

МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ
В ЯДЕРНОЙ ПРОБЛЕМЕ
ТРЕХ ТЕЛ

В. Б. Беляев

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ДУБНА

Е. Вжеционко

ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ,
ВАРШАВА

А Н Н О Т А Ц И Я

В статье изложены регулярные методы расчета характеристик трехнуклонных систем с локальными потенциалами и анализируются результаты, полученные этими методами. Рассматриваются только результаты расчетов энергии связи трития и дублетной длины nd -рассеяния. Обсуждается вопрос уменьшения неоднозначности в выборе формы и параметров взаимодействия нуклонов.

A B S T R A C T

This review contains an exposition of regular methods of calculating the characteristics of 3-nucleon systems with local potentials and an analysis of results obtained by these methods. Only results of calculations of the tritium binding energy and the doublet nd -scattering length are considered. The problem of the non-uniqueness in the choice of the form and parameters of the nucleon-nucleon interaction is discussed.

1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании свойств трехнуклонных систем привлекают внимание два аспекта проблемы. 1. Возможно ли, исходя из двухчастичного взаимодействия, данные о котором извлекаются из нуклон-нуклонного рассеяния, получить описание свойств трехнуклонных систем? 2. Насколько однозначно, в смысле выбора NN -взаимодействия, такое описание? Иными словами, можно ли фиксировать форму или тип NN -взаимодействия путем расчета трехнуклонных характеристик.

Корректная постановка этих вопросов стала возможна только после того, как Л. Д. Фаддеев получил математически корректные уравнения для трех тел [1].

В результате усилий многих авторов в течение последних десяти лет был дан положительный ответ на первый вопрос. Оказалось, что для качественного описания большинства характеристик трехнуклонных систем достаточно использовать простые ядерные потенциалы, описывающие только параметры $effective\ range$ в NN -рассеянии.

При попытке количественного описания совокупности трехчастичных эффектов оказывается необходимой более детальная информация о характере нуклон-нуклонного взаимодействия. В принципе такое взаимодействие можно было бы восстановить, решая обратную задачу теории рассеяния. Однако в силу многих причин обратная задача не решена, и мы имеем большое число феноменологических потенциалов, описывающих одни и те же экспериментальные фазы в довольно широком интервале энергий.

Условно можно разделить эти потенциалы на две группы. К первой группе отнесем нелокальные потенциалы (типа Табакина), которые, с одной стороны, описывают фазы в широком интервале энергий, а с другой — специально приспособлены к максимальному упрощению трехчастичных расчетов. Ко второй группе отнесем потенциалы, для построения которых привлекаются представления о мезонной природе ядерных сил.

С эвристической точки зрения, по-видимому, следует отдать предпочтение тем потенциалам, которые не приводят к амплитудам с экзотическими аналитическими свойствами и, кроме того, удовлетворяют условиям насыщения ядерных сил.

Очевидно, что с такими потенциалами трудно проводить многочастичные расчеты, однако нам кажется, что для извлечения деталь-

ной информации из свойств многонуклонных систем следует совершенствовать технику расчетов именно с такими потенциалами.

К настоящему времени написано большое число обзоров [2—6], довольно подробно излагающих многочисленные аспекты ядерной проблемы трех тел.

В этом обзоре мы хотели бы акцентировать внимание читателя в основном на двух физических характеристиках: энергии связи трития E_T и дублетной длине nd -рассеяния 2a . Такой выбор обусловлен тем, что, во-первых, большая часть всех расчетов трехчастичных характеристик относится именно к этим величинам. Во-вторых, расчеты этих величин проводились различными методами для широкого набора потенциалов. Анализируя результаты этих расчетов, мы хотели бы ответить на следующие вопросы.

1. Можно, ли, сопоставляя результаты расчетов E_T и 2a , установить различие между локальными NN -потенциалами? 2. Можно ли отличить локальные потенциалы от нелокальных? 3. Можно ли устранить или уменьшить имеющуюся неопределенность в параметрах effective range в состоянии 1S_0 ?

С этих позиций кратко обсудим поведение форм-факторов и величину примеси P_{S_0} -состояния смешанной симметрии.

При обсуждении перечисленных проблем, естественно, возникает вопрос о точности вычислений трехчастичных эффектов. В связи с этим в обзоре много места уделено методам решения уравнений для трех тел.

При описании методов расчетов обсуждаются не только те методы, которые уже сейчас позволяют проводить расчеты с локальными реалистическими потенциалами, но также и те методы, применение которых к модельным задачам обнаружило их высокую эффективность.

2. МЕТОДЫ

Приступая к изложению методов решения задачи трех тел, хотелось бы указать на следующие обстоятельства. Ряд предложенных методов может быть применен к расчету систем с числом частиц $N \geq 3$. При этом, как правило, эти методы приспособлены к вычислению характеристик только связанных состояний. С другой стороны, существует класс методов, применение которых позволяет найти решение и в непрерывном секторе, однако эти методы до сих пор применялись только к задаче трех тел. По существу, последняя группа методов представляет собой методы решения уравнений Фаддеева.

Изложение начнем с вариационного метода, который многие годы был единственным рабочим методом в ядерной задаче многих тел. Однако эффективность этого метода, дающего только верхнюю границу физических величин, снижается вследствие неоднозначного описания взаимодействия между нуклонами. Тем не менее в последние годы наметился определенный прогресс в использова-

нии вариационной техники. Этот прогресс можно связать, во-первых, с получением двусторонних оценок физических величин [7], во-вторых, с возможностью весьма рафинированного выбора пробных функций [8].

Один из наиболее изящных и простых методов получения нижней границы энергии связи был предложен в работе [7]. Дадим краткое описание этого метода. Пусть имеем N взаимодействующих тождественных фермионов с массой m , каждый из которых описывается координатой r_i , спиновой переменной s_i и изотопспиновой переменной t_i .

Рассмотрим трансляционно-инвариантный гамильтониан такой системы:

$$H = \sum_{i < j=1}^N \left\{ -\frac{\hbar^2}{2mN} (\nabla_{r_i} - \nabla_{r_j})^2 + V_{ij} \right\},$$

где $V_{ij} = V[(r_i - r_j), \sigma_i, \sigma_j, \tau_i, \tau_j]$ — потенциал взаимодействия. Пусть имеем некоторую пробную функцию

$$\Phi_A(\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_N; s_2, s_3, \dots, s_N; t_2, t_3, \dots, t_N),$$

антисимметричную при перестановке всех переменных любой пары частиц. Здесь введены новые координаты:

$$\rho_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N r_i; \quad \rho_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (r_1 - r_2); \quad \rho_i \equiv \sum_{j=1}^A A_{ij} r_j;$$

A — ортогональная матрица. Имеем

$$(\Phi_A, V_{ij} \Phi_A) = (\Phi_A, V_{12} \Phi_A);$$

$$(\Phi_A, [\nabla_{r_i} - \nabla_{r_j}]^2 \Phi_A) = (\Phi_A, [\nabla_{r_1} - \nabla_{r_2}]^2 \Phi_A) = 2(\Phi_A, \Delta_{\rho_2} \Phi_A);$$

для энергии получаем

$$E(\Phi_A) \equiv \frac{(\Phi_A, H \Phi_A)}{(\Phi_A, \Phi_A)} = \frac{(\Phi_A, \mathcal{H} \Phi_A)}{(\Phi_A, \Phi_A)},$$

где

$$\mathcal{H} \equiv -(N-1) \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\rho_2} + \frac{N(N-1)}{2} V(\sqrt{2} \rho_2, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2). \quad (1)$$

Разложим точную волновую функцию основного состояния по собственным функциям гамильтониана (1):

$$\mathcal{H} \phi_i = \varepsilon_i \phi_i;$$

$$\Psi = \sum_i C_i \phi_i(\rho_2) \psi_i(\rho_3, \dots, \rho_N; s_3, \dots, s_N; t_3, \dots, t_N).$$

Из условия нормировки точной функции имеем

$$(\Psi, \Psi) = \sum_i |C_i|^2 = 1$$

и

$$E_0 = (\Psi, H\Psi) = (\Psi, \mathcal{E}\Psi) = \sum_i' |C_i|^2 \varepsilon_i, \quad (2)$$

где штрих означает суммирование по энергиям антисимметричных состояний двухчастичной задачи. Из уравнения (2) получаем нижнюю границу для E_0 :

$$E_0 \geq \varepsilon_0,$$

где ε_0 — энергия самого низкого антисимметризованного состояния двухчастичной задачи. Для случая $N=3$ имеем*

$$E_3 \geq 2E_2 \left\{ \frac{3}{2} V \left(\frac{r\sqrt{2}}{a} \right) \right\}.$$

Оригинальный метод вариационной оценки энергии связи H^3 был предложен в работе [9]. Суть метода состоит в том, что в качестве вариационных параметров рассматриваются значения волновой функции в точках, которые используются для численного нахождения среднего значения гамильтониана по этим функциям. Этот метод успешно был применен в расчетах с потенциалами, содержащими отталкивание.

В последние годы большое внимание уделялось [8] вариационным расчетам свойств трехнуклонных систем с использованием реалистических потенциалов (потенциал Хамада — Джонстона и др.). При этом для оценки длин nd -рассеяния использовался формализм, развитый в работах [10, 11]. В случае рассеяния в дублетном состоянии для длины рассеяния получается следующая оценка:

$$A \leq A_t - \int u_t \alpha H u_t d\tau + \frac{1}{\varepsilon_t} \left(\int u_{\varepsilon t} \alpha H u_t d\tau \right)^2$$

или

$$A \leq A_t - \frac{\text{макс}}{\lambda} \cdot \frac{4M}{3\hbar^2} \langle u_t + \lambda u_{\varepsilon t} | H - \varepsilon_d | u_t + \lambda u_{\varepsilon t} \rangle,$$

где u_t и $u_{\varepsilon t}$ — пробные функции рассеяния и связанного состояния трех частиц соответственно; H — полный гамильтониан системы; $\alpha = 2M/\hbar^2$; ε_t — энергия связи в системе, описываемой волновой функцией $u_{\varepsilon t}$; ε_d — энергия дейтона. Как многократно отмечалось, главным недостатком всех вариационных расчетов является произвол в выборе функциональной зависимости пробных функций. Обычно вид пробной функции определяется интуитивно (исключение — работа [9]), что затрудняет возможность количественной оценки точности расчета.

Одной из интересных попыток избавиться от этого недостатка является работа [12]. Пусть имеем эрмитовский ограниченный оператор H (гамильтониан системы) с верхней границей Λ и для

* В работе [50] содержатся расчеты этим методом реального трития с набором потенциалов без отталкивания.

простоты доказательств — в системе трех нуклонов только одно связанное состояние λ_0 .

Рассмотрим совокупность полиномов $P_n(x)$, таких, что

- а) $|P_n(x)| < 1$ при $0 \leq x \leq \Lambda$;
 б) $P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ при $x < 0$.

Пусть f — некоторая пробная функция, тогда можно показать, что последовательность функций $f_n / \|f_n\|$, где $f_n = P_n(H)f$ имеет своим пределом собственную функцию гамильтониана H , принадлежащую собственному значению λ_0 , а величина $\mu_n = \frac{\langle f_n | H | f_n \rangle}{\|f_n\|^2 - \|f\|^2}$ стремится к собственному значению.

Для собственного значения λ_0 получается оценка сверху и снизу:

$$\mu_n - \frac{\|f\|^2(\mu - \mu_n)}{\|f_n\|^2 - \|f\|^2} \leq \lambda_0 \leq \mu_n; \quad (3)$$

$$\|f_n\| > \|f\|,$$

где μ — среднее значение гамильтониана H по функциям f . Заметим, что сходимость итераций значительно быстрее для собственного значения [$\mu_n - \lambda_0 \sim 0(1/\|f_n\|^2)$], чем для собственной функции [$\mu_n - \mu_0 \sim 0(1/\|f_n\|)$]. Так как сходимость определяется скоростью стремления к бесконечности величины $\|f_n\|$ при $n \rightarrow \infty$, то ясно, что среди всех полиномов, удовлетворяющих условиям а и б, следует выбрать те, которые наиболее быстро стремятся к бесконечности при $n \rightarrow \infty$. Такими полиномами являются полиномы Чебышева:

$$P_n(x) = T_n\left(1 - \frac{2x}{\Lambda}\right).$$

Расчет энергии связи трехчастичной бесспиновой системы проводился с потенциалом вида

$$V(r) = -V_0 e^{-\kappa r^2},$$

и для λ_0 была получена величина $(-9,7813 \pm 0,0024) \text{ Мэв}$. Как видим, предложена регулярная процедура для получения волновой функции, сколь угодно близкой к точному решению. Однако авторы замечают, что для сингулярных потенциалов непосредственное применение процедуры может оказаться не столь эффективным.

Другой регулярной процедурой является так называемый метод К-гармоник [13], или гиперсферических функций [14]. Сначала этот метод был применен в задаче трех тел, затем его удалось обобщить на произвольное число частиц, взаимодействующих посредством парных короткодействующих потенциалов [15]. Продемонстрируем суть метода на примере системы трех тождественных бесспиновых частиц. Волновая функция в системе центра инерции

зависит от двух векторов ξ и η :

$$\eta = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\sqrt{2}}; \quad \xi = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} - \mathbf{r}_3 \right). \quad (4)$$

Объединим оба вектора в один шестимерный вектор с длиной $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$. Замечаем, что свободный гамильтониан трех частиц

$$H_0 = -\Delta_\xi - \Delta_\eta \quad (5)$$

инвариантен относительно вращений в шестимерном пространстве.

Рассмотрим собственные функции $P_{K\nu}$ гамильтониана H_0 , преобразующиеся по неприводимому представлению веса K -группы вращений в шестимерном пространстве. Так как группа вращений в трехмерном пространстве и группа перестановок из трех предметов являются подгруппами группы O_6 , то собственные функции $P_{K\nu}$ являются удобным базисом для построения волновой функции трех тел, описывающей физическое состояние с данным полным моментом и заданной перестановочной симметрией. Имеем

$$P_{K\nu}(\xi, \eta) = \rho^K - U_{K\nu} \left(\frac{\xi}{\rho}, \frac{\eta}{\rho} \right) = \rho^K - U_{K\nu}(\Omega_5),$$

где $U_{K\nu}$ — угловая часть собственных функций $P_{K\nu}(\xi, \eta)$.

Волновую функцию связанного состояния трех частиц $\Psi(\xi, \eta)$ (с полным моментом $L = 0$) будем искать в виде разложения по полному набору угловых функций пяти переменных:

$$\Psi(\xi, \eta) = \sum_{K\nu} \chi_{K\nu}(\rho) U_{K\nu}(\Omega_5). \quad (6)$$

Интегрируя по углам Ω_5 для функций $\chi_{K\nu}(\rho)$, находим систему одномерных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^5} \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\rho^5 \frac{d\chi_{K\nu}}{d\rho} \right) + \left(E - \frac{K(K+4)}{\rho^2} \right) \chi_{K\nu} + \\ + W_{KK'\nu\nu'}(\rho) \chi_{K\nu} = \sum_{K'\nu'} W_{KK'\nu\nu'}(\rho) \chi_{K'\nu'}(\rho), \end{aligned} \quad (7)$$

где $W_{KK'\nu\nu'}(\rho) \equiv \langle K\nu | V | K'\nu' \rangle$ — матричный элемент потенциала по функциям $U_{K\nu}(\Omega_5)$. Если бы взаимодействие между частицами $V = V_{12} + V_{13} + V_{23}$ было инвариантно относительно вращений в шестимерном пространстве (как это имеет место в случае осцилляторного парного взаимодействия), то вместо системы (7) мы бы имели систему незацепляющихся уравнений. Поэтому ясно, что сходимость разложения (6) тем быстрее, чем меньше реальный потенциал V нарушает вращательную инвариантность в шестимерном пространстве, и наоборот. Заметим, что такой критерий сходимости не зависит в явном виде от конкретных свойств динамической системы, таких, как энергия или размер системы. С другой стороны, сходимость разложения (6) безусловно зависит [15] от свойств рассматриваемого состояния, например сходимость будет различной

для разложения функций основного и возбужденного состояний системы либо для функций, описывающих системы с разным числом частиц. Ясно, что решения оборванной системы уравнений (7) обладают свойством вариационности.

В работе [13] уравнения (7) решались для системы H^3 с использованием трех различных потенциалов, описывающих данные по NN -рассеянию в пределе effective range. Решение системы из трех зацепляющихся уравнений с потенциалом прямоугольной ямы приводит к следующему результату:

$$8,42 \leq E_T \leq 8,43.$$

В работе [16] решалась система четырех уравнений также с потенциалом прямоугольной ямы, при этом энергия трития оказалась равной 8,7 Мэв. Наконец, наиболее аккуратные расчеты энергии связи трития с потенциалами, содержащими отталкивание, были проделаны в работе [14], где решалась система из десяти зацепляющихся уравнений*. Следует заметить, что в работе [14] использовалась несколько отличная от полиномов $U_{KV}(\Omega)$ система базисных функций, обеспечивающих более быструю сходимость разложения. В качестве иллюстрации сходимости приведем результат [14] расчета энергии связи E_T для потенциала Волкова и потенциала Гаусса без отталкивания**.

Потенциал	K							Вариационный расчет
	0	2	3	4	5	7	9	
Волкова	7,708	8,079	8,330	8,377	8,417	8,452	8,462	8,447
Гаусса	9,207	9,614	9,747	9,766	9,7757	9,7806	9,7815	9,7813 ± 0,0024 [12]

Мы сделали обзор методов вычисления энергии связи систем с числом частиц $N \geq 3$. Рассмотрим теперь методы, которые до сих пор применялись только к трехчастичным системам. Как отмечалось, эти методы оперируют с уравнениями Фаддеева, что позволяет универсальным образом трактовать как задачу о связанном состоянии, так и задачи непрерывного спектра.

Как известно, для состояний с фиксированным полным моментом уравнения Фаддеева представляют собой систему двумерных интегральных уравнений.

* Методом K -гармоник обширные расчеты свойств трехнуклонных систем проводились позднее в работах [47, 48]. Сходящийся для всех центральных потенциалов, этот метод не дает сходящихся результатов для потенциала Рейда [48].

** Из-за недостатка места мы опустили процедуру получения двусторонних оценок энергии связи, основанную на так называемом методе «промежуточных» гамильтонианов [49].

Для состояния с $L = 0$ обычно ограничиваются конфигурацией, в которой участвуют относительные орбитальные моменты $l = 0$. Вклад высших конфигураций оказывается пренебрежимо малым [12, 36]. В этом приближении уравнение Фаддеева для волновой функции системы трех бесспиновых частиц в импульсном представлении имеет вид

$$\Psi(k, p, p_0) = \varphi(k) \frac{\delta(p - p_0)}{p^2} + \frac{1}{Z - \frac{3}{4} p^2 - k^2} \int dk' dp' \frac{k' p'}{\pi^2 p} t(k, Q, Z - \frac{3}{4} p^2) \Psi(k', p', p_0);$$

$$Q^2 \equiv k'^2 + \frac{3}{4} p'^2 - \frac{3}{4} p^2; \quad (8)$$

Z — полная энергия трех частиц. В случае задачи рассеяния на связанном состоянии неоднородный член является произведением плоской волны падающей частицы на волновую функцию связанного состояния двух частиц $\varphi(k)$. В задаче о связанном состоянии трех частиц неоднородный член в уравнении (8) отсутствует. Ввиду того что ядро этого уравнения определяется немассовой двучастичной t -матрицей, задача существенно упрощается, если t -матрицу можно представить в факторизованном виде. В этом случае уравнение (8) сводится к системе одномерных интегральных уравнений. Поэтому естественно, что большинство предложенных методов решения уравнения (8) сводится к процедурам получения парциальной двучастичной t -матрицы вне массовой поверхности в факторизованном виде. В настоящее время отсутствуют экспериментальные сведения о поведении двучастичной t -матрицы вне массовой поверхности. Будем пользоваться уравнением Липпмана — Швингера, которое по заданному парному потенциалу определяет t -матрицу вне энергетической поверхности. Это уравнение имеет вид

$$t_l(k, k', Z) = V_l(k, k') - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty V_l(k, k'') \frac{k''^2 dk''}{k''^2} \frac{t_l(k'', k', Z)}{2\mu_{12} - Z - i\varepsilon} \quad (9)$$

на массовой поверхности

$$t_l(k, k, \frac{k^2}{2\mu_{12}}) = \frac{-1}{2\pi^2 m k} e^{i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k),$$

где $\delta_l(k)$ — фаза рассеяния;

$$V_l(k, k') = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty r^2 dr V(r) j_l(k, r) j_l(k', r); \quad (10)$$

$V(r)$ — локальный потенциал взаимодействия двух частиц.

Из уравнения (9) следует, что если потенциал $V_l(k, k')$ факторизован по переменным k, k' , то и t -матрица, полученная в результате решения этого уравнения, также будет факторизованной по тем же переменным.

Рассмотрим несколько методов решения уравнения (9), которые приводят к сепарабельной t -матрице вне массовой поверхности.

Одним из таких методов является метод Бубнова — Галеркина [17]. Пусть имеем короткодействующий потенциал одного знака, (например, притягивающий) $V(r) = V_0 U(r)$ (V_0 — глубина потенциала). Введем систему полиномов $f_{l\lambda}(r)$, ортогональных с весом $U(r)$ ($f_{l\lambda}(r) \sim r^l$ при $r \rightarrow 0$):

$$\int_0^{\infty} r^2 dr U(r) f_{l\lambda}(r) f_{l\lambda'}(r) = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (11)$$

Используя полноту набора $f_{l\lambda}(r)$, имеем

$$r r' U^{1/2}(r) U^{1/2}(r') \sum_{\lambda} f_{l\lambda}(r) f_{l\lambda}(r') = \delta(r-r'),$$

l -компоненту фурье-образа потенциала $V_l(k, k')$ можно представить в виде

$$V_l(k, k') = V_0 \sum_{\lambda} M_{l\lambda}(k) M_{l\lambda}(k'), \quad (12)$$

где

$$M_{l\lambda}(k) = \int_0^{\infty} r^2 dr U(r) f_{l\lambda}(r) j_l(kr).$$

Подставляя (12) в (9), получаем для парциальной t -матрицы выражение

$$t_l(k, k', Z) = V_0 \sum_{\lambda} M_{l\lambda}(k) C_{l\lambda}(k', Z). \quad (13)$$

Коэффициенты $C_{l\lambda}(k, Z)$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\sum_{\lambda'} [\delta_{\lambda\lambda'} - B_{l\lambda\lambda'}(Z)] C_{l\lambda'}(k, Z) = M_{l\lambda}(k), \quad (14)$$

где

$$B_{l\lambda\lambda'}(Z) = \frac{2V_0}{\pi} \int_0^{\infty} p^2 dp \frac{M_{l\lambda}(p) M_{l\lambda'}(p)}{|p^2 - Z - i\epsilon|}.$$

Развитый метод был применен к расчетам энергии связи H^3 и длин nd -рассеяния [18]*. Однако практическое построение системы ортонормированных функций $f_{l\lambda}$ для потенциала произвольной формы наталкивается на серьезные затруднения.

Другой метод сепарабельного представления t -матрицы основан на разложении Гильберта — Шмидта [19]. В методе Гильберта —

* В настоящее время этот метод обобщен для потенциалов, содержащих отталкивание.

Шмидта решение уравнения Липпмана — Швингера [9] ищется в виде разложения по системе функций $\Phi_n^l(k, Z)$ однородной задачи

$$\lambda_n^l(Z) \Phi_n^l(k, Z) = \int_0^\infty p^2 dp \frac{V_l(k, p) \Phi_n^l(p, Z)}{2\mu_{12} p^2 - Z - i\varepsilon}, \quad (15)$$

где

$$\lambda_n^l(Z = -\varepsilon_n) = 1. \quad (16)$$

Это разложение имеет вид

$$t_l(k, k', Z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\lambda_n^l(Z)}{1 - \lambda_n^l(Z)} \Phi_n^l(k, Z) \Phi_n^l(k', Z). \quad (17)$$

Приближение состоит в обрыве ряда (17). Как и в других методах, возникает вопрос о быстроте сходимости этой процедуры. Как следует из свойства (16) и из выражения (17), t -матрица в любом приближении имеет полюса, соответствующие связанным состояниям двух частиц. Отсюда следует, что разложение (17) является наиболее естественным и быстро сходится для двухчастичных систем, имеющих связанные состояния. Для потенциалов гладких без отталкивания (прямоугольная яма, потенциал Хюльтена) ряд (17) быстро сходится, особенно в области отрицательных Z ($\lambda_n \sim 1/n^2$ для прямоугольной ямы при $n \gg 1$) [20]. В области непрерывного спектра сходимость существенно ухудшается [21]. Предложенный метод был распространен на класс локальных потенциалов, включающих бесконечное отталкивание на малых расстояниях [22]. Сходимость процедуры в этом случае была проверена для потенциала прямоугольной ямы с отталкиванием. При практических расчетах этот метод имеет серьезное ограничение. Дело в том, что не для всех потенциалов можно получить явный вид функций Гильберта — Шмидта $\Phi_n^l(k, Z)$, особенно трудно это сделать в случае реалистических локальных потенциалов.

Имея в виду трудности построения систем базисных функций в методах Бубнова — Галеркина и Гильберта — Шмидта, мы изложим метод, в значительной степени свободный от этих трудностей [23]. Пусть нам задан локальный потенциал $V(r)$ произвольной формы. Найдем l -компоненту фурье-образа этого потенциала $V_l(k, k') \equiv V(k, k')$. Введем матрицу $d_{ij} \equiv V(s_i, s_j)$ ($ij = 1, 2, \dots, N$), где s_i — некие фиксированные точки на осях переменных k и k' . Образуем функцию $\tilde{V}(k, k')$:

$$\tilde{V}(k, k') = \sum_{i, j=1}^N [d^{-1}]_{ij} V(k, s_i) V(k', s_j). \quad (18)$$

Заметим, что приближенная функция $\tilde{V}(k, k')$ совпадает с функцией $V(k, k')$, если k или k' равны одному из параметров s_i . Производные по k и k' функций V и \tilde{V} также совпадают в точках s_i . Подби-

рая в разложении (18) достаточное число слагаемых, а также выбирая соответственно параметры s_i , практически с любой точностью можно аппроксимировать функцию $V(k, k')$ функцией $\tilde{V}(k, k')$. Точность приближения при данном N можно характеризовать, например, величиной

$$\chi_0 = \frac{\min}{s} \chi(s_1, \dots, s_N),$$

где

$$\chi(s_1, \dots, s_N) = \frac{\int |V - \tilde{V}|^2 dk dk'}{\int V^2 dk dk'}. \quad (19)$$

Так как функция $V(k, k')$ убывает с ростом k или k' , то ясно, что разложение (18) сходится тем быстрее, чем сильнее это убывание. Подставляя разложение (18) в (9) для t -матрицы, получаем следующее выражение:

$$\tilde{t}(k, k', Z) = \sum_{i,j} C_{ij}(Z) V(k, s_i) V(k', s_j), \quad (20)$$

где C_{ij} — элементы матрицы;

$$\hat{C}(Z) = [\hat{d} + 8\pi\mu_{12}\hat{I}(Z)]^{-1};$$

$$I_{ij}(Z) \equiv \int_0^\infty k^2 dk \frac{V(k, s_i) V(k, s_j)}{k^2 - 2\mu_{12}Z - i\varepsilon}.$$

Если величина χ_0 сколь угодно мала, то и приближенная t -матрица (20) тоже сколь угодно мало отличается от точной.

Изложенный метод обладает тем достоинством, что применим практически к любым короткодействующим потенциалам [24].

В связи с развитием вычислительной техники появляется возможность прямого решения двумерных уравнений Фаддеева (8). Мы не будем здесь обсуждать результаты модельных расчетов такого сорта [25], а изложим процедуру [26], которая была применена к расчету свойств трехнуклонных систем с реалистическими потенциалами.

Если в уравнении для трехчастичной T -матрицы ввести функцию $F \equiv T - \varphi$, где φ — неоднородный член, то для F получим интегральное уравнение

$$F(Z) = F_0(Z) - K(Z)F(Z) \quad (21)$$

с ядром типа Гильберта — Шмидта. Вместо ядра $K(Z)$ для удобства введем ядро $\lambda K(Z)$, где λ — комплексный параметр. Очевидно, что решение уравнения с таким ядром будет функцией этого параметра. Более того, известно, что это решение будет мероморфной функцией от λ с полюсами λ_α , которые определяются характеристическими числами уравнения с ядром $\lambda K(Z)$; поэтому решение полученного уравнения формально можно представить

в виде

$$F(Z, \lambda) = \sum_{\alpha} \frac{B_{\alpha}(Z)}{\lambda_{\alpha}(Z) - \lambda} + R(Z, \lambda), \quad (22)$$

где $R(Z, \lambda)$ — целая функция от λ . Разлагая $F(Z, \lambda)$ и $R(Z, \lambda)$ в ряде по степеням λ :

$$\begin{aligned} F(Z, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F_n(Z); \\ R(Z, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n R_n(Z), \end{aligned} \quad (23)$$

из уравнения (22) для коэффициентов этого разложения получим соотношение

$$F_n(Z) = \sum_{\alpha} \frac{B_{\alpha}(Z)}{\lambda_{\alpha}^{n+1}(Z)} + R_n(Z). \quad (24)$$

Ввиду того что $R(Z, \lambda)$ является целой функцией от λ , имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}(Z)}{F_n(Z)} = \frac{1}{\lambda_0(Z)}, \quad (25)$$

где $\lambda_0(Z)$ — величина наименьшего характеристического числа уравнения (21).

Чтобы найти энергию связи основного состояния системы трех частиц, следует отыскать только Z , для которого последовательность $r_n \equiv \frac{F_{n+1}}{F_n}$ стремится к единице.

Изложенный метод был успешно применен к расчету энергии связи и форм-факторов трития и ${}^3\text{He}$ [27, 28].

Резюмируя, следует отметить, что точность всех приближенных процедур, как правило, характеризуется скоростью сходимости этих процедур. Однако такая оценка не является универсальной характеристикой точности расчета, так как быстрота сходимости может зависеть от характера вычисляемой физической величины. Так, в некоторых методах сходимостью для волновых функций значительно хуже, чем для энергии связи. Поэтому желательно вводить критерии точности расчета на уровне двучастичной задачи, т. е. независимо от вычисляемых трехчастичных характеристик. В этом случае точность расчета будет определяться только точностью аппроксимации двучастичной t -матрицы вне массовой поверхности. Характеризуя сходимостью методов, заметим, что методы, оперирующие с аппроксимацией двучастичной t -матрицы, как правило, уже во втором приближении воспроизводят больше 90% точного значения физической величины для любых потенциалов. Последующие приближения приводят лишь к процентным добавкам. В противоположность этому, метод гиперсферических функций, например, дает для некоторых потенциалов с отталкиванием во втором

приближении лишь 30% точного значения. Необходимо заметить также, что процедура приближения в методах Бубнова — Галеркина и Гильберта — Шмидта зависит от энергии, и поэтому сходимость разная для разных знаков энергии. В методе Бейтмана, хотя сама процедура аппроксимации не зависит от энергии, ряд для приближенной t -матрицы сходится быстрее для Z , близких к нулю.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Этот раздел начнем с систематизации результатов различных расчетов энергии связи трития E_T и дублетной длины рассеяния 2a . Для нелокальных потенциалов типа Ямагучи такая систематизация проводилась, в частности, в работах [29].

Как известно, в литературе приводится несколько наборов параметров effective range для NN -рассеяния в состоянии 1S_0 [30]. Были надежды на то, что расчет трехчастичных эффектов, проводимый для различных значений синглетных длин рассеяния и эффективного радиуса a_s и r_s , соответственно сможет устранить или сузить имеющуюся неоднозначность. Расчеты показали, что энергия связи E_T и дублетная длина 2a очень чувствительны к значению r_s и значительно менее чувствительны к величине a_s . Этот факт был обнаружен во всех расчетах независимо от формы и типа NN -потенциала. Поэтому представляется разумным принять зависимость $E_T(r_s)$ и $^2a(r_s)$ в качестве основы систематизации имеющихся в настоящее время расчетов.

Приводя графики функций $E_T(r_s)$ и $^2a(r_s)$, подчеркиваем, что их следует рассматривать только как демонстрацию явно выраженной тенденции в поведении этих величин, а не как строгую функциональную зависимость. Ясно, что регулярная зависимость от r_s может нарушаться как вследствие физических предположений (например, учет тензорных сил в явном виде или с помощью эффективного потенциала), так и вследствие неточностей, вносимых тем или иным методом расчета.

Результаты всех расчетов E_T и 2a разделим на две группы. К первой группе отнесем расчеты, в которых использовались потенциалы без отталкивания, воспроизводящие только низкоэнергетическое поведение фаз нуклон-нуклонного рассеяния. Ко второй группе отнесем расчеты, использующие потенциалы с отталкиванием, воспроизводящие экспериментальные фазы, естественно, в более широком интервале энергий.

На рис. 1, a показана зависимость энергии связи 3H от синглетного радиуса, рассчитанная с использованием потенциалов различной формы без отталкивания (локальных и нелокальных).

Отметим характерные особенности приводимых результатов. Во-первых, в интервале $2,4 \leq r_s \leq 2,8$ ферми почти все расчеты как с локальными, так и с сепарабельными потенциалами дают завышенные значения энергий связи по сравнению с экспериментальным значением.

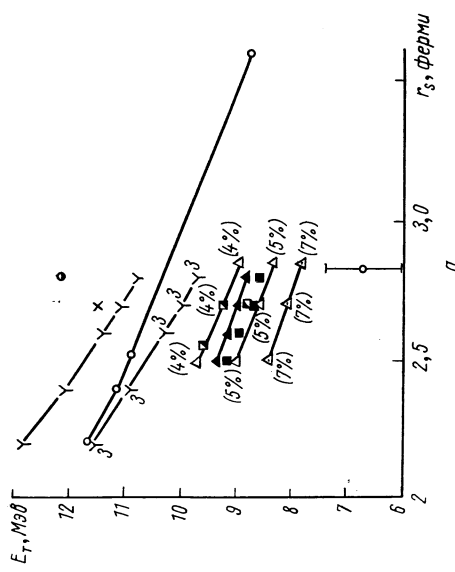
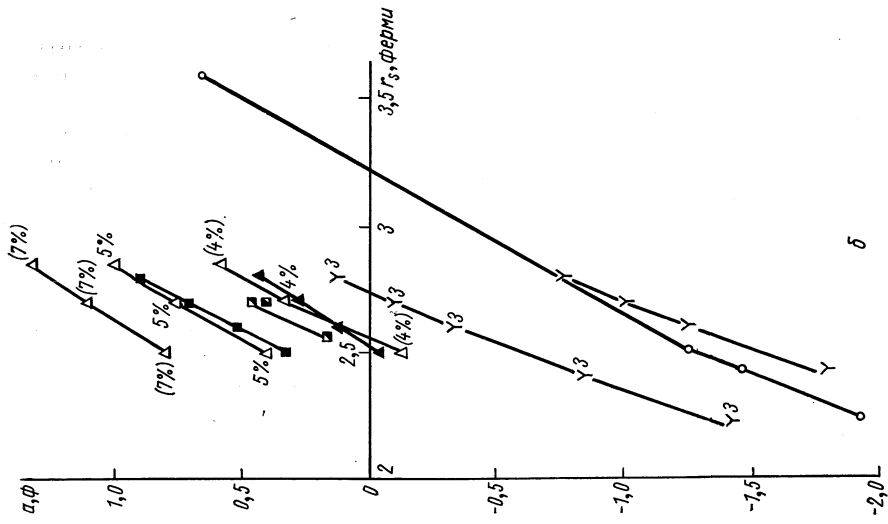


Рис. 1. Зависимости E_T и α от r_s , рассчитанные с использованием потенциалов без отталкивания (локальных и нелокальных):

Y , Y^3 — расчет с сепарабельными потенциалами типа Ямагучи [29]; \blacksquare [40], \blacktriangle [20,37], \blacksquare [19] — расчет с потенциалом прямоугольной ямы; \bullet — расчет с потенциалом Юкавы [18]; \times — расчет с потенциалом Хюльбена [21]; \triangle — расчет с потенциалом Ямагучи с учетом тензорных сил [29]; \blacktriangle — расчет с потенциалом гауссовского типа [40]; \square — расчет с трехчастичным взаимодействием [29]; \circ — расчет с экспоненциальным потенциалом [40].

Во-вторых, для каждого локального потенциала обнаруживается монотонное (почти линейное) падение энергии связи с ростом r_s . Аналогичное поведение $E_T(r_s)$ было установлено в расчетах с сепарабельными потенциалами. В-третьих, при фиксированном значении r_s обнаружилась сильная зависимость энергии связи от типа потенциала, например, при переходе от потенциала прямоугольной ямы к потенциалу Юкава при $r_s = 2,8$ ферми E_T меняется от 8,7 до 12,1 Мэв. Это различие, по-видимому, обусловлено существенно различным поведением этих потенциалов на малых расстояниях.

На рис. 1, б зависимость дублетной длины рассеяния дана как функция синглетного эффективного радиуса. В отличие от поведения $E_T(r_s)$ величина ${}^2a(r_s)$ монотонно (почти линейно) возрастает с ростом r_s . Так же как и в предыдущем случае, обнаруживается сильная зависимость от типа потенциала.

Сопоставляя зависимости $E_T(r_s)$ и ${}^2a(r_s)$ для разных форм потенциалов между собой, видим, что, несмотря на сильное различие этих величин от типа потенциала, нельзя отличить потенциал локальный от нелокального. Однако с точки зрения близости к эксперименту наиболее предпочтительными потенциалами без отталкивания являются несингулярные потенциалы типа прямоугольной ямы со значением $2,7 \leq r_s \leq 2,8$ ферми.

Перейдем к обеуждению расчетов, в которых используются потенциалы с отталкиванием (так называемые реалистические потенциалы). Здесь, к сожалению, существенно меньше результатов, чем в предыдущем случае. При этом в значительной части расчетов находится только энергия связи E_T , результатов же по дублетной длине рассеяния еще меньше.

На рис. 2, а и 2, б приведены имеющиеся точки по энергии связи и дублетной длине для различных значений r_s , вычисленные с потенциалами разной формы. Несмотря на малость точек, при заданной форме потенциала можно обнаружить такую же, как и для потенциалов без отталкивания, тенденцию в поведении $E_T(r_s)$ и ${}^2a(r_s)$. Однако по сравнению с расчетами, используемыми потенциалами без отталкивания, в этом случае мы имеем значительно более слабую зависимость от формы потенциала. В этом отношении особенно показательными являются результаты работы [9] (см. рис. 2, а). Следует заметить, что неточность методов, используемых разными авторами, по-видимому, превосходит различие в результатах, обусловленное разной формой потенциалов, поэтому при уточнении результатов следует ожидать еще большего сближения прямых на каждом из рис. 2, а и 2, б.

Таким образом, необходимо прийти к выводу о том, что проводя расчеты E_T и 2a с потенциалами, описывающими фазы 1S_0 и 3S_1 в широком интервале энергий при фиксированном значении r_s , нельзя отдать предпочтение ни одному из этих реалистических потенциалов. Следует заметить, что из данных по энергии связи [26, 31, 32] наиболее предпочтительным является значение

$r_s \approx 2,8 - 2,7$ ферми, в то время как, по данным эксперимента [33] и расчетов [32, 22] для дублетной длины, наиболее предпочтительным является значение $r_s \approx 2,4 - 2,5$ ферми, что противоречит гипотезе зарядовой независимости ядерных сил.

На рис. 3 показаны в плоскости $(E_T, {}^2a)$ те точки из предыдущих графиков, для которых существует одновременный расчет этих величин. Кроме того, нанесены результаты расчетов с учетом тен-

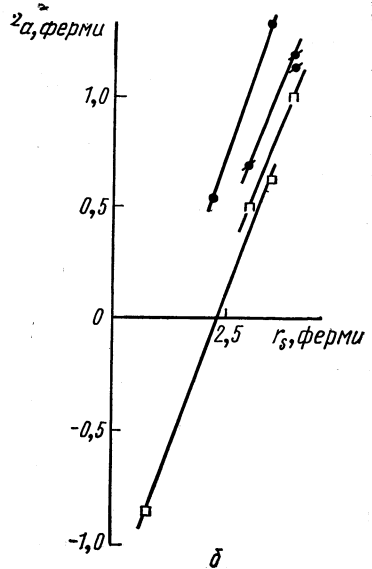
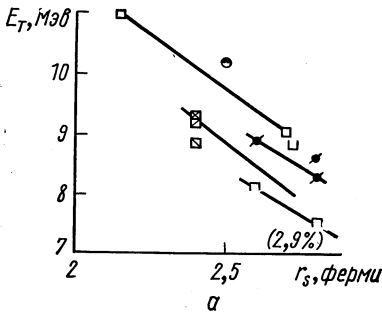


Рис. 2. Зависимости E_T и 2a от r_s , рассчитанные с использованием потенциалов, содержащих отталкивание:

● — расчет [31, 32] с потенциалом Даревича и Грина [41]; ● — расчет с потенциалом Малфлиета и Таиона [26, 31, 32]; □ — расчет с потенциалом типа прямоугольная яма с бесконечным отталкиванием [22]; ▨, ▩, ▪ — расчеты с потенциалами типа экспоненты, Гаусса и модифицированного Юкавы с бесконечным отталкиванием [9]; ○, ⊙_T — расчет с сепарабельным потенциалом с отталкиванием типа hard shell [42]; □ — расчет с потенциалом типа [26] с учетом тензорного взаимодействия [27, 28, 43]. Число в скобках указывает процент примеси D-волны в тритии; ⊕ — расчет с потенциалом Хамада — Джонсона [8, 44]; ⊖ — расчет с потенциалом Монгана [45]; □ — расчет с потенциалом Табакина [46]; ⊖ — эксперимент [33]; ⊖ — эксперимент [34]; ⊖ — эксперимент [35].

зорного взаимодействия сепарабельного вида [29], а также одна точка, соответствующая учету трехчастичных сил сепарабельного типа. Как видно из графика, почти все точки группируются вдоль прямых линий с одним и тем же наклоном.

Любопытно, что это явление, установленное в работе [29] для нелокальных потенциалов, как видим из рис. 3, имеет место для всех используемых до сих пор потенциалов, независимо от того, является ли потенциал локальным или упрощенным, эффективным или с явным учетом тензорного взаимодействия. Даже учет трехчастичных сил в том виде, как это делалось в работе [29], не нарушает этой закономерности.

В принципе расчеты с другими типами потенциалов (например, зависящими от скорости) могли бы привести к нарушению зависимости $E_T(^2a)$. Однако то многообразие потенциалов, для которого это правило выполняется, заставляет нас прийти к заключению о нединамическом, т. е. не зависящем от вида короткодействующего потенциала происхождении такой зависимости.

На рис. 3 мы нанесли также три набора экспериментальных данных [33—35]. Теоретические прямые $E_T(^2a)$ проходят за преде-

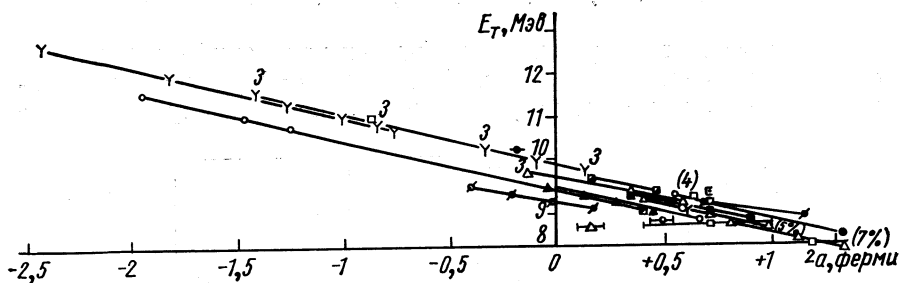


Рис. 3. Значения энергии связи E_T и дублетной длины рассеяния 2a для различных форм и наборов параметров парных потенциалов. Обозначения точек те же, что и на рис. 1 и 2.

лами экспериментов [33, 34]. Старый эксперимент [35] вследствие большой экспериментальной ошибки можно было бы совместить с теоретической прямой. Если действительно дублетная длина ~ 1 ферми, то сопоставление этого значения с результатами работы [32], где она оказалась равной 1,2 ферми, приводит к заключению о том, что более предпочтительным является значение $r_s = 2,8$ ферми*. Если же верным является эксперимент [34], то на основе существующих расчетов его можно было бы понять, либо произвольно вводя дополнительные члены в двухчастичную t -матрицу, исчезающие на массовой поверхности, либо нарушая симметрию волновой функции третия.

Продемонстрируем последнюю возможность. В уравнении Фаддеева для связанного состояния трех нуклонов, взаимодействующих в S -состоянии по парному движению, введем параметр α следующим образом:

$$v(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{1}{4} G_0(k, p, z) \int \left[\langle \mathbf{k} | t^t \left(z - \frac{3}{4} \cdot \frac{p^2}{m} \right) \left| -\frac{\mathbf{p}}{2} - \mathbf{p}' \right\rangle + \right. \\ \left. + \langle \mathbf{k} | t^t \left(z - \frac{3}{4} \cdot \frac{p^2}{m} \right) \left| \frac{\mathbf{p}}{2} + \mathbf{p}' \right\rangle \right] \times$$

* Следует помнить, что происхождение теоретической прямой $E_T(^2a)$ через экспериментальную точку ($E_T^0, ^2a_0$) еще не означает, что расчет правильный, так как такая ситуация может возникнуть при аномальных двухчастичных параметрах (см. работу [18], где в числе прочих в качестве иллюстрации использовалось значение $r_s = 3,6$ ферми).

$$\begin{aligned}
& \times \left[v \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{p}'}{2}, \mathbf{p}' \right) + \left(1 - \frac{2}{3} \alpha \right) 3u \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{p}'}{2}, \mathbf{p}' \right) \right] d\mathbf{p}'; \\
u(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = & \frac{1}{4} G_0(k, p, z) \int \left[\left\langle \mathbf{k} \left| t^s \left(z - \frac{3}{4} \cdot \frac{p^2}{m} \right) \right| -\frac{\mathbf{p}}{2} - \mathbf{p}' \right\rangle + \right. \\
& \left. + \left\langle \mathbf{k} \left| t^s \left(z - \frac{3}{4} \cdot \frac{p^2}{m} \right) \right| \frac{1}{2} \mathbf{p} + \mathbf{p}' \right\rangle \right] \times \\
& \times \left[\left(1 - \frac{2}{3} \alpha \right) 3v \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{p}'}{2}, \mathbf{p}' \right) + u \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{p}'}{2}, \mathbf{p}' \right) \right]. \quad (26)
\end{aligned}$$

При $\alpha = 0$ получаем систему обычных уравнений Фаддеева для связанного состояния со спином $1/2$. При $\alpha = 1$ уравнения фактически сводятся к одному уравнению, описывающему связанные

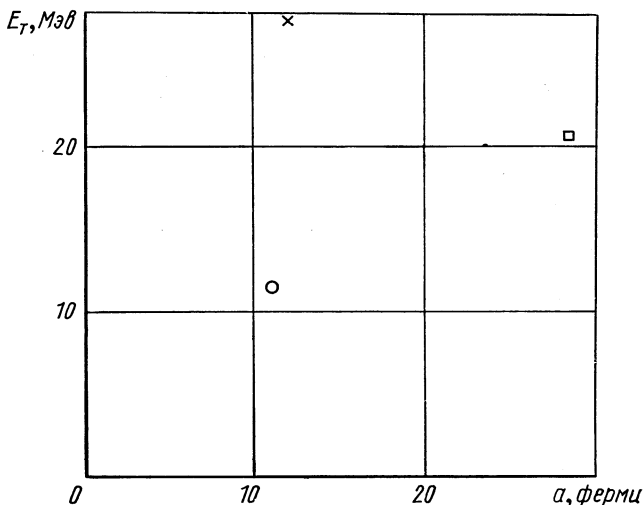


Рис. 4. Зависимость $E_T(a)$ для бесспинового случая:
 \times — потенциал Хюльгена [21]; \square — потенциал прямоугольной ямы [21]; \circ — потенциал Юкавы [32, 36].

состояния трех бесспиновых частиц. Таким образом, переход от $\alpha = 0$ к $\alpha = 1$ означает нарушение симметрии функции трития. Расчеты E_T и a для бесспинового случая проводились многими авторами [20, 32, 36]. На рис. 4 представлены точки в плоскости (E_T, a) для трех потенциалов. В отличие от расчетов для спиновых систем, точки не лежат на прямой, причем точность расчетов в бесспиновом случае выше точности расчетов реальных систем.

В связи с этим хотелось бы отметить, что одной из причин, приводящих к отклонению точек от прямой для реальных систем, является различная сходимость процедур вычисления энергии связи и длины рассеяния. Кроме того, имеется еще дополнительная зависимость этой сходимости от формы используемого потенциала,

так, например, при вычислении E_T и 2a с потенциалом прямоугольной ямы [37] оказалось, что при переходе от первого приближения ко второму энергия связи E_T меняется на 1,4%, в то время как дублетная длина рассеяния меняется на 13%. Поэтому ясно, что дисперсию точек вокруг прямой E_T (2a) можно уменьшить, существенно увеличивая точность вычисления дублетной длины.

В заключение сделаем несколько замечаний, касающихся вычисления электромагнитных форм-факторов ${}^3\text{He}$ и ${}^3\text{H}$. Расчет форм-факторов проводился многими авторами при различных предположениях; подробное обсуждение этих работ можно найти, например, в обзоре [2]. Большинство этих расчетов, осуществлялось с использованием вариационных волновых функций, содержащих ряд произвольных параметров, таких, как примесь состояния смешанной симметрии $P_{S'}$, примесь D -волны P_D , примесь состояния $T = 3/2$, $P_{T=3/2}$ и т. д. Эти параметры определялись из подгонки под экспериментальные значения форм-факторов. Такая процедура определения параметров содержит элемент произвола, что обусловлено произволом в выборе пробных функций, поэтому интерпретация экспериментальных данных может носить лишь качественный характер.

Поэтому если нас интересует информация о нуклон-нуклонном взаимодействии, которую мы хотим извлечь из данных по форм-факторам, необходимо оперировать с волновыми функциями ${}^3\text{He}$ и ${}^3\text{H}$, полученными из решения динамических уравнений. При таком подходе волновая функция системы зависит только от параметров используемого потенциала NN -взаимодействия. (Следует помнить, что при всех способах описания связанного состояния трех нуклонов в форм-факторах ${}^3\text{He}$ и ${}^3\text{H}$ остается неопределенность, обусловленная форм-фактором нейтрона.)

Подобного рода расчеты были начаты в работе [38], в которой использовался сепарабельный потенциал, и продолжены в работах [39, 16, 28, 31] с использованием локальных потенциалов. Во всех этих работах примесь состояния смешанной симметрии оказалась порядка 1—2%.

Все расчетные форм-факторы в области $q^2 \leq 10$ ферми⁻² лежат выше экспериментальной кривой, причем с ростом переданного импульса расхождение растет*. Это является следствием того, что в работах [16, 38, 39] отталкивание не учитывалось, а результат работ [28, 31] свидетельствует о том, что даже отталкивание типа $1/r$ оказывается недостаточным.

Здесь же заметим, что из результатов работы [31] следует, что при условии равенства нулю форм-фактора нейтрона даже грубый учет кулоновского взаимодействия в ${}^3\text{He}$ может привести в соот-

* В настоящее время имеются теоретические работы по форм-факторам ${}^2\text{He}$ и ${}^3\text{H}$ [51, 52], которые обнаруживают в той или иной форме расхождение с экспериментальными данными [53] в области $q^2 \geq 10,5$ ферми⁻².

ветствие теоретическую и экспериментальную кривые отношения зарядовых форм-факторов ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$, вычисленных по точным решениям уравнений Фаддеева с реалистическими потенциалами.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как видим, в настоящее время имеются достаточно рафинированные методы, применение которых позволяет уже сейчас с высокой точностью рассчитывать низкоэнергетические характеристики трехнуклонных систем. В связи с этим можно, например, надеяться на уменьшение неопределенности в значении синглетного эффективного радиуса, исходя из анализа наблюдаемых свойств трехнуклонных систем.

Как было видно выше, имеющееся в настоящее время большое различие в измерениях по дублетной длине nd -рассеяния сильно осложняет анализ, поэтому представляется желательным проведение новых измерений дублетной длины разными методами.

Исходя из подхода к ядерной проблеме трех тел, изложенного во введении, представляется также важным решить задачу трех тел с локальными реалистическими потенциалами в области энергий выше порога развала дейтона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фаддеев Л. Д. «Тр. Матем. ин-та АН СССР», XIX (1963).
2. Delves L. M., Phillips A. C. Rev. Mod. Phys., **41**, No. 3 (1969).
3. Amado R. D. Nucl. Sci., **19**, (1969); Kok L. P. Factorability and the Nuclear Three Body Problem. Nova Press, Groningen, 1966.
4. Mitra A. N. Advances Nucl. Phys., **3**, No. 4 (1969).
5. Харченко В. Ф. «Успехи физ. наук» (1970).
6. Noyes H. P., Fiedeldey H. Three particle scattering in Quantum Mechanics. Ed. by J. Gillespie. J. Nuttal, 1968.
7. Hall R. L., Post H. R. Proc. Phys. Soc., **90**, 381 (1967). Herndon R. C., Tang Y. C. Methods computational Phys., **6** (1966).
8. Delves L. M., Blatt J. M. Nucl. Phys., **A98**, 503 (1967); Delves L. M. et al. Phys. Lett., **28B**, 472 (1969).
9. Borysowicz J. Phys. Lett., **31B**, 433 (1970).
10. Spruch L., Rosenberg L. Phys. Rev., **116**, 1034 (1959).
11. Spruch L. et al. Phys. Rev., **118**, 184 (1960).
12. Fabri E., Fiorio G. Nuovo cimento, **60**, 210 (1969); Nucl. Phys., **A141**, 325 (1970).
13. Бадалян А. М., Симонов Ю. А. «Ядерная физика», **5**, 88 (1966); Симонов Ю. А. и др. «Ядерная физика», **8**, 313 (1966). Ziskendraht W. Ann. Phys., **35**, 13 (1965); Phys. Rev., **159**, 1448 (1967).
14. Fabre M., de la Ripelle. In: Proceedings International School of Theoret Phys. Predeal (10—23 Sept. 1969); Preprint IPNO/TH 184, Orsay, May 1970.
Preprint IPNO/TH 182, Orsay, April 1970.
15. Базь А. И., Жукков М. В. «Ядерная физика», **11**, 779 (1970).
16. Grayshaw D. D., Виск В. Phys. Rev. Lett., **24**, 733 (1970).
17. Ефимов В. Н. Phys. Nucl. **11** (1964); Ефимов В. Н. Препринт ОИЯИ Р-2546, Р-2890, Дубна, 1966.
18. Ефимов В. Н. Диссертация. Дубна, ОИЯИ, 1966.

19. Фаддеев Л. Д. Доклад на 5-й Международной конференции по физике электронных и атомных столкновений. Л., «Наука», 1967.
Ball J. S., Wong D. Y. Phys. Rev., **196**, 1362 (1968).
Sitenko A. G. et al. Phys. Lett., **28B**, 308 (1968).
20. Харченко В. Ф., Стороженко С. А. Препринт ИТФ-69-19. Киев, 1969.
21. Харченко В. Ф., Ситенко А. Г. Препринт ИТФ-69-72, Киев, 1969.
22. Fuda M. G. Phys. Rev., **178**, 1682 (1969). Харченко В. Ф., Шадчин С. Препринт ИТФ, Киев, 1970.
23. Беляев В. Б., Вжеционко Е. Препринт ОИЯИ Р4-4144, Дубна, 1968. Ахмадходжаев Б. и др. «Письма в ЖЭТФ», **9**, 557 (1969).
24. Ахмадходжаев Б. и др. «Ядерная физика», **11**, 1016 (1970); Беляев В. Б., Зубарев А. Л. «Ядерная физика», **14**, 545 (1971).
25. Wong D. Y., Zambotti G. Phys. Rev., **154**, 1540 (1967).
Kim Y. E. J. Math. Phys., **10**, 1491 (1969).
26. Malfliet R. A., Tjon J. A. Nucl. Phys., **A127**, 161 (1969).
27. Malfliet R. A., Tjon J. A. Phys. Lett., **29B**, No. 7. (1969).
28. Malfliet R. A., Tjon J. A. Phys. Lett., **30B**, No. 5 (1970); Ann Phys., **61**, 425 (1970).
29. Ситенко А. Г., Харченко В. Ф. Препринт ИТФ-68-11. Киев, 1968; Phillips A. C. Nucl. Phys., **A107**, 209 (1968); Phillips A. C. Phys. Rev., **142**, 984 (1966).
30. Noyes H. P. Nucl. Phys., **74**, 508 (1965).
31. Ахмадходжаев Б. и др. Препринт ОИЯИ Р4-4986. Дубна, 1970.
32. Беляев В. Б. и др. Препринт ОИЯИ Р4-5000. Дубна, 1970; «Ядерная физика», **12**, 923 (1970).
33. Koster L., Ungerer H. Z. Phys., **B219**, H3 (1969).
34. Van Oers W. T., Seagrave J. B. Phys. Lett., **28B**, 562 (1967).
35. Hurst D. G., Alcock J. Canad. J. Phys., **29**, 26 (1951).
36. Humberston J. W. et al. Phys. Lett., **27B**, 195 (1968).
37. Харченко В. Ф., Стороженко С. А. Препринт ИТФ-69-94, Киев, 1969.
38. Sirta V. K. et al. Phys. Rev., **153**, 1114 (1960).
39. Бадалян А. М. «Ядерная физика», **8**, 1128 (1968).
40. Ахмадходжаев Б. и др. Препринт ОИЯИ Р4-5318. Дубна, 1970.
41. Dargowich G., Green A. E. S. Phys. Rev., **164**, 1324 (1967).
42. Dabrowski J., Dworzeczka M., Preprint Report P № 1234/VII/PL, Warszawa, 1970.
43. Malfliet R. A., Tjon J. A. Preprint, N.Y., St. Univ., Stony Brock, No. 117 000 (1970).
44. Humberston J. W., Hennell M. A. Phys. Lett., **32B**, 85 (1970).
45. Brady T. Phys. Lett., **32B**, 85 (1970).
46. Cahill R. T., Sloan I. H. Phys. Lett., **31B**, 353 (1970).
47. Van Vageningen R., Erens G. Phys. Lett., **34B**, 184 (1971); Erens G. Bound-state properties of a model three-nucleon system calculated with a hyperspherical function basis. Dissertation, 1970.
48. Visschers J. L. Some calculations on three-body bound states. Dissertation, 1971.
49. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. Перев. с англ. М., «Мир», 1970.
50. Brady T. et al. Nucl. Phys., **A168**, 509 (1971).
51. Malfliet R. A., Tjon J. A. Report on Symposium Three body problem. Hungary, 1971.
52. Henuel M. A., Delves L. M. Report on Symposium Three body problem. Hungary, 1971.
53. Whitney R. R. Phys. Rev. Lett., **25**, 884 (1970).