\nu)(L^++\nu)+\frac{2s}{V}\right\}-\nu\{(L+\nu+L^++\nu)\}+\nu^2.\end{aligned}\right\} \tag{4.33}$$

Положим

$$(L+\nu)(L^{+}+\nu)+\frac{2s}{V}=X. \tag{4.34}$$

Тогда

$$LL^{+}+\frac{2s}{V}=(\sqrt{X}-\nu)^2+\nu\,\{2\sqrt{X}-(L+\nu)-(L^{+}+\nu)\}. \tag{4.35}$$

Но по лемме I (см. П1.1, П1.2), положив в неравенстве $\xi=L+\nu$; $\xi^{+}=L^{+}+\nu$, получим

$$2\sqrt{(L+\nu)(L^{+}+\nu)+\frac{s}{V}}-(L+\nu)-(L^{+}+\nu)\geqslant 0, \tag{4.36}$$

тем более что

$$2\sqrt{X}-(L+\nu)+(L^{+}+\nu)\geqslant 0. \tag{4.37}$$

Рассмотрим функцию $F(x)$ (3.11):

$$F(x)=(\sqrt{x}-\nu)^2-\frac{1}{V}\sum_{f}\left[\sqrt{x\lambda^2(f)+T^2(f)}-T(f)\right].$$

Тогда формулу (4.32) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\langle\Phi^{*}\mathscr{H}\Phi\rangle &\geqslant -(2s+C)+\frac{1}{2}V\langle\Phi^{*}F(X)\Phi\rangle+\\ &+V\frac{\nu}{2}\langle\Phi^{*}\{2\sqrt{X}-(L+\nu+L^{+}+\nu)\}\Phi\rangle\geqslant\\ &\geqslant -(2s+C)+\frac{1}{2}V\langle\Phi^{*}F(X)\Phi\rangle,\end{aligned} \tag{4.38}$$

где X — оператор, определенный соотношением (4.34).

Пусть $E_{\mathscr{H}}$ — наименьшее собственное значение $\mathscr{H}$; $\Phi_{\mathscr{H}}$ — соответствующая собственная функция. Пусть далее $E_{\mathscr{H}_0}$ — наименьшее собственное значение $\mathscr{H}_0$, тогда с учетом (3.11) $E_{\mathscr{H}_0}=$ $=\frac{V}{2}\min F(x)$. Пусть абсолютный минимум достигается у $F(x)$ при

$$x=x_0=C^2. \tag{4.39}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\frac{V}{2}F(C^2)&\geqslant E_{\mathscr{H}}=\langle\Phi^{*}_{\mathscr{H}}\mathscr{H}\Phi_{\mathscr{H}}\rangle\geqslant -(2s+C)+\\ &+\frac{1}{2}V\langle\Phi^{*}F(X)\Phi\rangle\geqslant -(2s+C)+\frac{V}{2}F(C^2).\end{aligned} \tag{4.40}$$

Отсюда, принимая во внимание, что энергия системы пропорциональна объему системы, получаем окончательную оценку для собственных значений гамильтониана $\mathscr{H}$ (1.2):

$$0\leqslant\frac{E_{\mathscr{H}_0}-E_{\mathscr{H}}}{V}\leqslant\frac{2s+C}{V}. \tag{4.41}$$

Заметим, что C (4.31) и s в соответствии с условиями § 1 остаются конечными при $V \to \infty$. Поэтому разность собственных значений приближенного гамильтониана $\mathcal{H}_0$ (1.4) и точного гамильтониана $\mathcal{H}$ (1.2), отнесенная к объему системы, убывает как $1/V$ при $V \to \infty$. Таким образом, решение приближенного гамильтониана $\mathcal{H}_0$ (1.4) дает асимптотически точное решение гамильтониана $\mathcal{H}$ (1.2) при $V \to \infty$.

Покажем теперь, что оператор X (4.34) с асимптотической точностью (т. е. с точностью $1/V$) может рассматриваться как c-число. Для этого возьмем любую нормированную функцию Φ, такую, что

$$\langle \Phi^* \mathcal{H} \Phi \rangle - E_{\mathcal{H}} \leqslant C_1 = \mathrm{const}. \tag{4.42}$$

Тогда на основании (4.38), (4.40) и (4.42) имеем

$$\begin{gathered} \langle \Phi^* \left(F(X) - F(C^2)\right) \Phi \rangle + \nu \langle \Phi^* (2\sqrt{X} - \\ - (L + \nu + L^+ + \nu)) \Phi \rangle \leqslant \frac{l}{V}; \\ l = 2(2s + C + C_1). \end{gathered} \tag{4.43}$$

Заметим, что оба члена в левой части (4.43) положительны. В частности, ввиду положительности второго слагаемого в левой части неравенства (4.43) (см. лемму I, формулы П1.1 и П1.2), получаем

$$\langle \Phi^* \left(F(X) - F(C^2)\right) \Phi \rangle \leqslant \frac{l}{V}, \tag{4.44}$$

но

$$F(X) - F(C^2) = \frac{1}{2} F''(\xi)(X - C^2)^2; \tag{4.45}$$

$$\begin{gathered} F''(x) = \frac{\nu}{2x^{3/2}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{V} \sum_f \frac{\lambda^4(f)}{\left(x\lambda^2(f) + T^2(f)\right)^{3/2}}, \\ \frac{1}{2} F''(\xi) \geqslant \alpha = \mathrm{const} > 0. \end{gathered} \tag{4.46}$$

Отсюда получаем

$$\langle \Phi^* | X - C^2 |^2 \Phi \rangle \leqslant \frac{l}{\alpha V}. \tag{4.47}$$

Из (4.46) следует, что оператор X с асимптотической точностью может рассматриваться как c-число.

Для случая $\nu > 0$ можно получить более полную информацию оносительно математического ожидания операторов L, L^+. Именно мы покажем, что среднее квадратичное отклонение для оператора L от величины C (4.39) асимптотически мало при $V \to \infty$. Имеем очевидное неравенство

$$(\sqrt{X} - C)^2 = \frac{(X - C^2)^2}{(\sqrt{X} + C)^2} \leqslant \frac{1}{C^2} (X - C^2)^2. \tag{4.48}$$

Отсюда, используя (4.47), получаем

$$\langle \Phi^* (\sqrt{X}-C)^2 \Phi\rangle \leqslant \frac{l}{\alpha C^2 V}. \tag{4.49}$$

Положим по определению

$$\langle \Phi^* \sqrt{X}\, \Phi\rangle = C_0. \tag{4.50}$$

Тогда при учете (4.49)

$$\langle \Phi^* (\sqrt{X}-C_0)^2 \Phi\rangle \leqslant \langle \Phi^* (\sqrt{X}-C)^2 \Phi\rangle \leqslant \frac{l}{\alpha C^2 V}. \tag{4.51}$$

Действительно, так как

$$\langle \Phi^* (\sqrt{X}-C)^2 \Phi\rangle = (C-C_0)^2 + \langle \Phi^* (\sqrt{X}-C_0)^2 \Phi\rangle. \tag{4.52}$$

Из оценки (4.51) следует оценка для математического ожидания оператора X:

$$\langle \Phi^* X \Phi\rangle - C_0^2 \leqslant \frac{l}{\alpha C^2 V}. \tag{4.53}$$

Наконец, из (4.51) и (4.52) получаем оценку для разности $(C-C_0)^2$:

$$(C-C_0)^2 \leqslant \frac{l}{\alpha C^2 V}. \tag{4.54}$$

Положим теперь, что

$$\xi = L + \nu; \quad \xi^+ = L^+ + \nu, \tag{4.55}$$

тогда для среднего квадратичного отклонения для ξ от C_0 имеем при учете (4.34)

$$\langle \Phi^* (C_0-\xi)(C_0-\xi^+)\Phi\rangle \leqslant$$
$$\leqslant C_0^2 + \langle \Phi^* X \Phi\rangle - C_0 \langle \Phi^* (\xi+\xi^+)\Phi\rangle. \tag{4.56}$$

Используя затем (4.53), (4.43) получаем

$$\langle \Phi^* (C_0-\xi)(C_0-\xi^+)\Phi\rangle \leqslant 2C_0^2 + \frac{l}{\alpha C^2 V} - C_0 \langle \Phi^* (\xi+\xi^+)\Phi\rangle =$$
$$= \langle \Phi^* \{2\sqrt{X} - (\xi+\xi^+)\}\Phi\rangle C_0 + \frac{l}{\alpha C^2 V} \leqslant \frac{lC_0}{\nu V} + \frac{l}{\alpha C^2 V}. \tag{4.57}$$

Таким образом, для интересующей нас величины $\langle \Phi^* (C-\xi) \times \times (C-\xi^+)\Phi\rangle$ получаем следующую оценку:

$$\langle \Phi^* (C-\xi)(C-\xi^+)\Phi\rangle =$$
$$= \langle \Phi^* (C-C_0+C_0-\xi)(C-C_0+C_0-\xi^+)\Phi\rangle \leqq$$
$$\leqq 2(C-C_0)^2 + 2\langle \Phi^* (C_0-\xi)(C_0-\xi^+)\Phi\rangle \leqq$$
$$\leqq \frac{2l}{\alpha C^2 V} + \frac{2lC_0}{\nu V} + \frac{2l}{\alpha C^2 V} \leqq \frac{\mathrm{const}}{V} = \frac{I}{V} \tag{4.58}$$
$$(I = \mathrm{const}).$$

Отметим, что полученная оценка справедлива только при $\nu > 0$, так как ν входит в знаменатель правой части неравенства (4.58).

Обсудим полученные результаты. Пусть $\nu = 0$. Тогда, как мы видели, для состояний со средней энергией, асимптотически близкой к наименьшей E_H, оператор $L^+ L$ с асимптотической точностью равен c-числу C^2. Эти состояния, однако, не обладают подобными свойствами для самих операторов L и L^+. Рассмотрим состояние Φ_H с наименьшей энергией E_H. Вообще говоря, может представиться случай вырождения, так что мы будем иметь не одно Φ_H, а некоторое линейное многообразие $\{\Phi_H\}$ возможных состояний с той же наименьшей энергией E_H.

Поскольку оператор $N = \Sigma a_f' a_f$, представляющий полное число частиц в случае $\nu = 0$, точно коммутирует с H, в этом многообразии $\{\Phi_H\}$ всегда можно найти такое Φ_f', для которого N принимает некоторое определенное значение N_0. Тогда очевидно

$$\langle \Phi_H^{*\prime} L \Phi_H^{\prime} \rangle = 0; \quad \langle \Phi_H^{*\prime} L^+ \Phi_H^{\prime} \rangle = 0.$$

Значит, L не может принимать даже приближенного определенного значения в состоянии Φ_H', так как в противном случае L^+L для этого состояния оказалось бы приближенно равным 0, а не C^2.

Рассмотрим теперь многообразие $\{\Phi\}$ состояний с энергией, асимптотически близкой к E_H. Так как L, L^+ приближенно коммутируют с H, то естественно ожидать, что в $\{\Phi\}$ можно выбрать такую Φ, для которой L, L^+ с асимптотической точностью принимают определенные значения. Так и обстоит дело в действительности. Данным свойством обладает, например, Φ_{H_0}-состояние с наименьшей энергией для H_0. В самом деле, Φ_{H_0} определяется соотношением $\alpha_f \Phi = 0$, где $\alpha_f = u_f a_f - v_f a_{-f}^+$;

$$u_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{T(f)}{\sqrt{\lambda^2(f) C^2 + T^2(f)}}};$$

$$v_f = \frac{\varepsilon(f)}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{T(f)}{\sqrt{\lambda^2(f) C^2 + T^2(f)}}}.$$

Выразив L через фермионы α, α^+, найдем

$$L = \frac{1}{V} \sum_f \lambda(f) \{ u_f^2\, \alpha_{-f} \alpha_f - v_f^2\, \alpha_f^+ \alpha_{-f}^+ - 2u_f v_f \alpha_f^+ \alpha_f \} + \frac{1}{V} \sum_f u_f v_f \lambda(f).$$

Но

$$\frac{1}{V} \sum_f u_f v_f = \frac{1}{2V} \sum_f \frac{|\lambda(f)|^2 C}{\sqrt{\lambda^2(f) C^2 + T^2(f)}} = C,$$

и, следовательно,

$$\langle \Phi_{H_0}^* (L^+ - C)(L - C) \Phi_{H_0} \rangle \leqslant \frac{\text{const}}{V};$$

$$\langle \Phi_{H_0}^* (L - C)(L^+ - C) \Phi_{H_0} \rangle \leqslant \frac{\text{const}}{V}.$$

Для Φ_{H_0} L и L^+ приближенно равны C. Именно это обстоятельство и обусловило успех приближенного метода, в котором мы гамильтониан H с точным законом сохранения N заменяем H_0, для которого N уже не является точным интегралом движения. Теперь видно также, что приближенный метод можно было бы сформулировать так, чтобы закон сохранения N формально не нарушался. Для этого надо было бы ввести вместо фермионов α_f амплитуды

$$\alpha_f = u_f a_f - v_f \frac{L}{|C|} a_{-f}^+,$$

удовлетворяющие перестановочным соотношениям для ферми-амплитуд с асимптотической точностью. Тогда α_f уменьшает N на единицу, а α_f^+ увеличивает N на единицу. Такие амплитуды имеют аналоги с амплитудами

$$b_f = \frac{a_0^+}{\sqrt{N_0}} a_f,$$

введенными в теории сверхтекучести [6] при выделении конденсата. Вообще имеется сильная аналогия между амплитудами a_0, a_0^+ для бозе-конденсата и амплитудами L, L^+ в рассматриваемом случае.

Когда мы включаем в $\mathscr{H}$ член с источниками пар ($\nu>0$), операторы L, L^+ сейчас же начинают принимать с асимптотической точностью определенные значения для состояний с энергией, близкой к $\mathscr{H}$. Здесь получается аналогия с теорией ферромагнетизма в изотропной среде. При отсутствии магнитного поля направление оси намагничения неопределенно. При включении магнитного поля, сколь угодно слабого, действующего по определенному направлению, вектор намагничения немедленно устанавливается именно по этому направлению. Наконец, из соотношений

$$L^+L \approx C^2 \quad (\nu=0);$$

$$\nu + L \approx C; \quad \nu + L^+ \approx C \quad (\nu>0)$$

можно найти, что и корреляционные средние

$$\langle \Phi_H^* \dots a_{f_l}(t_l) \dots a_{f_j}^+(t_j) \dots \Phi_H \rangle$$

для гамильтониана $\mathscr{H}$ асимптотически равны соответствующим средним для гамильтониана $\mathscr{H}_0$. При $\nu>0$ это касается всех средних данного типа, а при $\nu = 0$, разумеется, только тех, у которых число a равно числу a^+, т. е. средних от таких операторов, которые сохраняют N.

§ 5. ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ СЛУЧАЯ $\nu > 0$

В этом параграфе мы займемся асимптотическими оценками для функций Грина и корреляционных средних в случае $\nu>0$. Из этих оценок будет следовать, что решение уравнений для гриновских функций, построенных на гамильтониане $\mathscr{H}_0$ (1.4), будет асимптотически мало отличаться от соответствующих решений для такого модельного гамильтониана $\mathscr{H}$ (1.2) при $V \to \infty$.

Рассмотрим уравнения движения для операторов a_f, a_f^+. Принимая во внимание (1.2), получаем:

$$\left.\begin{aligned} & i\frac{da_f}{dt} = T(f)\,a_f - \lambda(f)\,a_{-f}^+(\nu + L); \\ & i\frac{da_f^+}{dt} = -T(f)\,a_f^+ + \lambda(f)\,(\nu + L^+)\,a_{-f}, \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

откуда имеем также

$$\left.\begin{aligned} & i\frac{da_{-f}}{dt} = T(f)\,a_{-f} + \lambda(f)\,a_f^+(\nu + L); \\ & i\frac{da_{-f}^+}{dt} = -T(f)\,a_{-f}^+ - \lambda(f)\,(\nu + L^+)\,a_f. \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Положим [см. формулы (3.3) и (3.11)]

$$\left.\begin{aligned} & u_f = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{T(f)}{\sqrt{C^2\lambda^2(f) + T^2(f)}}}; \\ & v_f = -\frac{\varepsilon(f)}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{T(f)}{\sqrt{C^2\lambda^2(f) + T^2(f)}}} \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

и введем новые фермионные амплитуды

$$\alpha_f^+ = u_f a_f^+ + v_f a_{-f}. \tag{5.4}$$

Имеем

$$i\frac{d\alpha_f^+}{dt} = u_f\, i\frac{da_f^+}{dt} + v_f\, i\frac{da_{-f}}{dt} =$$

$$= u_f\left\{-T(f)\,a_f^+ + \lambda(f)\,(\nu + L^+)\,a_{-f}\right\} + v_f\left\{T(f)\,a_{-f} + \lambda(f)\,a_f^+(\nu + L)\right\} =$$

$$= -a_f^+\left\{T(f)\,u_f - \lambda(f)\,v_f(\nu + L)\right\} + \left\{\lambda(f)\,(\nu + L^+) + T(f)\,v_f\right\}a_{-f} =$$

$$= -a_f^+\left\{T(f)\,u_f - \lambda(f)\,v_f C\right\} + \left\{\lambda(f)\,Cu_f + T(f)\,v_f\right\}a_{-f} + R_f,$$

где

$$\left.\begin{aligned} & R_f = R_f^{(1)} + R_f^{(2)}; \\ & R_f^{(1)} = u_f\lambda(f)\,(L^+ + \nu - C)\,a_{-f}; \\ & R_f^{(2)} = v_f\lambda(f)\,a_f^+(L + \nu - C). \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

Из тождеств

$$\left.\begin{aligned} & T(f)\,u_f - \lambda(f)\,v_f C = \sqrt{C^2\lambda^2(f) + T^2(f)}\,u_f, \\ & T(f)\,v_f + \lambda(f)\,u_f C = -\sqrt{C^2\lambda^2(f) + T^2(f)}\,v_f \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

следует, что

$$i\,\frac{d\alpha_f^+}{dt}+\sqrt{C^2\lambda^2(f)+T^2(f)}\,\alpha_f^+=R_f, \tag{5.7}$$

значит

$$i\,\frac{d\alpha_f}{dt}-\sqrt{C^2\lambda^2(f)+T^2(f)}\,\alpha_f=-R_f^+. \tag{5.8}$$

Оценим величины, связанные с R, R^+. Имеем

$$\left\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} R_f R_f^+ \Phi_{\mathscr{H}} \right\rangle \leqslant 2\left\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} R_f^{(1)} R_f^{(1)+} \Phi_{\mathscr{H}} \right\rangle +$$

$$+2\left\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} R_f^{(2)} R_f^{(2)+} \Phi_{\mathscr{H}} \right\rangle = 2u_f^2\lambda^2(f)\langle \Phi^*_{\mathscr{H}}(L^+ +\nu-C)\,a_{-f}\,a^{\pm}_{-f}(L+\nu-$$

$$-C)\Phi_{\mathscr{H}}\rangle + 2v_f^2\lambda^2(f)\langle \Phi^*_{\mathscr{H}}\, a_f^+(L+\nu-C)(L^+ +\nu-C)\,a_f\Phi_{\mathscr{H}}\rangle.$$

Но так как $|a_{-f}a^{\pm}_{-f}|\leqslant 1$, то

$$\langle \Phi^*_{\mathscr{H}}(L^+ +\nu-C)\,a_{-f}\,a^{\pm}_{-f}(L+\nu-C)\Phi_{\mathscr{H}}\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \langle \Phi^*_{\mathscr{H}}(L^+ +\nu-C)(L+\nu-C)\Phi_{\mathscr{H}}\rangle,$$

и далее, в силу (П1.18), имеем

$$\langle \Phi^*_{\mathscr{H}}\, a_f^+(L+\nu-C)(L^+ +\nu-C)\,a_f\Phi_{\mathscr{H}}\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2s}{V}+\langle \Phi^*_{\mathscr{H}}\, a_f^+(L^+ +\nu-C)(L+\nu-C)\,a_f\Phi_{\mathscr{H}}\rangle =$$

$$=\frac{2s}{V}+\langle \Phi^*_{\mathscr{H}}(L^+ +\nu-C)\,a_f^+a_f(L+\nu-C)\Phi_{\mathscr{H}}\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2s}{V}+\langle \Phi^*_{\mathscr{H}}(L^+ +\nu-C)(L+\nu-C)\Phi_{\mathscr{H}}\rangle.$$

Итак,

$$\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} R_f R_f^+ \Phi_{\mathscr{H}}\rangle \leqslant 2\lambda^2(f)\,\langle \Phi^*_{\mathscr{H}}(L^+ +\nu-C)(L+\nu-C)\Phi_{\mathscr{H}}\rangle +$$

$$+2\lambda^2(f)\,v_f^2\,\frac{2s}{V}. \tag{5.9}$$

Совершенно аналогично получим

$$\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} R_f^+ R_f \Phi_{\mathscr{H}}\rangle \leqslant 2\lambda^2(f)\langle \Phi^*_{\mathscr{H}}(L+\nu-C)(L^+ +\nu-C)\Phi_{\mathscr{H}}\rangle +$$

$$+2\lambda^2(f)\,u_f^2\,\frac{2s}{V}. \tag{5.10}$$

Но, как было показано ранее (4.58),

$$\langle \Phi^+_{\mathscr{H}}(L+\nu-C)(L+\nu-C)\Phi_{\mathscr{H}}\rangle \leqslant \frac{I}{V};$$

$$\langle \Phi^*_{\mathscr{H}}(L+\nu-C)(L^+ +\nu-C)\Phi_{\mathscr{H}}\rangle \leqslant \frac{I}{V}.$$

Поэтому, вводя постоянную

$$\gamma = 2(I+2s), \tag{5.11}$$

можем написать

$$\begin{aligned} \langle \Phi^*_{\mathscr{H}} R_f R_f^+ \Phi_{\mathscr{H}} \rangle &\leqslant \frac{\gamma}{V} |\lambda(f)|^2; \\ \langle \Phi^*_{\mathscr{H}} R_f^+ R_f \Phi_{\mathscr{H}} \rangle &\leqslant \frac{\gamma}{V} |\lambda(f)|^2. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Сделаем еще несколько более общие оценки. Рассмотрим операторы A_f, каждый из которых является линейной комбинацией операторов a_f и a^+_{-f}:

$$A_f = p_f a_f + q_f a^+_{-f} \tag{5.13}$$

с ограниченными коэффициентами

$$|p_f|^2 + |q_f|^2 \leqslant \text{const}. \tag{5.14}$$

Покажем, что

$$\left.\begin{aligned} \left| \langle \Phi^*_{\mathscr{H}} A_{f_1} \ldots A_{f_l} R_f A_{f_{l+1}} \ldots A_{f_m} R_f^+ A_{f_{m+1}} \ldots \Phi_{\mathscr{H}} \rangle \right| &\leqslant \frac{\text{const}}{V}; \\ \left| \langle \Phi^*_{\mathscr{H}} A_{f_1} \ldots A_{f_l} R_f^+ A_{f_{l+1}} \ldots A_{f_m} R_f A_{f_{m+1}} \ldots \Phi_{\mathscr{H}} \rangle \right| &\leqslant \frac{\text{const}}{V}. \end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что

$$La_f - a_f L = 0; \quad L^+ a_f^+ - a_f^+ L^+ = 0;$$

$$|La_f^+ - a_f^+ L| \leqslant \frac{2|\lambda(f)|}{V}; \quad |L^+ a_f - a_f L^+| \leqslant \frac{2|\lambda(f)|}{V}.$$

Поэтому, например,

$$\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} A_{f_1} \ldots (L+\nu-C) A_{f_j} \ldots (L^+ + \nu - C) A_{f_i} \ldots \Phi_{\mathscr{H}} \rangle =$$
$$= Z + \langle \Phi^*_{\mathscr{H}} (L+\nu-C) A_{f_1} \ldots A_{f_n} (L^+ + \nu - C) \Phi_{\mathscr{H}} \rangle,$$

где $|Z| \leqslant \text{const}/V$. Следовательно,

$$|\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} A_{f_1} \ldots (L+\nu-C) A_{f_j} \ldots (L^+ + \nu - C) A_{f_i} \ldots \Phi_{\mathscr{H}} \rangle| \leqslant \frac{\text{const}}{V} +$$
$$+ |A_{f_1}| \ldots |A_{f_n}| \langle \Phi^*_{\mathscr{H}} (L+\nu-C)(L^+ + \nu - C) \Phi_{\mathscr{H}} \rangle \leqslant \frac{\text{const}}{V}. \tag{5.16}$$

Аналогично доказывается, что

$$|\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} A_{f_1} \ldots (L^+ + \nu - C) A_{f_j} \ldots (L+\nu-C) A_{f_i} \ldots \Phi_{\mathscr{H}} \rangle| \leqslant \frac{\text{const}}{V}. \tag{5.17}$$

Учитывая (5.16) и (5.17), имеем

$$|\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} A_{f_1} \dots (L+\nu-C) A_{f_j} \dots (L+\nu-C) A_{f_i} \dots \Phi_{\mathscr{H}} \rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\text{const}}{V} + |\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} (L+\nu-C) A_{f_1} \dots A_{f_n} (L+\nu-C) \Phi_{\mathscr{H}} \rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\text{const}}{V} + \sqrt{\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} \{(L+\nu-C) A_{f_1} \dots A_{f_n} A^+_{f_n} \dots A^+_{f_1} (L^+ +\nu-C)\} \Phi_{\mathscr{H}} \rangle} \times$$

$$\times \sqrt{\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} (L^+ +\nu-C)(L+\nu-C) \Phi_{\mathscr{H}} \rangle} \leqslant \frac{\text{const}}{V} + |A_{f_1}| \dots |A_{f_n}| \times$$

$$\times \sqrt{\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} (L+\nu-C)(L^+ +\nu-C) \Phi_{\mathscr{H}} \rangle \times \langle \Phi^*_{\mathscr{H}} (L^+ +\nu-C)(L+\nu-C) \Phi_{\mathscr{H}} \rangle} \leqslant \frac{\text{const}}{V}. \qquad (5.18)$$

Аналогично доказывается, что

$$\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} A_{f_1} \dots (L^+ +\nu-C) A_{f_j} \dots (L^+ +\nu-C) A_{f_i} \dots \Phi_{\mathscr{H}} \rangle | \leqslant \frac{\text{const}}{V}. \qquad (5.19)$$

Из соотношений (5.16)—(5.19) следует справедливость доказываемых неравенств (5.15).

Займемся теперь оценками для корреляционных функций. Используя уравнения (5.7), получаем

$$\mathrm{i}\frac{d}{dt} \langle \Phi^*_{\mathscr{H}} \alpha^+_f (t) \alpha_f \Phi_{\mathscr{H}} \rangle = -\sqrt{C^2 \lambda^2 (f) + T^2 (f)} \times$$
$$\times \langle \Phi^*_{\mathscr{H}} \alpha^+_f (t) \alpha_f \Phi_{\mathscr{H}} \rangle + \langle \Phi^*_{\mathscr{H}} R_f (t) \alpha_f \Phi_{\mathscr{H}} \rangle, \qquad (5.20)$$

причем, как всегда, $\alpha_f(0) = \alpha_f$, $\alpha^+_f(0) = \alpha^+_f$.

Вспоминая, что из уравнения

$$\mathrm{i}\frac{dJ(t)}{dt} = -\Omega J(t) + R(t)$$

следует

$$J(t) = J(0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} \int_0^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t} R(t)\, dt,$$

запишем

$$\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} \alpha^+_f (t) \alpha_f \Phi_{\mathscr{H}} \rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{C^2\lambda^2(f)+T^2(f)}\,t} \langle \Phi^*_{\mathscr{H}} \alpha^+_f \alpha_f \Phi_{\mathscr{H}} \rangle +$$

$$+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{C^2\lambda^2(f)+T^2(f)}\,t} \int_0^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{C^2\lambda^2(f)+T^2(f)}\,t} \langle \Phi^*_{\mathscr{H}} R_f (t) \alpha_f \Phi_{\mathscr{H}} \rangle\, dt. \qquad (5.21)$$

С другой стороны, так как $\Phi_{\mathscr{H}}$ есть собственная функция $\mathscr{H}$, соответствующая наименьшему собственному значению, обычное спектральное представление его дает

$$\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} \alpha_f^+ (t) \alpha_f \Phi_{\mathscr{H}} \rangle = \int_0^\infty J_f(\nu) e^{-i\nu t} d\nu, \tag{5.22}$$

причем

$$J_f \geqslant 0 \text{ и } \int_0^\infty J_f(\nu) d\nu \leqslant 1. \tag{5.23}$$

Положим

$$h(t) = \int_0^2 \omega^2 (2-\omega)^2 e^{-i\omega t} d\omega. \tag{5.24}$$

Как видно, эта функция регулярна на всей вещественной оси. Интегрированием по частям нетрудно убедиться, что для $|t| \to \infty$ $h(t)$ убывает согласно оценке:

$$|h(t)| \leqslant \frac{\text{const}}{|t|^3}. \tag{5.25}$$

Поэтому интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |th(t)| dt \tag{5.26}$$

оказывается конечным. Положим

$$\sqrt{C^2 \lambda^2 (f) + T^2 (f)} = \Omega \tag{5.27}$$

и заметим, что

$$h(\Omega t) = \frac{1}{\Omega^5} \int_0^{2\Omega} \nu^2 (2\Omega - \nu)^2 e^{-i\nu t} d\nu. \tag{5.28}$$

По такому способу построения видно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\Omega t) e^{-i\nu t} dt = 0 \text{ для } \nu \geqslant 0, \tag{5.29}$$

и в силу (5.22)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle \Phi^*_{\mathscr{H}} \alpha_f^+ (t) \alpha_f \Phi_{\mathscr{H}} \rangle h(\Omega t) dt = 0. \tag{5.30}$$

Имеем поэтому из (5.21)

$$\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_{\mathscr{H}} \rangle \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Omega t} h(\Omega t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} h(\Omega t) e^{i\Omega t} \times$$
$$\times \left(\int_0^t e^{-i\Omega t'} \langle \Phi^*_{\mathscr{H}} R_f (t') \alpha_f \Phi_{\mathscr{H}} \rangle dt' \right) dt. \tag{5.31}$$

Но

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Omega t} h(\Omega t)\, dt = \frac{2\pi}{\Omega}. \tag{5.32}$$

Значит,

$$\langle \Phi^*_{\mathcal{H}} \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_{\mathcal{H}} \rangle \leqslant \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |h(\Omega t)| \times$$

$$\times \left\{ \int_0^t |\langle \Phi^*_{\mathcal{H}} R_f(t') \alpha_f \Phi_{\mathcal{H}} \rangle| \, dt' \right\} dt. \tag{5.33}$$

Но ввиду (5.12)

$$|\langle \Phi^*_{\mathcal{H}} R_f \alpha_f \Phi_{\mathcal{H}} \rangle| \leqslant \sqrt{|\langle \Phi^*_{\mathcal{H}} R_f R_f^+ \Phi_{\mathcal{H}} \rangle| |\langle \Phi^*_{\mathcal{H}} \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_{\mathcal{H}} \rangle|} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\gamma}{V}\right)^{\frac{1}{2}} |\lambda(f)| \left(\langle \Phi^*_{\mathcal{H}} \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_{\mathcal{H}} \rangle\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.34}$$

Следовательно,

$$\langle \Phi^*_{\mathcal{H}} \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_{\mathcal{H}} \rangle \leqslant \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |h(\Omega t)| |t| \, dt \left(\frac{\gamma}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\langle \Phi^*_{\mathcal{H}} \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_{\mathcal{H}} \rangle\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)\tau| \, d\tau \left(\frac{\gamma}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\langle \Phi^*_{\mathcal{H}} \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_{\mathcal{H}} \rangle\right)^{\frac{1}{2}} |\lambda(f)|.$$

Итак,

$$\langle \Phi^*_{\mathcal{H}} \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_{\mathcal{H}} \rangle \leqslant \frac{|\lambda(f)|^2}{2\pi(C^2 |\lambda(f)|^2 + T^2(f))} \cdot \frac{\gamma}{V} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)\tau| \, a\tau \right)^2. \tag{5.35}$$

Отсюда получим ряд оценок. В силу неравенства Шварца и того, что $|a_f^+ a_f| \leqslant 1$, и (5.35) имеем

$$|\langle \Phi^*_{\mathcal{H}} \alpha_{f_1}^+ \dots \alpha_{f_s}^+ \alpha_{g_e} \dots \alpha_{g_1} \Phi_{\mathcal{H}} \rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\langle \Phi^*_{\mathcal{H}} \alpha_{f_1}^+ \dots \alpha_{f_s}^+ \alpha_{f_s} \dots \alpha_{f_1} \Phi_{\mathcal{H}} \rangle \langle \Phi^*_{\mathcal{H}} \alpha_{g_1}^+ \dots \alpha_{g_i}^+ \alpha_{g_i} \dots \alpha_{g_1} \Phi_{\mathcal{H}} \rangle} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\langle \Phi^*_{\mathcal{H}} \alpha_{f_1}^+ \alpha_{f_1} \Phi_{\mathcal{H}} \rangle \langle \Phi^*_{\mathcal{H}} \alpha_{g_1}^+ \alpha_{g_1} \Phi_{\mathcal{H}} \rangle} \leqslant \frac{\text{const}}{V}. \tag{5.36}$$

Имеем также

$$\left|\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} a_{f_1} \dots a_{f_s} \Phi_{\mathscr{H}} \rangle\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} a_{f1} \dots a_{fs-1} a^+_{f_{s-1}} \dots a^+_{f_1} \Phi_{\mathscr{H}} \rangle \langle \Phi^*_{\mathscr{H}} a^+_{f_s} a_{fs} \Phi_{\mathscr{H}} \rangle} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} a^+_{f_s} a_{fs} \Phi_{\mathscr{H}} \rangle} \leqslant \frac{\text{const}}{\sqrt{V}} \tag{5.37}$$

и

$$\left|\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} a^+_{f_1} \dots a^+_{f_s} \Phi_{\mathscr{H}} \rangle\right| \leqslant \sqrt{\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} a^+_{f_1} a_{f1} \Phi_{\mathscr{H}} \rangle} \leqslant \frac{\text{const}}{\sqrt{V}}. \tag{5.38}$$

Сравним теперь средние

$$\langle \Phi^*_{\mathscr{H}} \mathfrak{A}_{f_1} \dots \mathfrak{A}_{fs} \Phi_{\mathscr{H}} \rangle$$

(где $\mathfrak{A}_f = a_f$ или a^+_f) с соответствующими средними, вычисленными исходя из гамильтониана $\mathscr{H}_0$, в котором $\nu + \sigma = C$. Для удобства будем обозначать средние этих типов соответственно $\langle \mathfrak{A}_{f1} \dots \mathfrak{A}_{fs} \rangle_{\mathscr{H}}$ и $\langle \mathfrak{A}_{f_1} \dots \mathfrak{A}_{fs} \rangle_{\mathscr{H}_0}$. Оценим величину разности

$$\langle \mathfrak{A}_{f_1} \dots \mathfrak{A}_{f_s} \rangle_{\mathscr{H}} - \langle \mathfrak{A}_{f_1} \dots \mathfrak{A}_{f_s} \rangle_{\mathscr{H}_0}. \tag{5.39}$$

Скажем несколько слов о том, как вычисляется $\langle \mathfrak{A}_{f_1} \dots \mathfrak{A}_{f_s} \rangle_{\mathscr{H}_0}$. Мы пользуемся формулами $a^+_f = u_f \alpha^+_f - v_f \alpha_{-f}$, $a_f = u_f \alpha_f - v_f \alpha^+_{-f}$ и затем приводим произведение $\mathfrak{A}_{f_1} \dots \mathfrak{A}_{f_s}$ к сумме произведений нормального типа, у которых все α^+ стоят впереди α. Так как все члены типа

$$\langle \alpha^+ \dots \alpha^+ \rangle_{\mathscr{H}_0},\ \langle \alpha \dots \alpha \rangle_{\mathscr{H}_0},\ \langle \alpha^+ \dots \alpha \rangle_{\mathscr{H}_0} \tag{5.40}$$

равны нулю, получаем выражение для вычисления $\langle \mathfrak{A}_{f_1} \dots \mathfrak{A}_{f_s} \rangle_{\mathscr{H}_0}$. Применим эту же процедуру для вычисления $\langle \mathfrak{A}_{f_1} \dots \mathfrak{A}_{f_s} \rangle_{\mathscr{H}}$. Как видно, разность (5.39) обусловлена членами, пропорциональными

$$\langle \alpha^+ \dots \alpha^+ \rangle_{\mathscr{H}},\ \langle \alpha \dots \alpha \rangle_{\mathscr{H}},\ \langle \alpha^+ \dots \alpha \rangle_{\mathscr{H}}, \tag{5.41}$$

которые в отличие от (5.40), вообще говоря, не равны нулю. Но для величин (5.41) существуют оценки (5.36)—(5.38). Поэтому имеем

$$\left|\langle \mathfrak{A}_{f_1} \dots \mathfrak{A}_{f_s} \rangle_{\mathscr{H}} - \langle \mathfrak{A}_{f_1} \dots \mathfrak{A}_{f_s} \rangle_{\mathscr{H}_0}\right| \leqslant \frac{\text{const}}{\sqrt{V}}. \tag{5.42}$$

Рассмотрим теперь двухвременные корреляционные функции и покажем, что разности

$$\langle \mathscr{B}_{f_1}(t) \dots \mathscr{B}_{f_l}(t) \mathfrak{A}_{f_m}(\tau) \dots \mathfrak{A}_{f_n}(\tau) \rangle_{\mathscr{H}} -$$

$$- \langle \mathscr{B}_{f_1}(t) \dots \mathscr{B}_{f_l}(t) \mathfrak{A}_{f_m}(\tau) \dots \mathfrak{A}_{f_n}(\tau) \rangle_{\mathscr{H}_0}, \tag{5.43}$$

где $\mathfrak{A}_f$, $\mathcal{B}_f$ равны или a_f, или a_f^+, все будут ограничены по модулю величинами порядка $1/\sqrt{V}$. Заметим, что, с одной стороны,

$$\langle a_{f_1}^+(t) \ldots a_{f_j}(t)\, \mathfrak{A}_{f_m}(\tau) \ldots \mathfrak{A}_{f_n}(\tau)\rangle_{\mathscr{H}_0} = 0, \tag{5.44}$$

а с другой—

$$\begin{gathered} \left|\langle a_{f_1}^+(t) \ldots a_{f_j}(t)\, \mathfrak{A}_{f_m}(\tau) \ldots \mathfrak{A}_{f_n}(\tau) \rangle_{\mathscr{H}}\right| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\langle a_{f_1}^+(t)\, a_{f_1}(t)\rangle_{\mathscr{H}} \langle \omega^+ \omega\rangle_{\mathscr{H}}} = \sqrt{\langle a_{f_1}^+ a_{f_1}\rangle_{\mathscr{H}} \langle \omega^+ \omega\rangle_{\mathscr{H}}}, \end{gathered} \tag{5.45}$$

где $\omega = \ldots a_{f_j}(t)\, \mathfrak{A}_{f_m}(\tau) \ldots \mathfrak{A}_{f_n}(\tau)$, так что

$$\left|\langle a_{f_1}^+(t) \ldots a_{f_j}(t)\, \mathfrak{A}_{f_m}(\tau) \ldots \mathfrak{A}_{f_n}(\tau) \rangle_{\mathscr{H}}\right| \leqslant \sqrt{\langle a_{f_1}^+ a_{f_1}\rangle} \leqslant \frac{\text{const}}{\sqrt{V}}. \tag{5.46}$$

Поэтому нам надо только установить, что разности типа

$$\langle a_{f_1}(t) \ldots a_{f_l}(t)\, \mathfrak{A}_{f_m}(\tau) \ldots \mathfrak{A}_{f_n}(\tau)\rangle_{\mathscr{H}} - \langle a_{f_1}(t) \ldots \mathfrak{A}_{f_n}(\tau)\rangle_{\mathscr{H}_0}$$

ограничены по модулю величинами порядка $1/\sqrt{V}$. Положим

$$\langle a_{f_1}(t) \ldots a_{f_l}(t)\, \mathfrak{A}_{f_m}(\tau) \ldots \mathfrak{A}_{f_n}(\tau)\rangle_{\mathscr{H}} = \Gamma(t-\tau). \tag{5.47}$$

Имеем в силу (5.8)

$$i\,\frac{d\Gamma(t-\tau)}{dt} - \{\Omega(f_1) + \ldots + \Omega(f_l)\}\,\Gamma(t-\tau) = \Delta(t-\tau), \tag{5.48}$$

где $\Omega(f) = \sqrt{C^2 \lambda^2(f) + T^2(f)}$

и

$$\Delta(t-\tau) = \Delta_1(t-\tau) + \ldots \Delta_l(t-\tau);$$

$$\Delta_1(t-\tau) = -\langle R_{f_1}^+(t)\, a_{f_2}(t) \ldots a_{f_l}(t)\, \mathfrak{A}_{f_m}(\tau) \ldots \mathfrak{A}_{f_n}(\tau)\rangle_{\mathscr{H}};$$

. . .

$$\Delta_l(t-\tau) = -\langle a_{f_1}(t) \ldots a_{f_{l-1}}(t)\, R_{f_l}^+(t)\, \mathfrak{A}_{f_m}(\tau) \ldots \mathfrak{A}_{f_n}(\tau)\rangle_{\mathscr{H}}.$$

Но

$$\begin{gathered} |\Delta_s(t-\tau)| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\langle a_{f_1}(t) \ldots a_{f_{s-1}}(t)\, R_{f_s}^+(t) \ldots a_{f_l}(t)\, a_{f_l}^+(t) \ldots R_{f_s}(t) \ldots a_{f_1}^+(t)\rangle_{\mathscr{H}}} \times \\ \times \sqrt{\langle \mathfrak{A}_{f_n}^+(\tau) \ldots \mathfrak{A}_{f_m}^+(\tau)\, \mathfrak{A}_{f_n}(\tau) \ldots \mathfrak{A}_{f_n}(\tau)\rangle_{\mathscr{H}}} = \\ = \sqrt{\langle a_{f_1} \ldots a_{f_{s-1}} R_{f_s}^+ \ldots a_{f_l}\, a_{f_l}^+ R_{f_s} \ldots a_{f_1}^+\rangle_{\mathscr{H}} \langle \mathfrak{A}_{f_n}^+ \ldots \mathfrak{A}_{f_n}\rangle_{\mathscr{H}}} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\langle a_{f_1} \ldots a_{f_{s-1}} R_{f_s}^+ \ldots a_{f_l}\, a_{f_l}^+ R_{f_s} \ldots a_{f_1}^+\rangle_{\mathscr{H}}}, \end{gathered}$$

и поэтому с учетом (5.15) имеем

$$|\Delta_s(t-\tau)| \leqslant \frac{\text{const}}{\sqrt{V}}. \tag{5.49}$$

Следовательно,

$$|\Delta(t-\tau)| \leqslant \frac{s}{\sqrt{V}}, \text{ где } s=\text{const}. \tag{5.50}$$

Но из (5.48) имеем

$$\Gamma(t-\tau)=\Gamma(0)\,e^{-i\{\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_l)\}(t-\tau)}+$$
$$+\exp\left[\{-i[\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_l)](t-\tau)\}\times\right.$$
$$\left.\times\left\{\int\limits_0^{t-\tau}\exp^{i[\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_l)]\omega}\Delta(\omega)\,d\omega\right\}\right], \tag{5.51}$$

откуда в силу (5.50)

$$|\Gamma(t-\tau)-\Gamma(0)\,e^{-i\{\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_l)\}(t-\tau)}| \leqslant \frac{s}{\sqrt{V}}|t-\tau|. \tag{5.52}$$

Но, с другой стороны,

$$\langle \alpha_{f_1}(t)\ldots\alpha_{f_l}(t)\ldots\mathfrak{A}_{f_m}(\tau)\ldots\mathfrak{A}_{f_n}(\tau)\rangle_{\mathcal{H}_0}=$$
$$=e^{-i\{\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_l)\}(t-\tau)}\langle\alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_l}\,\mathfrak{A}_{f_m}\ldots\mathfrak{A}_{f_n}\rangle\mathcal{H}_0. \tag{5.53}$$

Итак, по (5.52), (5.53)

$$D\equiv|\langle\alpha_{f_1}(t)\ldots\alpha_{f_l}(t)\,\mathfrak{A}_{f_m}(\tau)\ldots\mathfrak{A}_{f_n}(\tau)\rangle_{\mathcal{H}}-\langle\alpha_{f_1}(t)\ldots\alpha_{f_l}(t)\,\mathfrak{A}_{f_m}(\tau)\ldots$$
$$\ldots\mathfrak{A}_{f_n}(\tau)\rangle_{\mathcal{H}_0}|\leqslant\frac{s}{\sqrt{V}}|t-\tau|+|\langle\alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_l}\,\mathfrak{A}_{f_m}\ldots\mathfrak{A}_{f_n}\rangle_{\mathcal{H}}-$$
$$-\langle\alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_l}\,\mathfrak{A}_{f_m}\ldots\mathfrak{A}_{f_n}\rangle_{\mathcal{H}_0}|.$$

Но во втором члене правой части стоит разность одновременных средних, и, как ранее было показано [см. формулу (5.42)], она мажорируется членом порядка $1/\sqrt{V}$. Таким образом, устанавливаем для двухвременных средних, что

$$|\langle\mathcal{B}_{f_1}(t)\ldots\mathcal{B}_{f_l}(t)\,\mathfrak{A}_{f_m}(\tau)\ldots\mathfrak{A}_{f_n}(\tau)\rangle_{\mathcal{H}}-$$
$$-\langle\mathcal{B}_{f_1}(t)\ldots\mathcal{B}_{f_l}(t)\,\mathfrak{A}_{f_m}(\tau)\ldots\mathfrak{A}_{f_n}(\tau)\rangle_{\mathcal{H}_0}|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{G_1}{\sqrt{V}}|t-\tau|+\frac{G_2}{\sqrt{V}},\ G_1,\ G_2=\text{const}. \tag{5.54}$$

Эти оценки можно обобщить и на случай s-временных корреляционных средних

$$\left.\begin{aligned}&\langle \mathfrak{P}_s(t_s)\,\mathfrak{P}_{s-1}(t_{s-1})\ldots \mathfrak{P}_1(t_1)\rangle;\\ &\mathfrak{P}_j(t)=\mathfrak{A}_1^{(j)}(t)\ldots \mathfrak{A}_l^{(j)}(t),\end{aligned}\right\}\tag{5.55}$$

где $\mathfrak{A}_s^{(j)}(t)$ равно $a_f(t)$ или $a_f^+(t)$. Покажем, что

$$\begin{gathered}|\langle \mathfrak{P}_s(t_s)\ldots \mathfrak{P}_1(t_1)\rangle_{\mathscr{H}}-\langle \mathfrak{P}_s(t_s)\ldots \mathfrak{P}_1(t_1)\rangle_{\mathscr{H}_0}|\leqslant\\ \leqslant\frac{(K_s\,|\,t_s-t_{s-1}\,|+\ldots+K_2\,|\,t_2-t_1\,|+Q_s)}{\sqrt{V}},\end{gathered}\tag{5.56}$$

где

$$K_j=\mathrm{const},\quad Q_s=\mathrm{const}.\tag{5.57}$$

Доказательство легко осуществить методом индукции. Допустим, что эти соотношения верны для $(s-1)$-временных средних, и докажем их для s-временных. Рассуждая, как и в двумерном случае, видим, что достаточно доказать (5.56) для $\mathfrak{P}_s(t)=\alpha_{f_1}(t)\ldots\ \alpha_{f_l}(t)$. Но тогда

$$\begin{gathered}\langle \mathfrak{P}_s(t_s)\,\mathfrak{P}_{s-1}(t_{s-1})\ldots \mathfrak{P}_1(t_1)\rangle_{\mathscr{H}_0}=\exp\{-i(\Omega_{f_1}+\ldots+\\ +\Omega_{f_l})(t_s-t_{s-1})\}\,\langle \mathfrak{P}_s(t_{s-1})\,\mathfrak{P}_{s-1}(t_{s-1})\ldots \mathfrak{P}_1(t_1)\rangle_{\mathscr{H}_0}.\end{gathered}\tag{5.58}$$

С другой стороны, на основе (5.8) и (5.15) и рассуждений, с помощью которых было установлено неравенство (5.52), убедимся в том, что

$$\begin{gathered}|\langle \mathfrak{P}_s(t_s)\,\mathfrak{P}_{s-1}(t_{s-1})\ \ldots\ \mathfrak{P}_1(t_1)\rangle_{\mathscr{H}}-\exp\{-\mathrm{i}(\Omega_{f_1}+\ldots+\\ +\Omega_{f_l})(t_s-t_{s-1})\}\,\langle \mathfrak{P}_s(t_{s-1})\,\mathfrak{P}_{s-1}(t_{s-1})\ldots \mathfrak{P}_1(t_1)\rangle_{\mathscr{H}}\,|\leqslant\\ \leqslant\frac{K_1^{(s)}\,|t_s-t_{s-1}\,|}{\sqrt{V}},\end{gathered}\tag{5.59}$$

где $K_1^{(s)}=\mathrm{const}$.

Таким образом,

$$\begin{gathered}|\langle \mathfrak{P}_s(t_s)\ \ldots\ \mathfrak{P}_1(t_1)\rangle_{\mathscr{H}}-\langle \mathfrak{P}_s(t_s)\ \ldots\ \mathfrak{P}_1(t_1)\rangle_{\mathscr{H}_0}|\leqslant\\ \leqslant\frac{K_1^{(s)}\,|\,t_s-t_{s-1}\,|}{\sqrt{V}}+|\langle \mathfrak{P}_s(t_{s-1})\,\mathfrak{P}_{s-1}\ (t_{s-1})\ \ldots\ \mathfrak{P}_1(t_1)\rangle_{\mathscr{H}}-\\ -\langle \mathfrak{P}_s(t_{s-1})\,\mathfrak{P}_{s-1}(t_{s-1})\ \ldots\ \mathfrak{P}_1(t_1)\rangle_{\mathscr{H}_0}|.\end{gathered}\tag{5.60}$$

Но второй член в правой части представляет разность корреляционных средних с $(s-1)$-временами, для которых по допущению принятые оценки установлены. Поэтому-то они верны и для s-временных средних. Итак, $\mathscr{H}_0$ дает асимптотическое приближение для всех корреляционных средних типа $\langle \mathfrak{P}_s(t_s)\ldots \mathfrak{P}_1(t_1)\rangle$.

Следовательно, такое же утверждение справедливо и для функций Грина, построенных на основе рассмотренных операторов.

Примечание. Заметим, что в оценках степени приближения мы могли получить везде const/V вместо полученных $\mathrm{const}/\sqrt{V}$, если бы в определении u_f, v_f, $\mathcal{H}_0$ заменили C на C_1:

$$C_1 = \langle L+\nu\rangle_{\mathcal{H}} = \langle L^+ + \nu\rangle_{\mathcal{H}}. \tag{5.61}$$

Так как очевидно [см. формулу (4.58)]

$$(C-C_1)^2 \leqslant \frac{\mathrm{const}}{V},$$

то все оценки типа (5.12), (5.15) и (5.35) остаются справедливыми. Добавляются еще новые полезные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &|\langle A_{f_1} \ldots R_f \ldots A_{f_n}\rangle_{\mathcal{H}}| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{V};\\ &|\langle A_{f_1} \ldots R_f^+ \ldots A_{f_n}\rangle_{\mathcal{H}}| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{V}.\end{aligned}\right\} \tag{5.62}$$

Для их доказательства достаточно раскрыть выражения

$$\langle A_{f_1} \ldots R_f \ldots A_{f_n}\rangle_{\mathcal{H}};\ \langle A_{f_1} \ldots R_f^+ \ldots A_{f_n}\rangle_{\mathcal{H}}, \tag{5.63}$$

выразив все a и a^+ через α и α^+. Тогда выражения (5.33) можно представить суммой членов типа $\langle\alpha^+ \ldots \alpha\rangle_{\mathcal{H}}$:

$$\left.\begin{aligned} &\langle (L+\nu-C_1) \ldots \alpha\rangle_{\mathcal{H}};\ \langle\alpha^+ \ldots (L+\nu-C_1)\rangle_{\mathcal{H}};\\ &\langle (L^+ +\nu-C_1) \ldots \alpha\rangle_{\mathcal{H}};\ \langle\alpha^+ \ldots (L^+ +\nu-C_1)\rangle_{\mathcal{H}};\\ &\mathrm{const}\,\langle L+\nu-C_1\rangle_{\mathcal{H}} \equiv 0;\ \mathrm{const}\,\langle L^+ +\nu-C_1\rangle_{\mathcal{H}} \equiv 0\end{aligned}\right\} \tag{5.64}$$

и коммутационных членов порядка $1/V$. [Равенство нулю последних двух выражений (5.64) следует из (5.61)]. Применяя к (5.64) неравенство

$$|\langle AB\rangle| \leqslant \sqrt{|\langle AA^+\rangle|}\ \sqrt{|\langle B^+B\rangle|},$$

а также (5.35), видим, что все величины будут порядка $1/V$, а это доказывает (5.62).

Воспользуемся теперь этими дополнительными соотношениями. Рассмотрим выражение $\langle\alpha_{f_1}^+ \ldots \alpha_{f_n}^+\rangle$, очевидно, не зависящие от t. Поэтому

$$\frac{d}{dt}\langle\alpha_{f_1}^+ \ldots \alpha_{f_n}^+\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \frac{d\alpha_{f_1}^+}{dt} \ldots \alpha_{f_n}^+\right\rangle_{\mathcal{H}} + \ldots + \left\langle \alpha_{f_1}^+ \ldots \frac{d\alpha_{f_n}^+}{dt}\right\rangle_{\mathcal{H}} = 0. \tag{5.65}$$

Следовательно, из (5.7) получим

$$(\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_n))\,\langle\alpha^+_{f_1}\ldots\alpha^+_{f_n}\rangle_{\mathscr{H}}=$$

$$=\langle R_{f_1}\ldots\alpha^+_{f_n}\rangle_{\mathscr{H}}+\ldots+\langle\alpha^+_{f_1}\ldots R_{f_n}\rangle_{\mathscr{H}}. \tag{5.66}$$

Но в силу (5.62)

$$\left|\langle R_{f_1}\ldots\alpha^+_{f_n}\rangle+\ldots+\langle\alpha^+_{f_1}\ldots R_{f_n}\rangle\right|\leqslant\frac{D}{V},\quad D=\mathrm{const}, \tag{5.67}$$

и потому

$$\left|\langle\alpha^+_{f_1}\ldots\alpha^+_{f_n}\rangle\right|\leqslant\frac{D}{V(\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_n))}, \tag{5.68}$$

откуда, переходя к сопряженным величинам, имеем

$$\left|\langle\alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_n}\rangle\right|\leqslant\frac{D}{V(\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_n))}. \tag{5.69}$$

Воспользовавшись новыми неравенствами (5.68) и (5.69) вместо старых (5.37) и (5.38), а (5.36) сохранив, можно показать, что имеет место неравенство

$$|\langle\mathfrak{A}_{f_1}\ldots\mathfrak{A}_{f_s}\rangle_{\mathscr{H}}-\langle\mathfrak{A}_{f_1}\ldots\mathfrak{A}_{f_s}\rangle_{\mathscr{H}_0}|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{V}, \tag{5.70}$$

заменяющее неравенство (5.42). Аналогичные улучшения оценок могут быть выполнены для всех корреляционных средних ранее рассматривавшихся типов. Мы не будет здесь давать общего доказательства. Ограничимся оценкой разности

$$\langle\alpha_{f_1}(t)\ldots\alpha_{f_l}(t)\,\alpha^+_{g_1}(\tau)\ldots\alpha^+_{g_r}(\tau)\rangle_{\mathscr{H}}-\langle\alpha_{f_1}(t)\ldots\alpha^+_{g_r}(\tau)\rangle_{\mathscr{H}_0}. \tag{5.71}$$

Положим

$$\Gamma_{\substack{\mathscr{H}\\ \mathscr{H}_0}}(t-\tau)=\langle\alpha_{f_1}(t)\ldots\alpha^+_{g_r}(\tau)\rangle_{\substack{\mathscr{H}\\ \mathscr{H}_0}}. \tag{5.72}$$

Имеем

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial\Gamma_{\mathscr{H}}(t-\tau)}{\partial t}=(\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_l))\,\Gamma_{\mathscr{H}}(t-\tau)+\Delta_{\mathscr{H}}(t-\tau), \tag{5.73}$$

где

$$\Delta_{\mathscr{H}}=-\sum_j\langle\alpha_{f_1}(t)\ldots R^+_{f_j}(t)\ldots\alpha_{f_l}(t)\,\alpha^+_{g_1}(\tau)\ldots\alpha^+_{g_r}(\tau)\rangle_{\mathscr{H}}. \tag{5.74}$$

Дифференцируя (5.74) по τ, находим

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial\Delta_{\mathscr{H}}(t-\tau)}{\partial\tau}=-(\Omega(g_1)+\ldots+\Omega(g_r))\,\Delta_{\mathscr{H}}(t-\tau)+\zeta(t-\tau), \tag{5.75}$$

где

$$\zeta(t-\tau)=-\sum_{j,s}\langle\alpha_{f_1}(t)\ldots R^{+}_{f_j}(t)\,\alpha^{+}_{g_1}(\tau)\ldots R_{f_s}(\tau)\ldots\alpha^{+}_{g_r}(\tau)\rangle_{\mathscr{H}}. \quad (5.76)$$

Но ввиду (5.15)

$$|\zeta(t-\tau)|\leqslant\frac{Q}{V}, \text{ где } Q=\text{const}. \quad (5.77)$$

Поэтому из (5.75) обычным путем получим [см., например, (5.48)—(5.72)]

$$|\Delta_{\mathscr{H}}(t-\tau)-\Delta_{\mathscr{H}}(0)\exp\{i[\Omega(g_1)+\ldots+\Omega(g_r)](\tau-t)\}|\leqslant\frac{Q}{V}|t-\tau|. \quad (5.78)$$

Но в силу (5.62) и (5.74)

$$|\Delta_{\mathscr{H}}(0)|\leqslant\frac{Q_1}{V}, \quad Q_1=\text{const}. \quad (6.79)$$

Значит,

$$|\Delta_{\mathscr{H}}(t-\tau)|\leqslant\frac{Q_1+Q\,|t-\tau|}{V}. \quad (5.80)$$

Подставим эту оценку в (5.73). Найдем, что

$$|\Gamma_{\mathscr{H}}(t-\tau)-\Gamma_{\mathscr{H}}(0)\exp\{i[\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_l)](\tau-t)\}|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{Q_1|t-\tau|+Q|t-\tau|^2\frac{1}{2}}{V}. \quad (5.81)$$

С другой стороны,

$$\Gamma_{\mathscr{H}_0}(t-\tau)=\Gamma_{\mathscr{H}_0}(0)\exp\{i[\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_l)](\tau-t)\}. \quad (5.82)$$

Следовательно,

$$|\Gamma_{\mathscr{H}}(t-\tau)-\Gamma_{\mathscr{H}_0}(t-\tau)|\leqslant|\Gamma_{\mathscr{H}}(0)-\Gamma_{\mathscr{H}_0}(0)|+$$

$$+\frac{Q_1|t-\tau|+Q|t-\tau|^2\frac{1}{2}}{V}. \quad (5.83)$$

Но по (5.70)

$$|\Gamma_{\mathscr{H}}(0)-\Gamma_{\mathscr{H}_0}(0)|=|\langle\alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_l}\,\alpha^{+}_{g_1}\ldots\alpha^{+}_{g_r}\rangle_{\mathscr{H}}-$$

$$-\langle\alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_l}\,\alpha^{+}_{g_1}\ldots\alpha^{+}_{g_r}\rangle_{\mathscr{H}_0}|\leqslant\frac{Q_2}{V}, \; Q_2=\text{const}. \quad (5.84)$$

Итак,

$$\left|\langle\alpha_{f_1}(t)\ldots\alpha_{f_l}(t)\alpha^+_{g_1}(\tau)\ldots\alpha^+_{g_r}(\tau)\rangle_{\mathscr{H}}-\langle\alpha_{f_1}(t)\ldots\alpha^+_{g_r}(\tau)\rangle_{\mathscr{H}_0}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{Q_2+Q_1|t-\tau|+Q|t-\tau|^2\frac{1}{2}}{V}.$$

Рассуждая далее, по этой схеме нетрудно везде в ранее полученных оценках повысить порядок $1/\sqrt{V}$ до $1/V$.

§ 6. ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ СЛУЧАЯ $\nu=0$.

В предыдущем параграфе мы получили все необходимые асимптотические оценки для функции Грина в случае $\nu>0$. Поскольку некоторые оценки [см. формулу (4.58)], которыми мы пользовались в § 5, при $\nu=0$ не имеют смысла, результаты этого параграфа не переносятся непосредственно на случай $\nu=0$. Этот случай требует специального рассмотрения.

Так как теперь L и L^+ не принимают с асимптотической точностью определенных значений в наинизшем энергетическом состоянии $\Phi_{\mathscr{H}}$, мы, в отличие от ранее рассмотренного случая, будем работать с амплитудами

$$\alpha_f=u_f a_f+v_f a^+_{-f}\frac{L}{C}, \tag{6.1}$$

где

$$\left.\begin{aligned}u_f&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{T(f)}{\sqrt{C^2\lambda^2(f)+T^2(f)}}};\\ v_f&=-\frac{\varepsilon(f)}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{T(f)}{\sqrt{C^2\lambda^2(f)+T^2(f)}}}.\end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

Эти амплитуды удовлетворяют перестановочным соотношениям для ферми-амплитуд не точно, а лишь с асимптотическим приближением. Для получения оценок необходимо будет установить ряд неравенств.

Рассмотрим прежде всего выражение $\sum\Omega(f)\alpha^+_f\alpha_f$, в котором

$$\Omega(f)=\sqrt{C^2\lambda^2(f)+T^2(f)}. \tag{6.2'}$$

С учетом формулы (6.1) имеем

$$\sum\Omega(f)\alpha^+_f\alpha_f=\sum\Omega(f)\left\{u_f a^+_f+v_f\frac{L^+}{C}a_{-f}\right\}\left\{u_f a_f+v_f a^+_{-f}\frac{L}{C}\right\}=$$

$$=\sum\Omega(f)\left\{u^2_f a^+_f a_f+v^2_f\frac{L^+}{C}a_{-f}a^+_{-f}\frac{L}{C}+\right.$$

$$\left.+u_f v_f\frac{L^+}{C}a_{-f}a_f+u_f v_f a^+_f a^+_{-f}\frac{L}{C}\right\}.$$

Но

$$\sum \Omega(f) v_f^2 \frac{L^+}{C} a_{-f} a_{-f}^+ \frac{L}{C} = -\sum \Omega(f) v_f^2 \frac{L^+}{C} a_f^+ a_f \frac{L}{C} +$$

$$+ \sum \Omega(f) v_f^2 \frac{L^+ L}{C^2} = -\sum \Omega(f) v_f^2 a_f^+ \frac{L^+ L}{C^2} a_f + \sum \Omega(f) v_f^2 \frac{L^+ L}{C^2}.$$

Далее, так как $u_f v_f = C\lambda(f)/2\Omega(f)$, то

$$-\sum \Omega(f) \left\{ u_f v_f \frac{L^+}{C} a_{-f} a_f + u_f v_f a_f^+ a_{-f}^+ \frac{L}{C} \right\} = VL^+ L.$$

Значит,

$$\sum \Omega(f) \alpha_f^+ \alpha_f = \sum_f \Omega \left\{ u_f^2 a_f^+ a_f - v_f^2 a_f^+ \frac{L^+ L}{C^2} a_f \right\} +$$

$$+ \sum \Omega(f) v_f^2 \frac{L^+ L}{C^2} - VL^+ L = \sum_f \Omega(f) \left(u_f^2 - v_f^2\right) a_f^+ a_f -$$

$$- \sum_f \Omega(f) v_f^2 a_f^+ \frac{L^+ L - C^2}{C^2} a_f + \sum \Omega(f) v_f^2 \frac{L^+ L}{C^2} - VL^+ L.$$

Но $\Omega(f) \left(u_f^2 - v_f^2\right) = T(f)$, и поэтому

$$H = \sum T(f) a_f^+ a_f - V \frac{L^+ L}{2} = \sum \Omega(f) \alpha_f^+ \alpha_f + \frac{VL^+ L}{2} -$$

$$- \sum \Omega(f) v_f^2 \frac{L^+ L}{C^2} + \sum \Omega(f) v_f^2 a_f^+ \frac{L^+ L - C^2}{C^2} a_f,$$

и, следовательно,

$$H = \sum \Omega(f) \alpha_f^+ \alpha_f + \frac{V}{2} \left\{ C^2 - \frac{2}{V} \sum \Omega(f) v_f^2 \right\} +$$

$$+ \frac{V(L^+ L - C^2)}{2} - \sum \Omega(f) v_f^2 \frac{L^+ L - C^2}{C^2} + \sum \Omega(f) v_f^4 \frac{L^+ L - C^2}{C^2} +$$

$$+ \sum \Omega(f) v_f^2 \left\{ a_f^+ \frac{L^+ L - C^2}{C^2} a_f - v_f^2 \frac{L^+ L - C^2}{C^2} \right\}.$$

Имеем, с другой стороны,

$$C^2 \frac{V}{2} - \sum \Omega(f) v_f^2 + \sum \Omega(f) v_f^4 = C^2 \frac{V}{2} - \sum \Omega(f) u_f^2 v_f^2 =$$

$$= \frac{V}{2} \left\{ C^2 - \frac{1}{2V} C^2 \sum \frac{\lambda^2(f)}{\sqrt{C^2 \lambda^2(f) + T^2(f)}} \right\} = \frac{V}{2} C^2 \mathcal{F}'(C^2),$$

где $\mathcal{F}(C^2) = C^2 - \dfrac{2}{V} \sum \Omega(f) v_f^2$.

Поэтому

$$H=\sum\Omega(f)\,\alpha_f^+\alpha_f-w+\frac{V}{2}(L^+L-C^2)\,\mathscr{F}'(C^2)+\mathscr{F}(C^2). \quad (6.3)$$

Здесь

$$w=-\sum\Omega(f)\,v_f^2\left\{a_f^+\frac{L^+L-C^2}{C^2}a_f-v_f^2\frac{L^+L-C^2}{C^2}\right\}. \quad (6.4)$$

Но, по определению, C^2 является корнем уравнения [см. формулу (3.8)] $\mathscr{F}'(x)=0$. Кроме того,

$$\langle\Phi_H^* H\Phi_H\rangle\leqslant\mathscr{F}(C^2).$$

Следовательно,

$$\langle\Phi_H^*\sum\Omega(f)\,\alpha_f^+\alpha_f\Phi_H\rangle\leqslant\langle\Phi_H^* w\Phi_H\rangle. \quad (6.5)$$

Займемся теперь оценкой среднего значения w. Обратимся к определению амплитуд α (6.1). Имеем

$$\alpha_f^+=w_f\,a_f^++v_f\frac{L^+}{C}a_{-f};$$

$$\alpha_{-f}=-v_f\,a_f^+\frac{L}{C}+w_f\,a_{-f},$$

откуда

$$u_f\,\alpha_f^+-v_f\frac{L^+}{C}\alpha_{-f}=u_f^2\,a_f^++v_f^2\frac{L^+}{C}a_f^+\frac{L}{C}=$$

$$=a_f^+\left(u_f^2+v_f^2\frac{L^+L}{C^2}\right).$$

Положим

$$\left.\begin{aligned}\eta_f^+&=a_f^+v_f^2\frac{C^2-L^+L}{C^2}=v_f^2\frac{C^2-L^+L}{C^2}a_f^++\frac{2\lambda(f)\,L^+}{VC^2}a_{-f};\\ \eta_f&=v_f^2\frac{C^2-L^+L}{C^2}a_f=v_f^2\,a_f\frac{C^2-L^+L}{C^2}+\frac{2\lambda(f)}{VC^2}a_{-f}^+L.\end{aligned}\right\} \quad (6.6)$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned}a_f^+&=u_f\,\alpha_f^+-v_f\frac{L^+}{C}\alpha_{-f}+\eta_f^+;\\ a_f&=u_f\,\alpha_f-v_f\,\alpha_{-f}^+\frac{L}{C}+\eta_f.\end{aligned}\right\} \quad (6.7)$$

Обратимся теперь к формуле (6.4) и напишем:

$$w=w_1+w_2+w_3;$$

$$w_1 = \sum \Omega(f) v_f^2 u_f \alpha_f^+ \frac{C^2 - L^+ L}{C^2} a_f = \sum \Omega(f) v_f^2 u_f \alpha_f^+ a_f \frac{C^2 - L^+ L}{C^2} +$$

$$+ \sum \Omega(f) v_f^2 u_f \alpha_f^+ \frac{2\lambda(f)}{VC^2} a_{-f}^+ L;$$

$$w_2 = \sum \Omega(f) v_f^2 \eta_f^+ \frac{C^2 - L^+ L}{C^2} a_f = \sum \Omega(f) v_f^2 \eta_f^+ a_f \frac{C^2 - L^+ L}{C^2} +$$

$$+ \sum \Omega(f) v_f^2 \eta_f^+ \frac{2\lambda(f)}{VC^2} a_{-f}^+ L;$$

$$w_3 = \sum \Omega(f) v_f^2 \left\{ - v_f \frac{L^+}{C} \alpha_{-f} \frac{C^2 - L^+ L}{C^2} a_f - v_f^2 \frac{C^2 - L^+ L}{C^2} \right\} =$$

$$= - \sum \Omega(f) v_f^3 \frac{L^+}{C} \left\{ \frac{L^+ L}{C^2} \alpha_{-f} - \alpha_{-f} \frac{L^+ L}{C^2} \right\} a_f +$$

$$+ \sum \Omega(f) v_f^2 \left\{ - v_f \frac{L^+}{C} \left(\frac{C^2 - L^+ L}{C^2} \right) (\alpha_{-f} a_f + a_f \alpha_{-f}) - \right.$$

$$\left. - v_f^2 \frac{C^2 - L^+ L}{C^2} \right\} + \sum \Omega(f) v_f^3 \frac{L^+}{C} \left(\frac{C^2 - L^+ L}{C^2} \right) a_f \alpha_{-f}.$$

Оценим средние w_1, w_2 и w_3, для w_1 воспользуемся ранее доказанным неравенством (4.47), которое запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} &\left\langle \Phi_H^* \left(\frac{C^2 - L^+ L}{C^2} \right) \Phi_H \right\rangle \leqslant \frac{G}{V}, \quad \text{где } G = \text{const}; \\ &\left\langle \Phi_H^* \left(\frac{C^2 - L L^+}{C^2} \right) \Phi_H \right\rangle \leqslant \frac{G}{V}. \end{aligned} \right\} \tag{6.8}$$

Имеем

$$|\langle \Phi_H^* w_1 \Phi_H \rangle| \leqslant \sum \Omega(f) v_f^2 u_f \left| \left\langle \Phi_H^* \alpha_f^+ a_f \frac{C^2 - L^+ L}{C^2} \Phi_H \right\rangle \right| +$$

$$+ \sum \Omega(f) v_f^2 u_f \left| \langle \Phi_H^* \alpha_f^+ a_{-f}^+ L \Phi_H \rangle \right| \frac{2|\lambda(f)|}{VC^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum \Omega(f) v_f^2 u_f \sqrt{\langle \Phi_H^* \alpha_f^+ a_f a_f^+ \alpha_f \Phi_H \rangle} \times$$

$$\times \sqrt{\left\langle \Phi_H^* \left(\frac{C^2 - L^+ L}{C^2} \right)^2 \Phi_H \right\rangle} + \sum \Omega(f) v_f^2 u_f \times$$

$$\times \sqrt{\langle \Phi_H^* \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_H \rangle \langle \Phi_H^* L^+ a_{-f} a_{-f}^+ L \Phi_H \rangle} \frac{2|\lambda(f)|}{VC^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum \Omega(f) v_f^2 u_f \left(\frac{G}{V} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\langle \Phi_H^* \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_H \rangle} +$$

$$+\frac{1}{V}\sum\Omega(f)v_f^2u_f\frac{2|\lambda(f)|}{C^2}|L|\sqrt{\langle\Phi_H^*\alpha_f^+\alpha_f\Phi_H\rangle}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\langle\Phi_H^*\sum\Omega(f)\alpha_f^+\alpha_f\Phi_H\rangle}\left\{\sqrt{\frac{G}{V}\sum_f\Omega(f)v_f^4u_f^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2|L|}{C^2\sqrt{V}}\sqrt{\frac{1}{V}\sum_f\Omega(f)v_f^4\;u_f^2|\lambda(f)|^2}\right\}.$$

Следовательно,

$$|\langle\Phi_H^*w_1\Phi_H\rangle|\leqslant R_1\sqrt{\langle\Phi_H^*\sum_f\Omega(f)\alpha_f^+\alpha_f\Phi_H\rangle},\quad R_1=\mathrm{const}.$$

Совершенно аналогично найдем $|\langle\Phi_H^*w_2\Phi_H\rangle|\leqslant R_2$, где $R_2=$ $=\mathrm{const}$. Перейдем к w_3. Заметим, что

$$\alpha_{-f}a_f+a_f\alpha_{-f}=\left(-v_fa_f^+\frac{L}{C}+u_fa_{-f}\right)a_f+$$

$$+a_f\left(-v_fa_f^+\frac{L}{C}-u_fa_{-f}\right)=-\frac{v_f}{C}(a_f^+La_f+a_fa_f^+L)=$$

$$=-\frac{v_f}{C}(a_f^+a_f+a_fa_f^+)L=-\frac{v_f}{C}L.$$

Значит (см. выражение для w_3),

$$\Delta\equiv\sum_f\Omega(f)v_f^2\left\{-v_f\frac{L^+}{C}\left(C^2-\frac{L^+L}{C^2}\right)(\alpha_{-f}a_f+a_f\alpha_{-f})-v_f^2\frac{C^2-L^+L}{C^2}\right\}=$$

$$=\sum_f\Omega(f)v_f^2\left\{v_f^2\frac{L^+}{C}\left(\frac{C^2-L^+L}{C^2}\right)\frac{L}{C}-v_f^2\frac{C^2-L^+L}{C^2}\right\}=$$

$$=\sum_f\Omega(f)v_f^4\frac{L^+}{C^2}\left(\frac{LL^+-L^+L}{C^2}\right)L-\sum_f\Omega(f)v_f^4\left(\frac{C^2-L^+L}{C^2}\right)^2,$$

и потому [см. формулу II. 1.18]

$$\langle\Phi_H^*\Delta\Phi_H\rangle\leqslant\sum_f\Omega(f)v_f^4\left\langle\Phi_H^*\frac{L^+}{C}\left(\frac{LL^+-L^+L}{C^2}\right)\frac{L}{C}\Phi_H\right\rangle=$$

$$=\frac{2}{V^2C^2}\sum_{f,f'}\Omega(f)v_f^4\lambda^2(f')\left\langle\Phi_H^*\frac{L^+}{C}(1-a_{f'}^+a_{f'}-a_{f'}^+a_{-f'})\frac{L}{C}\Phi_H\right\rangle\leqslant$$

$$\leqslant2\frac{|L|^2}{C^4}\cdot\frac{1}{V}\sum_f\Omega(f)v_f^4\frac{1}{V}\sum_{f'}\lambda^2(f')\leqslant\mathrm{const}.$$

Найдем также

$$\sum_f\Omega(f)|v_f|^3\left\langle\Phi_H^*\frac{L^+}{C}\left(\frac{L^+L}{C^2}\alpha_{-f}-\alpha_{-f}\frac{L^+L}{C^2}\right)a_f\Phi_H\right\rangle\leqslant\mathrm{const};$$

$$\sum_f \Omega(f)\,|v_f|^3 \left\langle \Phi_H^* \frac{L^+}{C}\left(\frac{C^2-L^+L}{C^2}\right) a_f\,\alpha_{-f}\,\Phi_H \right\rangle \leqslant$$

$$\leqslant R_3 \sqrt{\sum_f \langle \Phi_H^*\,\alpha_f^+\,\alpha_f\,\Phi_H\rangle\,\Omega(f)}.$$

Итак, собирая выражения для w_1, w_2 и w_3,

$$\langle \Phi_H^*\, w\Phi_H\rangle \leqslant \gamma_1 \sqrt{\left\langle \Phi_H^* \sum_f \Omega(f)\,\alpha_f^+\,\alpha_f\,\Phi_H\right\rangle} + \gamma_2,$$

где $\gamma_1 = \mathrm{const}$, $\gamma_2 = \mathrm{const}$.

Подставляя это неравенство в (6.5), получаем

$$\left\langle \Phi_H^* \sum_f \Omega(f)\,\alpha_f^+\,\alpha_f\,\Phi_H \right\rangle \leqslant \gamma_1 \sqrt{\left\langle \Phi_H^* \sum_f \Omega(f)\,\alpha_f^+\,\alpha_f\,\Phi_H \right\rangle} + \gamma_2.$$

Положим $x = \sqrt{\left\langle \Phi_H^* \sum_f \Omega(f)\,\alpha_f^+\,\alpha_f\,\Phi_H \right\rangle}$. Тогда $x^2 - \gamma_1 x \leqslant \gamma_2$; $\left(x - \frac{\gamma_1}{2}\right)^2 \leqslant \gamma_2 + \frac{\gamma_1^2}{4}$ и $x < \frac{\gamma_1}{2} + \sqrt{\gamma_2 + \frac{\gamma_1^2}{4}}$.

Итак,

$$\left\langle \Phi_H^* \frac{1}{V} \sum_f \Omega(f)\,\alpha_f^+\,\alpha_f\,\Phi_H \right\rangle \leqslant \frac{R}{V}, \tag{6.9}$$

где

$$R = \left(\frac{\gamma_1}{2} + \sqrt{\gamma_2 + \frac{\gamma_1^2}{4}}\right)^2 = \mathrm{const}.$$

Можно перейти теперь к рассмотрению уравнений движения. При $\nu = 0$ из уравнений (5.1) и (5.2) имеем

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{i}\frac{da_f}{dt} = T(f)\,a_f - \lambda(f)\,a_{-f}^+ L; \\ &\mathrm{i}\frac{da_{-f}}{dt} = T(f)\,a_{-f} + \lambda(f)\,a_f^+ L. \end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

Поэтому

$$\mathrm{i}\frac{dL}{dt} = \frac{1}{V}\sum \lambda(f)\,\{T(f)\,a_{-f} + \lambda(f)\,a_f^+ L\}\,a_f +$$

$$+\frac{1}{V}\sum \lambda(f)\,a_{-f}\,\{T(f)\,a_f - \lambda(f)\,a_{-f}^+ L\} =$$

$$= \frac{2}{V}\sum \lambda(f)\,T(f)\,a_{-f}a_f + \frac{1}{V}\sum \lambda^2(f)\,(a_f^+ a_f - a_{-f}a_{-f}^+)\,L =$$

$$= \frac{2}{V}\sum \lambda(f)\,T(f)\,a_{-f}a_f + \frac{1}{V}\sum \lambda^2(f)\,(a_f^+ a_f - a_f a_f^+)\,L =$$

$$= \frac{2}{V}\sum \lambda(f)\,T(f)\,a_{-f}a_f + \frac{1}{V}\sum \lambda^2(f)\,(2a_f^+ a_f - 1)\,L.$$

Заметим теперь, что

$$-2\lambda(f)\,T(f)\,u_f v_f \frac{L}{C} + \lambda^2(f)\left(2v_f^2 - 1\right)L =$$
$$= \lambda^2(f)\frac{T(f)}{\Omega(f)}L + \lambda^2(f)\left(1 - \frac{T(f)}{\Omega(f)} - 1\right)L = 0,$$

следовательно,

$$\left.\begin{aligned} & i\frac{dL}{dt} = D_1 + D_2; \\ & D_1 = \frac{2}{V}\sum \lambda(f)\,T(f)\left\{a_{-f}a_f + u_f v_f \frac{L}{C}\right\}; \\ & D_2 = \frac{2}{V}\sum \lambda^2(f)\left(a_f^+ a_f - v_f^2\right)L. \end{aligned}\right\} \qquad (6.11)$$

Но с учетом (6.7)

$$a_{-f}a_f + u_f v_f \frac{L}{C} = \left(u_f \alpha_{-f} + v_f \alpha_f^+ \frac{L}{C}\right)\left(u_f \alpha_f - v_f \alpha_{-f}^+ \frac{L}{C}\right) +$$
$$+ \eta_{-f}a_f + a_{-f}\eta_f - \eta_{-f}\eta_f + u_f v_f \frac{L}{C} = u_f^2 \alpha_{-f}\alpha_f -$$
$$- v_f^2 \alpha_f^+ \frac{L}{C}\alpha_{-f}^+ \frac{L}{C} - u_f v_f \alpha_{-f}\alpha_{-f}^+ \frac{L}{C} + u_f v_f \alpha_f^+ \frac{L}{C}\alpha_f +$$
$$+ \eta_{-f}a_f + a_{-f}\eta_f - \eta_{-f}\eta_f + u_f v_f \frac{L}{C} = u_f^2 \alpha_{-f}\alpha_f -$$
$$- u_f v_f\left(\alpha_{-f}\alpha_{-f}^+ + \alpha_{-f}^+\alpha_{-f} - 1\right)\frac{L}{C} - v_f^2 \alpha_f^+ \frac{L}{C}\alpha_{-f}^+ \frac{L}{C} +$$
$$+ u_f v_f\left(\alpha_f^+ \frac{L}{C}\alpha_f + \alpha_{-f}^+\alpha_{-f}\frac{L}{C}\right) + \eta_{-f}a_f + a_{-f}\eta_f - \eta_{-f}\eta_f. \qquad (6.12)$$

Имеем далее

$$\alpha_{-f}\alpha_{-f}^+ + \alpha_{-f}^+\alpha_{-f} - 1 = \left(-v_f a_f^+ \frac{L}{C} + u_f a_{-f}\right)\times$$
$$\times\left(-v_f \frac{L^+}{C}a_f + u_f a_{-f}^+\right) + \left(-v_f \frac{L^+}{C}a_f + u_f a_{-f}^+\right)\times$$
$$\times\left(-v_f a_f^+ \frac{L}{C} + u_f a_{-f}\right) - 1 = v_f^2 a_f^+ \frac{LL^+}{C^2}a_f + u_f^2 a_{-f}a_{-f}^+ -$$
$$- u_f v_f a_f^+ \frac{L}{C}a_{-f}^+ - u_f v_f a_{-f}\frac{L^+}{C}a_f + v_f^2 \frac{L^+}{C}a_f a_f^+ \frac{L}{C} +$$
$$+ u_f^2 a_{-f}^+ a_{-f} - u_f v_f a_{-f}^+ a_f^+ \frac{L}{C} - u_f v_f \frac{L^+}{C}a_f a_{-f} - 1 =$$
$$= v_f^2 a_f^+ \frac{LL^+ - L^+L}{C^2}a_f + v_f^2 \frac{L^+L}{C^2} + u_f^2 - 1 -$$
$$- u_f v_f a_f^+\left(\frac{L}{C}a_{-f}^+ - a_{-f}^+\frac{L}{C}\right) - u_f v_f\left(a_{-f}\frac{L^+}{C} - \frac{L^+}{C}a_{-f}\right)a_f,$$

и поэтому

$$\alpha_{-f}\alpha_{-f}^{+}+\alpha_{-f}^{+}\alpha_{-f}-1=\frac{2}{V^2}\sum_{(g)}v_f^2\,a_f^{+}\,\frac{\lambda^2(g)}{C^2}\left(1-a_g^{+}a_g-a_{-g}^{+}a_{-g}\right)a_f+$$
$$+v_f^2\,\frac{L^{+}L-C^2}{C^2}+u_f v_f a_f^{+}\,a_f\,\frac{2\lambda(f)}{V}+u_f v_f\,a_f^{+}\,a_f\,\frac{2\lambda(f)}{V}. \qquad (6.13)$$

Имеем, следовательно,

$$\langle\Phi_H^{*}D_1D_1^{+}\Phi_H\rangle=\frac{2}{V}\sum_f\lambda(f)\,T(f)\,u_f^2\,\langle\Phi_H^{*}\alpha_{-f}\alpha_f D_1^{+}\,\Phi_H\rangle-$$
$$-\frac{2}{V}\sum_f\lambda(f)T(f)\,\Big\langle\Phi_H^{*}\,\alpha_f^{+}\Big\{v_f^2\,\frac{L}{C}\,\alpha_{-f}^{+}\frac{L}{C}-$$
$$-u_f v_f\left(\frac{L}{C}\,\alpha_f+\alpha_f\frac{L}{C}\right)\Big\}D_1^{+}\,\Phi_H\Big\rangle-\frac{4}{V^3}\sum_{fg}\lambda(f)\,T(f)\,u_f v_f^3\,\frac{\lambda^2(g)}{C^2}\times$$
$$\times\Big\langle\Phi_H^{*}\,a_f^{+}\left(1-a_g^{+}\,a_g-a_{-g}^{+}\,a_{-g}\right)a_f\,\frac{L}{C}\,D_1^{+}\,\Phi_H\Big\rangle+$$
$$+\frac{2}{V}\sum_f\lambda(f)\,T(f)\,\langle\Phi_H^{*}\left(\eta_{-f}\,a_f-\eta_f\,a_{-f}+[a_{-f}\,\eta_f+\eta_f\,a_{-f}]-\right.$$
$$\left.-\eta_{-f}\,\eta_f\right)D_1^{+}\,\Phi_H\rangle-\frac{2}{V}\sum_f\lambda(f)\,T(f)\,\Big\langle\Phi_H^{*}\Big\{v_f^2\,\frac{L^{+}L-C^2}{C^2}+$$
$$+2u_f v_f a_f^{+}\,a_f\,\frac{2\lambda(f)}{V}\Big\}\frac{L}{C}\,D_1^{+}\,\Phi_H\Big\rangle.$$

Приняв во внимание, что

$$\langle\Phi_H^{*}\alpha_{-f}\,\alpha_f\,D_1^{+}\,\Phi_H\rangle=\langle\Phi_H^{*}\,\alpha_{-f}\,D_1^{+}\,\alpha_f\Phi_H\rangle+$$
$$+\langle\Phi_H^{*}\,\alpha_{-f}\left(\alpha_f\,D_1^{+}-D_1^{+}\,\alpha_f\right)\Phi_H\rangle,$$

можно убедиться с учетом (6.8) и (6.9), что

$$\langle\Phi_H^{*}\,D_1 D_1^{+}\,\Phi_H\rangle\leqslant\frac{\Gamma_1}{V},\quad \Gamma_1=\mathrm{const}. \qquad (6.14)$$

Таким же образом можно получить

$$\langle\Phi_H^{*}\,D_1^{+}D_1\,\Phi_H\rangle\leqslant\frac{\Gamma_2}{V},\ \Gamma_2=\mathrm{const}. \qquad (6.15)$$

Перейдем теперь к выражению D_2. Имеем

$$a_f^{+}\,a_f-v_f^2=a_f^{+}\,\eta_f+\eta_f^{+}\,a_f-\eta_f^{+}\,\eta_f+\left(u_f\,\alpha_f^{+}-v_f\,\frac{L^{+}}{C}\alpha_{-f}\right)\times$$
$$\times\left(u_f\alpha_f-v_f\alpha_{-f}^{+}\frac{L}{C}\right)-v_f^2=u_f^2\,\alpha_f^{+}\alpha_f+v_f^2\,\frac{L^{+}}{C}\alpha_{-f}\alpha_{-f}^{+}\frac{L}{C}-$$
$$-v_f^2-u_f v_f\alpha_f^{+}\alpha_{-f}^{+}\frac{L}{C}-u_f v_f\,\frac{L^{+}}{C}\,\alpha_{-f}\alpha_f+a_f^{+}\eta_f+$$

$$+\eta_f^+ a_f-\eta_f^+\eta_f=u_f^2\,\alpha_f^+\alpha_f+v_f^2\,\frac{L^+}{C}\left(\alpha_{-f}\alpha_{-f}^++\alpha_{-f}^+\alpha_{-f}-1\right)-\frac{L}{C}-$$

$$-v_f^2\,\frac{C^2-L^+L}{C^2}-v_f^2\,\frac{L^+}{C}\,\alpha_{-f}^+\alpha_{-f}\,\frac{L}{C}-u_f\,v_f\,\alpha_f^+\alpha_{-f}^+\frac{L}{C}-$$

$$-u_f\,v_f\,\frac{L^+}{C}\,\alpha_{-f}\alpha_f\,+a_f^+\eta_f+\eta_f^+a_f-\eta_f^+\eta_f\,. \qquad (6.16)$$

Исходя из (6.16) и с учетом неравенств (6.8) и (6.9) установим, что

$$\left.\begin{aligned}&\langle\Phi_H^* D_2 D_2^+\,\Phi_H\rangle\leqslant\frac{\Gamma_3}{V}\,,\ \Gamma_3=\mathrm{const};\\&\langle\Phi_H^*\,D_2^+\,D_2\Phi_H\rangle\leqslant\frac{\Gamma_3}{V}.\end{aligned}\right\} \qquad (6.17)$$

Из (7.10) имеем теперь

$$\left.\begin{aligned}&\left\langle\Phi_H^*\left(\frac{dL}{dt}\right)^+\frac{dL}{dt}\,\Phi_H\right\rangle\leqslant\frac{\Gamma}{V}\,,\ \ \Gamma=\mathrm{const};\\&\left\langle\Phi_H^*\,\frac{dL}{dt}\left(\frac{dL}{dt}\right)^+\Phi_H\right\rangle\leqslant\frac{\Gamma}{V}\,.\end{aligned}\right\} \qquad (6.18)$$

Обратимся опять к уравнениям движения (6.11). Учитывая (6.1), (6.2), получим

$$\mathrm{i}\,\frac{d\alpha_f^+}{dt}=\mathrm{i}\,\frac{d}{dt}\left(u_f\,a_f^++v_f\,\frac{L^+}{C}\,a_{-f}\right)=u_f\,\mathrm{i}\,\frac{da_f^+}{dt}+v_f\,\frac{L^+}{C}\,\,\mathrm{i}\,\frac{da_{-f}}{dt}+$$

$$+v_f\,\mathrm{i}\,\frac{dL^+}{dt}\cdot\frac{a_{-f}}{C}=u_f\left\{-T(f)\,a_f^++\lambda(f)\,L^+\,a_{-f}\right\}+$$

$$+v_f\,\frac{L^+}{C}\,\left\{T(f)\,a_{-f}+\lambda(f)\,a_f^+L\right\}+v_f\,\mathrm{i}\,\frac{dL^+}{dt}\cdot\frac{a_{-f}}{C}=$$

$$=-a_f^+\left\{T(f)\,u_f-\lambda(f)\,v_f\,\frac{L^+L}{C}\right\}+\frac{L^+}{C}\,\{u_f\,\lambda(f)\,C+T(f)\,v_f\}\,a_{-f}+$$

$$+v_f\,\mathrm{i}\,\frac{dL^+}{dt}\cdot\frac{a_{-f}}{C}=-a_f^+\,\{T(f)\,u_f-\lambda(f)\,v_fC\}+$$

$$+\frac{L^+}{C}\,\{u_f\lambda(f)\,C+T(f)\,v_f\}\,a_{-f}-a_f^+\,\lambda(f)\,v_f\,\frac{C^2-L^+L}{C}+v_f\,\mathrm{i}\,\frac{dL^+}{dt}\cdot\frac{a_{-f}}{C}.$$

Но [см. формулу (5.6)]

$$\left.\begin{aligned}&u_f\,\lambda(f)\,C+T(f)\,v_f=-\Omega(f)\,v_f;\\&T(f)\,u_f-\lambda(f)\,v_fC=\Omega(f)\,u_f,\end{aligned}\right\} \qquad (6.19)$$

поэтому

$$\mathrm{i}\,\frac{d\alpha^+}{dt}+\Omega(f)\,\alpha_f^+=R_f, \qquad (6.20)$$

где

$$R_f = -a_f^+ \lambda(f) v_f \frac{C^2 - L^+ L}{C} + v_f (D_1^+ + D_2^+) \frac{a_{-f}}{C}.$$

Имеем далее:

$$\langle \Phi_H^* R_f^+ R_f \Phi_H \rangle \leqslant 2 \left\langle \Phi_H^* \frac{C^2 - L^+ L}{C} a_f a_f^+ \frac{C^2 - L^+ L}{C} \Phi_H \right\rangle \lambda^2(f) v_f^2 +$$

$$+ 2 \left\langle \Phi_H^* \frac{a_{-f}^+}{C} (D_1 + D_2)(D_1^+ + D_2^+) \frac{a_{-f}}{C} \Phi_H \right\rangle v_f^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\lambda^2(f) v_f^2 \left\langle \Phi_H^* \frac{(C^2 - L^+ L)^2}{C^2} \Phi_H \right\rangle +$$

$$+ 2 v_f^2 \left\langle \Phi_H^* \left\{ \frac{a_{-f}^+}{C} (D_1 + D_2)(D_1^+ + D_2^+) \frac{a_{-f}}{C} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (D_1 + D_2) \frac{a_{-f}^+ a_{-f}}{C^2} (D_1^+ + D_2^+) \right\} \Phi_H \right\rangle +$$

$$+ 2 \langle \Phi_H^* (D_1 + D_2)(D_1^+ + D_2^+) \Phi_H \rangle \frac{v_f^2}{C^2}$$

и также

$$\langle \Phi_H^* R_f R_f^+ \Phi_H \rangle \leqslant 2 \left\langle \Phi_H^* a_f^+ \left(\frac{C^2 - L^+ L}{C} \right)^2 a_f \Phi_H \right\rangle \lambda^2(f) v_f^2 +$$

$$+ \frac{2 v_f^2}{C} \langle \Phi_H^* (D_1^+ + D_2^+)(D_1 + D_2) \Phi_{\mathscr{H}} \rangle =$$

$$= 2\lambda^2 v_f^2 \left\langle \Phi_H^* \left\{ a_f^+ \left(\frac{C^2 - L^+ L}{C} \right) \left(\frac{C^2 - L^+ L}{C} \right) a_f - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{C^2 - L^+ L}{C} \right) a_f^+ a_f \left(\frac{C^2 - L^+ L}{C} \right) \right\} \Phi_H \right\rangle +$$

$$+ 2\lambda^2 v_f^2 \left\langle \Phi_H^* \left(\frac{C^2 - L^+ L}{C} \right)^2 \Phi_H \right\rangle +$$

$$+ 2 \frac{v_f^2}{C^2} \langle \Phi_H^* (D_1^+ + D_2^+)(D_1 + D_2) \Phi_H \rangle.$$

Отсюда следует, что

$$\left. \begin{aligned} &\langle \Phi_H^* R_f R_f^+ \Phi_H \rangle \leqslant v_f^2 \frac{S}{V}, \text{ где } S = \text{const}; \\ &\langle \Phi_H^* R_f^+ R_f \Phi_H \rangle \leqslant v_f^2 \frac{S}{V}. \end{aligned} \right\} \qquad (6.21)$$

Имея уравнения (6.20) и неравенства (6.21), можно повторить уже дословно наши рассуждения из предыдущего параграфа, где мы рассматривали случай $\nu>0$. Мы получим теперь [см. формулу (5.35)]

$$\langle \Phi_H^* a_f^+ a_f \Phi_H \rangle \leqslant \frac{S}{V} \cdot \frac{v_f^2}{2\pi\Omega^2(f)} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)\tau|\, d\tau \right)^2. \qquad (6.21')$$

По сравнению с неравенством (6.9) мы имеем здесь существенный прогресс.

Неравенство (6.9) показывает, что $\langle \Phi_H^* a_f^+ a_f \Phi_H \rangle$ в среднем для f есть величина порядка $1/V$. Неравенство же (6.21') показывает, что это выражение при каждом f будет порядка $1/V$.

Из (6.21') мы сейчас же можем получить оценки для средних, относящихся к одному времени. Пусть $\mathfrak{A}_f$ равно a_f или a_f^+. Рассмотрим те операторы $\mathfrak{A}_{f_1} \mathfrak{A}_{f_2} \dots \mathfrak{A}_{f_k}$, которые сохраняют число частиц. Покажем, что

$$\left| \langle \mathfrak{A}_{f_1} \mathfrak{A}_{f_2} \dots \mathfrak{A}_{f_k} \rangle_H - \langle \mathfrak{A}_{f_1} \mathfrak{A}_{f_2} \dots \mathfrak{A}_{f_k} \rangle_{H_0} \right| \leqslant \frac{\text{const}}{\sqrt{V}}. \qquad (6.22)$$

Заметим теперь, что Φ_H и Φ_{H_0} удовлетворяют условиям (2.3)

$$(a_f^+ a_f - a_{-f}^+ a_{-f})\Phi = 0.$$

Поэтому

$$\langle \mathfrak{A}_{f_1} \mathfrak{A}_{f_2} \mathfrak{A}_{f_3} \dots \mathfrak{A}_{f_k} \rangle$$

могут быть приведены к сумме членов типа

$$\langle \dots a_f^+ a_f \dots a_g^+ a_{-g}^+ \dots a_{-h} a_h \dots \rangle,$$

где $\pm f$, $\pm g$, $\pm h$ все различны. Разумеется, число индексов g равно здесь числу индексов h. Очевидно также, что

$$\langle \dots a_f^+ a_f \dots a_g^+ a_{-g}^+ \dots a_{-h} a_h \dots \rangle_{H_0} = \\ = \prod_f v_f^2 \prod_g (-u_g v_g) \prod_h (-u_h v_h).$$

Нам надо, следовательно, только установить, что

$$\left| \langle \dots a_f^+ a_f \dots a_g^+ a_{-g}^+ \dots a_{-h} a_h \dots \rangle_H \right| - \\ - \prod_f v_f^2 \prod_g (-u_g v_g) \prod_h (-u_h v_h) \leqslant \frac{\text{const}}{\sqrt{V}}. \qquad (6.23)$$

На основании ранее сказанного [см. формулы (6.12), (6.13) и (6.16)] заметим, что

$$a_{-h}a_h+u_h v_h \frac{L}{C}=u_h^2 \alpha_{-h}^{+}\alpha_h-u_h v_h\left\{\frac{2}{V^2}\sum_{(f)} v_h^2 a_h^{+}\frac{\lambda^2(f)}{C^2}\times\right.$$

$$\times\left(1-a_f^{+}a_f-a_{-f}^{+}a_{-f}\right)a_h+v_h^2\frac{L^{+}L-C^2}{C^2}+$$

$$\left.+u_h v_h a_h^{+}a_h\frac{4\lambda(h)}{V}\right\}\frac{L}{C}-v_h^2\,\alpha_h^{+}\frac{L}{C}\,\alpha_{-h}^{+}\frac{L}{C}+u_h v_h\times$$

$$\times\left(\alpha_h^{+}\frac{L}{C}\,\alpha_h+\alpha_{-h}^{+}\,\alpha_{-h}\frac{L}{C}\right)+\eta_{-h}a_h+a_{-h}\,\eta_{-h}-\eta_{-h}\eta_h; \tag{6.24}$$

$$a_f^{+}a_f-v_f^2=u_f^2\,\alpha_f^{+}\alpha_f-v_f^2\,\frac{L^{+}}{C}\,\alpha_{-f}^{+}\alpha_{-f}\frac{L}{C}-u_f v_f\alpha_f^{+}\alpha_{-f}^{+}\frac{L}{C}-$$

$$-u_f v_f\frac{L^{+}}{C}\,\alpha_{-f}\alpha_f+v_f^2\,\frac{L^{+}}{C}\left\{\frac{2}{V^2}\sum_{g} v_f^2\,a_f^{+}\frac{\lambda^2(g)}{C^2}\times\right.$$

$$\times\left(1-a_g^{+}a_g-a_{-g}^{+}a_{-g}\right)a_f+v_f^2\,\frac{L^{+}L-C^2}{C^2}+$$

$$\left.+u_f v_f\frac{4\lambda}{V}\,a_f^{+}a_f\right\}+a_f^{+}\,\eta_f+\eta_f^{+}a_f-\eta_f^{+}\,\eta_f. \tag{6.25}$$

Будем теперь передвигать α^{+} к левой обкладке, α — к правой, а $\frac{L^{+}L-C^2}{C^2}$ (например, входящие в η, η^{+}) — к одной из них, все равно к какой. Так как индексы $\pm f$, $\pm g$, $\pm L$ все различны, то коммутаторы, возникающие в процессе этих перестановок, будут величинами порядка $1/V$. Учитывая постоянно применяемое неравенство $|\langle AB\rangle|\leqslant\sqrt{\langle AA^{+}\rangle\,\langle B^{+}B\rangle}$, видим, что как только α^{+} «коснется» левой обкладки, или α — правой, или $L^{+}L-C^2$ окажется у одной из них, так сейчас же мы получим величину порядка малости не ниже чем $\mathrm{const}/\sqrt{V}$. Следовательно,

$$\left|\langle\ldots a_f^{+}a_f\ldots a_g^{+}a_{-g}^{+}\ldots a_{-h}a_h\ldots\rangle_H-\right.$$

$$\left.-\Pi_f v_f^2\left\langle\ldots(-u_g v_g)\frac{L^{+}}{C}\,(-u_h v_h)\,\frac{L}{C}\ldots\right\rangle_H\right|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{\sqrt{V}}. \tag{6.26}$$

Но число g равно числу h, а перестановка L с L^{+} совершается с точностью до членов порядка $1/V$. Поэтому $\left\langle\ldots u_g v_g\frac{L^{+}}{C}\ldots\right.$ $\left.\ldots u_h v_h\,\frac{L}{C}\ldots\right\rangle_H$ отличаются от $\prod\limits_g u_g v_g\prod\limits_h u_h v_h\left\langle\left(\frac{L^{+}L}{C^2}\right)^l\right\rangle_H$

на члены порядка $1/V$. С другой стороны,

$$\left\langle \left(\frac{L^+L}{C^2} \right)^l \right\rangle_H$$

отличаются от единицы на величину порядка не ниже $1/\sqrt{V}$.

Итак, справедливость неравенств (6.23), а следовательно и (6.22), доказана. Перейдем теперь к двухвременным корреляционным средним и покажем, что вообще

$$\begin{gathered} |\langle \mathfrak{B}_{f_1}(t) \ldots \mathfrak{B}_{f_l}(t);\ \mathfrak{A}_{g_1}(\tau) \ldots \mathfrak{A}_{g_k}(\tau) \rangle_H - \\ - \langle \mathfrak{B}_{f_1}(t) \ldots \mathfrak{B}_{f_l}(t);\ \mathfrak{A}_{g_1}(\tau) \ldots \mathfrak{A}_{g_k}(\tau) \rangle_{H_0} | \leqslant \frac{K(t-\tau)+K_1}{\sqrt{V}}, \qquad (6.27) \\ K = \text{const}, \quad K_1 = \text{const}. \end{gathered}$$

Здесь $\mathfrak{B}_f$, $\mathfrak{A}_g$ равны a или a^+. Мы предполагаем, как всегда в подобном случае, что оператор $\mathfrak{B}_{f_1} \ldots \mathfrak{A}_{g_k}$ сохраняет число частиц.

В силу упоминавшихся ранее дополнительных условий, которым удовлетворяют Φ_H и Φ_{H_0}, исследуемые средние с помощью установления «правильного порядка» операторов можно привести к сумме членов типа

$$\begin{gathered} \langle \ldots a_f^+(t)\, a_f(t) \ldots a_g^+(t)\, a_{-g}^+(t) \ldots a_{-h}(t)\, a_h(t) \ldots \\ \ldots a_k^+(t) \ldots a_g(t) \ldots a_{f'}^+(\tau)\, a_{f'}(\tau) \ldots a_{g'}^+(\tau)\, a_{-g'}^+(\tau) \ldots \\ \ldots a_{-h'}(\tau)\, a_{h'}(\tau) \ldots a_{k'}(\tau) \ldots a_{q'}^+(\tau) \ldots \rangle, \qquad (6.28) \end{gathered}$$

где число операторов a и a^+ одинаково и где индексы $\pm f$, $\pm g$, $\pm h$, $\pm k$, $\pm q$ и индексы $\pm f'$, $\pm g'$, $\pm h'$, $\pm k'$, $\pm q'$ все различны.

Ввиду указанной возможности сведения нам достаточно доказать неравенства (6.27) для средних типа (6.28). Воспользуемся для пар» — a^+a, a^+a^+, aa формулами (6.24), (6.25), а для «одиночек» a, a^+ — формулами (6.7). Будем теперь передвигать $\alpha^+(f)$ и $L^+(t)L(t) - C^2$ влево, а $\alpha(\tau)$ и $L^+(\tau)L(\tau) - C^2$ — вправо. Ввиду подчеркнутого выше различия индексов появляющиеся коммутаторы (все перестановки ведем лишь между амплитудами, относящимися к одному и тому же времени) будут давать величины порядка $1/V$. Заметим, что как только $\alpha^+(t)$ или $L^+(t)L(t) - C^2$ «коснутся» левой скобки или $\alpha(t)$ или $L^+(\tau)L(\tau) - C^2$ «коснутся» правой скобки, так сейчас же мы получим величины по крайней мере порядка $1/\sqrt{V}$. Нам, следовательно, останется показать лишь, что неравенство типа (6.27) имеет место для средних вида

$$\Gamma(t-\tau) = \langle \alpha_{f_1}(t) \ldots \alpha_{f_l}(t)\, L^k(t)\, L^{+q}(t)\, L^{+q_1}(\tau)\, L^{k_1}(\tau)\, \alpha_{g_i}^+(\tau) \ldots \alpha_{g_r}^+(\tau) \rangle. \qquad (6.29)$$

Воспользуемся сейчас уравнениями движения (6.19) и соотношениями (6.11), (6.18), (6.20) и (6.21), дающими необходимые оценки. Найдем

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial \Gamma_H(t-\tau)}{\partial t} - \{\Omega(f_1) + \ldots + \Omega(f_l)\}\,\Gamma_H(t-\tau) = \Delta(t-\tau),$$

причем $|\Delta(t-\tau)| \leqslant \frac{G}{\sqrt{V}}$, где $G = \mathrm{const}$. Отсюда, поскольку

$$\Gamma_H(t-\tau) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\{\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_l)\}(t-\tau)}\,\Gamma_H(0) +$$
$$+ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\{\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_l)\}(t-\tau)} \int\limits_0^{t-\tau} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\{\Omega(f_1)+\Omega(f_2)+\ldots+\Omega(f_l)\}z}\,\Delta(z)\,dz,$$

получим

$$\left|\Gamma_H(t-\tau) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\{\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_l)\}(t-\tau)}\,\Gamma_H(0)\right| \leqslant \frac{G\,|t-\tau|}{\sqrt{V}}. \qquad (6.30)$$

С другой стороны,

$$\Gamma_{H_0}(t-\tau) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\{\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_l)\}(t-\tau)}\,\Gamma_{H_0}(0), \qquad (6.31)$$

так как

$$\Gamma_{H_0}(t-\tau) = \left\langle \alpha_{f_1}(t)\ldots\alpha_{f_l}(t)\,\alpha^+_{g_1}(\tau)\ldots\alpha^+_{g_r}(\tau)\right\rangle C^{k+q+q_1+k_1}. \qquad (6.32)$$

Таким образом,

$$|\Gamma_H(t-\tau) - \Gamma_{H_0}(t-\tau)| \leqslant |\Gamma_H(0) - \Gamma_{H_0}(0)| +$$
$$+ \frac{G\,|t-\tau|}{\sqrt{V}} = \left|\left\langle \alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_l}\,L^k\,(L^+)^{q+q_1}\,L^{k_1}\,\alpha^+_{g_1}\ldots\alpha^+_{g_r}\right\rangle_H -\right.$$
$$\left. - C^{k+k_1+q+q_1}\left\langle \alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_l}\,\alpha^+_{g_1}\ldots\alpha^+_{g_r}\right\rangle_{H_0}\right| + \frac{G\,(t-\tau)}{\sqrt{V}}. \qquad (6.33)$$

Пусть среди индексов $f_1, \ldots, f_l$ есть пара одинаковых. Тогда, замечая, что

$$\alpha_f^2 = \left(u_f a_f + v_f a^+_{-f}\,\frac{L}{C}\right)\left(u_f a_f + v_f a^+_{-f}\,\frac{L}{C}\right) =$$
$$= v_f^2\, a^+_{-f}\,\frac{L}{C}\,a^+_{-f}\,\frac{L}{C} + u_f v_f \left\{a^+_{-f}\,\frac{L}{C}\,a_f + a_f a^+_{-f}\,\frac{L}{C}\right\} =$$
$$= \frac{v_f^2\, a^+_{-f}}{C}\,(L a^+_{-f} - a^+_{-f} L)\,L -$$
$$- u_f v_f \{a^+_{-f} a_f + a_f a^+_{-f}\}\,\frac{L}{C} = -2\,\frac{v_f^2\,\lambda(f)}{C^2 V}\,a^+_{-f}\,a_f\,L \qquad (6.34)$$

будет порядка $1/V$, видим, что и $\langle\ldots\rangle_H$ будет этого же порядка. Соответствующее $\langle\ldots\rangle_{H_0}$ просто равно нулю. То же положение естественно возникает в том случае, если среди индексов $g_1, \ldots, g_r$ есть хотя бы одна пара одинаковых.

Пусть, далее, среди индексов $f_1, \ldots, f_l$ есть хотя бы один индекс f_j, которого нет среди $g_1, \ldots, g_r$. Тогда можем передвинуть α_{f_j} к правой скобке в $\langle\ldots\rangle_H$, получая (по дороге) коммутаторы порядка $1/V$, и убедимся в результате, что $\langle\ldots\rangle_H$ окажется в данном случае величиной порядка малости не ниже $1/\sqrt{V}$. Средняя же $\langle\ldots\rangle_{H_0}$ точно равна нулю. Аналогичная ситуация возникает, если среди $g_1, \ldots, g_r$ есть хотя бы один индекс, которого нет в $f_1, \ldots, f_l$.

Таким образом, остается рассмотреть случай, когда 1) все $f_1, \ldots, f_l$ различны; 2) совокупность $g_1, \ldots, g_r$ есть та же совокупность $f_1, \ldots, f_l$, но, может быть, занумерованная в другом порядке.

Заметим теперь, что в правой части (6.33) можно установить «правильный порядок» и заменить $\alpha^+_{g_1}\ldots\alpha^+_{g_r}$ на $\alpha^+_{f_l} \ldots \alpha^+_{f_1}$. Естественно, что в $\langle\ldots\rangle_{H_0}$ такую замену совершаем точно, а в $\langle\ldots\rangle_H$ с ошибкой принятого порядка асимптотической малости. Поскольку операторы внутри $\langle\ldots\rangle$ сохраняют число частиц, $k + k_1$ должно равняться $q + q_1$.

Далее в $\langle\alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_l} L^k (L^+)^{k+k_1} L^{k_1} \alpha^+_{f_l}\ldots\alpha^+_{f_1}\rangle$ произведем замену $L^k(L^+)^{k+k_1} L^{k_1} \to (L^+ L)^{k+k_1}$ и перенесем к правой обкладке. При этом совершим погрешность порядка $1/V$. Заметим далее, что

$$\left|\langle\alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_l}\alpha^+_{f_l}\ldots\alpha^+_{f_1}(L^+L)^{k+k_1}\rangle_H - \right.$$
$$\left. -\langle\alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_l}\alpha^+_{f_l}\ldots\alpha^+_{f_1}\rangle_{H_0} C^{2(k+k_1)}\right| \leqslant \frac{\text{const}}{\sqrt{V}}. \tag{6.35}$$

Таким образом, из (6.33) получим

$$\left|\Gamma_H(t-\tau) - \Gamma_{H_0}(t-\tau)\right| \leqslant \frac{G\,|t-\tau|}{\sqrt{V}} + \frac{k}{\sqrt{V}} +$$
$$+ C^{2\,(k+k_1)}\left|\left\langle\alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_l}\ldots\alpha^+_{f_l}\ldots\alpha^+_{f_1}\right\rangle_H - \left\langle\alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_l}\,\alpha^+_{f_l}\ldots\alpha^+_{f_1}\right\rangle_{H_0}\right|. \tag{6.36}$$

Но поскольку все f различны,

$$\left\langle\alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_l}\,\alpha^+_{f_l}\ldots\alpha^+_{f_1}\right\rangle_{H_0} =$$
$$= \left\langle\alpha_{f_1}\alpha^+_{f_1}\right\rangle_{H_0}\left\langle\alpha_{f_2}\alpha^+_{f_2}\right\rangle_{H_0}\ldots\left\langle\alpha_{f_l}\ldots\alpha^+_{f_l}\right\rangle_{H_0} = 1.$$

В $\langle\ldots\rangle_H$ такое распределение также можно осуществить, разумеется, не точно, а с допустимой асимптотической погрешностью.

Итак, наше доказательство закончено. Так же, как и для случая $\nu>0$, мы могли бы получить аналогичные оценки степени асимптотического приближения и для многовременных корреляционных функций. На этом здесь останавливаться мы не будем. Читатель может теперь все относящиеся сюда вычисления провести сам по разработанным выше схемам. Как и в случае $\nu>0$, порядок малости в рассматриваемом случае можно повысить с $\mathrm{const}/\sqrt{V}$ до const/V, если в гамильтониане H_0 постоянную C заменить на $C_1=\sqrt{\langle L^+L\rangle_H}$, отличающуюся от C на величины порядка $1/\sqrt{V}$.

На доказательстве этого замечания мы здесь останавливаться не будем.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

В настоящем разделе приводятся доказательства некоторых соотношений, используемых в работе*. Все рассматриваемые здесь операторы предполагаются тотально непрерывными, только с такого рода операторами мы и имеем дело в основном тексте.

Лемма I. Пусть оператор ξ удовлетворяет условию

$$|\xi\xi^+-\xi^+\xi|\leqslant\frac{2s}{V}, \qquad (\text{П}1.1)$$

где s — число; $\varepsilon=1$ или $\varepsilon=-1$. Тогда имеет место неравенство

$$2\sqrt{\xi^+\xi+\frac{s}{V}}-\varepsilon(\xi+\xi^+)\geqslant 0. \qquad (\text{П}1.2)$$

Доказательство. Допустим обратное, тогда найдется такая нормированная функция φ, что

$$\left\{2\sqrt{\xi^+\xi+\frac{s}{V}}-\varepsilon(\xi+\xi^+)\right\}\varphi=-\rho\varphi,$$

где $\rho>0$. Отсюда

$$\left(2\sqrt{\xi^+\xi+\frac{s}{V}}+\rho\right)\varphi=\varepsilon(\xi+\xi^+)\varphi. \qquad (\text{П}1.3)$$

Примем теперь во внимание, что если $A\varphi=B\varphi$ и A и B — самосопряженные операторы, то

$$\langle\varphi^*A^2\varphi\rangle=\langle\varphi^*B^2\varphi\rangle. \qquad (\text{П}1.4)$$

Учитывая (П1.4) и (П1.1), будем иметь

$$\begin{aligned}\langle\varphi^*(2\sqrt{\xi^+\xi+s/V}+\rho)^2\varphi\rangle&=\langle\varphi^*(\xi+\xi^+)^2\varphi\rangle=2\langle\varphi^*(\xi\xi^++\xi^+\xi)\varphi\rangle-\\&-\langle\varphi^*(\xi^+-\xi)(\xi-\xi^+)\varphi\rangle\leqslant 2\langle\varphi^*(\xi\xi^++\xi^+\xi)\varphi\rangle\leqslant\\&\leqslant\langle 2\varphi^*(\xi^+\xi+2s/V+\xi^+\xi)\varphi\rangle=4\left\langle\varphi^*\left(\xi^+\xi+\frac{s}{V}\right)\varphi\right\rangle,\end{aligned} \qquad (\text{П}1.5)$$

что невозможно при $\rho>0$. Таким образом, неравенство (П1.2) доказано.

Следствие. Имеем также, переставляя ξ и ξ^+,

$$2\sqrt{\xi\xi^++\frac{s}{V}}-\varepsilon(\xi+\xi^+)\geqslant 0. \qquad (\text{П}1.6)$$

---

* Условимся обозначать норму функции $\|\Phi\|=\sqrt{\langle\Phi^*\Phi\rangle}$ и норму оператора $|\mathfrak{A}|=\sup\|\mathfrak{A}\Phi\|$, где $\|\Phi\|=1$.

Аналогично доказываются и следующие неравенства:

$$2\sqrt{\xi\xi^{+}+\frac{s}{V}}-\varepsilon\,\frac{(\xi-\xi^{+})}{i}\geqslant 0; \qquad (\text{П}1.7)$$

$$2\sqrt{\xi^{+}\xi+\frac{s}{V}}-\varepsilon\,\frac{(\xi-\xi^{+})}{i}\geqslant 0. \qquad (\text{П}1.8)$$

Лемма II. Пусть ξ удовлетворяет условию

$$|\xi\xi^{+}-\xi^{+}\xi|\leqslant 2s/V. \qquad (\text{П}1.9)$$

Тогда

$$\sqrt{\xi\xi^{+}+\frac{2s}{V}+A^{2}}-\sqrt{\xi^{+}\xi+A^{2}}\geqslant 0, \qquad (\text{П}1.10)$$

где A — вещественное c-число.

Доказательство. Допустим обратное. Тогда найдется такая нормированная функция φ, что

$$\left\{\sqrt{\xi\xi^{+}+\frac{2s}{V}+A^{2}}-\sqrt{\xi^{+}\xi+A^{2}}\right\}\varphi=-\rho\varphi. \qquad (\text{П}1.11)$$

Отсюда

$$\left\{\sqrt{\xi\xi^{+}+\frac{2s}{V}+A^{2}}+\rho\right\}\varphi=\sqrt{\xi^{+}\xi+A^{2}}\,\varphi, \qquad (\text{П}1.12)$$

используя (П1.4), получаем

$$\left\langle\varphi^{*}\left(\sqrt{\xi\xi^{+}+\frac{2s}{V}+A^{2}}+\rho\right)^{2}\varphi\right\rangle=\langle\varphi^{*}(\xi^{+}\xi+A^{2})\varphi\rangle\leqslant$$
$$\leqslant\left\langle\varphi^{*}\left(\xi\xi^{+}+\frac{2s}{V}+A^{2}\right)\varphi\right\rangle, \qquad (\text{П}1.13)$$

что невозможно при $\rho>0$.

Следствие. Изменяя роль операторов ξ и ξ^{+}, получаем

$$\sqrt{\xi^{+}\xi+\frac{2s}{V}+A^{2}}-\sqrt{\xi\xi^{+}+A^{2}}\geqslant 0. \qquad (\text{П}1.14)$$

Если α, λ — вещественные c-числа, то имеем

$$\sqrt{\lambda^{2}\left(\xi\xi^{+}+\frac{2s}{V}+\alpha^{2}\right)+A^{2}}-\sqrt{\lambda^{2}(\xi^{+}\xi+\alpha^{2})+A^{2}}\geqslant 0; \qquad (\text{П}1.15)$$

$$\sqrt{\lambda^{2}\left(\xi^{+}\xi+\frac{2s}{V}+\alpha^{2}\right)+A^{2}}-\sqrt{\lambda^{2}(\xi\xi^{+}+\alpha^{2})+A^{2}}\geqslant 0. \qquad (\text{П}1.16)$$

Приложение к лемме II. Положим

$$\xi=\frac{1}{V}\sum_{f}\lambda(f)\,a_{-f}a_{f}+\nu\equiv L+\nu. \qquad (\text{П}1.17)$$

Тогда

$$\xi\xi^{+}-\xi^{+}\xi=\frac{2}{V^{2}}\sum_{f}\lambda^{2}(f)\left(1-a_{f}^{+}a_{f}-a_{-f}^{+}a_{-f}\right). \qquad (\text{П}1.18)$$

Пусть $\lambda(f)$ удовлетворяет условию $\frac{1}{V}\sum_f \lambda^2(f) \leqslant s$, тогда $|\xi\xi^+ - \xi^+\xi| \leqslant$ $\leqslant 2s/V$. Следовательно,

$$\sqrt{\lambda^2(f)\{(L+\nu)(L^+ + \nu)+\alpha^2+2s/V\}+T^2(f)} - \\ -\sqrt{\lambda^2(f)\{(L^+ +\nu)(L+\nu)+\alpha^2\}+T^2(f)} > 0. \qquad (\Pi 1.19)$$

Лемма III (обобщение леммы II). Пусть опять $|\xi\xi^+ - \xi^+\xi| \leqslant 2s/V$. Рассмотрим операторы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^+$ с нормой $|\mathfrak{A}| < 1$; $|\mathfrak{A}^+| \leqslant 1$, такие, что

$$|\mathfrak{A}\,\xi^+\,\xi\mathfrak{A}^+ - \xi^+\,\mathfrak{A}\mathfrak{A}^+\,\xi| \leqslant 2l/V. \qquad (\Pi 1.20)$$

Тогда

$$2\sqrt{\xi\xi^+ + \frac{s+l}{V}} - \varepsilon(\xi\,\mathfrak{A}^+ + \mathfrak{A}\,\xi^+) \geqslant 0, \qquad (\Pi 1.21)$$

где $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$.

Доказательство. Допустим обратное; тогда найдется такая нормированная φ, что

$$\left\{2\sqrt{\xi\xi^+ + \frac{s+l}{V}} - \varepsilon(\xi\,\mathfrak{A}^+ + \mathfrak{A}\,\xi^+)\right\}\varphi = -\rho\varphi, \quad \rho > 0. \qquad (\Pi 1.22)$$

Отсюда

$$\left(2\sqrt{\xi\xi^+ + \frac{s+l}{V}} + \rho\right)\varphi = \varepsilon(\xi\,\mathfrak{A}^+ + \mathfrak{A}\,\xi^+)\varphi. \qquad (\Pi 1.23)$$

Следовательно, согласно (П1.4),

$$\left\langle \varphi^*\left(2\sqrt{\xi\xi^+ + \frac{s+l}{V}} + \rho\right)^2 \varphi\right\rangle = \langle\varphi^*(\xi\,\mathfrak{A}^+ + \mathfrak{A}\,\xi^+)^2\varphi\rangle = \\ = 2\langle\varphi^*\{\xi\,\mathfrak{A}^+\,\mathfrak{A}\,\xi^+ + \mathfrak{A}\,\xi^+\,\xi\,\mathfrak{A}^+\}\varphi\rangle - \langle\varphi^*(\xi\,\mathfrak{A}^+ - \mathfrak{A}\,\xi^+)\times \\ \times(\mathfrak{A}\,\xi^+ - \xi\,\mathfrak{A}^+)\varphi\rangle \leqslant 2\langle\varphi^*\{\xi\,\mathfrak{A}^+\,\mathfrak{A}\,\xi^+ + \mathfrak{A}\,\xi^+\,\xi\,\mathfrak{A}^+\}\varphi\rangle. \qquad (\Pi 1.24)$$

Но, поскольку по условию $|\mathfrak{A}| \leqslant 1$, $|\mathfrak{A}^+| \leqslant 1$, имеем $|\mathfrak{A}^+\mathfrak{A}| \leqslant 1$, и, следовательно,

$$\langle\varphi^*\,\xi\,\mathfrak{A}^+\,\mathfrak{A}\,\xi^+\,\varphi\rangle \leqslant \langle\varphi^*\,\xi\xi^+\,\varphi\rangle. \qquad (\Pi 1.25)$$

Далее, принимая во внимание (П1.20) и (П1.25), имеем

$$\langle\varphi^*\,\mathfrak{A}\,\xi^+\,\xi\,\mathfrak{A}^+\,\varphi\rangle = \langle\varphi^*\,\xi^+\,\mathfrak{A}\mathfrak{A}^+\,\xi\varphi\rangle + \\ + \langle\varphi^*\{\mathfrak{A}\,\xi^+\,\xi\,\mathfrak{A}^+ - \xi^+\,\mathfrak{A}\mathfrak{A}^+\,\xi\}\varphi\rangle \leqslant \langle\varphi^*\,\xi^+\,\mathfrak{A}\mathfrak{A}^+\,\xi\varphi\rangle + \\ + \frac{2l}{V} \leqslant \langle\varphi^*\,\xi^+\,\xi\varphi\rangle + \frac{2l}{V} \leqslant \langle\varphi^*\,\xi\xi^+\,\varphi\rangle + \frac{2(l+s)}{V} = \\ = \left\langle\varphi^*\left(\xi\xi^+ + \frac{2(l+s)}{V}\right)\varphi\right\rangle. \qquad (\Pi 1.26)$$

Поэтому, учитывая (П1.24), можем написать

$$\left\langle\varphi^*\left(2\sqrt{\xi\xi^+ + \frac{s+l}{V}} + \rho\right)^2\varphi\right\rangle \leqslant 4\left\langle\varphi^*\left(\xi\xi^+ + \frac{s+l}{V}\right)\varphi\right\rangle. \qquad (\Pi 1.27)$$

Но такое неравенство при $\rho > 0$ невозможно, что и доказывает утверждение (П1.21) леммы III.

Приложение к лемме III. Положим $\xi = L + \nu$; $\mathfrak{A} = a_g$. Тогда

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}\xi^+\xi\mathfrak{A}^+ - \xi^+\mathfrak{A}\mathfrak{A}^+\xi| &= |a_g(L^+ + \nu)(L+\nu)a_g^+ - (L^+ + \nu)a_g a_g^+(L+\nu)| = \\ &= |a_g(L^+ + \nu)(L+\nu)a_g^+ - (L^+ + \nu)a_g(L+\nu)a_g^+ + \\ &+ (L^+ + \nu)a_g(L+\nu)a_g^+ - (L^+ + \nu)a_g a_g^+(L+\nu)| \leqslant \\ &\leqslant (|L| + \nu)\left\{|La_g^+ - a_g^+L| + |a_gL^+ - L^+a_g|\right\} \leqslant (|L| + \nu)\frac{4}{V}|\lambda(g)|, \end{aligned}$$

где [см. тождество (П1.17)] $|L| \leqslant \frac{1}{V}\sum_f |\lambda(f)|$, так как $|a_f| \leqslant 1$. Поэтому, согласно (П1.21),

$$\begin{aligned} 2\sqrt{(L+\nu)(L^+ + \nu) + \frac{1}{V}\{s + (|L| + \nu)2|\lambda(g)|\}} - \\ -\varepsilon\left\{(L+\nu)a_g^+ + a_g(L^+ + \nu)\right\} \geqslant 0. \end{aligned} \qquad (\text{П}1.28)$$

Положив $\mathfrak{A} = \mathrm{i}\,a_g$, получим также

$$\begin{aligned} 2\sqrt{(L+\nu)(L^+ + \nu) + \frac{1}{V}\{s + (|L| + \nu)2|\lambda(g)|\}} - \\ -\varepsilon\left\{\frac{(L+\nu)a_g^+ - a_g(L^+ + \nu)}{\mathrm{i}}\right\} \geqslant 0. \end{aligned} \qquad (\text{П}1.29)$$

Лемма IV. Пусть β — вещественное число $\alpha^2 = \beta^2 + 2s/V$ и $\nu \geqslant 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \Big|\sqrt{\{(L+\nu)(L^+ + \nu) + \alpha^2\}\lambda^2(f) + T^2(f)}\,a_f - \\ -a_f\sqrt{\{(L+\nu)(L^+ + \nu) + \alpha^2\}\lambda^2(f) + T^2(f)} \leqslant \frac{S_f}{V}, \end{aligned} \qquad (\text{П}1.30)$$

где S_f ограничена при $V \to \infty$. [То же неравенство имеет место, если в (П1.30) взять a_f^+ вместо a_f.]

Доказательство. Рассмотрим произвольную нормированную функцию φ и составим выражение

$$\begin{aligned} \langle\varphi^*\left\{\sqrt{(Q+\alpha^2)\lambda^2(f) + T^2(f)}\left(a_f + a_f^+\right) - \right. \\ \left. -\left(a_f + a_f^+\right)\sqrt{(Q+\alpha^2)\lambda^2(f) + T^2(f)}\right\}\varphi\rangle = \mathscr{E}, \end{aligned} \qquad (\text{П}1.31)$$

где $Q = (L+\nu)(L^+ + \nu)$. Для рассмотрения выражения (П1.31) воспользуемся следующим тождественным соотношением:

$$\sqrt{Z} - \sqrt{Z_0} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{\frac{1}{Z_0 + \omega} - \frac{1}{Z + \omega}\right\}\sqrt{\omega}\,d\omega,$$

где Z_0 — произвольное положительное число. Заметим также, что

$$-\frac{1}{A}B + B\frac{1}{A} = \frac{1}{A}(AB - BA)\frac{1}{A},$$

где A и B—операторы. Тогда имеем

$$\mathscr{E}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\left\langle\varphi^*\frac{\lambda^2(f)}{(Q+\alpha^2)\lambda^2(f)+T^2(f)+\omega}\left\{Q\left(a_f+a_f^+\right)-\left(a_f+a_f^+\right)Q\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{(Q+\alpha^2)\lambda^2(f)+T(f)+\omega}\varphi\right\rangle\sqrt{\omega}\,d\omega.$$

Но

$$Qa_f-a_fQ=(L+\nu)\left\{L^+a_f-a_fL^+\right\};$$

$$L^+=\frac{1}{V}\sum_f\lambda(f)\,a_f^+a_{-f}^+;\quad L^+a_f-a_fL^+=-\frac{2}{V}\lambda(f)\,a_{-f}^+,$$

и, следовательно,

$$Q\left(a_f+a_f^+\right)-\left(a_f+a_f^+\right)Q=-\frac{2}{V}\lambda(f)(L+\nu)\,a_{-f}^++\frac{2}{V}\lambda(f)\,a_{-f}\left(L^++\nu\right).$$

Поэтому

$$|\mathscr{E}|=\left|\frac{\mathscr{E}}{i}\right|=\frac{2\,|\lambda(f)|^3}{\pi}\int\limits_0^\infty\left\langle\varphi^*\right|\frac{1}{(Q+\alpha^2)\lambda^2(f)+T^2(f)+\omega}\times$$

$$\times\frac{(L+\nu)\,a_{-f}^+-a_{-f}(L^++\nu)}{i}\times\frac{1}{(Q+\alpha^2)\lambda^2(f)+T^2(f)+\omega}\varphi\left\rangle\sqrt{\omega}\,d\omega\right|.$$

Отсюда, учитывая (П1.29) и вводя новую переменную интегрирования, получаем

$$|\mathscr{E}|\leqslant\frac{4\,|\lambda(f)|^2}{\pi V}\int\limits_0^\infty\left\langle\varphi^*\frac{\sqrt{Q+\frac{1}{V}(s+2\,|\lambda(f)|)(|L|+\nu)}}{\left(Q+\alpha^2+\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}+\tau\right)^2}\varphi\right\rangle\sqrt{\tau}\,d\tau.$$

Но по условию леммы $\alpha^2=\beta^2+2s/V$, и поэтому

$$\sqrt{Q+\frac{1}{V}(s+2\,|\lambda(f)|)(|L|+\nu)}<\sqrt{Q+\alpha^2+\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}+\frac{2\,|\lambda(f)|\,(|L|+\nu)}{V}}=$$

$$=\sqrt{Q+\alpha^2+\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}}\cdot\sqrt{1+\frac{2\,|\lambda(f)|\,(|L|+\nu)}{VQ+V\alpha^2+V\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}}}<$$

$$<\sqrt{Q+\alpha^2+\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}}\cdot\sqrt{1+\frac{|\lambda(f)|\,(|L|+\nu)}{s+\frac{1}{2}V\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}}}<$$

$$<\left(1+\frac{|\lambda(f)|\,(|L|+\nu)}{2s+V\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}}\right)\sqrt{Q+\alpha^2+\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}}.$$

Положим $\Lambda = Q + \alpha^2 + \frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)} \geqslant \alpha^2$. Тогда

$$|\mathscr{E}| = \frac{4|\lambda(f)|^2}{\pi V}\left(1 + \frac{|\lambda(f)|(|L| + \nu)}{2s + V\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}}\right)\int_0^\infty \left\langle \varphi^* \frac{\sqrt{\Lambda}}{(\Lambda+\tau)^2}\varphi\right\rangle \sqrt{\tau}\, d\tau.$$

Разложим теперь функцию φ по собственным функциям оператора Λ $\varphi = \sum C_\Lambda \varphi_\Lambda$; $\sum |C_\Lambda|^2 = 1$. Получим

$$\int_0^\infty \left\langle \varphi^* \frac{\sqrt{\Lambda}}{(\Lambda+\tau)^2}\varphi\right\rangle \sqrt{\tau}\, d\tau = \sum_\Lambda |C_\Lambda|^2 \int_0^\infty \frac{\sqrt{\Lambda\tau}\, d\tau}{(\Lambda+\tau)^2} =$$

$$= \sum_\Lambda |C_\Lambda|^2 \int_0^\infty \frac{\sqrt{t}\, dt}{(1+t)^2} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{t}\, dt}{(1+t)^2}.$$

Итак, при произвольной нормированной функции φ

$$|\mathscr{E}| = \left|\left\langle \varphi^* \left[\frac{\sqrt{(Q+\alpha^2)\lambda^2 + T^2}; a_f + a_f^+}{i}\right]\varphi\right\rangle\right| \leqslant S_f,$$

где

$$S_f = \frac{4|\lambda(f)|^2}{\pi V}\left(1 + \frac{|\lambda(f)|\left(\sum|\lambda(f)|\frac{1}{V} + \nu\right)}{2\frac{1}{V}\sum|\lambda(f)|^2 + V\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}}\right)\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}\, dt}{(1+t)^2}.$$

Но оператор

$$\left[\frac{\sqrt{(Q+\alpha^2)\lambda^2 + T^2};\ a_f + a_f^+}{i}\right]$$

эрмитов и, следовательно, $\left|\left[\sqrt{(Q+\alpha^2)\lambda^2+T^2};\ a_f + a_f^+\right]\right| \leqslant S_f$. Совершенно аналогично доказываем, что $\left|\left[\sqrt{(Q+\alpha^2)\lambda^2+T^2};\ a_f - a_f^+\right]\right| \leqslant S_f$. Но $|\mathfrak{A}| + |\mathfrak{B}| \geqslant |\mathfrak{A} + \mathfrak{B}|$, и, следовательно, $\left|\left[\sqrt{(Q+\alpha^2)\lambda^2+T^2};\ a_f\right]\right| \leqslant S_f$, что и требовалось доказать.

Из $|\mathfrak{A}| \leqslant S_f$ вытекает $|\mathfrak{A}^+| \leqslant S_f$, откуда видна справедливость дополнительного утверждения леммы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Принцип ослабления корреляций между частицами для систем в состоянии статистического равновесия формулируется следующим образом.

Корреляционные функции

$$\langle \mathfrak{A}_1(x_1, t_1) \ldots \mathfrak{A}_s(x_s, t_s) \ldots \mathfrak{A}_n(x_n, t_n)\rangle, \tag{П2.1}$$

где $\mathfrak{A}_s(x_s, t_s)$ — полевая функция $\psi(x_s, t_s)$ или $\psi^+(t_s, x_s)$, распадается на произведение корреляционных функций

$$\langle \mathfrak{A}_1(x_1, t_1) \ldots \mathfrak{A}_{s-1}(x_{s-1}, t_{s-1})\rangle \langle \mathfrak{A}_{s+1}(x_{s+1}, t_{s+1}) \ldots \mathfrak{A}_n(x_n, t_n)\rangle, \tag{П2.2}$$

если совокупность точек $x_1, \ldots, x_s$ бесконечно удаляется от совокупности точек $x_{s+1}, \ldots, x_n$ при фиксированных временах $t_1, \ldots, t_s, \ldots, t_n$. Заметим, что в том случае, если в корреляционных функциях числа операторов рождения и уничтожения не равны, то усреднение $\langle\ldots\rangle$ нужно понимать в смысле квазисредних.

Система с модельным гамильтонианом является одним из редких случаев, когда прямыми расчетами можно убедиться в справедливости принципа ослабления корреляции. Ниже, основываясь на предыдущих асимптотических оценках, мы и покажем это. Рассмотрим «вакуумные» средние, составленные из произведений полевых функций в пространственном представлении:

$$\left.\begin{aligned} \Psi_-(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{(f<0)} a_f(t)\, e^{i(f\cdot x)}; \\ \Psi_+(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{(f>0)} a_f^+(t)\, e^{-i(f\cdot x)}. \end{aligned}\right\} \tag{П2.3}$$

Здесь f представляет совокупность импульса и спина $(\mathbf{k}, \sigma)$, причем суммирование $f>0, f<0$ обозначает суммирование по $\mathbf{k}$ при фиксированном $\sigma=\pm$; $(f\cdot x)=(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$. Имеем, например,

$$\langle \Psi_{\sigma_1}(t, x)\Psi^+_{\sigma_2}(t, x')\rangle_{H_0} = \frac{1}{V}\sum_{(f>0)} |u_f|^2 e^{if\cdot(x-x')}\,\delta(\sigma_1-\sigma_2) =$$

$$= \left\{\frac{1}{V}\sum_{(f>0)} e^{if\cdot(x-x')} - \frac{1}{V}\sum_{(f>0)} |v_f|^2 e^{if\cdot(x-x')}\right\}\delta(\sigma_1-\sigma_2), \tag{П2.4}$$

где u_f и v_f — коэффициенты канонического преобразования. Как видно, член

$$\frac{1}{V}\sum_{(f>0)} |v_f|^2 e^{if\cdot(x-x')}$$

при $V\to\infty$ приближается к интегралу

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int |v_f|^2 e^{if\cdot(x-x')}\, d\mathbf{k}.$$

Этот интеграл абсолютно сходящийся, поскольку

$$\int |v_f|^2 d\mathbf{k} = \frac{1}{2}\int \left\{\sqrt{T^2(f)+\lambda^2(f)C^2} - T(f)\right\}^2 \frac{d\mathbf{k}}{T^2(f)+\lambda^2(f)C^2} < \infty.$$

Про выражение $\frac{1}{V}\sum_{(f>0)} e^{if\cdot(x-x')}$ скажем, что оно приближается к «дельта-функции» $\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{if\cdot(x-x')}$, когда $V\to\infty$.

Однако сейчас мы, разумеется, приписываем словам «предел», «сходимость функций» уже другой смысл, а именно смысл, принятый в теории обобщенных функций.

Напомним здесь, что значит соотношение

$$f_V(x_1, \ldots, x_l) \underset{V\to\infty}{\to} f(x_1, \ldots, x_l) \tag{П2.5}$$

или $f(x_1, \ldots, x_l) = \lim\limits_{V\to\infty} f_V(x_1, \ldots, x_l)$ в этой теории.

Рассмотрим класс $C(q, r)$ (q, r — положительные числа) непрерывных и неограниченно дифференцируемых функций $h(x_1, \ldots, x_l)$, таких, что во всем пространстве E_l точек $\{x_1, \ldots, x_l\}$

$$\underset{\alpha=0,1,\ldots,r}{\{|x_1|+\ldots+|x_l|\}^\alpha} |h(x_1, \ldots, x_l)| \leqslant \text{const}; \quad \underset{\alpha=0,1,\ldots,r}{\{|x_1|+\ldots+|x_l|\}^\alpha} \times$$

$$\times \underset{s_1+\ldots+s_l=0,1,\ldots,q}{\left|\frac{\partial^{s_1+\ldots+s_l} h}{\partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_l^{s_l}}\right|} \leqslant \text{const}.$$

Тогда, если можно зафиксировать положительные числа q, r таким образом, что для всякой функции h из класса $C(q, r)$ можно записать

$$\int h(x_1, \ldots, x_l) f_V(x, \ldots x_l)\, dx, \ldots, dx_l \to \int h(x_1, \ldots, x_l) f(x_1, \ldots, x_l)\, dx_1 \ldots dx_l,$$

мы будем говорить, что имеет место обобщенное предельное соотношение (П2.5). Как мы только что видели, средние от произведений $\Psi(t, x)$, $\Psi^+(t, x)$ могут содержать обобщенные функции. Поэтому соответствующие предельные соотношения при $V \to \infty$ необходимо понимать в смысле теории обобщенных функций.

Рассмотрим выражение

$$\langle \Psi_{\sigma_1}(t_1, x_1) \Psi^+_{\sigma_2}(t_1, x_2) \rangle = \frac{1}{V} \sum_{(f>0)} \langle a_f(t_1) a_f^+(t_1) \rangle e^{i f \cdot (x_1 - x_2)} \delta(\sigma_1 - \sigma_2).$$

Имеем
$$\int h(x_1 - x_2) \langle \Psi_{\sigma_1}(t_1, x_1) \Psi^+_{\sigma_2}(t_2, x_2) \rangle dx_1 =$$
$$= \frac{1}{V} \sum_{(f \geqslant 0)} \langle a_f(t_1) a_f^+(t_2) \rangle \tilde{h}(f) \delta(\sigma_1 - \sigma_2),$$

где
$$\tilde{h}(f) = \int h(x) e^{i(f \cdot x)} dx.$$

Взяв числа q, r в классе $C(q, r)$, к которому принадлежит $h(x)$, можно добиться того, чтобы $h(f)$ убывала при $|f| \to \infty$ быстрее любой степени $1/|f|$. Достаточно лишь обеспечить, чтобы $\frac{1}{V} \sum_f |\tilde{h}(f)| \leqslant K = \text{const}$.

Тогда, замечая, что, согласно (6.36),

$$\left| \langle a_f(t_1) a_f^+(t_2) \rangle_H - \langle a_f(t_1) a_f^+(t_2) \rangle_{H_0} \right| \leqslant \frac{s_1 |t_1 - t_2| + s_2}{\sqrt{V}},$$
$$s_1, s_2 = \text{const},$$

будем иметь

$$\left| \int h(x_1 - x_2) \left\{ \langle \Psi_{\sigma_1}(t_1, x_1) \Psi^+_{\sigma_2}(t_2, x_2) \rangle_H - \langle \Psi_{\sigma_1}(t_1, x_1) \Psi^+_{\sigma_2}(t_2, x_2) \rangle_{H_0} \right\} dx_1 \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{V} \sum_f \left| \langle a_f(t_1) a_f^+(t_2) \rangle_H - \langle a_f(t_1) a_f^+(t_2) \rangle_{H_0} \right| |\tilde{h}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant K \frac{s_1 |t_1 - t_2| + s_2}{V} \underset{V \to \infty}{\to} 0.$$

Следовательно, имеет место обобщенное предельное соотношение

$$\langle \Psi_{\sigma_1}(t_1, x_1) \Psi^+_{\sigma_2}(t_2, x_2) \rangle_H - \langle \Psi_{\sigma_1}(t_1, x_1) \Psi^+_{\sigma_2}(t_2, x_2) \rangle_{H_0} \to 0. \quad \text{(П2.6)}$$

Но непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$\langle \Psi_{\sigma_1}(t_1, x)\, \Psi^+_{\sigma_2}(t_2, x_2) \rangle_{H_0} = \\ = \frac{1}{V} \sum_{(f>0)} |u_f|^2 \, e^{-i\Omega(f)(t_1-t_2)+if\cdot(x_1-x_2)} \, \delta(\sigma_1-\sigma_2),$$

и потому также в обобщенном смысле

$$\langle \Psi_{\sigma_1}(t_1, x_1)\, \Psi^+_{\sigma_2}(t_2, x_2) \rangle_H - \\ - \int |u_f|^2 \exp\left\{-i\Omega(f)(t_1-t_2)+if\cdot(x_1-x_2)\right\} d\mathbf{k}\, \delta(\sigma_1-\sigma_2) \underset{V\to\infty}{\to} 0. \quad (\text{П}2.7)$$

Из (П2.6) и (П2.7) имеем окончательно

$$\lim_{V\to\infty} \langle \Psi_{\sigma_1}(t_1, x_1)\, \Psi^+_{\sigma_2}(t_2, x_2) \rangle_H = \\ = \int |u_f|^2 \exp\{-i\Omega(f)(t_1-t_2)+if\cdot(x_1-x_2)\}\, d\mathbf{k}\, \delta(\sigma_1-\sigma_2) = \\ = \{\Delta(t_1-t_2, x_1-x_2) - F(t_1-t_2, x_1-x_2)\}\, \delta(\sigma_1-\sigma_2); \quad (\text{П}2.8)$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta(t, x) &= \int \exp\{-i\Omega(f)\, t + if\cdot x\}\, d\mathbf{k}; \\ F(t, x) &= \int |v_f|^2 \exp\{-i\Omega(f) t + if\cdot x\}\, d\mathbf{k}. \end{aligned}\right\} \quad (\text{П}2.9)$$

Совершенно аналогично получим*

$$\lim_{V\to\infty} \langle \Psi^+_{\sigma_2}(t_2, x_2)\, \Psi_{\sigma_1}(t_1, x_1) \rangle = F(t_2-t_1, x_1-x_2)\, \delta(\sigma_1-\sigma_2). \quad (\text{П}2.10)$$

Рассмотрим теперь бинарные выражения $\langle \Psi(t_1, x_1)\, \Psi(t_2, x_2)\, \Psi^+(t_2', x_2') \times \times \Psi^+(t_1', x_1') \rangle$. Имеем

$$\langle \Psi(t_1, x_1)\, \Psi(t_2, t_2)\, \Psi^+(t_2', x_2')\, \Psi^+(t_1', x_1') \rangle = \\ = \frac{1}{V^2} \sum \langle a_{f_1}(t_1)\, a_{f_2}(t_2)\, a^+_{g_2}(t_2')\, a^+_{g_1}(t_1') \rangle \times \\ \times \left\{ if_1\cdot x_1 + if_2\cdot x_2 - ig_2\cdot x_2' - ig_1\cdot x_1' \right\}. \quad (\text{П}2.11)$$

Так как полный импульс сохраняется, а для Φ_H (и Φ_{H_0}) он равен нулю, то выражения

$$\langle a_{f_1}(t_1)\, a_{f_2}(t_2)\, a^+_{g_2}(t_2')\, a^+_{g_1}(t_1') \rangle \quad (\text{П}2.12)$$

могут быть отличны от нуля, лишь если

$$f_1 + f_2 = g_2 + g_1. \quad (\text{П}2.13)$$

Вспомним теперь, что по (2.1) и (2.2) $n_f(t) - n_{-f}(t)$, где $n_f = a_f^+ a_f$ — интеграл движения, а Φ_H (и Φ_{H_0}) удовлетворяет дополнительным соотношениям $(n_f - n_{-f})\,\Phi = 0$. Заметим, наконец, что $(n_f - n_{-f})\, a_h = a_h\,\{(n_f - n_{-f}) - - \delta(f-h) + \delta(f+h)\}$. Поэтому (при любом f)

---

* Это предельное соотношение имеет место также и в обычном смысле ввиду абсолютной сходимости интеграла, определяющего $F(t, x)$.

$$\langle a_{f_1}(t_1)\,a_{f_2}(t_2)\,a^+_{g_2}(t_2')\,a^+_{g_1}(t_1')\rangle=$$
$$\langle\{1+n_f-n_{-f}\}\,a_{f_1}(t_1)\,a_{f_2}(t_2)\,a^+_{g_2}(t_2')\,a^+_{g_1}(t_1')\rangle=$$
$$=\langle\{1+n_f(t_1)+n_{-f}(t_1)\}\,a_{f_1}(t_1)\,a_{f_2}(t_2)\,a^+_{g_2}(t_2')\,a^+_{g_1}(t_1')\rangle=$$
$$=\langle a_{f_1}(t_1)\,\{1+n_f(t_1)-n_{-f}(t_1)-\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)\}\,a_{f_2}(t_2)\times$$
$$\times a^+_{g_2}(t_2')\,a^+_{g_1}(t_1')\rangle=\langle a_{f_1}(t_1)\,\{1+n_f(t_2)-n_{-f}(t_2)-\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)\}\times$$
$$\times a_{f_2}(t_2)a^+_{g_2}(t_2')\,a^+_{g_1}(t_1')\rangle=\langle a_{f_1}(t_1)\,a_{f_2}(t_2)\{1+n_f(t_2)-n_{-f}(t_2)-$$
$$-\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)-\delta(f-f_2)+\delta(f+f_2)\}\,a^+_{g_2}(t_2')\,a^+_{g_1}(t_1')\rangle=\ldots=$$
$$=\langle a_{f_1}(t_1)\,a_{f_2}(t_2)\,a^+_{g_2}(t_2')\,a^+_{g_1}(t_1')\times$$
$$\times\{1+n_f-n_{-f}-\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)+\delta(f+f_2)-\delta(f-f_2)+$$
$$+\delta(f-g_2)-\delta(f+g_2)+\delta(f-g_1)-\delta(f+g_1)\}\rangle=$$
$$=\{1-\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)-\delta(f-f_2)+\delta(f+f_2)+$$
$$+\delta(f-g_2)-\delta(f+g_2)+\delta(f-g_1)-\delta(f+g_1)\}\times$$
$$\times\langle a_{f_1}(t_1)\,a_{f_2}(t_2)\,a^+_{g_2}(t_2')\,a^+_{g_1}(t_1')\rangle.$$

Это тождество показывает, что величины (П2.12) могут быть отличны от нуля, лишь если для любого f имеет место соотношение

$$-\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)-\delta(f-f_2)+\delta(f+f_2)+$$
$$+\delta(f-g_2)-\delta(f+g_2)+\delta(f-g_1)-\delta(f+g_1)=0.$$

Последнее соотношение вместе с (П2.13) выполняется лишь в следующих случаях:

$$f_1-f_2=0,\quad g_1+g_2=0; \tag{П2.14}$$
$$f_1=g_1,\quad f_2=g_2; \tag{П2.15}$$
$$f_1=g_2,\quad f_2=g_1. \tag{П2.16}$$

Кроме того, в (П2.15) и (П2.16) всегда можно считать, что $g_1\neq g_2$, так как

$$a^+_g(t_2')\,a^+_g(t_1')\,\Phi_H=0. \tag{П2.17}$$

Действительно,

$$(n_g-n_{-g})\,a^+_g(t_2')\,a^+_g(t_1')\,\Phi_H=a^+_g(t_2')\,a^+_g(t_1')\,(n_g-n_{-g}+2)\,\Phi_H=$$
$$=2a^+_g(t_2')\,a^+_g(t_1')\,\Phi_H.$$

Но возможные собственные значения n_g-n_{-g} суть только ± 1 и 0, и, следовательно, последнее равенство возможно лишь при выполнении (П2.17). Итак, можно привести (П2.11) к форме

$$\langle\Psi(t_1,x_1)\,\Psi(t_2,x_2)\,\Psi^+(t_2',x_2')\,\Psi(t_1',x_1')\rangle=$$
$$=\sum_{f,g}\frac{1}{V^2}\langle a_{-f}(t_1)\,a_f(t_2)\,a^+_g(t_2')\,a^+_{-g}(t_1')\rangle\exp\{if\cdot(x_2-x_1)-ig\cdot(x_2'-x_1')\}+$$
$$+\sum_{\substack{f,g\\ \left(\substack{f\neq g\\ f+g\neq 0}\right)}}\frac{1}{V^2}\langle a_f(t_1)\,a_g(t_2)\,a^+_g(t_2')\,a^+_f(t_1')\rangle\exp\{if\cdot(x_1-x_1')+ig\cdot(x_2-x_2')\}+$$

$$+\sum_{\substack{f,\,g\\ \left(\substack{f\neq g\\ f+g\neq 0}\right)}}\frac{1}{V^2}\langle a_f(t_1)\,a_g(t_2)\,a_f^+(t_2')\,a_g^+(t_1')\rangle\exp\left\{\mathrm{i}f\cdot(x_1-x_2')+\right.$$

$$\left.+\mathrm{i}g\cdot(x_2-x_1')\right\}. \qquad (\Pi 2.18)$$

Займемся теперь предельным переходом $V\to\infty$. Рассмотрим класс $C(q,\,r)$ функций $h(x,\,y)$ и фиксируем $q,\,r$ так, чтобы $\frac{1}{V^2}\sum_{f,\,g}|\widetilde{h}(f,\,g)|\leqslant\mathrm{const}$, где

$$\widetilde{h}(f,\,g)=\int h(x,\,y)\,e^{\mathrm{i}(fx+gy)}\,dx\,dy.$$

Поскольку [см. (5.56)] при фиксированных $t_1,\,t_2,\,t_2',\,t_1'$

$$\left|\langle a_f(t_1)\,a_g(t_2)\,a_f^+(t_2')\,a_g^+(t_1')\rangle_H-\right.$$
$$\left.-\langle a_f(t_1)\,a_g(t_2)\,a_f^+(t_2')\,a_g^+(t_1')\rangle_{H_0}\right|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{\sqrt{V}},$$

имеем

$$\left|\int h(x,\,y)\left\{\Gamma_H(t_1,\,t_2,\,t_2',\,t_1'\,|\,x,\,y)-\Gamma_{H_0}(t_1,\,t_2,\,t_2',\,t_1'\,|\,x,\,y)\right\}dx\,dy\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\mathrm{const}}{\sqrt{V}}\xrightarrow[V\to\infty]{}0,$$

где

$$\Gamma(t_1,\,t_2,\,t_2',\,t_1'\,|\,x,\,y)=\frac{1}{V^2}\sum_{\substack{f,\,g\\ \left(\substack{f\neq g\\ f+g\neq 0}\right)}}\langle a_f(t_1)\,a_g(t_2)\,a_f^+(t_2')\,a_g^+(t_1')\rangle\,e^{\mathrm{i}(f\cdot x+g\cdot y)}.$$

Получаем обобщенные предельные соотношения

$$\Gamma_H(t_1,\,t_2,\,t_2',\,t_1',\,x_1-x_2',\,x_2-x_1')-$$
$$-\Gamma_{H_0}(t_1,\,t_2,\,t_2',\,t_1',\,x_1-x_2',\,x_2-x_1')\xrightarrow[V\to\infty]{}0.$$

Но прямое вычисление, так же как в случае (П2.4), дает

$$\Gamma_{H_0}(t_1,\,t_2,\,t_2',\,t_1',\,x_1-x_2',\,x_2-x_1')=$$

$$=-\frac{1}{V^2}\sum_{\substack{f,\,g\\ \left(\substack{f\neq g\\ f+g\neq 0}\right)}}|u_f|^2\,|u_g|^2\,e^{-\mathrm{i}\Omega(f)(t_1-t_2')-\mathrm{i}\,\Omega(g)(t_2-t_1')}\times$$

$$\times e^{\mathrm{i}\left(f(x_1-x_2')+g(x_2-x_1')\right)}\to-\left\{\Delta(t_1-t_2',\,x_1-x_2')-\right.$$
$$\left.-F(t_1-t_2',\,x_1-x_2')\right\}\left\{\Delta(t_2-t_1',\,x_2-x_1')-\right.$$
$$\left.-F(t_2-t_1',\,x_2-x_1')\right\}\delta(\sigma_1-\sigma_2')\,\delta(\sigma_2-\sigma_1'), \qquad (\Pi 2.19)$$

где $\Omega(f)$ определяется соотношением (6.2′), а $\Delta(t, x)$ и $F(t, x)$ — соотношением (П2.9).

Следовательно,

$$\lim_{V\to\infty} \Gamma_H\left(t_1, t_2, t_2', t_1', x_1-x_2', x_2-x_1'\right) =$$
$$= -\left\{\Delta\left(t_1-t_2', x_1-x_2'\right) - F\left(t_1-t_2', x_1-x_2'\right)\right\} \times$$
$$\times \left\{\Delta\left(t_2-t_1', x_2-x_1'\right) - F\left(t_2-t_1', x_2-x_1'\right)\right\} \delta\left(\sigma_1-\sigma_2'\right) \delta\left(\sigma_2-\sigma_1'\right).$$

Совершенно аналогично поступим и с членами, входящими в правую часть равенства (П2.18). Положим теперь

$$\Phi_\sigma(t, x) = -\int u_f v_f \, e^{-i\Omega(f)t - if\cdot x} d\mathbf{k} =$$
$$= \int \frac{C\lambda(f)}{2\Omega(f)} e^{-i\Omega(f)t - if\cdot\mathbf{k}} d\mathbf{k}. \qquad \text{(П2.20)}$$

Тогда можем написать обобщенное предельное соотношение в виде

$$\lim_{V\to\infty} \langle \Psi_{\sigma_1}(t_1, x_1) \Psi_{\sigma_2}(t_2, x_2) \Psi^+_{\sigma_2'}\left(t_2', x_2'\right) \Psi^+_{\sigma_1'}\left(t_1', x_1'\right)\rangle_H =$$
$$= \Phi_{\sigma_2}(t_1-t_2, x_1-x_2) \Phi_{\sigma_2'}\left(t_2'-t_1', x_2'-x_1'\right) \delta(\sigma_1+\sigma_2) \delta\left(\sigma_1'+\sigma_2'\right) +$$
$$+ \delta\left(\sigma_1-\sigma_1'\right) \delta\left(\sigma_2-\sigma_2'\right) \left\{\Delta\left(t_1-t_1', x_1-x_1'\right) - F\left(t_1-t_1', x_1-x_1'\right)\right\} \times$$
$$\times \left\{\Delta\left(t_2-t_2', x_2-x_2'\right) - F\left(t_2-t_2', x_2-x_2'\right)\right\} - \delta\left(\sigma_1-\sigma_2'\right) \delta\left(\sigma_2-\sigma_1'\right) \times$$
$$\times \left\{\Delta\left(t_1-t_2', x_1-x_2'\right) - F\left(t_1-t_2', x_1-x_2'\right)\right\} \left\{\Delta\left(t_2-t_1', x_2-x_1'\right) -\right.$$
$$\left. - F\left(t_2-t_1', x_2-x_1'\right)\right\}. \qquad \text{(П2.21)}$$

Совершенно аналогичные формулы получаются и для других порядков расположения операторных функций Ψ, Ψ^*.

На примере полученной формулы (П2.21) можно проиллюстрировать принцип ослабления корреляции. Надо только заметить, что при фиксированном t

$$\left.\begin{aligned} F(t, x) &\to 0 \quad |x| \to \infty; \\ \Phi(t, x) &\to 0 \quad |x| \to \infty; \end{aligned}\right\} \qquad \text{(П2.22)}$$

$$\Delta(t, x) \to 0^* \quad |x| \to \infty. \qquad \text{(П2.23)}$$

Фиксируем времена t_1, t_2, t_2', t_1' и пространственные разности x_1-x_1', x_2-x_2'. Остальные пространственные разности x_1-x_2, $x_1'-x_2'$, x_1-x_2', x_2-x_1' устремим к бесконечности. Тогда рассматриваемая функция

$$\lim_{V\to\infty} \langle \Psi_{\sigma_1}(t_1, x_1) \Psi_{\sigma_2}(t_2, x_2) \Psi^+_{\sigma_2'}\left(t_2', x_2'\right) \Psi^+_{\sigma_2'}\left(t_1', x_1'\right)\rangle_H \qquad \text{(П2.24)}$$

будет распадаться на произведение

$$\left\{\Delta\left(t_1-t_1', x_1-x_1'\right) - F\left(t_1-t_1', x_1-x_1'\right)\right\} \left\{\Delta\left(t_2-t_2', x_2-x_2'\right) -\right.$$
$$\left. - F\left(t_2-t_2', x_2-x_2'\right)\right\} \delta\left(\sigma_2-\sigma_1'\right) \delta\left(\sigma_2-\sigma_2'\right),$$

---

* Сама функция $\Delta(t, x)$ обобщенная. Это соотношение также имеет место в обобщенном смысле.

равное [см. (П2.8)]

$$\lim_{V\to\infty} \langle \Psi_{\sigma_1}(t_1, x_1)\, \Psi^{+}_{\sigma_1'}(t_1', x_1')\rangle_H \lim_{V\to\infty} \langle \Psi_{\sigma_2}(t_2, x_2)\, \Psi^{+}_{\sigma_2'}(t_2', x_2')\rangle_H. \qquad (\text{П}2.25)$$

Рассмотрим теперь другой способ ослабления корреляции. Снова фиксируем времена t_1, t_2, t_2', t_1' и пространственной разности x_1-x_2, $x_1'-x_2'$. Остальные пространственные разности x_1-x_1', x_2-x_2', x_1-x_2', x_2-x_1' устремим к бесконечности. Тогда рассматриваемая функция (П2.24) распадается на произведение

$$\Phi(t_1-t_2, x_1-x_2)\, \Phi(t_2'-t_1', x_2'-x_1')\, \Phi_{\sigma_2} \Phi_{\sigma_2'}\, \delta(\sigma_1+\sigma_2)\, \delta(\sigma_1'+\sigma_2'). \qquad (\text{П}2.26)$$

При $\nu > 0$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_\sigma(t_1-t_2, x_1-x_2) &= \lim_{V\to\infty} \langle \Psi_{-\sigma}(t_1, x_1)\, \Psi_\sigma(t_2, x_2)\rangle_H;\\ \Phi_\sigma(t_2'-t_1', x_2'-x_1') &= \lim_{V\to\infty} \langle \Psi^{+}_{\sigma}(t_2', x_2')\, \Psi^{+}_{-\sigma}(t_1', x_1')\rangle_H, \end{aligned}\right\} \qquad (\text{П}2.27)$$

так что функция (П2.24) распадается на произведение средних

$$\lim_{V\to\infty} \langle \Psi_{\sigma_1}(t_1, x_1)\, \Psi_{\sigma_2}(t_2, x_2)\rangle \lim_{V\to\infty} \left\langle \Psi^{+}_{\sigma_2'}(t_2', x_2')\, \Psi^{+}_{\sigma_1'}(t_1', x_1')\right\rangle. \qquad (\text{П}2.28)$$

Найденные соотношения (П2.25) или (П2.28) и являются в данном случае выражением принципа ослабления корреляции (П2.2). При $\nu=0$ $\langle \Psi(t_1, x_1) \times \Psi(t_2, x_2)\rangle_H = 0$, и соотношения (П2.27) места не имеют. В этом случае, однако, мы можем ввести «квазисредние»

$$\langle \Psi_{\sigma_1}(t_1, x_1)\, \Psi_{\sigma_2}(t_2, x_2)\rangle_H = \lim_{\substack{\nu>0\\ \nu\to 0}} \lim_{V\to\infty} \langle \Psi_{\sigma_1}(t_1, x_1) \times$$
$$\times \Psi_{\sigma_2}(t_2, x_2)\rangle = \Phi_{\sigma_2}(t_1-t_2, x_1-x_2)\, \delta(\sigma_1+\sigma_2) \qquad (\text{П}2.29)$$

и вместо произведения средних (П2.28) взять соответствующее произведение «квазисредних». Полученные выше соотношения иллюстрируют общий принцип ослабления корреляции.

Пользуясь случаем, выражаю свою искреннюю благодарность за обсуждение Д. Н. Зубареву, С. В. Тябликову, Ю. А. Церковникову и Е. Н. Яковлеву.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bardeen J., Cooper L. N., Schriffer J. R. Phys. Rev., **105**, 1175 (1957).
2. Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н., Церковников Ю. А. Докл. АН СССР, **177**, 788 (1957).
3. Prange R. E. Bull. Amer. Phys. Soc., **4**, 225 (1959).
4. Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н., Церковников Ю. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **39**, 120 (1960).
5. Боголюбов Н. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **37**, 73 (1958).
6. Боголюбов Н. Н. «Изв. АН СССР. Серия физ.», **11**, 77 (1947).
7. Боголюбов Н. Н. (мл.). Препринт ОИЯИ Р4-4184, Дубна, 1968.
8. Боголюбов Н. Н. (мл.). Препринт ОИЯИ Р2-4175, Дубна, 1968.
9. Bogolubov N. N. Preprint ITPh-67-1, Kiev, 1967.
10. Bogolubov N. N. Preprint, ITPh-68-65, Kiev, 1968.
11. Bogolubov N. N. Preprint ITPh-68-67, Kiev, 1968,
12. Боголюбов Н. Н. (мл.). «Ядерная физика», **10**, 425 (1969).