

ДВУМЕРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ  
РЕЛЯТИВИСТСКИХ  
АМПЛИТУД

М. А. Либерман, Г. И. Кузнецов,  
Я. А. Смородинский

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ДУБНА

## А Н Н О Т А Ц И Я

Данная работа представляет собой обзор исследований, относящихся к двойным разложениям релятивистских амплитуд. В начале обзора дается общая теория разложений функций, заданных как во времениподобной области, так и в пространственноподобной области, затем разложение скалярной функции и функции со спином. Далее указываются различные системы координат и матрицы перехода от одних базисных функций к другим. В обзоре рассмотрены также некоторые следствия, вытекающие из существования релятивистских разложений.

## A B S T R A C T

A survey of investigations referring to the double expansions of relativistic amplitudes is given.

The general theory of the expansions of functions defined both in time-like and space-like domains is developed. The expansions of scalar and spin functions are discussed and different coordinate systems and transition matrices which allow to pass from one set basic functions to another are enumerated. Some consequences resulted from the existence of relativistic expansions are considered.

## ВВЕДЕНИЕ

Аналитическим свойствам релятивистских амплитуд посвящено очень много работ. Исходным представлением исследований служат выражения, в которых в качестве переменных выбраны переменные  $s$ ,  $t$ ,  $u$ . Естественным первым шагом оказывается разложение амплитуд на парциальные волны, представляющие собой обобщение разложений нерелятивистских амплитуд на сферические волны. В последнее время к таким разложениям внимание возросло, особенно в связи с работами Толлера и др. Однако в большей части работ используются разложения только по одной из переменных, и в этом смысле такие разложения не являются, строго говоря, релятивистскими.

В 1964 г. Н. Я. Виленкин и Я. А. Смородинский дали теорию двумерных разложений, которые являются релятивистским аналогом разложений на сферические волны. В этой работе релятивистская амплитуда параметризована так, что она определена на верхнем поле двухполостного гиперboloида в пространстве скоростей. Можно показать (Вердиев [20], Метьюс и Фельдман), что к такой параметризации можно прийти и начиная изложение с определения и разложения двучастичных амплитуд.

В этом обзоре собраны формулы, относящиеся к разложению амплитуд рассеяния для случая равных масс.

Зависимость амплитуды рассеяния двух частиц от двух переменных (энергии и угла рассеяния) позволяет нам определить эти переменные через координаты точки на трехмерном гиперboloида при учете равенств  $p_i^2 = m_i^2$ ,  $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$  [1], т. е. для амплитуды четыреххвостки достаточно рассмотреть координаты только одного из свободных концов. Отсюда следует, что амплитуду рассеяния можно рассматривать как функцию, заданную для определенности на верхней поле двухполостного гиперboloида. Тогда операторы сдвига на этой поверхности (которые, очевидно, реализуют собственную группу Лоренца) можно использовать для преобразования амплитуды рассеяния от одного значения переменных к другому. Мы будем называть расширенным условием релятивистской инвариантности возможность такого перехода от одного значения амплитуды рассеяния к другому с помощью операторов сдвига на гиперboloида (или конусе). Заметим, что обычное условие инвариантности состоит лишь в том, что амплитуда зависит от инвариантных переменных  $s$ ,  $t$ . Такое расширение определения инвариантно-

сти, необходимое для введения разложений, приводит, естественно, к условиям поведения функций при больших значениях аргумента.

Итак, задача состоит в исследовании разложений амплитуды рассеяния по представлениям группы Лоренца. Начнем с исследования реализаций представлений группы Лоренца.

## 1. ФУНКЦИИ НА ГИПЕРБОЛОИДЕ

### § 1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ГИПЕРБОЛОИДЕ

Из принципа релятивистской инвариантности и унитарности вытекает, что амплитуду рассеяния следует разлагать по функциям, реализующим унитарные бесконечномерные представления группы Лоренца. Эти функции являются решениями уравнений [2, 3]:

$$\Delta f = (-1 - \rho^2 + \nu^2) f; \quad (1.1)$$

$$\Delta' f = -\nu \rho t, \quad (1.2)$$

где  $\Delta$  и  $\Delta'$  — инвариантные операторы Казимира группы Лоренца, построенные из инфинитезимальных операторов пространственных и гиперболических поворотов  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  и равные соответственно:

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 (M_i^2 - N_i^2); \quad (1.3)$$

$$\Delta' = \sum_{i=1}^3 M_i N_i. \quad (1.4)$$

Рассмотрим подробно разложение скалярной функции  $f(u)$ , заданной на гиперboloиде  $u^2 = \frac{\rho^2}{m^2} = 1$ . В этом случае оператор  $\Delta$  равен лапласиану на гиперboloиде, а оператор  $\Delta'$ , связанный со спином, тождественно равен нулю. Укажем также модификацию разложений для случая отличного от нуля спина.

На гиперboloиде можно ввести различные системы координат, к описанию которых мы сейчас и переходим.

1. Сферическая система координат  $S$ :

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \operatorname{ch} a; & u_2 &= \operatorname{sh} a \sin \theta \cos \varphi; \\ u_3 &= \operatorname{sh} a \cos \theta; & u_1 &= \operatorname{sh} a \sin \theta \sin \varphi; \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

$$0 < a < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

В переменных  $a, \theta, \varphi$  оператор Лапласа примет вид

$$\Delta_L = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 a} \cdot \frac{\partial}{\partial a} \operatorname{sh}^2 a \frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 a} \left( \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \quad (1.6)$$

Собственные функции, соответствующие этому оператору с собственным значением  $-(1 + \rho^2)$ , равны:

$$\langle \rho l m | a \theta \varphi \rangle = (\operatorname{sh} a)^{-1/2} P_{-1/2 + i\rho}^{-1/2 - l} (\operatorname{ch} a) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (1.7)$$

2. Система координат Лобачевского  $L$ :

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c; & u_2 &= \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b; \\ u_3 &= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{sh} c; & u_1 &= \operatorname{sh} a. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Лапласиан в переменных  $a, b, c$  определяется формулой

$$\Delta_L = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 a} \frac{\partial}{\partial a} \operatorname{ch}^2 a \frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 a} \left( \frac{1}{\operatorname{sh} b} \frac{\partial}{\partial b} \operatorname{sh} b \frac{\partial}{\partial b} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 b} \frac{\partial^2}{\partial c^2} \right), \quad (1.9)$$

а его собственные функции равны:

$$\langle \rho q m | a, b, c \rangle = (\operatorname{ch} a \sqrt{\operatorname{ch} b})^{-1} P_{-1/2+iq}^{ip}(\operatorname{th} a) P_{-1/2+im}^{iq}(\operatorname{th} b) e^{imc}. \quad (1.10)$$

3. Гиперболическая система координат  $H$ :

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b; & u_2 &= \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \sin \varphi; \\ u_3 &= \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \cos \varphi; & u_1 &= \operatorname{sh} a. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

В этой системе оператор Лапласа и соответствующие ему собственные функции имеют вид

$$\Delta_L = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 a} \cdot \frac{\partial}{\partial a} \operatorname{ch}^2 a \frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 a} \left( \frac{1}{\operatorname{sh} b} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \operatorname{sh} b \frac{\partial}{\partial b} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 b} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right); \quad (1.12)$$

$$\langle \rho q m | ab\varphi \rangle = (\operatorname{ch} a)^{-1} P_{-\frac{1}{2}+iq}^{ip}(\operatorname{th} a) P_{-\frac{1}{2}+im}^m(\operatorname{ch} b) e^{im\varphi}. \quad (1.13)$$

4. Цилиндрическая система координат  $C$ :

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \operatorname{ch} b \operatorname{ch} a; & u_2 &= \operatorname{sh} b \sin \varphi; \\ u_3 &= \operatorname{sh} b \cos \varphi; & u_1 &= \operatorname{ch} b \operatorname{sh} a. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Лапласиан и собственные функции в  $C$ -системе записываются в форме

$$\Delta_L = \frac{1}{\operatorname{ch} b \operatorname{sh} b} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \operatorname{ch} b \operatorname{sh} b \frac{\partial}{\partial b} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 b} \cdot \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 b} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \langle \rho \tau m | ab\varphi \rangle &= e^{i(\tau a + m\varphi)} \frac{(\operatorname{sh} b)^m}{(\operatorname{ch} b)^{m+1+ip}} \times \\ &\times {}_2F_1 \left( \frac{m+1+ip+i\tau}{2}, \frac{m+1+ip-i\tau}{2}, m+1; \operatorname{th}^2 b \right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

5. Орисферическая система координат  $O$ :

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= 1/2 [e^{-a} + (r+1)e^a]; & u_2 &= re^a \cos \varphi; \\ u_3 &= 1/2 [e^{-a} + (r-1)e^a]; & u_1 &= re^a \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

В переменных  $a, r, \varphi$  лапласиан дается выражением

$$\Delta_L = e^{-2a} \left[ \frac{\partial}{\partial a} e^{2a} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right], \quad (1.18)$$

а его собственные функции равны

$$\langle \rho k m | br\varphi \rangle = (kb) K_{ip}(kb) J_m(kr) e^{im\varphi}. \quad (1.19)$$

Здесь  $K_{ip}(kb)$  и  $J_m(kr)$  — соответственно функции Макдональда и Бесселя, а  $e^{-a} = b$ .

## § 2. МЕТОД ОРИСФЕР

Итак, мы построили различные собственные функции. Теперь необходимо эти функции отнормировать или, что то же самое, найти формулы обратного преобразования. Это можно легко сделать с помощью формул Гельфанда — Граева [4, 5]. Пусть  $f(u)$  — скалярная функция, заданная на гиперboloиде, а  $h(k)$  — скалярная функция, заданная на конусе  $k^2 = 0$ . Если

$$h(k) = \int f(u) \delta((ku) - 1) \frac{d^nu}{u_0}, \quad (1.20)$$

то

$$f(u) = \frac{(-)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int \delta^{(n-1)}((uk) - 1) h(k) \frac{d^nk}{k_0} \quad (1.21)$$

при  $n = 2m + 1$  и

$$f(u) = \frac{(-)^{\frac{n}{2}} \Gamma(u)}{(2\pi)^n} \int (uk - 1)^{-n} h(k) \frac{d^nk}{k_0} \quad (1.22)$$

при  $n = 2m$ .

Здесь  $n$  — размерность многообразия, а  $\frac{d^nu}{u_0}$  и  $\frac{d^nk}{k_0}$  — инвариантные меры на гиперboloиде и конусе.

Разложим  $h(k)$  на однородные компоненты:

$$h(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \Phi(k, \sigma) d\sigma^*, \quad (1.23)$$

причем

$$\Phi(k, \sigma) = \int_0^\infty h(kt) t^{-\sigma-1} dt. \quad (1.24)$$

Из формул (1.20) и (1.24) следует, что

$$\Phi(k, \sigma) = \int f(u) (uk)^\sigma \frac{d^nu}{u_0}. \quad (1.25)$$

Используя выражения (1.21) — (1.23), получаем\*\*

$$f(u) = \frac{(-)^{\frac{n-1}{2}}}{2i(2\pi)^n} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma+n-1)}{\Gamma(\sigma)} \int_{\Gamma} \Phi(k', \sigma) (uk')^{-\sigma-n+1} d^{n-1}k' d\sigma \quad (1.26)$$

\* Величина  $\delta$  выбирается такой, что полюсы функции  $\Phi(k, \sigma)$  лежат вне полосы:

$$0 \leq \text{Re} \delta \leq \delta.$$

\*\* Впервые формула (1.26) была получена И. С. Шамиро для  $n=3$  [6].

для  $n = 2m + 1$  и

$$f(u) = \frac{(-)^{\frac{n}{2}-1}}{2i(2\pi)^n} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma+n-1)}{\Gamma(\sigma)} \operatorname{ctg} \pi\sigma \times \\ \times \int_{\Gamma} \Phi(k', \sigma) (uk')^{-\sigma-n+1} d^{n-1}k' d\sigma. \quad (1.27)$$

Контур интегрирования  $\Gamma$  — произвольной на конусе, пересекающий все образующие конусы,  $d^{n-1}k'$  — элемент объема этого контура, определяемый равенством:

$$d(tk') = t^{n-3} dt dk' \quad (0 < t < \infty).$$

В унитарном случае величина  $\sigma = -\frac{n-1}{2} + i\rho$ .

### § 3. ВЫВОД ФОРМУЛ ОБРАЩЕНИЯ

Получим формулы обращения, связанные с собственными функциями лапласиана.

1. **S-система.** Контур интегрирования  $\Gamma$  в  $S$ -системе является сферой ( $k_0 = 1$ ). Функция  $\Phi(k, \sigma)$  задана на сфере. Разложим ее в ряд по сферическим гармоникам:

$$\Phi(k, \sigma) = \sum_{lm} a_{lm}(\sigma) Y_{lm}(k/|k|). \quad (1.28)$$

Подставляя (1.28) в (1.26) и выполняя интегрирование по  $d\Omega$ , получаем

$$f(u) = \frac{1}{2i(2\pi)^{3/2}} \times \\ \times \int \sum_{lm} (-)^l \frac{\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(-\sigma-l-1)} \frac{a_{lm}(\sigma)}{\sqrt{\operatorname{sh} a}} P_{-\sigma-\frac{1}{2}}^{-l-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} a) Y_{lm}(\theta, \varphi) d\sigma. \quad (1.29)$$

Учитывая формулы (1.28) и (1.25) для коэффициента  $a_{lm}(\sigma)$ , находим следующее выражение:

$$a_{lm}(\sigma) = \frac{(-)^l (2\pi)^{3/2} \Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\sigma-l+1)} \times \\ \times \int f(u) \operatorname{sh}^{-1/2} a P_{\sigma+\frac{1}{2}}^{-l-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} a) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \frac{d^3u}{u_0}. \quad (1.30)$$

Здесь  $\frac{d^3u}{u_0} = \operatorname{sh}^2 a da \operatorname{sh} \theta d\theta d\varphi$ .

Формулы (1.29) и (1.30) написаны для обычного четырехмерного пространства ( $n=3$ ). Функции на многомерных гиперболюидах исследованы в работах [7, 8].

2. **H-система.** Разложение в гиперболической системе координат выполняется тем же способом, что и в сферической. Контур интегрирования  $\Gamma$  состоит из двух частей  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$ , соответствующ-

ших двум сечениям конуса плоскостями  $k_3 = \pm 1$ . Вычисления приводят к следующим результатам:

$$f(u) = -\frac{(\operatorname{ch} a)^{-1}}{8(2\pi)^4} \sum_m \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma+\tau+2)\Gamma(\sigma-\tau+1)}{\Gamma(\sigma)\Gamma(m-\sigma)} \times \\ \times \tau \operatorname{ctg} \pi\tau P_{-\tau-1}^m(\operatorname{ch} b) e^{im\varphi} \times \\ \times \{a_m^+(\tau, \sigma) P_{-\tau-1}^{-\sigma-1}(-\operatorname{th} a) + a_m^-(\tau, \sigma) P_{-\tau-1}^{-\sigma-1}(\operatorname{th} a)\} d\tau d\sigma, \quad (1.31)$$

где

$$a^\pm(\tau, \sigma) = \frac{\Gamma(\tau)\Gamma(-\sigma-\tau-1)\Gamma(\tau-\sigma)}{\Gamma(\tau-m+1)\Gamma(-\sigma)} \int f(u) P_\tau^{\sigma+1}(\mp \operatorname{th} a) \times \\ \times P_\tau^m(\operatorname{ch} b) e^{-im\varphi} \frac{d^3u}{u_0}. \quad (1.32)$$

Унитарный случай соответствует величинам:  $\sigma = -1 + i\rho$ ,  $\tau = -1/2 + iq$ .

3. **O-система.** В орисферической системе координат в качестве контура интегрирования  $\Gamma$  выбираем сечение конуса плоскостью  $k_0 - k_3 = 2$ :

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= (1 + \mu^2); & k_2 &= 2\mu \cos \alpha; \\ k_3 &= (-1 + \mu^2); & k_1 &= 2\mu \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

Представляя функцию  $\Phi(k, \sigma)$  в виде

$$\Phi(k, \sigma) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \Psi(\kappa, \theta, \sigma) e^{i\kappa\mu \cos(\theta-\alpha)\kappa} d\theta d\kappa \quad (1.34)$$

и подставляя это выражение в (1.26), после вычисления получаем

$$f(u) = \frac{ib}{(2\pi)^2} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \Psi(\kappa, \theta, \sigma) \times \\ \times \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{\sigma+2} e^{i\kappa\mu \cos(\theta-\Phi)} K_{-\sigma-1}(b\kappa) d\kappa d\theta d\sigma. \quad (1.35)$$

Коэффициенты  $\Psi(\kappa, \theta, \sigma)$  определяются по формуле

$$\Psi(\kappa, \theta, \sigma) = \frac{2}{\pi\Gamma(-\sigma)} \left(\frac{2}{\kappa}\right)^{\sigma+1} \int f(u) e^{-i\kappa r \cos(\theta-\Phi)} K_{\sigma+1}(b\kappa) \frac{1}{b^2} \cdot \frac{d^3u}{u_0}. \quad (1.36)$$

В выражениях (1.35), (1.36)  $K_\nu(x)$  — функция Макдональда,  $e^{-\alpha} = b$ ,  $d^3u/u_0 = r dr db d\Phi$ .

4. **C-система.** Наконец, рассмотрим цилиндрическую систему координат. Контур интегрирования  $\Gamma$  в этой системе есть сечение гиперболоида цилиндром  $k_0^2 - k_1^2 = 1$ . Параметризуем  $\Gamma$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= \operatorname{ch} c; & k_2 &= \sin \alpha; \\ k_1 &= \operatorname{sh} c; & k_3 &= \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$



Используя фурье-разложение  $\Phi(k, \sigma)$

$$\Phi(k, \sigma) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_m(\tau, \sigma) e^{i(m\alpha + \tau\sigma)} d\tau, \quad (1.38)$$

после вычисления получаем для  $f(u)$  представление

$$f(u) = -\frac{1}{16\pi^2 i} \sum_m \frac{\text{th}^m b e^{im\Phi}}{\Gamma(m+1)} \times \\ \times \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{i\tau\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_m(\tau, \sigma)}{\Gamma(\sigma)} \Gamma(A) \Gamma(B) \left(\frac{2}{\text{ch } b}\right)_2^{\sigma+2} F_1(A, B, m+1; \text{th}^2 b) d\sigma d\tau. \quad (1.39)$$

Здесь  $A = \frac{1}{2}(m + \sigma + i\tau + 2)$ ;  $B = \frac{1}{2}(m + \sigma - i\tau + 2)$ . Коэффициенты  $a_m(\tau, \sigma)$  в этой системе имеют следующий вид:

$$a_m(\tau, \sigma) = \frac{\Gamma(A') \Gamma(B')}{4\pi \Gamma(m+1) \Gamma(-\sigma)} \int \text{th}^m b \left(\frac{2}{\text{ch } b}\right)^{-\sigma} \times \\ \times {}_2F_1(A', B', m+1, \text{th}^2 b) e^{i(m\Phi + \tau\alpha)} f(u) \frac{d^3 u}{u_0}, \quad (1.40)$$

где  $\frac{d^3 u}{u_0} = \text{sh}^2 a da db d\Phi$ ;  $A' = \frac{1}{2}(m - \sigma + i\tau)$ ;  $B' = \frac{1}{2}(m - \sigma - i\tau)$ .

Таким образом, мы произвели разложение амплитуды рассеяния в четырех системах координат по функциям, реализующим бесконечномерные унитарные представления группы Лоренца класса 1. Подробный вывод формул (1.29), (1.31), (1.35) и (1.39) дан в работе Н. Я. Виленкина и Я. А. Смородинского [1].

#### § 4. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОБНОЙ ОБЛАСТИ

Чтобы произвести разложение функции, заданной в пространственной области, следует воспользоваться формулой Гельфанда — Граева в виде [5]:

$$f(u) = \frac{(-)}{4i(2\pi)^3} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \sigma(\sigma+1) \int_{\Gamma} F(k, \sigma) |(uk)|^{-\sigma-2} d^2 k d\sigma + \\ + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} 2n \int_{\Gamma} F(k, u; 2n) \delta(uk) d^2 k. \quad (1.41)$$

Здесь  $f(u)$  — четная квадратично интегрируемая функция;  $u^2 = u_0^2 - \mathbf{u}^2 = -1$ ;  $k^2 = 0$ ;  $\Gamma$  — контур интегрирования на конусе (сфера при  $k_0 = 1$ ). Числа  $\sigma$  и  $n$  — веса представлений группы Лоренца основной и дискретной серий, причем, как и прежде в унитарном случае,  $\sigma = -1 + i\rho$ .

Чтобы написать разложение для нечетной функции  $f(u) = -f(-u)$  ( $x_0 \rightarrow -x_0$ ,  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ ), нужно в формуле (1.41) заменить  $|(uk)|^{-\sigma-2}$  на  $|(uk)|^{-\sigma-2} \sin(uk)$  и во втором слагаемом заменить  $2n$  на  $2n-1$  (см. работу [9]). Если произвести разложение функций  $F(k, \sigma)$  и  $F(k, u, 2n)$  по функциям  $Y_{lm}(k/|k|)$  и  $\mathcal{D}_{mk}^l(k/|k|)$  и ввести, например, сферическую систему координат:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \operatorname{sh} a; & k_0 &= 1; \\ u_3 &= \operatorname{ch} a \cos \theta; & k_3 &= \cos \theta'; \\ u_2 &= \operatorname{ch} a \sin \theta \cos \varphi; & k_2 &= \sin \theta' \cos \Phi; \\ u_1 &= \operatorname{ch} a \sin \theta \sin \varphi; & k_1 &= \sin \theta' \sin \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

то, выполнив интегрирование по  $d^2k = d \cos \theta' d\Phi$ , получим [9]

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} f_{\text{ч}}(u) \\ f_{\text{нч}}(u) \end{array} \right) &= \frac{(-)^{\delta}}{4i(2\pi)^3} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \sigma(\sigma+1) \Gamma(-\sigma-1) \times \\ &\times \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{P_l^{\sigma+1}(\operatorname{th} a) \pm (-)^l P_l^{\sigma+1}(-\operatorname{th} a)}{\operatorname{ch} a} d\sigma + \\ &+ \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{2n-1} \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} c_{lm} \frac{1}{\operatorname{ch} a} \left( \begin{array}{c} P_l^{2n}(\operatorname{th} a) \\ P_l^{2n-1}(\operatorname{th} a) \end{array} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (1.43)$$

$P_l^{\sigma+1}(\operatorname{th} a)$  и  $P_l^n(\operatorname{th} a)$  — присоединенные функции Лежандра.  $f_{\text{ч}}(u)$  и  $f_{\text{нч}}(u)$  — соответственно четная и нечетная функции. Первое слагаемое в этом выражении аналогично разложению функции на двухполостном гиперboloиде, полученному в работе [1], второе слагаемое представляет собой разложение функции по дискретным представлениям группы Лоренца [10]. Вопросы, связанные с аналитическим продолжением амплитуд в пространственноподобную область, а также собственные функции лапласиана в пространственноподобной области рассмотрены в работах [11—13].

## § 5. РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛЕЙ

Мы рассмотрели разложение скалярной функции по собственным функциям оператора Лапласа на двухполостном и однополостном гиперboloидах. Чтобы разложить функцию со спином  $s$  и проекцией на направление импульса  $\sigma^*$  (спиральное состояние см. [14]), необходимо модифицировать ядро интегрального преобразования, а именно вместо ядра  $(uk)^{-1-i\sigma}$  в формуле (1.26) следует писать  $(uk)^{-1-i\sigma} \mathcal{D}^s(R)$ , где  $R$  — некоторый поворот, учитывающий перекивание спина;  $\mathcal{D}^s(R)$  — функция Вигнера. Таким образом, разложение функции  $\psi_{\sigma s}(u)$  с заданным спином на гиперboloиде

\* В этом параграфе  $\sigma$  — проекция спина, а отнюдь не число, характеризующее представление группы Лоренца.

по собственным функциям  $\Phi_{\rho\nu}(k)$ , преобразующимся по неприводимым относительно собственной группы Лоренца представлениям  $(\rho, \nu)$ , определяется теперь следующим выражением [15, 16, 17]:

$$\Psi_{s\sigma}(u) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_{\nu=-s}^s \int_{-\infty}^{\infty} d\rho (\rho^2 + \nu^2) \int_{\Gamma} (uk)^{-1-i\rho} \mathcal{D}_{\sigma\nu}^s(R) \Phi_{\nu\rho}(k) d^2k, \quad (1.44)$$

где  $\Gamma$  — контур интегрирования (сфера при сечении конуса  $k^2 = 0$  плоскостью.  $k_0 = 1$ );  $d^2k = d\Omega$ ;  $R$  — поворот в плоскости  $(\mathbf{k}, \mathbf{u})$  на угол  $\pi - \theta'$ . Если ввести на конусе сферическую систему координат  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = (\cos \theta, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi)$ , то (см. работы [15—17])

$$\cos \theta' = -\frac{u_0 \cos \theta - |\mathbf{u}|}{u_0 - (\mathbf{u}\mathbf{n})}. \quad (1.45)$$

Пусть функция  $\Phi_{\rho\nu}(k)$  представлена в виде

$$\Phi_{\rho\nu}(k) = \sum_{JM} a_{JM}(\rho) (2J+1) \mathcal{D}_{M\nu}^J\left(\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\right). \quad (1.46)$$

Тогда, подставив выражение (1.46) в формулу (1.44) и выполнив интегрирование по  $d\Omega$ , получим [14]

$$\Psi_{s\sigma}(u) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_{\nu=-s}^s \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho [\rho^2 + \nu^2] \sum_{JM} a_{JM}^{\nu}(\rho) I_{\rho\nu JM}^{\sigma}(u). \quad (1.47)$$

Здесь

$$I_{\rho\nu JM}^{\sigma}(u) = I_{\rho\nu J}^{\sigma}(a) \mathcal{D}_{M\sigma}^J(\varphi, \theta, -\varphi); \quad (1.48)$$

$$I_{\rho\nu J}^{\sigma}(a) = 2\pi \sum_{r,j} G_{J\sigma\nu j} G_{s\sigma\nu r} (-)^{r+j} \exp(\sigma - \nu - 1 - i\rho + 2r - 2s) a \times \\ \times \frac{\Gamma(J+s-\mu+1) \Gamma(\mu+1)}{\Gamma(J+s+2)} \times \\ \times {}_2F_1(1 + i\rho + s, J+s-\mu+1, J+s+r; 1 - e^{-2a}); \quad (1.49)$$

$$G_{J\sigma\nu j} = i^{\sigma-\nu} \frac{[(J-\sigma)!(J+\sigma)!(J-\sigma)!(J+\nu)!]^{1/2}}{j!(J-\sigma-j)!(J+\sigma-j)!(\sigma-\nu+j)!}; \quad (1.50) \\ \mu = \sigma - \nu + r + j;$$

$\mathcal{D}_{M\sigma}^J(\Phi, \theta, -\Phi)$  — матрица конечного поворота группы вращений (см. [18]);  $u = (u_0, \mathbf{u}) = (\text{ch } a, \text{ sh } a \cos \theta, \text{ sh } a \sin \theta \cos \Phi, \text{ sh } a \sin \theta \sin \Phi)$ .

Функция (1.49) представляет собой матрицу конечного гиперболического поворота группы Лоренца [17, 19—21].

В заключение этой главы следует заметить, что для построения функций, реализующих представления группы Лоренца  $(\rho, \nu)$ , мы использовали интегральный метод. Другие способы построения релятивистских сферических функций изложены в работах [22—23].

## § 6. ПЕРЕХОД ИЗ КАНАЛА В КАНАЛ ДЛЯ СПИРАЛЬНЫХ АМПЛИТУД РАССЕЙНИЯ

В современной теории элементарных частиц важную роль играет принцип универсальности, позволяющий связать амплитуды разных каналов одной и той же диаграммой. Когда, например, нужно определить вклад в амплитуду рассеяния в данном канале, обусловленный соотношением унитарности в перекрестном канале, то приходится производить переход из канала в канал. В случае рассеяния бесспиновых частиц такой переход сводится к замене  $s \rightleftharpoons t$  либо  $s, t$  переменными  $u, t$ . В случае же рассеяния частиц со спином кроме аналитического продолжения амплитуды необходимо еще произвести переэквивалентирование спинов, обусловленное переходом из канала в канал.

Вопрос о переходе из канала в канал для спинового случая исследовался в работах [24—28]. Наиболее простой способ перехода был предложен в работе [24]. Однако в этой работе спины в  $t$ -канале квантовались по разным направлениям; это приводило к нестандартным формулам и было исправлено Е. Л. Сурковым [28]. В настоящем изложении мы будем следовать в основном работе [28].

Рассмотрим реакцию типа ( $s$ -канал)

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4$$

(цифры обозначают частицы). Закон сохранения энергии-импульса в  $s$ -канале имеет вид

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4.$$

Спиральная амплитуда, соответствующая такому переходу, обычно обозначается как  $\langle p_3 \lambda_3; p_4 \lambda_4 | M | p_1 \lambda_1; p_2 \lambda_2 \rangle$ . Здесь  $\lambda_i$  — спиральности частиц, участвующих в реакции. Под спиральными амплитудами реакции  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  понимают амплитуды, определенные в системе центра инерции. После этого оси квантования оказываются жестко закрепленными — они всегда должны быть направленными от центра инерции (точки  $s$  на рис. 1).

Спиральные амплитуды зависят от инвариантов:

$$s = (p_1 + p_2)^2; \quad t = (p_1 - p_3)^2; \quad u = (p_1 - p_4)^2.$$

На рис. 1 изображена кинематическая диаграмма [24], соответствующая реакции  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  в пространстве скоростей. Точки 1 и 2 — скорости частиц до рассеяния, точки 3 и 4 — скорости частиц после рассеяния.

Точка  $s$  — центр инерции реакции — соответствует вектору  $S = p_1 + p_2$ , точка  $t$  — вектору  $T = p_1 - p_3$  (здесь изображен тот случай, когда вектор  $T$ , так же как вектор  $S$ , времениподобен, что возможно в случае неравных масс частиц).

Продолжая спиральные амплитуды в физическую область аннигиляционного канала ( $t$ -канала:  $1 + \bar{3} \rightarrow 2 + 4$ ), мы получаем

амплитуды, по-прежнему квантованные относительно точки  $s$  (спиральность при этом не изменяется). Вектором центра инерции  $t$ -канала становится теперь вектор  $\vec{T} = p_1 + p_3$ , а точка  $s$  оказывается вне кинематического четырехугольника ( $p_2 \rightarrow -p_2$ ,  $p_3 \rightarrow -p_3$ ) (рис. 2). Если мы хотим, чтобы спиральные амплитуды и в  $t$ -канале были квантованы относительно центра инерции, то мы должны

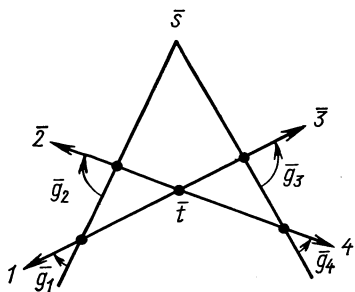


Рис. 1. Кинематическая диаграмма процесса  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ .

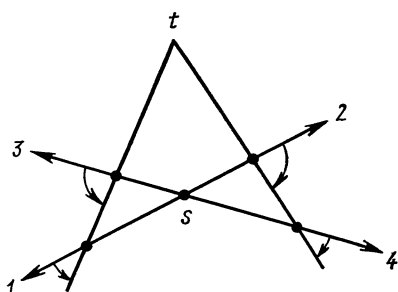


Рис. 2. Кинематическая диаграмма процесса  $1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4$ .

совершить лоренц-преобразование из точки  $\bar{s}$  в точку  $\bar{t}$ . При этом амплитуды преобразуются с помощью матриц  $D_{\lambda\mu}^s(\bar{g})$  по формуле

$$\langle \mu_4; \mu_{\bar{2}} | \hat{M} | \mu_1; \mu_{\bar{3}} \rangle = (-)^{\lambda_2 - \lambda_3} D_{\lambda_4 \mu_4}^{*s_4}(\bar{g}_4) D_{\lambda_2 \mu_2}^{*s_2}(\bar{g}_2) < \lambda_3; \quad (1.51)$$

$$\lambda_4 | \hat{M} | \lambda_1; \lambda_2 > D_{\lambda_1 \mu_1}^{s_1}(\bar{g}_1) D_{\lambda_3 \mu_3}^{s_3}(\bar{g}_3).$$

Заметим, что  $\bar{g}_i \equiv (0, \bar{\theta}_i, 0)$ . С помощью формул тригонометрии Лобачевского очень легко определить углы поворота  $\theta_i$ . Из рис. 2 находим, что:

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{\text{ch}(1, \bar{2}) \text{ch}(1, \bar{3}) - \text{ch}(\bar{2}, \bar{3})}{\text{sh}(1, 2) \text{sh}(1, \bar{3})} = \cos(\bar{2} | 1 \bar{3}); \\ \cos \theta_2 &= -\cos(1 \bar{2} 4); \quad \cos \bar{\theta}_3 = -\cos(1 \bar{3} 4); \\ \cos \theta_4 &= \cos(\bar{3} 4 \bar{2}); \\ \cos(abc) &= \frac{\text{ch}(ab) \text{ch}(bc) - \text{ch}(ac)}{\text{sh}(ab) \text{sh}(bc)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

Выпишем явное выражение, например, для  $\cos \bar{\theta}_1$ :

$$\cos \theta_1 = \frac{(\bar{s} - M_1^2 - M_2^2)(M_1^2 + M_2^2 - \bar{t}) - 2M_1^2(M_3^2 + M_2^2 - \bar{u})}{\{[\bar{s} - (M_1 + M_2)^2][\bar{s} - (M_1 - M_2)^2][\bar{t} - (M_1 + M_3)^2][\bar{t} - (M_1 - M_3)^2]\}}.$$

Мы рассмотрели тот случай, когда векторы  $T, S$  времениподобны. Но  $S$  может быть и пространственноподобным (например, в случае равных масс). Повороты в этом случае определяются аналогично, так как нам важна не сама точка  $s$ , а направление на нее.

## II. ФУНКЦИИ НА КОНУСЕ

### § 1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ПОЛНЫЕ НАБОРЫ КВАНТОВЫХ ЧИСЕЛ И БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ НА КОНУСЕ

Рассмотрим реализацию представлений группы Лоренца на функциях, заданных на конусе ( $k^2 = 0$ ), и вычислим матрицы преобразования между представлениями, отвечающими редукции на различные подгруппы [29]. Очевидно, что указанные коэффициенты перехода не зависят от способа реализации представлений, и поэтому с их помощью из функций (1.48) могут быть получены базисные функции группы Лоренца, отвечающие редукции на подгруппы  $O(2,1)$ ,  $E(2)$  и т. д. Вычислению коэффициентов преобразования для группы Лоренца посвящены также работы [30—32].

Выберем инфинитезимальные операторы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  в виде [33]:

$$M_1 = -i [\mathbf{k} \nabla]_1 + \lambda \frac{k_1}{k_0 + k_3};$$

$$M_2 = -i [\mathbf{k} \nabla]_2 + \lambda \frac{k_2}{k_0 + k_3};$$

$$M_3 = -i [\mathbf{k} \nabla]_3 + \lambda;$$

$$N_1 = ik_0 \frac{\partial}{\partial k_1} + \lambda \frac{k_2}{k_0 + k_3};$$

$$N_2 = ik_0 \frac{\partial}{\partial k_2} - \lambda \frac{k_1}{k_0 + k_3};$$

$$N_3 = ik_0 \frac{\partial}{\partial k_3},$$

где  $k = (k_0, \mathbf{k})$  — четырехмерный вектор, лежащий на конусе, т. е. импульс частицы с нулевой массой покоя. Базисные функции группы Лоренца являются собственными функциями операторов Казимира  $\Delta$  и  $\Delta'$ , определяемых уравнениями (1.3) и (1.4), и двух других коммутирующих операторов, определяемых выбором подгруппы\*. Введем на конусе системы координат и выпишем соответствующие диагональные операторы и их собственные функции.

1.  $S$ -система: подгруппа  $O(3) \supset O(2)$

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= e^a; & k_2 &= e^a \sin \theta \cos \varphi; \\ k_1 &= e^a \sin \theta \sin \varphi; & k_3 &= e^a \cos \theta, \end{aligned} \right\}$$

где  $-\infty < a < \infty$ ;  $0 < \theta < \pi$ ;  $0 < \varphi < 2\pi$ . Диагональными операторами являются:

$$\begin{aligned} M^2 &= M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \\ &+ \frac{2\lambda}{1 + \cos \theta} \left( i \frac{\partial}{\partial \varphi} + \lambda \right); \quad M_3 = i \frac{\partial}{\partial \varphi} + \lambda \end{aligned}$$

\* Эти операторы — оператор Казимира подгруппы и оператор ее простой абелевой подгруппы [здесь везде  $O(2)$ ].

с собственными значениями  $J(J+1)$  и  $M$  соответственно. Собственные функции —  $D$ -функции Вигнера [18]  $D_{M\lambda}^J(\varphi, \theta, -\varphi)$ .

2.  $H$ -система: подгруппа  $O(2, 1) \supset O(2)$

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= e^a \operatorname{ch} \beta; & k_2 &= e^a \operatorname{sh} \beta \cos \varphi; \\ k_1 &= e^a \operatorname{sh} \beta \sin \varphi; & k_3 &= \varepsilon e^a, \end{aligned} \right\}$$

где  $-\infty < a < \infty$ ;  $-\infty < \beta < \infty$ ;  $0 < \varphi < 2\pi$  и

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{для } k_3 > 0; \\ -1 & \text{для } k_3 < 0. \end{cases}$$

Диагональные операторы

$$\begin{aligned} H^2 &= M_3^2 - M_1^2 - N_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \operatorname{cth} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \beta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \\ &+ \frac{2\varepsilon\lambda}{\varepsilon + \operatorname{ch} \beta} \left( i \frac{\partial}{\partial \varphi} + \lambda \right) \end{aligned}$$

и  $M_3 = i \frac{\partial}{\partial \varphi} + \lambda$  с собственными значениями  $(q^2 + 1/4)$  и  $M$  соответственно (здесь  $q$  — вещественное для унитарных представлений). Собственные функции  $H^2$  и  $M_3$  суть

$$T_{M\lambda}^q(\varphi, \beta, -\varphi) = e^{iM\varphi} d_{M\lambda}^{q(\varepsilon)}(\operatorname{ch} \beta) e^{i\lambda\varphi},$$

где  $d_{M\lambda}^{q(\varepsilon)}(\operatorname{ch} \beta)$  следующим образом выражается через функции Якоби [34]  $\mathfrak{P}_{M\lambda}^q(\operatorname{ch} \beta)$ :

$$\begin{aligned} d_{M\lambda}^q(\operatorname{ch} \beta) &= \mathfrak{P}_{M\lambda}^q(\operatorname{ch} \beta) \quad \text{при } \varepsilon = +1; \\ d_{M\lambda}^q(\operatorname{ch} \beta) &= \mathfrak{P}_{-M\lambda}^q(\operatorname{ch} \beta) \quad \text{при } \varepsilon = -1. \end{aligned}$$

3.  $O$ -система: подгруппа  $E(2) \supset O(2)$

$$\begin{aligned} k_0 &= e^a \frac{1+r^2}{2}; & k_2 &= e^a r \cos \varphi; \\ k_1 &= e^a r \sin \varphi; & k_3 &= e^a \frac{-1+r^2}{2}, \end{aligned}$$

где  $-\infty < a < \infty$ ;  $0 < r < \infty$ ;  $0 < \varphi < 2\pi$ .

Диагональные операторы:

$$\begin{aligned} O^2 &= (N_1 + M_2)^2 + (N_2 - M_1)^2 = \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{4\lambda}{r^2} \left( i \frac{\partial}{\partial \varphi} + \lambda \right); \\ M_3 &= i \frac{\partial}{\partial \varphi} + \lambda. \end{aligned}$$

Собственные значения  $O^2$  и  $M_3$  соответственно  $\kappa^2$  и  $M$ , где  $\kappa$  — вещественно. Собственные функции

$$I_{M\lambda}^\kappa(\varphi, r, -\varphi) = e^{-iM\varphi} J_{M+\lambda}(\kappa r) e^{i\lambda\varphi}.$$

Здесь  $J_{M+\lambda}(\kappa r)$  — функции Бесселя.

4.  $C$ -система: подгруппа  $O(2) \otimes O(1, 1)$

$$\begin{aligned} k_0 &= e^a \operatorname{ch} \beta; & k_2 &= e^a \cos \varphi; \\ k_1 &= e^a \sin \varphi; & k_3 &= e^a \operatorname{sh} \beta, \end{aligned}$$

где  $-\infty < a < \infty$ ;  $-\infty < \beta < \infty$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ . Диагональными операторами в этом случае являются  $M_3$  и  $N_3$  с собственными значениями  $M$  и  $\tau$ . Их собственные функции:

$$I_{M\lambda}^\tau(\varphi, \beta, -\varphi) = e^{-iM\varphi} e^{-i\tau\beta} e^{i\lambda\varphi}.$$

Вычисляя операторы Казимира  $\Delta$  и  $\Delta'$  во всех системах координат на конусе, находим, что они имеют одинаковый вид:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial a^2} + 2 \frac{\partial}{\partial a} + \lambda^2; \quad (2.1)$$

$$\Delta' = i\lambda \left( 1 + \frac{\partial}{\partial a} \right). \quad (2.2)$$

Решая уравнения (1.1) и (1.2) с учетом (2.1) и (2.2), находим, что для унитарных представлений  $\lambda = \nu$ , а часть базисных функций, зависящая от  $a$ , суть  $\exp(-1 + i\rho)a$ .

## § 2. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

В различных физических задачах требуется знать матричные элементы преобразования от базисных функций, соответствующих редукции группы Лоренца на одну цепочку подгрупп, к базисным функциям, отвечающим другой редукции. Ввиду того что такие матричные элементы не зависят от способа реализации представлений, их проще всего вычислять с помощью функций на конусе.

**1. Матричные элементы перехода  $S-C$ .** Пусть базисные функции в  $S$ -системе  $\langle a\theta\varphi | \rho\nu JM \rangle$ , а в  $C$ -системе  $\langle b\zeta\varphi | \rho\nu\tau M \rangle$ . Матричные элементы перехода из  $S$ -системы в  $C$ -систему определяются следующим интегралом:

$$\langle \rho\nu\tau M | \rho\nu JM' \rangle = \int \frac{d^3k}{k_0} \langle \rho\nu\tau M | b\zeta\varphi \rangle \langle a\theta\varphi | \rho\nu JM \rangle.$$

Выразив переменные в  $C$ -системе через переменные в  $S$ -системе  $e^b = e^a \sin \theta$ ,  $\operatorname{th} \zeta = \cos \theta$  и подставив явный вид базисных функций, получим

$$\begin{aligned} \langle \rho\nu\tau M | \rho\nu JM' \rangle &= N_S N_C^* \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2a} da \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \times \\ &\times e^{(-1-i\rho)b} e^{(-1+i\rho)a} e^{-i\tau\zeta} e^{-i(\nu-M')\varphi} e^{i(\nu-M)\varphi} P_{M\nu}^J(\cos \theta) = \\ &= N_S N_C^* \int_0^\pi \sin \theta d\theta (\sin \theta)^{-1+i\rho} \left( \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)^{i\tau} P_{M\nu}^J(\cos \theta), \quad (2.3) \end{aligned}$$



где  $N_S$  и  $N_C$  — нормировочные множители функций  $\langle a\theta\varphi | p\nu JM \rangle$  и  $\langle b\xi\varphi | p\nu\tau M \rangle$  соответственно.

После вычисления интеграла (2.3) и подстановки значений  $N_S$  и  $N_C$  окончательно получаем

$$\begin{aligned} \langle p\nu\tau M | p\nu JM' \rangle &= \delta_{MM'} 2^{ip-1} i^{(M-\nu)} \sqrt{\frac{(2J+1)(J-\nu)!(J+M)!}{2(J+\nu)!(J-M)!}} \times \\ &\times \frac{\Gamma\left(\frac{1+M-\nu+i\tau+ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+M+\nu-i\tau+ip}{2}\right)}{\Gamma(M-\nu+1) \Gamma(1+M+ip)} \times \\ &\times {}_3F_2\left(J+M+1, M-J, \frac{1}{2}(1+M-\nu+i\tau+ip)\right). \end{aligned}$$

Матричные элементы перехода в остальных случаях вычисляются аналогичным образом [29], мы приведем здесь окончательные результаты.

## 2. Матричные элементы $S-O$ :

$$\begin{aligned} \langle p\nu\kappa M | p\nu JM' \rangle &= \delta_{MM'} \frac{i^{M-\nu}}{\pi^2} \left( \kappa \frac{(2J+1)(J-M)!(J+M)!}{2(J+M)!(J+\nu)!} \right)^{1/2} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{J-H} \frac{(-)^n (J+M+n)! \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{M+ip+n}}{(M-\nu+n)! (J-M-n)! n! \Gamma(M+n+ip+1)} K_{\nu-ip-n}(\kappa). \end{aligned}$$

Здесь  $K_{\nu-ip-n}(\kappa)$  — функция Макдональда [34].

## 3. Матричные элементы $S-H$ :

$$\langle p\nu JM | p\nu q M' \rangle = \delta_{MM'} [J(\nu) + (-1)^{2(J-M-\nu)} J(-\nu)],$$

где  $J(\pm\nu)$  обозначено следующее выражение:

$$\begin{aligned} J(\pm\nu) &= \pi^{2i} i^{M\mp\nu} 2^{J+iq-1/2} \times \\ &\times \frac{\Gamma(1/2-iq\pm\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+M-iq\right) \Gamma(J+M+1) \Gamma(J\mp\nu+1) \Gamma\left(\frac{1}{2}+iq-M\right)} \times \\ &\times \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+iq\pm\nu\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+iq+ip\right)} \sqrt{\frac{(J\mp\nu)!(J+M)!}{(J\pm\nu)!(J-M)!}} \times \\ &\times \Gamma(J+M+n+1) \Gamma(J\mp\nu+n+1) \Gamma\left(\frac{1}{2}-M+iq+n'\right) \times \\ &\times \Gamma\left(\frac{1}{2}+iq\pm\nu+n'\right) \times \\ &\times \sum_{nn'} (-1)^n \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+M+iq+ip\mp\nu+n+n'\right) \times}{\Gamma(M\mp\nu+n+1) n! n! \Gamma(1-M\pm\nu+n') \Gamma(M\mp\nu+n+n')} \times \\ &\times {}_2F_1\left(\frac{3}{2}+J+M+iq\mp\nu+n+n', \frac{1}{2}+iq+ip, \frac{3}{2}+M+iq+ip+n+n'; -1\right). \end{aligned}$$

4 Матричные элементы  $O-C$ :

$$\langle p\nu\kappa M | p\nu\tau M' \rangle = \delta_{MM'} \frac{2^{-1+i\tau} \Gamma\left(\frac{M+\nu+ip+i\tau+1}{2}\right)}{\kappa^{\frac{1}{2}+i\tau} \Gamma\left(\frac{M+\nu-ip-i\tau+1}{2}\right)}.$$

5. Матричные элементы  $H-C$ :

$$\begin{aligned} \langle p\nu\tau M | p\nu q M' \rangle &= \delta_{MM'} \frac{2^{-ip}}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+iq\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-iq+ip\right)}{\Gamma(\nu-M+1) \Gamma\left(\frac{1}{2}+M+iq\right)} \times \\ &\times \frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu-M-ip+i\tau}{2}\right)}{\Gamma\left(1-iq+\frac{\nu-M+ip-i\tau}{2}\right)} \times \\ &\times {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1/2-M-iq, \frac{1}{2}+\nu-iq, \frac{1+\nu-M-ip+i\tau}{2} \\ \nu-M+1, 1-iq+\frac{\nu-M+ip-i\tau}{2} \end{matrix}; 1\right). \end{aligned}$$

6. Матричные элементы  $O-H$ :

$$\langle p\nu\kappa M | p\nu q M' \rangle = \delta_{MM'} 2\pi \sqrt{\kappa} [J_1(\kappa) + J_2(\kappa)],$$

где  $J_1$  и  $J_2$  следующим образом выражаются через  $G$ -функции Мейера:

$$\begin{aligned} J_1(\kappa) &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\kappa}\right)^{M+\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu+iq\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-iq-ip\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+M+iq\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+M-iq\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-iq\right)} \times \\ &\times \sum_n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+M-iq+n\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-iq+n\right)}{\Gamma(M+\nu+n+1) n!} \times \\ &\times G_{13}^{11}\left(\frac{\kappa^2}{4} \left| \begin{matrix} M+\nu \\ 0, -\frac{1}{2}+iq+ip-n, -n \end{matrix} \right. \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2(\kappa) &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\kappa}\right)^{M+\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-iq+ip\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+iq\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+M+iq\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-M-iq\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-iq\right)} \times \\ &\times \sum_n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-M-iq+n\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-iq+n\right)}{\Gamma(\nu-M+n+1) n!} \times \\ &\times G_{13}^{20}\left(\frac{\kappa^2}{4} \left| \begin{matrix} \frac{1}{2}+M+\nu-iq-n \\ M+\nu+n-ip, 0, M+\nu \end{matrix} \right. \right). \end{aligned}$$

Отметим здесь также, что для унитарных представлений матричный элемент обратного преобразования определяется, очевидно, эрмитово сопряженной матрицей, таким образом, например, из матричных элементов  $\langle S|O\rangle$  и  $\langle O|C\rangle$  можно получить  $\langle S|O\rangle = \langle S|C\rangle \langle C|O\rangle$  и т. д.

### III. СЛЕДСТВИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИ ИНВАРИАНТНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

#### § 1. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АМПЛИТУДЫ И КВАДРАТИЧНАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

Для получения асимптотических разложений мы будем исходить из записи амплитуды в виде

$$f(E, \theta, \varphi) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{lm} (-)^l \rho^2 \frac{a_{lm}(\rho) \Gamma(-i\rho)}{\Gamma(-i\rho-l)} \times \\ \times \frac{\rho^{-l-\frac{1}{2}} (\text{ch } a)}{\sqrt{\text{sh } a}} Y_m(\theta, \varphi) d\rho, \quad (3.1)$$

где  $E = \text{ch } a$ ;  $\theta$  — угол рассеяния; угол  $\varphi$  записан для полноты;  $\rho$  характеризует унитарное представление группы Лоренца, коэффициент  $a_{lm}(\rho)$  определяется выражением

$$a_{lm}(\rho) = \frac{(-)^l (2\pi)^{3/2} \Gamma(i\rho)}{2\Gamma(i\rho-l)} \int f(a, \theta, \varphi) \frac{\rho^{-l-\frac{1}{2}+i\rho} (\text{ch } a)}{\sqrt{\text{sh } a}} \times \\ \times Y_m(\theta, \varphi) \text{sh}^2 a da d\Omega. \quad (3.2)$$

Функция, для которой справедливы прямое и обратное преобразования (3.1) и (3.2), должна удовлетворять следующим условиям:

а) быть квадратично интегрируемой:

$$\int |f(x)|^2 dx < \infty, \quad (3.3)$$

здесь  $x$  — совокупность переменных  $a, \theta, \varphi$  и  $dx = \text{sh}^2 a da d\Omega$  — элемент объема;

б) реализовывать регулярное представление  $T_g$  группы движений на гиперboloиде, изоморфной группе Лоренца [34]:

$$T_g f(x) = f(g^{-1}x). \quad (3.4)$$

Пусть  $E \rightarrow \infty$  при фиксированном  $\theta$ . Если интеграл и подынтегральная функция суть равномерно сходящиеся функции, то символ предела можно перенести под знак интеграла (что обычно и делается, см. [35, 36]). Воспользовавшись асимптотическим представлением  $P_{\nu}^{\mu}(z)$  — присоединенной функции Лежандра:

$$\rho^{-\frac{1}{2}-i\rho}(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ \frac{\Gamma(-i\rho) e^{-i\rho \ln 2z}}{\Gamma(-i\rho+l+1)} + \frac{\Gamma(i\rho) e^{i\rho \ln 2z}}{\Gamma(i\rho+l+1)} \right\}, \quad (3.5)$$

получим

$$f_{\text{асим}}(E, \theta) \approx \frac{\text{const}}{\sqrt{E} \sqrt{E^2 - 1}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\theta, \rho) e^{i\rho \ln 2E} d\rho, \quad (3.6)$$

где

$$A(\theta, \rho) = \sum_l (-)^l \frac{|\Gamma(i\rho)|^2 a_l(\rho) \rho^2}{\Gamma(-i\rho - l) \Gamma(i\rho + l + 1)} P_l(\theta), \quad (3.7)$$

причем  $A(\theta, -\rho) \neq A^*(\theta, \rho)$ . Следует отметить, что в других системах координат тоже получается фурье-разложение типа (3.6). Поскольку  $\ln 2E \rightarrow \infty$  при фиксированном  $\theta$ , то из-за осцилляций в экспоненте интегрирование по  $\rho$  в (3.6) должно фактически ограничиваться областью малых значений  $\rho$ . Учитывая это, а также условие кросс-симметрии в форме [37]:

$$\tilde{f}(E + i0, \theta) = f(-E - i0, \theta) = f^*(-E + i0, \theta), \quad (3.8)$$

нетрудно получить [38, 29] соотношение между амплитудами рассеяния  $f(E, \theta)$  и  $\tilde{f}(E, \theta)$  частицы и античастицы соответственно на одной и той же мишени, а именно

$$|f(E, \theta)|_{\text{асим}} = |\tilde{f}(E, \theta)|_{\text{асим}}, \quad (3.9)$$

что представляет собой содержание теоремы Померанчука [35] в случае  $\theta = 0$ . Квадратичная интегрируемость  $f(E, \theta)$  требует, чтобы на бесконечности  $|f(E, \theta)|$  убывал быстрее чем  $1/E$ . Если отказаться от квадратичной интегрируемости амплитуды  $f(E, \theta)$ , то парциальные амплитуды  $A(\rho, \theta)$  станут обобщенными функциями, например  $\delta$ -функциями и их производными [38].

## § 2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЛОРЕНЦ- И РЕДЖЕ-АМПЛИТУДАМИ

Следуя работам [39, 40], рассмотрим разложение амплитуды по представлениям группы Лоренца, отвечающим редукции на подгруппу  $O(2,1)$ . Аналогичным вопросам посвящены работы [12, 41]. Наиболее просто это можно сделать, если рассматривать указанные разложения, реализованные на базисных функциях группы Лоренца, определенных на конусе [42]. Для получения параметризации, соответствующей этим разложениям, удобно построить изотропный вектор:

$$k_{i0} = p_i - p_0 e^{-A(t)}, \quad (3.10)$$

где  $\text{sh } A(t) = \frac{(p_i p_0)}{m^2}$ , а

$$p_i = m(\text{ch } a \text{ ch } \beta, \text{ch } a \text{ sh } \beta, 0, \text{sh } a)$$

импульс одной из частиц, участвующих в реакции ( $i = 1, 2, 3, 4$ );  $p_0 = m(0, 0, 0, 1)$  — импульс начала координат системы Брейта. Положив  $\text{ch } a = e^\alpha$ , получим

$$k_{i0} = m e^\alpha (\text{ch } \beta, \text{sh } \beta, 0, 1).$$

Соответствующая формула разложения амплитуды по неприводимым представлениям группы Лоренца имеет вид\* [42]

$$f(\alpha, \beta) = \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} d\sigma (\sigma+1) \int_{L-i\infty}^{L+i\infty} A(\sigma, l) e^{-\sigma\alpha} (2l+1) \operatorname{ctg} \pi l P_l(\operatorname{ch} \beta) dl. \quad (3.11)$$

Напомним, что унитарный случай соответствует  $\sigma = -1 + i\rho$  и  $l = -\frac{1}{2} + ia$ . Переменные Мандельштама  $s$  и  $t$  следующим образом связаны с  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$e\alpha = \sqrt{1 - \frac{t}{4m^2}}; \quad \operatorname{ch} \beta = -1 - \frac{2s}{t - 4m^2}.$$

Можно показать [12, 42], что реджевское представление амплитуды [12, 43] в  $t$ -канале есть аналитическое продолжение части разложения (3.11), соответствующей разложению по подгруппе  $O(2,1)$ , из  $s$ -канала в  $t$ -канал. Учитывая это, получаем, что частичная амплитуда в  $t$ -канале  $a(l, t)$  связана с  $A(\sigma, l)$  лоренц-амплитудой, преобразованием Лапласа (Фурье — в унитарном случае) [42]:

$$a(l, t) = 2i \cos \pi l \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} d\sigma (\sigma+1) e^{-\sigma\alpha} A(\sigma, l). \quad (3.12)$$

Переходя в (3.12) к унитарному случаю ( $\delta = -1$ ,  $\sigma = -1 + i\rho$ ) и интегрируя от нуля до бесконечности по  $\rho$  (см. [5]), находим вид лоренц-амплитуды, рождающий полюс у функции  $a_l(t)$ :

$$A(\rho, l) = \frac{1}{\rho} \exp\{\pm i\rho f(l)\}, \quad (3.13)$$

где  $f(l)$  — произвольная функция\*\* с  $\operatorname{Im} f(l) \geq 0$ .

### § 3. ЛОРЕНЦ- И РЕДЖЕ-ПОЛЮСЫ

В работе И. С. Шапиро [43] показано, что реджевское асимптотическое поведение амплитуды  $s^{l(t)}$  отвечает полюсу частичной лоренц-амплитуды в  $\rho$ -плоскости.

Д. В. Волков и В. Н. Грибов [44] нашли целые семейства траекторий Редже. Затем Толлер и др. [39] в случае  $t = 0$  доказали, что полюс в лоренц-амплитуде генерирует целую серию эквидистантных редже-полюсов (дочерние траектории). Случай бесконечно малого переданного импульса рассмотрел Салам [40]. Исследованию дочерних траекторий были посвящены также работы [45], в которых на некоторых моделях дана классификация редже-полюсов по лоренц-полюсам. Самый простой способ показать возникновение дочерних траекторий состоит в следующем. Рассмотрим амплитуду рассеяния

\* Так как амплитуда — скаляр, то разложение идет лишь по вырожденным представлениям с  $\nu = 0$ .

\*\* В (3.13)  $A(\rho, l)$  следует понимать в смысле обобщенной функции.

$f(s, t)$  двух скалярных частиц с одинаковыми массами  $m$ . Переменные  $s, t$  определим как:

$$\left. \begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = 2m^2 (1 + \operatorname{ch} a_{12}); \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = 2m^2 (1 - \operatorname{ch} a_{13}), \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

где  $a_{ik}$  — расстояние между точками  $i, k$ , лежащими на гиперболоиде радиуса  $m$ , т. е.  $p^2 = m^2$ . В дальнейшем рассматривается случай  $t = 0$ .

Пусть  $p_i \in \{\mathcal{P}_4 : p_0^2 - p_3^2 - p_2^2 - p_1^2 = m^2\}$ . Поскольку  $f(s, 0)$  есть лоренц-инвариантная амплитуда [в смысле  $T_g f(s, 0) = f(g^{-1}s, 0) = f(s, 0)$ ], то будем ее разлагать по лоренц-инвариантным функциям, а именно по элементарным сферическим, которые определяются как

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \rho a_{12}}{\rho \operatorname{sh} a_{12}} = \sum_{lm} \Phi_{\rho lm}^* \left( \frac{p_1}{m} \right) \Phi_{\rho lm} \left( \frac{p_2}{m} \right), \quad (3.15)$$

где  $\Phi_{\rho lm} \left( \frac{p_i}{m} \right)$  — функция (1.7). (Здесь индекс  $i$  означает номер частицы.)

Поэтому можно написать следующее разложение для  $f(s, 0)$  (см. работы [22, 43]):

$$f(s, 0) = \int_0^\infty A(\rho) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \rho a}{\rho \operatorname{sh} a} \rho^2 d\rho \equiv \int_0^\infty a(\rho) \frac{\sin \rho a}{\operatorname{sh} a} \rho d\rho. \quad (3.16)$$

Здесь  $a_{12} = a$ .

С другой стороны, известно, что при рассеянии бесспиновых частиц пространственная часть импульса полностью определяется двумя компонентами, иначе говоря, можно считать, что  $p_i \in \{\mathcal{P}_3 : p_0^2 - p_2^2 - p_1^2 = m^2\}$ , а это означает, что  $f(s, 0)$  следует разлагать по скалярному произведению функций, реализующих представление веса  $l$  группы  $O(2,1)$ , т. е. по функциям Лежандра:

$$P_l(\operatorname{ch} a) = \sum_m \Phi_{lm}^* \left( \frac{p_1}{m} \right) \Phi_{lm} \left( \frac{p_2}{m} \right), \quad (3.17)$$

где  $\Phi_{lm} \left( \frac{p_i}{m} \right) = P_l^m(\operatorname{ch} a_i) e^{im\Phi_i}$ , а  $l$  — комплексное число. Таким образом,

$$f(s, 0) = \frac{1}{8\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} dl a(l) P_{-l-1}(\operatorname{ch} a) l \operatorname{ctg} \pi l, \quad (3.18)$$

причем

$$a(l) = \int_0^\infty f(s, 0) P_l(\operatorname{ch} a) (\operatorname{sh} a) da \quad (3.19)$$

для унитарного случая  $l = -1/2 + iq$ . Подставляя выражение (3.16) в (3.19) и выполняя интегрирование по  $a$ , получаем

$$a(l) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} d\rho a(\rho) \beta(l, \rho), \quad (3.20)$$

где

$$\beta = -\frac{\sin \pi l}{2\pi} \left| \Gamma\left(\frac{l+1+i\rho}{2}\right) \right|^2 \left| \Gamma\left(-\frac{l+i\rho}{2}\right) \right|^2. \quad (3.21)$$

Если допустить существование полюсов у функции  $a(\rho)$ , то можно, сдвинув контур, получить

$$a(l) = -\sum_k \frac{\sin \pi l}{2\pi} \Gamma\left(\frac{1+l+i\rho_k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+l-i\rho_k}{2}\right) \times \\ \times \Gamma\left(-\frac{l+i\rho_k}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{l-i\rho_k}{2}\right) + \int_L d\rho a(\rho) \beta(l, \rho).$$

Итак, из формулы (3.22) видно, что каждый  $\rho$ -полюс порождает серию эквидистантных полюсов в  $l$ -плоскости как полюсов  $\Gamma$ -функций.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н. Я., Смородинский Я. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **46**, 1793 (1964).
2. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представление группы вращений и группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958.
3. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958.
4. Гельфанд И. М., Граев М. И. Труды Моск. матем. о-ва, **11**, 243 (1962).
5. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М., Физматгиз, 1962.
6. Шапиро И. С. «Докл. АН СССР», **106**, 647 (1956).
7. Виленкин Н. Я. «Матем. сб.», **68** (100); **3**, 432 (1965).
8. Кузнецов Г. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **51**, 216 (1966).
9. Кузнецов Г. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **54**, 1756 (1968).
10. Гинзбург В. Л., Тамм И. Е. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **17**, 227 (1947).
11. Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А. «Ядерная физика», **3**, 383 (1966).
12. Воусе J. F. J. Math. and Phys., **8**, 675 (1967).
13. Агамалиев А. К., Атакишев Н. М., Вердиев И. А. «Ядерная физика», **10**, 187 (1969).
14. Ясав М., Wick G. S. Ann. Phys., **7**, 404 (1959).
15. Чжоу Гуан-чжао, Заставенко Л. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **35**, 1417 (1958).
16. Попов В. С. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **37**, 116 (1959).
17. Кузнецов Г. И. и др. «Ядерная физика», **10**, 641 (1969).
18. Edmonds A. R. Angular Momentura in Quantum Mechanics. Princeton, 1957.

19. Нгуен Ван Хьеу, Дао Вонг Дык. «Докл. АН СССР», **137**, 1281 (1967).
20. Вердиев Й. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **55**, 1173 (1968); Вердиев Й. А., Дадашев Л. А. «Ядерная физика», **6**, 1094 (1967).
21. Ström S. Arkiv Fys., **29**, 467 (1965).
22. Долгинов А. З. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **30**, 746 (1956). Долгинов А. З., Топтыгин И. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **35**, 794 (1958); **37**, 1441 (1959). Долгинов А. З., Москалев А. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **37**, 1697 (1959).
23. Либерман М. А., Смородинский Я. А., Шефтель М. Б. «Ядерная физика», **7**, 202 (1967).
24. Смородинский Я. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **45**, 604 (1963).
25. Магиров М. S., Roginshy V. I. Nucl. Phys., **49**, 251 (1963).
26. Труман Т. Z., Wick G. C. Ann. Phys., **26**, 322 (1964).
27. Atkinson O. A. Crossing Symmetry for Helicity Amplitudes. Preprint РИ 19-20 (1964).
28. Сурков Е. Л. «Ядерная физика», **1**, 1113 (1965).
29. Либерман М. А., Макаров А. А. «Ядерная физика», **9**, 1314 (1969).
30. Stör m S. Arkiv. fys., **34**, 295 (1967).
31. Delburgo R., Koller K., Mahanta P. Nuovo Cimento, **52A**, 1254 (1967).
32. Акьямронг Д. А., Воусе J. F., Rushid M. A. Nuovo Cimento, **L111**, 737 (1968).
33. Lomont J. S., Moses M. E. J. Math. and Phys., **3**, 405 (1963).
34. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., «Наука», 1966.
35. Померанчук И. Я. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **34**, 725 (1958).
36. Мейман Н. Н. В сб. «Вопросы физики элементарных частиц», **4**, Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1964, стр. 258.
37. Берестецкий В. Б. «Успехи физ. наук», **26**, 25 (1962).
38. Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А. «Ядерная физика», **6**, 1308 (1967).
39. Toller M. Nuovo cimento, **37**, 631 (1965). Sciarrini A., Toller M. J. Math. and Phys., **8**, 1252 (1967). Toller M., Sertorio I. Nuovo cimento, **33**, 413 (1964). Toller M. Nuovo cimento, **53A**, 671 (1968).
40. Delbourgo R., Salam A., Strathdee J. Phys. Lett., **25B**, 230 (1967).
41. Винтернитц П., Смородинский Я. А., Шефтель М. Б. «Ядерная физика», **9**, 1 (1968).
42. Либерман М. А. «Ядерная физика», **10**, 882 (1968).
43. Шапиро И. С. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **43**, 1727 (1962).
44. Волков Д. В., Грибов В. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 1068 (1963).
45. Goldberger M. L., Jones G. E. Phys. Rev., **150**, 1260 (1966); Freedman D., Wang J. Phys. Rev., **153**, 1596 (1967); Freedman D., Jones C. E., Wang J. Phys. Rev., **155**, 1645 (1967); Domocos G. Phys. Rev., **159**, 1387 (1967); Freedman D., Wang J. Phys. Rev. Lett., **18**, 863 (1967); Domocos G. Phys. Lett., **24B**, 293 (1967); Durand L. Phys. Rev., **154**, 1537 (1967); Taylor J. C. Preprint 19-16, Oxford (1967); Либерман М. А. «Ядерная физика», **9**, 665 (1969).