# ТЕОРИИ ПОЛЯ С НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ЛАГРАНЖИАНАМИ

М. К. Волков

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ДУБНА

## АННОТАЦИЯ

В работе дается обзор существующих в настоящее время методов, применяемых в квантовой теории поля со спектральными функциями быстрого роста для построения двухточечных функций Грина и амплитуд рассеяния частиц. Эти методы должны обеспечивать конечность теории во всех порядках модифицированной теории возмущений и удовлетворять условию унитарности $S$-матрицы. Явная неаналитичность по константе связи, появляющаяся при использовании указанных методов в неперенормируемых теориях, свидетельствует о неприменимости здесь обычной теории возмущений.



## ABSTRACT

New methods used in quantum fields theory with rapidly increasing spectral functions for the construction of the twopoint Green's functions and the particle scattering amplitudes are reviewed. These methods have to ensure the finiteness of the theory in the all orders of the modified perturbation theory and the fulfilment of the $S$-matrix unitarity condition. The evident nonanalyticity in the coupling constant which appears when these methods are used in unrenormalizable theories shows that usual perturbation theory cannot be applied.

## ВВЕДЕНИЕ

За последние годы наблюдается заметный прогресс в развитии методов квантовой теории поля, описывающих неперенормируемые взаимодействия элементарных частиц. Характерной чертой всех этих методов является попытка отойти от приемов обычной теории возмущений со всеми присущими ей трудностями (появлением бесконечного количества неопределенных констант в неперенормируемых теориях; невозможностью описания неаналитической зависимости от константы связи амплитуд и функций Грина в таких теориях, хотя на существование такой зависимости указывают некоторые решаемые модели [1—4] и пр.). Многие авторы добились известных успехов в решении указанных задач. Хотя в настоящее время развитые методы далеки еще от совершенства, однако уже сейчас они позволяют описывать целый ряд неперенормируемых взаимодействий в полном согласии с основными требованиями, предъявляемыми к теории поля принципами причинности и унитарности $S$-матрицы. В предлагаемой статье мы попытаемся сделать обзор всех этих методов в том их состоянии, в котором они находятся в настоящий момент времени.

Прежде чем приступить к разбору интересующих нас методов, дадим краткий исторический обзор литературы, связанной с постановкой и решением обсуждаемых здесь проблем.

Первой и очень интересной работой, посвященной построению двухточечной функции Грина в теории с лагранжианом (1.1) или (1.3), была работа Окубо [2], появившаяся еще в 1954 г. Метод, предложенный этим автором, близок к методам группы 2 и группы 3 (см. § 2). Техника, предложенная Окубо, как и полученные им формулы, весьма близки к современному аппарату и современным формулам. Единственный серьезный недостаток этой работы заключается в неверном аналитическом продолжении по константе связи, приводящем к нарушению условия унитарности $S$-матрицы. К сожалению, эта интереснейшая работа была в дальнейшем незаслуженно забыта и привлекла к себе внимание лишь в самое последнее время.

Следующей была работа Арновита и С. Дезера [5], выполненная в 1955 г. В ней также рассматривался лагранжиан (1.1), но предложенный этими авторами метод для построения амплитуд рассеяния частиц и функций Грина несравненно грубее метода Окубо. Как показали еще в 1962 г. Б. М. Барбашов и Г. В. Ефимов [6], в этой работе также нарушено условие унитарности $S$-матрицы.

Затем последовал почти десятилетний перерыв, в течение которого не появилось ни одной заметной работы, посвященной интересующей нас теме. В 1963 г. несколько авторов одновременно вернулись к изучению теории поля с неполиномиально растущими спектральными функциями. Г. В. Ефимов и Е. С. Фрадкин независимо друг от друга сделали попытку построить конечную квантовую теорию поля с неполиномиальными лагранжианами [30,31]. В том же году Г. Файнберг совместно с Пайсом предложили так называемый метод ператизации, используемый ими в теории слабых взаимодействий для построения амплитуды рассеяния частиц, неполиномиально зависящей от импульса [18]. В последующие годы поток работ в этом направлении непрерывно рос: Гюттингер, М. К. Волков, Б. А. Арбузов и А. Т. Филиппов, Фрид, Дельбурго, Салам и Стразди, Ли и Зумино, Леман и Полмайер, Кек и Тейлор, Будини и Калуццо [4, 7—12] — вот неполный, но и так весьма обширный список авторов, чьи работы в последние годы посвящены исследованию вопросов, связанных с изучаемой нами темой.

## § 1. ПРИМЕРЫ НЕПЕРЕНОРМИРУЕМЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Приведем ряд примеров неперенормируемых взаимодействий элементарных частиц, успешно описанных изучаемыми методами.

1. Нейтральная псевдоскалярная теория с псевдовекторной связью скалярных и спинорных полей [2, 5, 13] *

$$L(x)=L_0(\Psi(x),\varphi(x))-\mathrm{i}g:\overline{\Psi}(x)\gamma_5\gamma_\nu\Psi(x)\partial^\nu\varphi(x): \qquad (1.1)$$

С помощью преобразования Дайсона [15] для спинорного поля

$$\Psi'(x)=\exp\{-g\gamma_5\varphi(x)\}\Psi(x) \qquad (1.2)$$

можно избавиться от производной в лагранжиане взаимодействия и (1.1) переписывается в форме

$$L(x)=L_0(\Psi'(x),\varphi(x))-m:\overline{\Psi}'(x)(\exp[-2g\gamma_5\varphi(x)]-1)\Psi'(x): \qquad (1.3)$$

(здесь знак нормального произведения относится лишь к спинорным полям).

Двухточечная функция Грина, как и амплитуда рассеяния скалярных частиц во втором порядке по безразмерному параметру $(mg)$, выражается через функцию $F(x)$:

$$F(x)=\mathrm{i}C(m'g)^2\,\mathrm{Sp}\{S^c(x)S^c(-x)\}\exp\{-\mathrm{i}(2g)^2\Delta^c(x)\}, \qquad (1.4)$$

где $S^c(x)$ — пропагатор свободного спинорного поля; $\Delta^c(x)$ — пропагатор свободного скалярного поля; $m'=m\exp\{\mathrm{i}\,2g^2\Delta^c(0)\}$, а $C$—константа.

Функция $F(x)$ обладает существенно особой точкой на световом конусе, а ее спектральная функция растет быстрее любого полинома

* Во всех обозначениях мы следуем монографии Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова [14].

по $p^2$. Это свидетельствует о том, что обычные методы теории поля здесь неприменимы, и мы имеем типичную ситуацию, когда необходимо использовать качественно новый метод для описания данного взаимодействия.

2. Несохраняющее четность слабое взаимодействие нейтрального векторного мезона со спинорным полем [16]:

$$L_{\text{вз}}(x) = G : \overline{\Psi}(x)\gamma^\nu(a + ib\gamma_5)\Psi(x) W_\nu(x): \tag{1.5}$$

Используя преобразование Штюкельберга [17]:

$$W_\nu(x) = \varphi_\nu(x) + m_W^{-1}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\theta(x), \tag{1.6}$$

где $\theta(x)$ — скалярное поле, а $\varphi_\nu(x)$ — векторное поле с пропагатором:

$$\Delta_{\mu\nu}^{(\varphi)}(p) = \frac{g_{\mu\nu}}{m_W^2 - p^2 - i\varepsilon} \tag{1.7}$$

(спин-нулевая часть поля $\varphi_\nu(x)$ имеет отрицательную метрику), можно выделить из (1.5) неперенормируемую часть взаимодействия. Она запишется в форме

$$L_{\text{вз (непер)}}(x) = \frac{G}{m_W} : \overline{\Psi}(x)\gamma_\nu(a + ib\gamma_5)\Psi(x)\partial^\nu\theta(x): \tag{1.8}$$

близкой к уже рассмотренному ранее взаимодействию (1.1). Вновь используя преобразование Дайсона [15]

$$\Psi'(x) = \exp\left\{-iG(a + ib\gamma_5)\frac{\theta(x)}{m_W}\right\}\Psi(x), \tag{1.9}$$

приходим опять к взаимодействию типа (1.3) с неполиномиальной зависимостью от поля $\theta(x)$.

3. Слабое четырехфермионное взаимодействие

$$L_{\text{вз}}(x) = G j_A(x) j_B(x), \tag{1.10}$$

где $j_A(x) = :\overline{\Psi}_A(x)\gamma_5\Psi_A(x):$. Для случая $m_A = m_B = 0$ и $s = (p_1 + p_2)^2 = 0$. Гютингер [7] нашел выражения для бете-солпитеровской амплитуды рассеяния фермионных частиц в «лестничном» приближении. Эта амплитуда имеет вид

$$F_G(x) = a\exp\left\{-\frac{\sqrt{G}}{x^2 - i\varepsilon}\right\} + b\exp\left\{\frac{\sqrt{G}}{x^2 - i\varepsilon}\right\}, \tag{1.11}$$

также весьма близкий к выражению (1.4).

4. Амплитуда рассеяния спинорных частиц, найденная Файнбергом и Пайсом в лестничном приближении для слабого взаимодействия векторных мезонов с фермионами [18]:

$$L_{\text{вз}}(x) = G:\overline{\Psi}(x)\gamma^\nu(1 + i\gamma_5)\Psi(x) W_\nu(x): \tag{1.12}$$

имеет уже качественно иную форму, чем (1.4):

$$F_F^{(\pm)}(x) = -\mathrm{i}G^2 \frac{\left[g_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{m_W^2}\right] \Delta^c(x)}{1 \pm \mathrm{i}\left(\frac{2G}{m_W}\right)^2 \Delta^c(x)}, \tag{1.13}$$

но также приводит к спектральной функции, растущей быстрее любого полинома. В отличие от (1.4) решение (1.13) не удовлетворяет условиям локализуемости взаимодействия [19—22].

5. Кирально симметричные лагранжианы [8, 23—27]. В качестве типичного примера такого сорта лагранжианов приведем здесь лагранжиан Вайнберга для $\pi$-мезонов [26]:

$$L_{\text{вз}}(x) = G \frac{(\partial_\nu \varphi(x))^2}{(1 + g\varphi^2(x))^2}. \tag{1.14}$$

Здесь также спектральные функции амплитуд рассеяния растут быстрее любого полинома, и взаимодействие имеет нелокальный характер.

Примеры других взаимодействий подобного типа (гравитационный лагранжиан Эйнштейна, теория Янга — Миллса с массивными полями и пр.) можно найти, например, в работах Салама с сотр. (см. [8]). Ограничимся здесь уже приведенными пятью примерами как наиболее характерными. В дальнейшем для демонстрации различных методов, используемых в теориях со спектральными функциями быстрого роста, будем рассматривать некий лагранжиан общего вида. Для простоты будем считать, что он зависит лишь от однокомпонентного скалярного поля, не содержит производных и представляется в виде бесконечного ряда по степеням $\varphi(x)$:

$$L_{\text{вз}}(x) = G \sum_0^\infty \frac{u(n)}{n!} :(\varphi(x))^n: = G:U(\varphi(x)): \tag{1.15}$$

Коэффициенты $u(n)$ пропорциональны второй константе связи $g^n$, которая всегда присутствует в подобных теориях наряду с $G$. Теория возмущений в дальнейшем будет строиться по $G$. В каждом порядке по $G$ учитываются все порядки по $g$. В основном будем рассматривать второй порядок по $G$, поскольку этого вполне достаточно для описания характерных черт каждого из методов.

## § 2. ЗАМЕЧАНИЯ, ОБЩИЕ ДЛЯ ВСЕХ МЕТОДОВ, И УСЛОВИЯ, НАЛАГАЕМЫЕ НА ДВУХТОЧЕЧНУЮ ФУНКЦИЮ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

$S$-матрицу в теории с существенно нелинейным лагранжианом будем строить аналогично тому, как это делалось в перенормируемых теориях с полиномиальными лагранжианами (см. [14]):

$$S = 1 + \sum_1^\infty \frac{G^n}{n!} S_n, \tag{2.1}$$

где

$$S_n = (\mathrm{i})^n \int \ldots \int d^4x_1 \ldots d^4x_n T(U(\varphi(x_1)) \ldots U(\varphi(x_n))). \quad (2.2)$$

Для лагранжиана (1.15) уже в первом порядке по $G$ возможны любые процессы упругого и неупругого рассеяния скалярных частиц. Однако рассмотрение этого порядка не вызывает интереса ввиду его тривиальности (отсутствуют какие бы то ни было расходимости, все амплитуды выражаются через константы). Поэтому мы сразу перейдем к рассмотрению второго порядка теории возмущений:

$$S_2 = -\int\int d^4x_1 d^4x_2 \sum_0^\infty \sum_0^\infty F^{(2)}_{k_1k_2}(x_1 - x_2):$$

$$: \frac{\varphi^{k_1}(x_1)}{k_1!} \cdot \frac{\varphi^{k_2}(x_2)}{k_2!}:, \quad (2.3)$$

где

$$F^{(2)}_{k_1k_2}(x_1 - x_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u_{m+k_1}u_{m+k_2}}{m!} [-\mathrm{i}\Delta^c(x_1 - x_2)]^m, \quad (2.4)$$

а

$$\Delta^c(x_1 - x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{\mathrm{i}p(x_1 - x_2)}}{m^2 - p^2 - \mathrm{i}\varepsilon} \quad (2.5)$$

пропагатор свободной] скалярной частицы с массой $m$. Мы чаще будем рассматривать взаимодействие скалярных частиц с нулевой массой покоя. В этом случае пропагатор (2.5) имеет весьма простой вид:

$$\Delta^c(x) = -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^2 (x^2 - \mathrm{i}\varepsilon)}. \quad (2.6)$$

Через двухточечную функцию (2.4) выражаются все функции Грина и амплитуды рассеяния скалярных частиц во втором порядке по $G$.

При исследовании этого оператора встречаются две трудности Первая связана с появлением ультрафиолетовых расходимостей при переходе к импульсному пространству. Уже из самой формы выражения (2.4) ясно, что здесь содержатся полюса любого порядка на световом конусе. В локализуемых взаимодействиях, в частности, это приводит к тому, что функция $F^{(2)}_{k_1k_2}(x)$ на световом конусе имеет существенно особую точку.

Другая трудность является специфической чертой нелокализуемых взаимодействий. Она заключается в том, что ряд (2.4) для такого рода взаимодействий либо сходится лишь в ограниченной области $x^2$, либо вообще не сходится ни в какой области $x^2$ и является асимптотическим рядом. Поэтому помимо старых известных трудностей, связанных с определением расходящихся интегралов, возникает и еще одна трудность, связанная с суммированием расходящихся рядов.

Основные требования, которые необходимо удовлетворить при решении этих проблем, заключаются в том, чтобы $S$-матрица окончательной теории была конечной и унитарной. В теориях с локализуемыми взаимодействиями должны выполняться условия микропричинности, в теориях с нелокализуемыми взаимодействиями — условия макропричинности [21].

Как найти границу между локализуемыми и нелокализуемыми взаимодействиями? Проще всего это сделать, исследуя асимптотическое поведение оператора (2.4) в импульсном пространстве, в частности, его мнимой части, которая определяется однозначно. Для локализуемых взаимодействий существует определенное ограничение на рост функций Грина в импульсном пространстве, впервые найденное в несколько отличающихся формах Мейманом [19] и Джаффе [20]. Мы будем исходить из условия, найденного Мейманом, как более общего, которое гласит, что при растущих $p^2$

$$|\widetilde{F}^{(2)}_{k_1k_2}(p)| < C\exp\{\sigma\sqrt{|p^2|}\} \tag{2.7}$$

для любого $\sigma > 0$ (см. также работы [21, 22]).

Условию (2.7) должна удовлетворять, в частности, и мнимая часть фурье-образа (2.4), поведение которой при $p^2 \to \infty$ является определяющим для всей функции $\widetilde{F}^{(2)}_{k_1k_2}(p)$. Поэтому естественно сейчас обратиться к определению этой мнимой части.

Знание мнимой части $\widetilde{F}^{(2)}_{k_1k_2}(p)$ необходимо нам и для проверки выполнения условия унитарности $S$-матрицы. В чем заключаются эти условия? Рассмотрим фурье-образ двухточечной функции (2.4):

$$\widetilde{F}^{(2)}_{k_1k_2}(p) = \mathrm{i}\int d^4x e^{\mathrm{i}px} F^{(2)}_{k_1k_2}(x). \tag{2.8}$$

Мы потребуем, чтобы функция $F^{(2)}_{k_1k_2}(p)$ обладала вполне определенными аналитическими свойствами. Укажем их. Для определенности рассмотрим процесс упругого рассеяния двух скалярных частиц. Тогда при $p^2 < 0$ функция (2.8) должна быть действительной, в интервале $0 < p^2 < 4m^2$ должен существовать простой полюс при $p^2 = m^2$, а в точке $p^2 = 4m^2$ — находиться точка ветвления, от которой начинается разрез, продолжающийся до бесконечности. Скачок на разрезе должен выражаться через сумму фазовых объемов скалярных частиц:

$$\mathrm{Im}\,\widetilde{F}^{(2)}_{22}(p) = \pi u_3^2\delta(p^2 - m^2) + \pi\sum_{k=2}^{\left[\frac{\sqrt{p^2}}{m}\right]} \frac{u^2_{k+2}}{k!}\,\Omega^{(m)}_k(p^2), \tag{2.9}$$

где

$$\Omega_k^{(m)}(p^2)=\frac{1}{(2\pi)^{3(k-1)}}\int\frac{d\mathbf{q}_1}{2\omega_1}\ \dots\int\frac{d\mathbf{q}_k}{2\omega_k}\,\delta^{(4)}(p-q_1-\dots-q_k). \qquad (2.10)$$

$$\left(\omega_i=\sqrt{\mathbf{q}_i^2+m^2}\right)$$

Если масса покоя скалярных частиц равна нулю, то фазовый объем является просто степенной функцией от $p^2$:

$$\Omega_k^{(0)}(p^2)=(4\pi)^{-2}\left[\frac{p^2}{(4\pi)^2}\right]^{k-2}\frac{\Theta(p^2)\,\Theta(p^0)}{(k-1)!\,(k-2)!}, \qquad (2.11)$$

а верхний предел суммы в (2.9) равен бесконечности. Что касается аналитических свойств, которыми должна обладать функция $\widetilde{F}_{22}^{(2)}(p)$ для безмассовых частиц, то при $p^2<0$ она по-прежнему будет действительной, в точке же $p^2=0$ будут одновременно существовать полюс и точка ветвления. От нуля до плюс бесконечности должен быть логарифмический разрез [см. работу [11], а также формулы (6.26) и (6.32)].

Какой бы метод ни был использован для построения конечной функции $\widetilde{F}_{k_1k_2}^{(2)}(p)$, она должна обладать описанными выше качествами, чтобы соблюдались условия унитарности $S$-матрицы.

Теперь перейдем к определению границы между локализуемыми и нелокализуемыми взаимодействиями. Для этого найдем асимптотику $\operatorname{Im}\widetilde{F}_{22}^{(2)}(p)$ при $p^2\to\infty$. Для безмассовых частиц используем для фазовых объемов формулу (2.11). В случае же, когда массы частиц отличны от нуля, воспользуемся приближенным выражением для $\Omega_k^{(m)}(p^2)$, справедливым при $p^2\gg m^2$ [28]:

$$\Omega_k^{(m)}(p^2)\approx\frac{p^{\frac{k-3}{2}}\,(p-km)^{\frac{3k-5}{2}}}{\Gamma(2k)}\,\varphi(p,\ k), \qquad (2.12)$$

где $p=\sqrt{p^2}$; $\Gamma(2k)$ — гамма-функция, а $\varphi(p,k)$ — медленно меняющаяся функция. Ее зависимостью от $p$ можно пренебречь при вычислении асимптотики $\operatorname{Im}\widetilde{F}_{22}^{(2)}(p)$ при больших $p^2$. Результаты вычислений для различных $u_k$ приведены в таблице.

Имея в виду ограничение на рост амплитуд рассеяния в локализуемых теориях, данное в (2.7), легко получить соответствующие условия на коэффициенты $u_k$:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{u_k}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\right|^{1/k}=0 \qquad (2.13)$$

или

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,|c_m(k)|^{1/k}=0, \qquad (2.14)$$

где

$$c_m(k)=\frac{(u_{k+m})^2}{k!}. \qquad (2.15)$$

**Асимптотика $\ln \operatorname{Im} \widetilde{F}_{22}^{(2)}(p^2)$ при больших значениях $p^2$**

| Отдел | № | $u(k)$ | $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \lvert c(k) \rvert^{1/k}$, $c(k)=\frac{(u_k)^2}{k!}$ | $U(\varphi)$ | $\ln \operatorname{Im} \widetilde{F}_{22}^{(2)}(p)$, $p\to\infty$ $(m \neq 0)$ | $\ln \operatorname{Im} \widetilde{F}_{22}^{(2)}(p)$, $p\to\infty$ $(m=0)$ | Взаимодействия * |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | $u(k)=0$, $k>N$ | 0 | $\sum\limits_0^N \frac{u(k)}{k!} :\varphi^k(x):$ | $2(N-4)\ln p$ | $2(N-4)\ln p$ | Локализуемые |
| | 2 | $\sim [\Gamma(\gamma k)]^{-1}_{(\gamma>0)}$ | 0 | $I_0\left(\sqrt{g\varphi(x)}\right)_{\gamma=1}$ | $\text{const}\, p^{\frac{2}{3+2\gamma}}$ | $\text{const}\, p^{\frac{2}{3+2\gamma}}$ | |
| | 3 | $\sim (\text{const})^k$ | 0 | $\exp\{g\varphi(x)\}$ | $\text{const}\, p^{2/3}$ | $\text{const}\, p^{2/3}$ | |
| | 4 | $\sim \Gamma(\gamma k)$, $\gamma<1/2$ | 0 | $\int\limits_0^\infty d\nu e^{\nu g\varphi(x)-\nu^{1/\gamma}}$ | $\text{const}\, p^{\frac{2}{3-2\gamma}}$ | $\text{const}\, p^{\frac{2}{3-2\gamma}}$ | |
| II | 5 | $\sim \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)$ | $\sim \frac{1}{2}$ | $\exp\{\mp g^2\varphi^2(x)\}$ | $\text{const}\, p$ | $\text{const}\, p$ | |
| | 6 | $\sim \Gamma(\gamma k)$, $1/2<\gamma\leqslant 1$ | $\infty$ | $\exp\{\mp g^{2m}\varphi^{2m}(x)\}$, $m\geqslant 2$ | $\text{const}\ (2\gamma-1)\, p \ln p$ | $\text{const}\, p^{\frac{2}{3-2\gamma}}$ | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\left(\gamma=1-\frac{1}{2m}\right)\ \gamma<1$ | | | Нелокализуемые |
| | 7 | $\sim\Gamma(k)$ | $\infty$ | $\frac{g\varphi}{\sqrt{1+g^2\varphi^2}}$; $\frac{g\varphi}{1\pm g^2\varphi^2}$ | const $p \ln p$ | const $p^2$ | |
| III | 8 | $\sim\Gamma(\gamma k)$ $\gamma>1$ | $\infty$ | $\sum\limits_0^\infty \Gamma((\gamma-1)k)(g\varphi)^k$ | const $(2\gamma-1)\, p \ln p$ | const $p^{\frac{2}{3-2\gamma}}$ $\gamma<3/2$; Не существует, если $\gamma>3/2$ | |
| | 9 | $\sim e^{k^2}$ | $\infty$ | $\sum\limits_0^\infty e^{n^2}(g\varphi)^n$ | const $2p^2$ | Не существует | |

* Локализуемые взаимодействия — такие взаимодействия, которые приводят к спектральной функции, удовлетворяющей условию (2.7). Если же спектральная функция при больших значениях импульса растет быстрее, чем (2.7), то такое взаимодействие мы называем нелокализуемым.

Локальные теории — такие теории, в которых выполнен принцип микропричинности. Нелокальными теориями мы называем теории, в которых принцип микропричинности нарушается на малых расстояниях и выполнен лишь принцип макропричинности (см., например, [21]). Нелокализуемые взаимодействия всегда описываются нелокальными теориями, в то время как локализуемые взаимодействия могут описываться как нелокальными, так и локальными теориями, в зависимости от того, какой метод используется для построения функций Грина и амплитуд рассеяния частиц [19—22].

Лагранжианы, у которых коэффициенты разложения в ряд (1.15) удовлетворяют условиям (2.13) или (2.14), описывают локализуемые взаимодействия. В случае же невыполнения указанных условий мы имеем нелокализуемые взаимодействия. Среди последних можно выделить два подкласса: первый, когда ряд (1.15) сходится к определенной функции от поля $\varphi(x)$, и второй, когда этот ряд расходится. Нам кажется физически интересным лишь первый подкласс нелокализуемых лагранжианов. Во втором подклассе, кроме того, что расходится ряд (1.15), в большинстве случаев не существует и спектральной функции для безмассовых частиц (см. таблицу).

Весьма интересное различие локализуемых и нелокализуемых взаимодействий заключается еще в следующем. Асимптотическое поведение амплитуд при больших импульсах в локальных теориях одинаково для массивных и безмассовых частиц. В случае же нелокализуемых взаимодействий асимптотическое поведение амплитуд рассеяния массивных частиц отличается от поведения амплитуд безмассовых частиц, как это видно из таблицы *. Отсюда следует, что в нелокальных теориях при проведении приближенных расчетов при больших энергиях нельзя просто пренебрегать массой и использовать в расчетах выражения, взятые из случая безмассовых частиц. (Подобная некорректность содержится в работе Салама и Стразди [9], где они при больших значениях $p^2$ используют для пропагатора массивной частицы приближенное выражение, совпадающее с выражением для безмассовой частицы.)

Итак, дадим еще раз краткое описание задач, стоящих перед нами, и проведем некоторую классификацию методов, используемых для решения этих задач.

Исследуем двухточечную функцию $F(x)$, выраженную через бесконечный ряд по степеням пропагатора свободной скалярной частицы:

$$F(x)=\sum_{1}^{\infty} c(n)\,[-\mathrm{i}\Delta^{c}(x)]^{n}. \tag{2.16}$$

Наша задача заключается в построении фурье-образа функции $F(x)$:

$$\widetilde{F}(p)=\mathrm{i}\int d^{4}x e^{\mathrm{i}px} F(x), \tag{2.17}$$

который должен быть конечной функцией от $p^2$ и обладать вполне определенными аналитическими свойствами. Для функции $\widetilde{F}(p)$ должно существовать спектральное представление типа [20, 21]:

$$\widetilde{F}(p)=\frac{c(1)}{m^{2}-p^{2}-\mathrm{i}\varepsilon}+\int_{4m^{2}}^{\infty} d\varkappa^{2}\frac{\rho(\varkappa^{2})}{\varkappa^{2}-p^{2}-\mathrm{i}\varepsilon}V(\varkappa^{2},\ p^{2})+W(p^{2}), \tag{2.18}$$

---

* Этот результат получен нами недавно и впервые публикуется в настоящей работе. Определение локальных и нелокальных теорий, а также локализуемых и нелокализуемых взаимодействий см. в сноске к таблице.

где $\rho(\varkappa^2)$; $V(\varkappa^2, p^2)$ и $W(p^2)$ — целые функции от $\varkappa^2$ и $p^2$ в соответствующих комплексных плоскостях и

$$V(\varkappa^2, \varkappa^2) = 1. \tag{2.19}$$

Существующие методы можно разбить на следующие четыре группы.

1. Определение функции $F(x)$.

2. Определение интеграла $\widetilde{F}(p)$.

3. Определение функции $F(x)$ или $\widetilde{F}(p)$ с помощью решения соответствующих уравнений для функций Грина или амплитуд рассеяния.

4. Введение нелокальных форм-факторов.

В первом случае исследуются обычно нелокализуемые взаимодействия. Здесь ряд (2.16) является асимптотическим. Постулируется, что существует «правильная» функция $F(x)$, которая не имеет сингулярностей при $x^2 \to 0$, когда $\Delta^c(x) \to \infty$. Ряд (2.16) является асимптотическим разложением этой функции $F(x)$ при $x^2 \to \infty$, когда $\Delta(x) \to 0$. Задача состоит в нахождении этой «правильной» функции.

Вторая группа методов близка к так называемым методам аналитической регуляризации, которые применяются в перенормируемых теориях. С помощью процедуры аналитического продолжения по показателю пропагатора $n$ в (2.16) первоначально расходящемуся интегралу (2.17) придается вполне определенный смысл. На конечном этапе вычислений эта промежуточная процедура устраняется, и мы получаем конечное выражение для $\widetilde{F}(p)$ с необходимыми аналитическими свойствами.

В группе 3 решаются уравнения для функций Грина или амплитуд рассеяния в импульсном пространстве в евклидовой области импульса. Решения находятся при нефизических значениях константы связи и затем аналитически продолжаются к истинным значениям. С помощью решения уравнений можно находить и функцию $F(x)$ в $x$-пространстве.

Наконец, последняя группа методов связана с введением в теорию таких форм-факторов, которые устраняют ультрафиолетовые расходимости и не нарушают условий унитарности $S$-матрицы.

Общие черты этих методов заключаются, во-первых, в том, что рассмотрение, как правило, ведется сначала в евклидовой области переменных, а затем полученные функции аналитически продолжаются во всю физическую область $p^2$. Во-вторых, неоднозначность в этих методах появляется лишь во втором порядке теории возмущений.

В высших порядках дополнительных неоднозначностей не возникает.

## § 3. УСЛОВИЯ, НАЛАГАЕМЫЕ НА ДВУХТОЧЕЧНУЮ ФУНКЦИЮ В КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ *

Прежде чем приступить к описанию методов из группы 1, подчеркнем, что все эти методы приводят к нелокальным теориям. Часть их принципиально применима лишь к нелокализуемым взаимодействиям (см. отделы II и III таблицы). Другая часть может применяться и к локализуемым взаимодействиям, но все равно в результате мы получаем нелокальные теории.

Каким общим условиям должна удовлетворять двухточечная функция в конфигурационном пространстве, чтобы при переходе к импульсному пространству мы получили конечную функцию с правильными аналитическими свойствами, находящимися в согласии с условием унитарности $S$-матрицы? Укажем эти общие для всех методов группы 1 требования.

Поскольку ряд (2.16) для нелокализуемых взаимодействий является асимптотическим, то при $x^2 \to -\infty$ $(\Delta^c(x) \to 0)$ ему можно поставить в соответствие некую функцию $F(x)$. Эта функция должна удовлетворять следующим двум условиям:

1) условию отсутствия ультрафиолетовых расходимостей:

$$\lim_{x^2 \to 0} |F(x)| = 0; \tag{3.1}$$

2) условию реальности амплитуды в нефизической области переменных $x^2 < 0$ (или $p^2 < 0$). Функция $F(x)$ должна быть реальной и не должна иметь никаких сингулярностей в интервале:

$$-\infty < x^2 < 0. \tag{3.2}$$

Второе условие обеспечивает правильные аналитические свойства амплитуды рассеяния.

Предположим теперь, что условия 1 и 2 выполнены, и покажем, что $\widetilde{F}(p)$ в этом случае обладает правильными аналитическими свойствами, соответствующими унитарной $S$-матрице.

В евклидовой области $p^2 = -q^2 < 0$ интеграл (2.17) можно записать в виде

$$\widetilde{F}(p) = \int d_e^4x e^{iqx} F(x) = \widetilde{F}_1(p) + \widetilde{F}_2(p) + \widetilde{F}_3(p), \tag{3.3}$$

где

$$\widetilde{F}_1(p) = \int d_e^4x e^{iqx} \Theta(a^2 - x^2) F(x); \tag{3.4}$$

$$\widetilde{F}_2(p) = \int d_e^4x e^{iqx} \Theta(x^2 - a^2) \left\{ F(x) - \sum_1^N C(n) [-i\Delta^c(x)]^n \right\}; \tag{3.5}$$

$$\widetilde{F}_3(p) = \int d_e^4x e^{iqx} \Theta(x^2 - a^2) \sum_1^N C(n) [-i\Delta^c(x)]^n. \tag{3.6}$$

---

* В изложении § 3 и 4, а также отчасти § 2 мы следуем обзору Г. В. Ефимова [29].

Здесь $a$ — некоторый отличный от нуля действительный параметр; $N$ — произвольное целое число.

Интегрируя по евклидовым углам в (3.4) и (3.5), получаем

$$\widetilde{F}_1(p) = (2\pi)^2 \int_0^a du u^2 \frac{J_1(u\sqrt{-p^2})}{\sqrt{-p^2}} F(u); \tag{3.7}$$

$$\widetilde{F}_2(p) = (2\pi)^2 \int_a^\infty du u^2 \frac{J_1(u\sqrt{-p^2})}{\sqrt{-p^2}} \left\{ F(u) - \sum_1^N C(n) \left(\frac{mK_1(mu)}{4\pi^2 u}\right)^n \right\}, \tag{3.8}$$

где $J_1(x)$ и $K_1(x)$ — функции Бесселя и Макдональда. Интеграл (3.7) сходится при любых комплексных $p^2$ и определяет целую функцию порядка 1/2 в комплексной плоскости $p^2$. Интеграл (3.8) определяет аналитическую функцию по $p^2$ в области

$$\operatorname{Re} p^2 < (N+1)^2 m^2, \tag{3.9}$$

поскольку при больших значениях $u$ выражение в фигурных скобках убывает как

$$\sim \exp\{-(N+1)mu\}. \tag{3.10}$$

Функции $\widetilde{F}_1(p)$ и $\widetilde{F}_2(p)$ реальны. Вклад в мнимую часть $\widetilde{F}(p)$ дает только функция $\widetilde{F}_3(p)$. Используя тождество

$$[-i\Delta_m^c(x)]^n = -i \int_{(nm)^2}^\infty dx^2 \Omega_n^{(m)}(\varkappa^2)\, \Delta_\varkappa^c(x), \tag{3.11}$$

где $\Delta_\varkappa^c(x)$ — причинная функция скалярной частицы с массой $\varkappa$, а $\Omega_n^{(m)}(\varkappa)$ — фазовый объем $n$ частиц с массами $m$, можно интеграл (3.6) привести к виду

$$\widetilde{F}_3(p) = \frac{C(1)}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} + \int_{4m^2}^\infty d\varkappa^2 \frac{\rho_N(\varkappa^2)\, d_a(\varkappa^2, p^2)}{\varkappa^2 - p^2 - i\varepsilon}, \tag{3.12}$$

где

$$\rho_N(\varkappa^2) = \sum_2^N C(n)\, \Omega_n^{(m)}(\varkappa^2), \tag{3.13}$$

а

$$d_a(\varkappa^2, p^2) = \varkappa a \left[ J_0\left(a\sqrt{-p^2}\right) K_1(a\varkappa) + \frac{J_1(a\sqrt{-p^2})}{a\sqrt{-p^2}} a\varkappa K_0(a\varkappa)\right]; \tag{3.14}$$

$$d_a(\varkappa^2, \varkappa^2) = 1. \tag{3.15}$$

Интеграл (3.12) сходится, так как при $\varkappa \to \infty$ $\rho_N(\varkappa^2) \sim \varkappa^{2N}$, а $d_a(\varkappa^2, p^2) \sim \exp\{-a\varkappa\}$.

Функция $\widetilde{F}_3(p)$ имеет простой полюс в точке $p^2=m^2$ и разрез, начинающийся в точке $p^2=4m^2$. Для значений импульса $4m^2 < p^2 < (N+1)^2 m^2$ мы имеем

$$\operatorname{Im} \widetilde{F}_3(p) = \pi \sum_{2}^{\left[\frac{\sqrt{p^2}}{m}\right]} C(n)\, \Omega_n^{(m)}(p^2), \tag{3.16}$$

что согласуется с условием унитарности.

Поскольку число $N$ можно выбрать произвольно большим, то, выбирая его так, чтобы всегда удовлетворялось условие (3.9), в целом о функции $\widetilde{F}(p)$ можно сказать, что она имеет простой полюс в точке $p^2=m^2$ и разрез, начинающийся с точки $p^2=4\ m^2$ со скачком на этом разрезе, равным (3.16). Других сингулярностей в произвольной конечной области $p^2$ не будет. Таким образом, для функции $\widetilde{F}(p)$ имеет место представление типа (2.18), обеспечивающее правильные унитарные свойства и соблюдение условия причинности.

Обсудим теперь вопрос, связанный с неоднозначностью этих методов. Поскольку здесь необходимо суммировать асимптотические ряды, то следует помнить, что этот процесс неоднозначен. Различные функции, получающиеся при таком суммировании, будут отличаться друг от друга на функцию, имеющую следующие свойства:

$$\lim_{x^2 \to -\infty} \Delta^{-A} f(\Delta) = 0 \quad (f(\Delta) = F_{(1)}(x) - F_{(2)}(x)). \tag{3.17}$$

Эта функция имеет существенно особую точку при $x^2 \to -\infty$, и ее вклад в асимптотический ряд (2.16) всегда равен нулю. Фурье-образ $f(\Delta)$ является целой аналитической функцией [см. $\widetilde{W}(p^2)$ в (2.18)].

## § 4. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ $F(x)$

1. **Метод Ефимова — Фрадкина.** Этот метод был предложен одновременно и независимо Г. В. Ефимовым [30] и Е. С. Фрадкиным [31] в 1963 г. Это была первая попытка построить конечную квантовую теорию с существенно нелинейным лагранжианом. Авторы исходили из того положения, что не для любого лагранжиана можно построить конечную теорию, и ставили целью найти класс лагранжианов, в котором построение конечной теории возможно. Метод, развитый ими, позволяет строить конечную теорию для лагранжианов, удовлетворяющих следующим условиям.

а. $U(\alpha)$ — непрерывная функция, не имеющая сингулярностей на реальной оси и в окрестности точки ноль разлагающаяся в ряд Тейлора с определенным радиусом сходимости $\rho$:

$$U(\alpha) = \sum_{0}^{\infty} \frac{u(n)}{n!} \alpha^n. \tag{4.1}$$

б. Должен существовать интеграл от $|U(\alpha)|^2$ по любой ограниченной области в комплексной $\alpha$-плоскости.

в. На бесконечности $U(\alpha)$ удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{|\alpha|\to\infty}} \frac{U(\alpha)}{\alpha^2} = 0. \tag{4.2}$$

Этот метод описывает нелокализуемые взаимодействия с лагранжианами типа 7 (см. таблицу).

Перейдем к описанию самого метода. Использовав теорему Вика [32], запишем символ $T$ произведения в (2.2) в форме

$$T = \exp\left\{-\frac{i}{2}\int\int d^4x_1 d^4x_2 \Delta^c(x_1 - x_2)\frac{\delta^2}{\delta\varphi(x_1)\,\delta\varphi(x_2)}\right\}. \tag{4.3}$$

Тогда (2.3) принимает вид

$$S_2 = -\int\int d^4x_1 d^4x_2 \exp\left\{-\frac{i}{2}\int\int d^4y_1 d^4y_2 \Delta^c(y_1 - y_2)\frac{\delta^2}{\delta\varphi(y_1)\,\delta\varphi(y_2)}\right\}\times$$
$$\times :U(\varphi(x_1))\,U(\varphi(x_2)):. \tag{4.4}$$

Теперь задача заключается в определении выражения типа

$$S_2(\Delta, \alpha_1, \alpha_2) = \exp\left\{-\frac{i}{2}\Delta^c\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\,\partial\alpha_2}\right\}U(\alpha_1)\,U(\alpha_2). \tag{4.5}$$

Воспользуемся интегральным представлением

$$\exp\left\{-\frac{i}{2}\Delta\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\,\partial\alpha_2}\right\} = \frac{1}{\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty} dt_1\,dt_2 \exp\left\{-t_1^2 - t_2^2 + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\frac{\Delta}{2i}}\left[(t_1 + it_2)\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + (t_1 - it_2)\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right]\right\}. \tag{4.6}$$

Подставляя (4.6) в (4.5) и замечая, что в (4.6) содержится оператор сдвига, перепишем (4.5) следующим образом:

$$S_2(\Delta, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty} dt_1\,dt_2 e^{-t_1^2 - t_2^2} U\left(\alpha_1 + \sqrt{\frac{\Delta}{2i}}(t_1 + it_2)\right) U\left(\alpha_2 + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\frac{\Delta}{2i}}(t_1 - it_2)\right). \tag{4.7}$$

Делая замену переменных:

$$t_1 = u_1 - \frac{1}{\sqrt{-2i\Delta}}(\alpha_1 + \alpha_2); \tag{4.8}$$
$$t_2 = u_2 - \frac{1}{\sqrt{2i\Delta}}(\alpha_1 - \alpha_2),$$

получаем

$$S_2(\Delta, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty} du_1\,du_2 U\left(\sqrt{\frac{\Delta}{2i}}(u_1 + iu_2)\right)\times$$
$$\times U\left(\sqrt{\frac{\Delta}{2i}}(u_1 - iu_2)\right)\exp\left\{-\left[u_1 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sqrt{-2i\Delta}}\right]^2 - \left[u_2 - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{2i\Delta}}\right]^2\right\}. \tag{4.9}$$

Разлагая эту функцию по степеням $\alpha_1$ и $\alpha_2$, легко заметить, что $F(x)$ выражается через конечную сумму функций вида

$$f_{k_1k_2}(\Delta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int du_1\,du_2 u_1^{k_1}u_2^{k_2}e^{-u_1^2-u_2^2}\left|U\left(\sqrt{\frac{\Delta}{2i}}(u_1+iu_2)\right)\right|^2. \qquad (4.10)$$

Из полученной формулы видно, что для выполнения условия (3.1) (отсутствие в теории ультрафиолетовых расходимостей) необходимо от функции $U(z)$ потребовать

$$\lim_{|z|\to\infty}|U(z)|=0. \qquad (4.11)$$

Отсюда и следует условие «в». С другой стороны, чтобы существовал интеграл (4.10), необходимо выполнение условия «б». Это условие допускает, чтобы функция $U(z)$ имела разрезы степени $\gamma<1$ в комплексной области $z$, например

$$U(\varphi)=\frac{1}{[1+g^2\varphi^2(x)]^{\gamma}}. \qquad (4.12)$$

Следует подчеркнуть, что промежуточные этапы вычислений, проведенных здесь, не имеют строгого математического смысла. Например, нестрогий характер имеет переход от формулы (4.5) к (4.7) с применением оператора сдвига к аргументу функции $U(\alpha)$, поскольку в области сдвига эта функция может обладать некоторыми особенностями, пересечение которых, вообще говоря, может дать дополнительные вклады в выражение (4.7). Как следствие получаем неоднозначность метода.

Метод применим во всех порядках теории возмущений и приводит к конечной теории с унитарной $S$-матрицей.

2. **Процедура Ли — Зумино.** Как непосредственное развитие идей Ефимова — Фрадкина можно указать процедуру, описанную Ли и Зумино [10]. Если предыдущие авторы в начале своих исследований ставили себе цель найти такой класс лагранжианов, на основе которого можно построить конечную и унитарную квантовую теорию поля, то последние авторы имели целью описать уже заданные лагранжианы, получающиеся, например, в кирально симметричных теориях [23—27]. Поэтому, они рассмотрели лагранжиан, близкий к кирально симметричным лагранжианам, но находящийся в противоречии с условием «б» предыдущего метода:

$$U(\varphi)=\frac{\sqrt{\varkappa}\varphi(x)}{1-\varkappa\varphi^2(x)}. \qquad (4.13)$$

Функция (2.16) выглядит здесь следующим образом:

$$F(x)=\sum_{0}^{\infty}(2n+1)!\varkappa^{2n+1}[-i\Delta^c(x)]^{2n+1}. \qquad (4.14)$$

Для суммирования расходящегося ряда (4.14) используем метод Бореля [33]:

$$F(x)=\int_0^\infty dt e^{-t}\sum_0^\infty \varkappa^{2n+1}(-\mathrm{i}t\Delta^c(x))^{2n+1}=$$

$$=-\mathrm{i}\varkappa\int_0^\infty dt\,\frac{te^{-t}\Delta^c(x)}{1+[t\varkappa\Delta^c(x)]^2}. \qquad (4.15)$$

Фурье-образ функции $F(x)$ в области $p^2<0$ имеет вид

$$\widetilde{F}_{\varkappa^2}(p)=\frac{4\pi^2\varkappa}{\sqrt{-p^2}}\int_0^\infty dtte^{-t}\int_0^\infty drr^2J_1\left(\sqrt{-p^2}r\right)\frac{\left(\frac{mK_1(mr)}{4\pi^2r}\right)}{1-t^2\varkappa^2\left(\frac{mK_1(mr)}{4\pi^2r}\right)^2}. \qquad (4.16)$$

Функция $\widetilde{F}_{\varkappa^2}(p)$ определена при всех значениях параметра $\varkappa^2$ за исключением значений, лежащих на реальной положительной оси, где имеется разрез. Но физическое значение $\varkappa^2$ лежит как раз на этом разрезе. Поэтому истинное значение функции $\widetilde{F}(p)$ при $\varkappa^2>0$ следует определять через комбинацию значений на верхнем и нижнем берегах разреза, как, например, это делалось в работах [11]:

$$\widetilde{F}(p)=\alpha\widetilde{F}_{\varkappa^2+\mathrm{i}0}(p)+\alpha^*\widetilde{F}_{\varkappa^2-\mathrm{i}0}(p), \qquad (47)$$

где $\alpha=1/2+\mathrm{i}\eta$; $\eta$ — реальный параметр. Такой выбор параметра $\alpha$ обеспечивает правильные унитарные свойства функции $\widetilde{F}(p)$. Из нефизической области $p^2<0$ функцию $\widetilde{F}(p)$ легко аналитически продолжить во всю область $-\infty<p^2<\infty$. Неоднозначность процедуры выражается в появлении неопределенного параметра $\eta$. Здесь не дается также однозначного рецепта для построения высших порядков.

3. **Метод прямого суммирования.** В названии этого метода мы следуем его автору, Г. В. Ефимову [21, 29, 34]. Метод этот близок к группе 4, только форм-фактор в нем вводится не в лагранжиан взаимодействия и не в пропагатор свободных полей, как это делается в 4, а в определение функции $F(x)$, что связано с доопределением $T$-произведения.

Покажем, как это происходит. Если воспользоваться для лагранжиана взаимодействия $U(\varphi)$ представлением

$$U(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty} d\beta\widetilde{U}(\beta)\,e^{\mathrm{i}\beta\varphi(x)}, \qquad (4.18)$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\beta\,|\beta^n\widetilde{U}(\beta)|<\infty \qquad (4.19)$$

для любого $n$, и определением $T$-произведения (4.3), то $n$-й порядок $S$-матрицы можно записать в виде

$$S_n(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \prod_{1}^{n} d\beta_k \widetilde{U}(\beta_k)\, e^{i\beta_k \alpha_k} \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} e^{i\Delta_{ij}\beta_i\beta_j}, \qquad (4.20)$$

где $\alpha_i \equiv \varphi(x_i)$; $\Delta_{ij} \equiv \Delta^c(x_i - x_j)$. Нетрудно убедиться, что полученное выражение не удовлетворяет условию (3.1) — отсутствию ультрафиолетовых расходимостей. Чтобы удовлетворить ему, введем следующую регуляризацию. Предположим, что действие оператора хронологического упорядочивания (4.3) под знаком интеграла (4.20) дает

$$e^{-i\Delta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}} e^{i(\beta_i\alpha_i + \beta_j\alpha_j)} \Rightarrow e^{i(\beta_i\alpha_i + \beta_j\alpha_j)}\, e^{i\Delta_{ij}\beta_i\beta_j}\Theta(1 + \lambda\Delta_{ij}^2\beta_i^2\beta_j^2), \quad (4.21$$

где

$$\Theta(u) = \begin{cases} 1 & (u > 0) \\ 0 & (u < 0) \end{cases} \qquad (4.22)$$

и $\lambda$ — положительный параметр (здесь, как и во всем этом параграфе, рассмотрение ведется в евклидовом пространстве, где $-i\Delta^c(x) > 0$). Используя (4.21) и (4.20), можно записать для функции $F^{(n)}_{k_1 \ldots k_n} = (x_1 \ldots x_n)$ следующее выражение:

$$F^{(n)}_{k_1 \ldots k_n}(x_1 \ldots x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \prod_{1}^{n} d\beta_s \widetilde{U}(\beta_s)\,(i\beta_s)^{k_s} \times$$
$$\times \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} e^{i\Delta_{ij}\beta_i\beta_j}\Theta(1 + \lambda\Delta_{ij}^2\beta_i^2\beta_j^2). \qquad (4.23)$$

Заметим, что эта формула дает обычное выражение для коэффициентных функций в случае перенормируемых взаимодействий типа $U(\varphi) = \varphi^3(x)$ или $U(\varphi) = \varphi^4(x)$, что свидетельствует о регулярности введенной процедуры.

Процедура неоднозначна. Помимо неопределенного параметра $\lambda$ можно по-разному определять и саму $\Theta$-функцию в (4.21). Так, можно вводить и $\Theta$-функции $\Theta(1 - \lambda(-i\Delta_{ij})^a \beta_i^2) \times \Theta(1 - \lambda(-i\Delta_{ij})^a \beta_j^2)$ или $\Theta(1 - \lambda(-i\Delta_{ij})^a \beta_i\beta_j)$, где $a$ — новый параметр. Но для любого из указанных определений $T$-произведения теория конечна и унитарна.

Последний метод весьма близок к методам группы 4. Поскольку описанию методов этой группы посвящен специальный обзор одного из основных авторов такого рода методов Г. В. Ефимова, не будем здесь останавливаться на подробном изложении этих методов, а ограничимся лишь их кратким описанием.

Один из этих методов связан с введением нелокальности в лагранжиан взаимодействия [35]. Делается это с помощью переопределения поля, входящего в лагранжиан взаимодействия:

$$\Phi(x)=\int d^4yA(x-y)\,\varphi(y)=A(\Box)\,\varphi(x)=\sum_0^\infty \frac{a_n}{(2n)!}\Box^n\varphi(x), \qquad (4.24)$$

где $A\ (x-y)$ есть нелокальная обобщенная функция из подходящего пространства нелокальных распределений [21].

Другой метод связан с подбором нелокального форм-фактора $V\ (\varkappa^2,\ p^2)$ в формуле (2.18):

$$V(\varkappa^2,\ p^2)=\frac{\widetilde{V}(p^2)}{\widetilde{V}(\varkappa^2)}, \qquad (4.25)$$

где $\widetilde{V}\ (p^2)$ — целая функция, определенным образом ведущая себя при $p^2\to\infty$ и $p^2\to-\infty$ [35]. Метод применим к любым лагранжианам взаимодействия, указанным в таблице. Условие унитарности $S$-матрицы выполнено.

## § 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ С ПОМОЩЬЮ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

1. **816Ператизация Файнберга и Пайса.** Метод, близкий по общему замыслу к методам первой группы, предложен Файнбергом и Пайсом [18]. Они также определяют функцию $F\ (x)$, фурье-образ которой не обладает уже ультрафиолетовыми особенностями, но исходят не из существенно нелинейного лагранжиана, а рассматривают взаимодействие лептонов через векторный бозон. Решая уравнение Бете — Солпитера для амплитуды рассеяния лептонов в лестничном приближении и оставляя в уравнении лишь члены с высшими степенями по переменным интегрирования, они приходят к итерационной процедуре, которая дает выражение (1.13) для амплитуды в координатном пространстве.

Укажем здесь, что оставление в уравнении членов только с высшими степенями по переменным интегрирования равносильно на языке диаграмм Фейнмана стягиванию в лестничной диаграмме концов всех бозонных линий в две точки, одна из которых лежит на одной фермионной линии, другая — на другой. Одновременно с этим пропагаторы бозонных линий превращаются в пропагаторы обычных скалярных частиц. Таким образом, мы в итерационной процедуре приходим к бесконечному набору диаграмм типа диаграмм, соответствующих ряду (2.16). С помощью уравнения этот ряд суммируется к выражению (1.13).

Ператизация заключается в задании определенной рецептуры для построения фурье-образа от амплитуды (1.13). Первый шаг этой программы связан с отбрасыванием некоего интеграла по замкнутому контуру и оставлении лишь интеграла по радиусу от 0 до $\infty$. Второй шаг связан со снятием промежуточной регуляризации (регуляризация Паули — Вилларса). Предписывается, что предельный переход $M\to\infty$ можно совершить под знаком интеграла по $r$, хотя, вообще говоря, процедуры взятия интеграла и снятия регуляризации неперестановимы.

Заметим, что здесь может встречаться еще одна трудность, которая не совсем корректно решается Файнбергом и Пайсом. В случае функции $F_F^{(+)}(x)$ в подынтегральном выражении интеграла по $r$ (при $q^2 < 0$) имеется полюс, который Файнберг и Пайс предлагают обходить, считая, что масса обладает малой мнимой добавкой. Это ведет к нарушению условия унитарности $S$-матрицы. Правильнее было бы взять полусумму обходов сверху и снизу (см. [4, 11], где аналогичная процедура делается с разрезом, а не с полюсом) *.

2. **Метод Арбузова — Филиппова.** Этот метод близок уже ко второй группе и ставит целью определение функции $\widetilde{F}(p)$ [4]. Авторы рассматривают лагранжиан взаимодействия типа (1.1), но со скалярным полем. В этом случае преобразованием Дайсона [15] он приводится к свободному лагранжиану и, следовательно, $S$-матрица здесь будет единичной. Однако функция Грина спинорного поля, вершинная функция и некоторые другие величины имеют нетривиальную форму типа (1.4). Поэтому представляет известный интерес задача, как с помощью решения уравнений можно найти фурье-образ функции (1.4).

В случае безмассовых частиц спинорную функцию Грина можно записать в форме

$$G(p) = -\frac{\hat{p}}{p^2 + i\varepsilon} f(p^2 + i\varepsilon). \tag{5.1}$$

Тогда, исходя из уравнения Дайсона — Швингера и используя тождество Уорда, получаем в евклидовой области импульса $p^2 < 0$ следующее уравнение для функции $f(p^2 + i\varepsilon)$:

$$x^3 f'''(x) + 3x^2 f''(x) + \lambda^2 x f(x) = 0 \tag{5.2}$$

с граничными условиями

$$x f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0; \quad f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \text{const}. \tag{5.3}$$

Здесь $x = -p^2$; $\lambda = g/2\pi$. Оказывается, для удовлетворения граничным условиям (5.3) необходимо, чтобы знак у $\lambda^2$ был отрицательным. Это соответствует нефизическому мнимому значению константы связи $g$. Поэтому возникает следующий вариант нахождения истинной функции $f(x)$.

Сначала находим функцию $f(x, \lambda^2)$ для отрицательных значений $\lambda^2$. Эта функция имеет логарифмический разрез по $\lambda^2$ от 0 до $\infty$. Истинная функция $f(x)$ выражается через комбинацию этих функций, взятых на верхнем и нижнем берегах разреза **:

$$f(x) = \alpha f(x, \lambda^2 e^{i\pi}) + \alpha^* f(x, \lambda^2 e^{-i\pi}), \tag{5.4}$$

---

* Более подробно вопрос, связанный с нарушением условия унитарности $S$-матрицы в методе пературизации Файнберга и Пайса обсуждается в работе А. Славнова и А. Шабада [36].

** Здесь мы несколько отступаем от изложения авторами этого метода, которые выбирают чисто реальное значение для параметра $\alpha$, равное 1/2 ($\eta = 0$).

где $\alpha = 1/2 + i\eta$; $\eta$ — произвольный реальный параметр.

Здесь впервые мы имеем дело с методом, приводящим к локальной теории [19]. Действительно,

$$f(x, \lambda^2) = G_{03}^{20}(\lambda^2 x \mid 1, 0, \ -1), \tag{5.5}$$

где $G_{03}^{20}(\lambda^2 x \mid 1, 0, -1)$ — функция Майера [37]. Эта функция при больших $x$ растет не быстрее, чем

$$\sim \exp\{3(\lambda p)^{2/3}\}, \tag{5.6}$$

т. е. условие (2.7) выполнено.

Неоднозначность метода связана с возможностью появления параметра $\eta$.

В заключение скажем еще несколько слов о методе Файнберга и Пайса. В начале параграфа мы сделали критическое замечание, относящееся к построению фурье-образа функции $F(x)$ с помощью метода ператизации, приводящего к нарушению условия унитарности $S$-матрицы. Это замечание касалось той части работы указанных авторов, которая особенно близка к теме нашего обзора. Однако имеется еще другое существенное замечание по поводу этой работы, относящееся к выводу уравнения для функции $F(x)$. Как показано в работе Б. А. Арбузова и А. Т. Филиппова [4] на примере точно решаемой модели, оставление в уравнении Бете — Солпитера лишь членов с высшими степенями по переменным интегрирования приводит к существенному изменению асимптотического поведения амплитуды рассеяния при больших $p$ по сравнению с поведением точного решения. В частности, это поведение не согласуется с условием локальности теории [19, 21], в то время как поведение точного решения удовлетворяет этому условию.

Со своей стороны укажем, что если к лагранжиану (1.12), рассмотренному Файнбергом и Пайсом, применить преобразования Штюкельберга и Дайсона, а затем строить теорию возмущений с использованием нашего метода (см. ниже) для неперенормируемой части лагранжиана, имеющей вид (1.3), то мы также придем к выражению для амплитуды рассеяния, которое в каждом порядке теории возмущений (по $mG$) удовлетворяет условию локальности теории.

## § 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА $\widetilde{F}(p)$

Методы, с помощью которых определяется функция $\widetilde{F}(p)$, можно объединить под общим названием «методы аналитической регуляризации». Характерная черта всех этих методов — рассмотрение степеней пропагаторов частиц, соединяющих различные вершины в диаграмме Фейнмана, как комплексных чисел. Затем их реальные части выбирают такими, чтобы все интегралы по промежуточным импульсам или координатам сходились, после чего возвращаются к истинным значениям степеней пропагаторов с помощью некоторой процедуры аналитического продолжения [38].

1. **Метод аналитической регуляризации Спира.** Рассмотрение второй группы начнем с описания метода, который, вообще говоря, не имеет прямого отношения к теориям с существенно нелинейными лагранжианами. Этот метод предложил Спир для исследования теорий с полиномиальными лагранжианами [39, 40]. Однако его характерные черты весьма близки к специфике методов второй группы *.

Опишем кратко эту процедуру. Пусть $G$ — математическое выражение, соответствующее произвольной фейнмановской диаграмме в импульсном пространстве. Тогда соответствующее регуляризованное выражение $G_R$ строится по следующему рецепту.

1. Каждый пропагатор для $k$-й внутренней линии частицы с массой $m_i$

$$\Delta_{m_i}(p_k) = (m_i^2 - p_k^2 - i\varepsilon)^{-1} \tag{6.1}$$

заменяется

$$\Delta_{m_i}^{\lambda}(p_k) = \frac{(m_i)^{2\lambda} f_i(\lambda)}{(m_i^2 - p_k^2 - i\varepsilon)^{1+\lambda}}, \tag{6.2}$$

где $\lambda$ — произвольная, вообще говоря, комплексная величина, а $f_i(\lambda)$ — произвольная регулярная функция от $\lambda$, удовлетворяющая условию $f_i(0) = 1$.

2. Полагая $\lambda$ достаточно большим, можно взять все интегралы по промежуточным импульсам, не встречая ультрафиолетовых расходимостей. Для этого можно использовать интегральное представление:

$$\frac{1}{(A - i\varepsilon)^{1+\lambda}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1+\lambda)}}{\Gamma(1+\lambda)} \int\limits_0^\infty d\alpha \alpha^\lambda e^{-i\alpha(A - i\varepsilon)}. \tag{6.3}$$

3. Наконец, регуляризованное выражение $G_R$ получается с помощью следующей процедуры аналитического продолжения:

$$G_R(\lambda_1^0 \ldots \lambda_L^0) = \frac{1}{L!} \sum_Q \frac{1}{(2\pi i)^L} \oint\limits_{C_{Q(1)}} \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} \cdots \oint\limits_{C_{Q(L)}} \frac{d\lambda_L}{\lambda_L} C(\lambda_1 \ldots \lambda_L), \tag{6.4}$$

где $C_{Q(i)}$ окружности радиуса $r_i$ вокруг начала соответствующей переменной интегрирования:

$$r_i > \sum_1^{i-1} r_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant L),$$

а суммирование идет по всевозможным перестановкам этих окружностей.

В отличие от старой хорошо известной регуляризации Паули — Вилларса, вводящей в теорию «духовые» состояния и нару-

* Необходимо отметить, что метод Спира, используемый в ренормируемых теориях поля, не приводит к каким-либо существенно новым результатам по сравнению с хорошо известным методом Н. Н. Боголюбова и О. С. Парасюка [41]. Он отличается от него лишь своей технической стороной.

шающей унитарность $S$-матрицы, здесь появляются только произвольные, но конечные константы.

2. **Метод Гютингера.** Весьма близок к только что описанному методу [7]. Там также используется преобразование пропагатора типа (6.2), но уже в координатном пространстве.

Функцию $\widetilde{F}(p)$ Гютингер определяет с помощью независимого интегрирования каждого члена суммы (2.16). Рассмотрим $n$-й член:

$$[-i\Delta^c(x)]^n. \tag{6.5}$$

На световом конусе этот член имеет сингулярность вида

$$\sim \frac{1}{(x^2)^n} \text{ или } \sim \frac{(\ln x^2)^m}{(x^2)^n} \quad (m < n)$$

(первый случай — для безмассовых частиц, второй — для массивных). Отсюда видно, что фурье-образ этого выражения, начиная с $n = 2$, представляется интегралом, расходящимся тем сильнее, чем больше $n$.

Для определения конечного выражения для фурье-образа Гютингер предложил следующую процедуру. Вместо (6.5) рассмотрим величину

$$a_n^z [-i\Delta^c(x)]^{n+z}, \tag{6.6}$$

где $z$ — некоторое комплексное число, а $a_n$ — неопределенный параметр, имеющий размерность квадрата длины. Будем считать, что $\operatorname{Re} z < 2 - n$. Тогда фурье-образ выражения (6.6) существует в обычном смысле:

$$f_n(p, z) = i a_n^z \int d^4x e^{ipx} [-i\Delta^c(x)]^{n+z} \tag{6.7}$$

и представляет собой функцию $z$, регулярную при $\operatorname{Re} z < 2 - n$, а при $\operatorname{Re} z \geqslant 2 - n$ — имеющую полюсные особенности в целочисленных точках на реальной оси.

Регулярная функция $f_n(p)$ окончательно определяется интегралом

$$f_n(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{z} f_n(p, z), \tag{6.8}$$

где контур $C$ — окружность с радиусом, меньшим единицы. Для случая безмассовых частиц $f_n(p)$ выглядит весьма просто:

$$f_n^{(0)}(p) = \frac{(-1)}{p^2 + i\varepsilon} \left(\frac{p^2 + i\varepsilon}{(4\pi)^2}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!\,(n-2)!} \times$$
$$\times \left\{ \ln\left[a_n \frac{p^2 + i\varepsilon}{(4\pi)^2} e^{-i\pi}\right] - \Psi(n) - \Psi(n-1) \right\}, \tag{6.9}$$

где $\Psi(n)$ — функция Эйлера.

С использованием (6.9) для функции $\widetilde{F}(p)$ в случае безмассовых частиц находим выражение:

$$\widetilde{F}(p) = -\frac{C_1}{p^2+\mathrm{i}\varepsilon} - \frac{1}{p^2+\mathrm{i}\varepsilon}\sum_{1}^{\infty}\frac{C(n+1)}{n!\,(n-1)!}\left(\frac{p^2+\mathrm{i}\varepsilon}{(4\pi)^2}\right)^n \times$$
$$\times\left\{\ln\left[a_{n+1}\frac{p^2+\mathrm{i}\varepsilon}{(4\pi)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}\right] - \Psi(n) - \Psi(n+1)\right\} \qquad (6.10)$$

с правильной мнимой частью в физической области $p^2 > 0$, удовлетворяющей условию (2.9).

Отметим теперь недостатки этого метода. Во-первых, поскольку фурье-образ функции (6.6) определяется при значениях $\mathrm{Re}\, z < 2 - n$, то, казалось бы, в контуре интеграла (6.8) должна содержаться хотя бы небольшая часть этой области. Однако, если в контуре $C$ захвачен кусок реальной оси от 0 до $\mathrm{Re}\, z < 2 - n$, то в выражении (6.9) содержится еще полином по $p^2$ степени $n - 3$. Так что необходимо предписание, что контур $C$ может захватывать часть области $\mathrm{Re}\, z < 2 - n$, но так, чтобы в нем не содержались сингулярные точки. Во-вторых, в методе содержится бесконечное количество неопределенных констант. В-третьих, в окончательном выражении не видно неаналитической зависимости от константы связи, столь характерной для неперенормируемых теорий. Наконец, в-четвертых, процедуру, развитую для определения фурье-образа пропагатора в конечной степени $n$, Гютингер пытается применить для построения спектрального представления функции $\widetilde{F}(p)$:

$$\widetilde{F}(p) = \frac{1}{\pi}\oint_C \frac{dz}{z}\int_0^{\infty} dm^2\,\frac{\rho(m^2)\,(am^2)^z}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon}. \qquad (6.11)$$

Однако эта формула не определяет конечного выражения, ибо спектральная функция $\rho(m^2)$ растет быстрее любого полинома по $m^2$ и никакая отрицательная степень $m^2$ не может скомпенсировать этот рост.

3. **Метод интегрального представления.** Этот метод, так же как и оба предыдущих метода, основан на том, что степени пропагатора $n$ в $F(x)$ превращаются в комплексные числа $z$. Для ряда (2.16) находится такое интегральное представление, в котором $\mathrm{Re}\, z < 2$. Тогда фурье-образ $F(p)$ можно построить, не встречаясь с ультрафиолетовыми расходимостями, после чего мы вновь возвращаемся от интегрального представления к ряду [11, 42].

Перепишем (2.16) в несколько иной форме, выделив из коэффициентов $C(n)$ константу связи $g^2$:

$$F(x) = \sum_{1}^{\infty} a(n)\,[-\mathrm{i}g^2\Delta^c(x)]^n. \qquad (6.12)$$

Существует два варианта этого метода, один из которых применим к нелокализуемым взаимодействиям, а другой — к локализуемым. Мы начнем с описания первого варианта.

а. Пусть коэффициенты $a(n)$ удовлетворяют условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-b}\,|a(n)|^{1/n} = A, \tag{6.13}$$

где $A$ — некоторая отличная от нуля константа, а значения параметра $b$ лежат в интервале

$$2 > b \geqslant 0. \tag{6.14}$$

Теории, в которых коэффициенты $a(n)$ удовлетворяют условию (6.13), описывают практически все физически интересные случаи нелокализуемого взаимодействия. На таблице это все взаимодействия из отдела II, и даже часть взаимодействий из отдела III, таких, где существует еще мнимая часть функции $\tilde{F}(p)$ для безмассовых частиц ($\gamma < 3/2$).

Условие (6.13) можно переписать в более строгой форме, именно можно потребовать, чтобы целая функция $\chi(z)$, представимая степенным рядом:

$$\chi(z) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{a(n)}{(2n)!} z^n, \tag{6.15}$$

была ограничена в некотором секторе $|\varphi| \leqslant \delta$, $\delta \geqslant 0$, $z = re^{i\varphi}$. Из условия (6.15) следует условие (6.13). Мы будем требовать выполнения последнего условия.

Используя тождество (3.11), функцию $F(x)$ можно переписать в следующем виде:

$$F'(x) = -i \sum_{1}^{\infty} (g^2)^{n+1} a(n+1) \int\limits_{[(n+1)m]^2}^{\infty} d\varkappa^2 \Omega_{n+1}^{(m)}(\varkappa^2)\, \Delta_{\varkappa}^{c}(x). \tag{6.16}$$

Здесь в функции $F(x)$ отброшен первый член, поскольку для него переход к импульсному пространству тривиален.

Далее будем рассматривать случай безмассовых частиц, как более простой и позволяющий наиболее отчетливо продемонстрировать нашу процедуру. Обобщение на случай массовых частиц сделано в работах [43].

Если $m = 0$, то формула (6.16) принимает вид

$$F'_{\lambda}(x) = i\lambda \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \int\limits_{0}^{M^2} \frac{d\varkappa^2}{\varkappa^2} f(n, \varkappa^2)\, \Delta_{\varkappa}^{c}(x), \tag{6.17}$$

где

$$f(n, \varkappa^2) = \left[\lambda \left(\frac{\varkappa}{4\pi}\right)^2\right]^n \frac{a(n+1)}{\Gamma(n)\,\Gamma(n+1)}; \tag{6.18}$$

$\lambda = -g^2$; $\Gamma(n)$ — гамма-функция, а $M^2 < \infty$ — обрезание, которое мы ввели как промежуточную регуляризацию. В дальнейшем она будет снята. Положим, здесь $\lambda > 0$. В конце вычислений перейдем к физическим значениям $\lambda < 0$.

Теперь по значениям $f(n, \varkappa^2)$ в заданной последовательности точек $n = 1, 2, 3, \ldots$ восстановим аналитическую функцию $f(z, \varkappa^2)$, регулярную в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > 0$ и подчиняющуюся условиям ($z = x + \mathrm{i}y$) [44]:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{а)} & |f(z, \varkappa^2)| < Be^{\Lambda|z|}, \quad \mathrm{Re}\, z > 0;\\ \text{б)} & |f(\mathrm{i}y, \varkappa^2)| < Be^{(\pi-\delta)|y|}, \quad -\infty < y < \infty, \ \delta > 0.\end{array}\right\} \tag{6.19}$$

Условия (6.19), с одной стороны, обеспечивают единственность восстановленной функции $f(z, \varkappa^2)$, а с другой — позволяют записать сумму (6.17) в виде интеграла Меллина — Бернса (Зоммерфельда — Ватсона) [37] с таким контуром, что $\mathrm{Re}\, z < 1$ во всей области интегрирования:

$$F'_{\lambda\,(\text{рег})}(x) = \frac{\lambda}{2} \int\limits_{\alpha+\mathrm{i}\infty}^{\alpha-\mathrm{i}\infty} \frac{dz}{\sin \pi z} \int\limits_0^{M^2} \frac{d\varkappa^2}{\varkappa^2} f(z, \varkappa^2)\, \Delta^c_\varkappa(x), \tag{6.20}$$

где $0 < \alpha < 1$. Тем самым мы уже добились выполнения задачи, сформулированной в начале этого раздела. Условия (6.19) согласуются с условием на коэффициенты $a(n)$ (6.13) [11].

Теперь нетрудно перейти к импульсному пространству. Поскольку при применении операции фурье-преобразования к (6.20) все интегралы абсолютно сходятся, то эту операцию можно отнести прямо к $\Delta^c_\varkappa(x)$ и снять промежуточную регуляризацию:

$$\widetilde{F}'_\lambda(p) = \mathrm{i}\frac{\lambda}{2} \int\limits_{\alpha+\mathrm{i}\infty}^{\alpha-\mathrm{i}\infty} \frac{dz}{\sin \pi z} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{(4\pi)^2}\right)^z a(z+1)}{\Gamma(z)\,\Gamma(z+1)} \int\limits_0^\infty d\varkappa^2 \frac{(\varkappa^2)^{z-1}}{\varkappa^2 - p^2 - \mathrm{i}\varepsilon}. \tag{6.21}$$

Полученное выражение можно считать спектральным представлением функции $\widetilde{F}'_\lambda(p)$. Все интегралы в (6.21) легко берутся, и мы получаем для $\widetilde{F}'_\lambda(p)$

$$\widetilde{F}'_\lambda(p) = \frac{\lambda}{p^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \sum_1^\infty \left(-\lambda \frac{p^2 + \mathrm{i}\varepsilon}{(4\pi)^2}\right)^n \frac{a(n+1)}{n!\,(n-1)!} \times$$

$$\times \left\{\ln\left[\lambda \frac{p^2 + \mathrm{i}\varepsilon}{(4\pi)^2} e^{-\mathrm{i}\pi}\right] + (\ln a(n+1))' - \Psi(n) - \Psi(n+1)\right\}. \tag{6.22}$$

Функция $\widetilde{F}'_\lambda(\rho)$ имеет логарифмический разрез при отрицательных значениях $\lambda$. Поэтому, чтобы вернуться к истинной функции $\widetilde{F}'(p)$, необходимо учесть значения $\widetilde{F}'_\lambda(p)$ на обоих берегах разреза:

$$\widetilde{F}'(p) = \alpha \widetilde{F}'_{\lambda e^{\mathrm{i}\pi}}(p) + \beta \widetilde{F}'_{\lambda e^{-\mathrm{i}\pi}}(p), \tag{6.23}$$

где $\alpha$ и $\beta$ должны удовлетворять условию:

$$\alpha + \beta = 1; \quad \mathrm{Re}(\alpha - \beta) = 0. \tag{6.24}$$

Последнее условие следует из унитарности $S$-матрицы. Отсюда находим:

$$\alpha = 1/2 + i\eta; \qquad \beta = \frac{1}{2} - i\eta, \tag{6.25}$$

где $\eta$ — произвольный параметр. Окончательная функция имеет вид

$$\widetilde{F}'(p) = \frac{(-g^2)}{p^2 + i\varepsilon} \sum_1^\infty \left(g^2 \frac{p^2 + i\varepsilon}{(4\pi)^2}\right)^n \frac{a(n+1)}{n!\,(n-1)!} \times$$

$$\times \left\{\ln\left(g^2 \frac{p^2 + i\varepsilon}{(4\pi)^2} e^{-i\pi + 2\pi\eta}\right) + (\ln a(n+1))' - \Psi(n) - \Psi(n+1)\right\}. \tag{6.26}$$

Введение положительного параметра $\lambda$ было необходимо для того, чтобы существовал интеграл (6.21). В случае отрицательных $\lambda$ интеграл по $z$ будет расходиться.

Спектральное представление типа (6.21) нельзя написать для функции $\widetilde{F}'(p)$, но можно записать для функции $\widetilde{F}'(p, \gamma)$, которая равна $\widetilde{F}'(p)$ при $\gamma = 1$:

$$\widetilde{F}'(p, \gamma) = \frac{g^2}{2i} \int\limits_{\alpha + i\infty}^{\alpha - i\infty} dz \frac{\cos \pi z}{\sin \gamma\pi z} \cdot \frac{\left(\frac{g}{4\pi}\right)^{2z} a(z+1)}{\Gamma(z)\,\Gamma(z+1)} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty d\varkappa^2 \frac{(\varkappa^2)^{z-1}}{\varkappa^2 - p^2 - i\varepsilon}. \tag{6.27}$$

В (6.27) параметр $\gamma$ следует считать большим двух (точнее, $\gamma > 2 - b/2$).

б. Рассмотрим теперь случай локализуемых взаимодействий, в которых

$$\overline{\lim} \, | a(n) |^{1/n} = 0. \tag{6.28}$$

Ограничимся рассмотрением таких локализуемых взаимодействий, в которых

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \, n^k | a(n) |^{1/n} = A, \; A > 0, \; 0 < k < 2. \tag{6.29}$$

В нефизической области импульсов $p^2 < 0$ можно перейти к евклидовой метрике в интеграле (2.17) и взять интегралы по углам:

$$\widetilde{F}'_{\lambda_{(\text{рег})}}(p) =$$

$$= -\frac{\lambda}{|p|} \sum_1^\infty \left(-\frac{\lambda}{(2\pi)^2}\right)^n a(n+1) \int\limits_l^\infty dr r^{-2n} J_1(|p|\, r); \; \left(|p| = \sqrt{-p^2}\right). \tag{6.30}$$

Здесь введена промежуточная регуляризация в виде обрезания интеграла по $r$ при $r<l$. Используя процедуру, подобную предыдущей, перепишем (6.30) в виде

$$\widetilde{F}'_{\lambda}(p)=\mathrm{i}\frac{\lambda}{2|p|}\int\limits_{\alpha+\mathrm{i}\infty}^{\alpha-\mathrm{i}\infty}\frac{dz}{\sin\pi z}\left(\frac{\lambda}{(2\pi)^2}\right)^z a(z+1)\int\limits_0^{\infty}drr^{-2z}J_1(|p|r). \qquad (6.31)$$

Здесь промежуточная регуляризация уже снята, ибо интеграл по $r$ сходится в нуле. Интеграл по $z$ также абсолютно сходится, если $0<k<2$. Интегрируя по $r$ и по $z$, получаем

$$\widetilde{F}'_{\lambda}(p)=-\frac{\lambda}{|p|^2}\sum_1^{\infty}\left[\lambda\left(\frac{|p|^2}{4\pi}\right)\right]^n\frac{a(n+1)}{n!\,(n-1)!}\times$$

$$\times\left\{\ln\left(\lambda\frac{|p|^2}{(4\pi)^2}\right)+(\ln a(n+1))'-\Psi(n)-\Psi(n+1)\right\}. \qquad (6.32)$$

Это выражение легко продолжить в физическую область $p^2>0$ и с помощью (6.23) найти истинную функцию $\widetilde{F}'(p)$.

В интегральное представление типа (6.27) легко включить и первый член суммы (2.16). Тогда полная функция $\widetilde{F}(p,\gamma)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\widetilde{F}(p,\gamma)=\mathrm{i}\,(2\pi)^3\int\limits_{\alpha+\mathrm{i}\infty}^{\alpha-\mathrm{i}\infty}dz\,\mathrm{ctg}\,\pi z\frac{e^{-\mathrm{i}\pi z}}{\sin\gamma\pi z}\cdot\frac{C(z)}{\Gamma(z-1)\,\Gamma(z)}(p^2+\mathrm{i}\varepsilon)^{z-2}. \qquad (6.33)$$

Величина параметра $\gamma$ зависит здесь от поведения коэффициентов $C(n)$ при больших $n$. В окончательных результатах следует полагать $\gamma=1$.

Используя представление (6.33), можно показать, что ультрафиолетовые расходимости отсутствуют в любом порядке теории возмущений. Действительно, рассмотрим $n$-й порядок. В нем $n$ вершин соединены $\frac{n(n-1)}{2}$ внутренними линиями типа (6.33). Общая кратность интеграла по внутренним импульсам равна $[2n(n-1)-4(n-1)]$. Общая степень импульсов в подынтегральном выражении равна $2\sum_1^{n(n-1)/2}(\mathrm{Re}\,z_i-2)$. Тогда условие отсутствия ультрафиолетовых расходимостей можно записать в виде

$$2(n-1)(n-2)+2\sum_1^{\frac{n(n-1)}{2}}(\mathrm{Re}\,z_i-2)<0. \qquad (6.34)$$

Откуда, полагая $\mathrm{Re}\,z_i$ равными друг другу, получаем

$$\alpha=\mathrm{Re}\,z<\frac{4}{n}. \qquad (6.35)$$

Но поскольку $0<\alpha<1$ и может быть сколь угодно близко к нулю, то условию (6.35) всегда можно удовлетворить [11].

С другой стороны, спектральное представление типа (6.27) обеспечивают унитарность $S$-матрицы во всех порядках теории возмущений.

При исследовании случая массивных частиц следует иметь в виду, во-первых, резкое отличие асимптотического поведения амплитуд при больших значениях импульса в нелокальных теориях для массивных и безмассовых частиц. Во-вторых, аналитические свойства функции $\widetilde{F}(p)$ становятся намного сложнее. В частности, неаналитичность по константе связи будет не просто логарифмического типа, а более существенной. Исследования амплитуды, проведенные нами при малых значениях импульса, показали, что функцию $\widetilde{F}(p)$ в случае массивных частиц можно записать в виде следующего ряда:

$$\widetilde{F}(p)=\frac{g^2}{m^2}\sum_{n=0}^{\infty}(gm)^{2n}a(n+1)\left[f_n\left(\frac{p^2}{m^2}\right)+\ln(gm)P_{n-1}^{(n)}\left(\frac{p^2}{m^2}\right)+\right.$$
$$\left.+(\ln(gm))^2P_{n-2}^{(n)}\left(\frac{p^2}{m^2}\right)+\ldots+(\ln(gm))^nP_0^{(n)}\left(\frac{p^2}{m^2}\right)\right], \qquad (6.36)$$

где $P_k^{(n)}\left(\frac{p^2}{m^2}\right)$ — полиномы по $\frac{p^2}{m^2}$ степени $k$; $f_n\left(\frac{p^2}{m^2}\right)$ — некоторая функция от $p^2/m^2$. Из приведенной формулы видно, что неаналитичность амплитуды по константе связи $g$ имеет весьма сложный вид.

В заключение заметим, что недавно появилась интересная статья Салама и Стразди, посвященная подробному описанию только что изложенного метода [9]. В ней делается попытка рассмотреть высшие порядки теории возмущений и описать случай массивных частиц. Исследуется проблема унитарности в высших порядках. Что касается недостатков, содержащихся в исследованиях этих авторов, то кроме уже отмеченного в начале нашей статьи следует указать на не совсем верные предположения о структуре функции $\widetilde{F}(p)$ в случае массивных частиц. Они предполагают, что и в случае массивных частиц у функции $\widetilde{F}(p)$ будет простая логарифмическая особенность по константе связи (см. стр. 33 работы [9]).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

После изложенного здесь сжатого описания многих методов, используемых в квантовой теории поля со спектральными функциями быстрого роста, мы попробуем дать общую оценку всех этих методов и кратко обсудить вопросы, возникающие при рассмотрении высших порядков модифицированной теории возмущений, а также указать основные проблемы, которые остаются пока нерешенными.

Остановимся на краткой характеристике существующих в настоящее время методов. Из методов первой группы, на наш взгляд, как основной и наиболее интересный метод следует выделить метод Ефимова — Фрадкина. Этот метод, модернизированный и улучшенный в дальнейших работах Г. В. Ефимова [21], применим к широкому классу неполиномиальных лагранжианов. Г. В. Ефимов показал, что данный метод приводит к $S$-матрице, удовлетворяющей условиям унитарности и макропричинности.

Из методов второй группы, нам кажется, следует отдать предпочтение методу интегрального представления. Этот метод, так же как и метод Ефимова — Фрадкина, применим к широкому классу неполиномиальных лагранжианов. Он позволяет строить в импульсном пространстве двухточечные функции Грина с корректными аналитическими свойствами, находящимися в полном согласии с унитарной $S$-матрицей. Кроме того, он позволяет получать такие интегральные представления для двухточечных функций, которые весьма облегчают проблему исследования высших порядков теории возмущений по «главной» константе связи.

Наконец, из методов третьей группы мы выделим метод Арбузова — Филиппова. Этот метод также применим для описания многих неперенормируемых взаимодействий частиц и приводит к выражениям для функций Грина и амплитуд рассеяния, целиком удовлетворяющих условию унитарности $S$-матрицы. Интересно отметить, что столь различные методы, как наш метод интегрального представления и метод Арбузова — Филиппова, будучи применены к описанию одинаковых взаимодействий, дают тождественно совпадающие результаты (см. работы [4, 11]).

В этом же смысле хорошим критерием для проверки правильности метода является применение его к описанию точно решаемых моделей. Здесь также последние два метода дают совпадающие результаты, корректно описывающие исследуемые модели.

Остановимся еще на некоторых вопросах, связанных с исследованием высших порядков теории возмущений по главной константе связи. Одним из основных вопросов, возникающих при этом, является вопрос выполнения условия унитарности $S$-матрицы. Точно доказать выполнение этого условия в произвольном порядке теории возмущений довольно трудно. Однако если будет доказана теорема Кутковского для нормальных порогов в любом порядке теории возмущений, то $S$-матрица будет унитарна в такой теории. Г. В. Ефимов [21], а также Салам и Страздп [9] проверили выполнение теоремы Кутковского в высших порядках теории возмущений. Мы в нашей работе [11] проверили унитарность в третьем порядке теории возмущений и вывели спектральное представление для двухточечных функций Грина, позволяющее надеяться на сохранение унитарности $S$-матрицы в высших порядках, если строить их с использованием таких функций.

Следующий вопрос связан с конечностью теории в высших порядках теории возмущений по главной константе связи. В нашей работе [11] показано, что теория остается конечной в произвольном порядке, если использовать метод интегрального представления при вычислении интересующих нас величин. Метод Ефимова — Фрадкина также обеспечивает конечность теории в любом порядке теории возмущений.

Из не решенных до сих пор проблем нам хотелось бы обратить внимание на следующие.

1. **Проблема однозначности метода.** Пусть к решению этой проблемы, нам кажется, должен быть связан с привлечением каких-то дополнительных физических принципов к уже развитому математическому аппарату. Так, например, метод Арбузова — Филиппова и метод интегрального представления будут однозначными, если потребовать, чтобы

$$\lim_{p^2\to\infty} \frac{\operatorname{Re}\widetilde{F}(p)}{\operatorname{Im}\widetilde{F}(p)} = 0.$$

Это условие впервые было предложено А. Т. Филипповым [4]. Остается открытым вопрос, насколько это требование физически обосновано.

2. **Вторая проблема связана с неполиномиальным ростом амплитуд в каждом порядке теории возмущений по главной константе связи.** Поэтому описанные здесь методы можно применять для расчетов в низших порядках теории возмущений по главной константе связи лишь при малых значениях импульса. Чтобы сделать какое-то заключение об асимптотическом поведении амплитуд при больших энергиях в этих теориях, необходимо провести некоторое подсуммирование ряда теории возмущений по главной константе связи (ситуация, аналогичная получению реджевского поведения в обычных ренормируемых теориях).

Упомянутые проблемы весьма серьезны, но автор надеется, что они будут решены в ближайшем будущем.

Из других проблем можно указать такие, как проблемы описания заряженных полей и учета градиентной инвариантности теории. Однако эти вопросы уже сейчас успешно разрешаются [12].

## ЛИТЕРАТУРА


1. Труды Международного совещания по нелокальной квантовой теории поля. Препринт ОИЯИ Р2-3590, Дубна, 1967.
2. Okubo S. Progr. Theor. Phys., **11**, 80 (1954).
3. Lee T. D. Phys. Rev., **128**, 899 (1962).
4. Арбузов Б. А., Филиппов А. Т. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **49**, 990 (1965); Nuovo cimento, **38**, 796 (1965); «Ядерная физика», **8**, 365 (1968); Филиппов А. Т. Препринт ОИЯИ Е2-4189 (1968).
5. Arnowitt R., Deser S. Phys. Rev., **100**, 349 (1955).
6. Барбашов Б. М., Ефимов Г. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **43**, 1057 (1962).
7. Guttinger W. Fortsch. Phys., **14**, 483 (1966).
8. Delbourgo R., Salam A., Strathdee J. ICTP Trieste. Preprint IC/69/17.
9. Salam A., Strathdee J. Phys. Rev., **D, 1, 12**, 3296 (1970).
10. Lee B. W., Zumino B. Nucl. Phys., **B13**, 671 (1969).

11. Volkov M. K. Ann. Phys., **49**, 202 (1968).
12. Fried H. M. Nuovo cimento, **52A**, 1333 (1967); Keck B. W., Taylor J. G. Preprint University of Southampton, April 1970; Budini P., Calucci G. Preprint ICTP IC/70/37, Trieste, 1970; Lehmann H., Pohlmeyer K. Commun. Math. Phys., **20**, 101 (1971).
13. Волков М. К. Препринт ИТФ 69-5, Киев, 1969.
14. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей. М., Гостехиздат, 1957.
15. Dyson F. J. Phys. Rev., **73**, 929 (1948).
16. Lee T. D. Nuovo cimento, **59**, 579 (1968).
17. Stueckelberg E. C. G. Helv. phys. acta, **11**, 225, 229 (1938).
18. Feinberg G., Pais A. Phys. Rev., **131**, 2724 (1963); **133B**, 477 (1964).
19. Мейман Н. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **47**, 1966 (1964).
20. Jaffe A. M. Ann. Phys., **32**, 127 (1965); J. Math. and Phys., **5**, 1174 (1965); Phys. Rev. Lett., **17**, 661 (1966).
21. Ефимов Г. В. Препринт ИТФ-68-52 (1968); 68-54 (1968); 68-55 (1968); Commun. Math. Phys., **7**, 138 (1968).
22. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М., «Наука», 1969.
23. Gursey F. Nuovo cimento, **16**, 230 (1960).
24. Schwinger J. Phys. Lett., **24B**, 473 (1967).
25. Coleman S., Wess I., Zumino B. Phys. Rev., **177**, 2239 (1969); **177**, 2247 (1969).
26. Weinberg S. Phys. Rev. Lett., **18**, 188 (1967).
27. Струминский Б. В. Препринт ОИЯИ Р2-3554, Дубна, 1967.
28. Колкунов В. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **43**, 1448 (1962).
29. Efimov G. V. Preprint CERN — Genewa TH-1087 (1969).
30. Ефимов Г. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 2107 (1963); Nuovo cimento, **32**, 1046 (1964); «Ж. эксперим. и теор. физ.», **48**, 596 (1965).
31. Fradkin E. S. Nucl. Phys., **49**, 624 (1963).
32. Hori S. Progr. Theor. Phys., **7**, 578 (1952).
33. Харди Г. Расходящиеся ряды. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1951.
34. Efimov G. V. Nucl. Phys., **74**, 657 (1965).
35. Ефимов Г. В. Препринт ОИЯИ Р2-4546, Дубна, 1969; Р2-4472, 1969.
36. Славнов А., Шабад А. «Ядерная физика», **1**, 721 (1965).
37. Бейтмен Т., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Перев. с англ. М., «Наука», 1965.
38. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Т. 1. М., Физматгиз, 1958.
39. Speer E. J. Math. Phys., **9**, 1404 (1968).
40. Breitenlohner P., Mitter H. Nucl. Phys., **B7**, 443 (1968).
41. Bogolubov N. N., Parasiuk O. S. Acta Math., **97**, 227 (1957).
42. Волков М. К. «Ядерная физика», **6**, 1100 (1967); **7**, 448 (1968).
43. Volkov M. K. Commun. Math. Phys., **15**, 69 (1969); ТМФ, **2**, 197 (1970); **6**, 21 (1971).
44. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М., Физматгиз, 1962.