

ТРЕХМЕРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА
РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПРОБЛЕМЫ
ДВУХ ТЕЛ

В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов,
Н. Б. Скачков

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ДУБНА

АННОТАЦИЯ

Квазипотенциальный подход к релятивистской проблеме двух тел развит на основе трехмерной гамильтоновой формулировки квантовой теории поля. На базе разложения по матричным элементам унитарных неприводимых представлений группы Лоренца введено и изучено релятивистское конфигурационное представление. Получено представление квазипотенциальной амплитуды рассеяния при высоких энергиях, являющееся обобщением нерелятивистской эйкональной формулы.

ABSTRACT

A quasipotential approach to the relativistic two-body problem is developed in the framework of the three-dimensional Hamiltonian formulation of the quantum field theory. On the base of the expansion in matrix elements of irreducible unitary representations of the Lorentz group the relativistic configuration representation is introduced and studied. A representation for the quasipotential scattering amplitude at high energies, generalizing the non-relativistic eikonal formula, is obtained.

ВВЕДЕНИЕ

Описание двухчастичной релятивистской системы — одна из центральных проблем квантовой теории поля. Для изучения этой проблемы в рамках четырехмерного формализма Фейнмана—Дайсона было выведено полностью ковариантное уравнение, получившее название уравнения Бете—Солпитера [1—3]. Обладая некоторыми преимуществами, данное уравнение не является полностью удовлетворительным. В частности, в рамках четырехмерного подхода Бете—Солпитера нет ясного физического толкования зависимости волновой функции от относительного времени двух частиц.

В то же время до появления ковариантного формализма теории поля релятивистская проблема двух тел исследовалась в рамках трехмерного подхода [4—6] (метод Тамма—Данкова). Естественно возникает вопрос: существует ли в рамках ковариантной теории поля такой формализм, который, будучи трехмерным и допуская вероятностную интерпретацию волновой функции, обладает в то же время главными преимуществами (перенормируемость, аналитичность и т. д.) полностью ковариантного метода.

Несколько лет назад А. А. Логунов и А. Н. Тавхелидзе разработали квазипотенциальный подход к задаче о взаимодействии двух релятивистских частиц [7]. Квазипотенциальный подход дает ответ на поставленный выше вопрос.

В этом подходе волновая функция выступает как непосредственное обобщение нерелятивистской волновой функции, поскольку она зависит от одного временного аргумента и подчиняется уравнению типа Шредингера. В импульсном представлении для случая бесспиновых частиц с равными массами m это уравнение записывается в виде (все импульсы отнесены к системе центра инерции):

$$(\mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2) \Psi_q(\mathbf{p}) = \frac{1}{4(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}} \int V(\mathbf{p}, \mathbf{k}, E_q) \Psi_q(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (\text{B.1})$$

Квазипотенциал $V(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q)$, являющийся в общем случае комплексной величиной, согласно работам [7—13], строится по теории возмущений с использованием или двухвременной функции Грина рассматриваемой системы, или амплитуды рассеяния на массовой поверхности. Наряду с уравнением (B.1) для волновой функции исследуется также уравнение Липпмана—Швингера [7—13] для инвариантной амплитуды рассеяния вне энергетической поверхности

$$T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E_q) + \frac{1}{4(2\pi)^3} \int V(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}} \cdot \frac{T(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{k^2 - q^2 - i\epsilon}. \quad (\text{B.2})$$

В последнее время был предложен еще один вариант квазипотенциального подхода к задаче о двух релятивистских частицах [14, 15]. Данный метод совсем не связан с формализмом Бете—Солпитера и ковариантным формализмом Фейнмана—Дайсона, а использует гамильтонову формулировку квантовой теории поля [16—18]. Отличительной чертой гамильтоновой формулировки квантовой теории поля является тот факт, что трехмерность заложена в нее с самого начала. Все частицы здесь даже в промежуточных состояниях — физические, т. е. лежат на массовых поверхностях. В силу трехмерности гамильтоновой формулировки она представляет собой естественную основу для вывода уравнений, описывающих двухчастичные релятивистские системы. Оказывается, что полученные в рамках гамильтоновой теории поля уравнения обладают еще одним важным свойством. Этим уравнениям в принципе можно придать ту же форму, какую имеют соответствующие нерелятивистские уравнения Шредингера и Липпмана—Швингера. Единственное отличие от нерелятивистских уравнений состоит в том, что если в последних интегрирование ведется по трехмерному евклидову импульсному пространству, то здесь все интегрирования производятся по трехмерному импульсному пространству Лобачевского. Это пространство реализуется на верхнем поле гиперболоида $\mathbf{k}_0^2 - \mathbf{k}^2 = m^2$, т. е. на массовой поверхности одной релятивистской частицы.

В этой связи оказался чрезвычайно плодотворным подход, основанный на детальном изучении тех свойств трехмерных релятивистских уравнений, которые связаны с группой Лоренца, играющей роль группы движений пространства Лобачевского. В результате удалось построить адекватную формулировку квазипотенциальной теории в конфигурационном представлении [19—24].

Глава 1

КОВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ ТЕОРИИ

1. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА $R(\lambda, \kappa)$ В p -ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Пусть
$$S(\infty, -\infty) = T \exp \left\{ -i \int H(x) d^4x \right\} \quad (1.1)$$

полная матрица рассеяния, отвечающая гамильтониану взаимодействия $H(x)$. В качестве примера будем рассматривать взаимодействие нуклонов с мезонами вида*

$$H(x) = -g : \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) \varphi(x) : \quad (1.2)$$

* Все операторы задаются в представлении взаимодействия.

($\Psi(x)$ — поле нуклонов и «антинуклонов» с массой M ; $\varphi(x)$ — поле псевдоскалярных нейтральных мезонов с массой m).

Матрицу $S(\infty, -\infty)$ можно понимать как предел вида

$$S(\infty, -\infty) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} S(\sigma, -\infty), \quad (1.3)$$

где σ — произвольная пространственно-подобная поверхность [в равенстве (1.3) она сдвигается в сторону бесконечно больших значений времени]. Как известно, $S(\sigma, -\infty)$ удовлетворяет уравнению Томонага—Швингера:

$$i \frac{\delta S(\sigma, -\infty)}{\delta \sigma(x)} = H(x) S(\sigma, -\infty). \quad (1.4)$$

Будем рассматривать в качестве поверхностей σ лишь пространственно-подобные плоскости, описываемые уравнением

$$\lambda x \equiv \lambda_0 x_0 - \lambda x = \sigma. \quad (1.5)$$

Здесь $\lambda = (\lambda_0, \lambda)$ — вектор нормали к плоскости, удовлетворяющий требованиям

$$\lambda^2 = \lambda_0^2 - \lambda^2 = 1, \quad \lambda_0 > 0, \quad (1.6)$$

а σ — псевдоевклидово расстояние плоскости от начала координат. Тогда функциональную производную в (1.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\delta S(\sigma, -\infty)}{\delta \sigma(x)} &= \lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \frac{S(\sigma + \Delta \sigma, -\infty) - S(\sigma, -\infty)}{\int [\vartheta(\sigma + \Delta \sigma - \lambda x) - \vartheta(\sigma - \lambda x)] d^4 x} = \\ &= \frac{\partial S(\sigma, -\infty)}{\partial \sigma} \cdot \frac{1}{\int \delta(\sigma - \lambda x) d^4 x}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Отсюда вместо (1.4) будем иметь

$$i \frac{\partial S(\sigma, -\infty)}{\partial \sigma} = \left[\int H(x) \delta(\sigma - \lambda x) d^4 x \right] S(\sigma, -\infty). \quad (1.8)$$

Величина

$$H(\sigma, \lambda) = \int H(x) \delta(\sigma - \lambda x) d^4 x \quad (1.9)$$

связана с четырехмерным фурье-образом этого же оператора

$$\tilde{H}(p) = \int e^{-ipx} H(x) d^4 x \quad (1.10)$$

следующим равенством:

$$H(\sigma, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\sigma\kappa} \tilde{H}(\lambda\kappa) d\kappa, \quad (1.11)$$

где κ — одномерный инвариантный параметр.

Решением уравнения (1.11) является T -экспонента, в которой вместо чисто временных ϑ -функций используются инвариантные функции вида

$$\vartheta(\lambda(x-y)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa\lambda(x-y)} \frac{d\kappa}{\kappa - i\epsilon}. \quad (1.12)$$

При этом полная матрица рассеяния $S(\infty, -\infty)$ не зависит от направления вектора λ , поскольку для времениподобных интервалов $(x-y)^2 > 0$ всегда $\vartheta(\lambda(x-y)) = \vartheta(x^0 - y^0) = \text{inv}$, а при $(x-y)^2 < 0$ функция $\vartheta(\lambda(x-y))$ не дает вклада благодаря «локальности» гамильтониана $H(x)$:

$$[H(x), H(y)] = 0, \text{ если } (x-y)^2 < 0. \quad (1.13)$$

Положим теперь

$$S(\sigma, -\infty) = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\lambda\kappa) e^{i\kappa\sigma}}{\kappa - i\epsilon} d\kappa \quad (1.14)$$

и подставим (1.10) и (1.14) в (1.8). В результате получим следующее интегральное уравнение [16]:

$$R(\lambda\kappa) = -\tilde{H}(\lambda\kappa) - \frac{1}{2\pi} \int \tilde{H}(\lambda\kappa - \lambda\kappa_1) \frac{d\kappa_1}{\kappa_1 - i\epsilon} R(\lambda\kappa_1). \quad (1.15)$$

Поскольку

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{i\kappa\sigma}}{\kappa - i\epsilon} = \delta(\kappa),$$

то из (1.14) вытекает, что

$$S(\infty, -\infty) = 1 + iR(0). \quad (1.16)$$

Таким образом, для нахождения матрицы рассеяния достаточно решить уравнение (1.15) и затем положить $\kappa = 0$. При этом $R(0)$ является полностью инвариантной величиной, не зависящей от направления вектора λ . Следовательно, при $\kappa \neq 0$ этот вектор можно выбрать коллинеарным любому из времениподобных векторов, встречающихся в данной конкретной задаче. Каждый такой выбор будет соответствовать совершенно определенной экстраполяции матричных элементов за пределы поверхности $\kappa = 0$. Эту поверхность будем называть поверхностью энергии-импульса.

Для системы двух взаимодействующих частиц с 4-импульсами p_1 и p_2 можно положить, в частности,

$$\lambda_n \sim \mathcal{P}_n, \quad (1.17)$$

где $\mathcal{P} = p_1 + p_2$.

В последующих построениях мы неоднократно будем использовать уравнение более общего вида, чем (1.15):

$$R(\lambda\kappa, \lambda\kappa') = -\tilde{H}(\lambda\kappa - \lambda\kappa') - \frac{1}{2\pi} \int \tilde{H}(\lambda\kappa - \lambda\kappa_1) \frac{d\kappa_1}{\kappa_1 - i\epsilon} R(\lambda\kappa_1, \lambda\kappa'), \quad (1.18)$$

считая, по определению, что

$$\left. \begin{aligned} R(\lambda\kappa) &= R(\lambda\kappa, 0); \\ S(\infty, -\infty) &= 1 + iR(0, 0). \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Уравнение (1.18), в отличие от (1.15), уже не связано простым образом с уравнением Томонага—Швингера (1.4).

2. ДИАГРАММНАЯ ТЕХНИКА

Исследуем по теории возмущений* [17] уравнение (1.18) для операторов $R(\lambda\kappa, \lambda\kappa')$ с гамильтонианом (1.2). Введем стандартные фурье-разложения операторов $\bar{\psi}, \psi$ и φ , фигурирующих в (1.2)**:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{iqx} \psi(q) dq = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\nu=1,2} \int \frac{dq}{\sqrt{2q_0}} e^{iqx} b_{\nu}^+(q) v^{\nu}(q) + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\nu=1,2} \int \frac{dq}{\sqrt{2q_0}} e^{-iqx} a_{\nu}(q) u^{\nu}(q) \equiv \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x); \\ \bar{\psi}(x) &= \psi^{\dagger}(x) \gamma^0 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ipx} \psi^{\dagger}(-p) \gamma^0 dp = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\nu=1,2} \int \frac{dp}{\sqrt{2p_0}} e^{ipx} a_{\nu}^{\dagger}(p) \bar{u}^{\nu}(p) + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\nu=1,2} \int \frac{dp}{\sqrt{2p_0}} e^{-ipx} b_{\nu}(p) \bar{v}^{\nu}(p) \equiv \bar{\psi}^{(+)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x); \\ \varphi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \varphi(k) e^{ikx} d^4k = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ikx} \frac{dk}{\sqrt{2k_0}} \alpha^{(+)}(k) + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-ikx} \frac{dk}{\sqrt{2k_0}} \alpha(k) \equiv \\ &\equiv \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x). \end{aligned} \quad (1.20)$$

* Напомним, что соответствующие результаты для оператора $R(\lambda\kappa)$ можно получить, полагая $\kappa' = 0$ [см. уравнение (1.19)].

** Условия ортонормированности и полноты для спиноров u и v из (1.20) имеют инвариантный вид:







$$\sum_{\alpha=1}^4 \bar{u}_{\alpha}^{\mu}(q) u_{\alpha}^{\nu}(q) = - \sum_{\alpha=1}^4 \bar{v}_{\alpha}^{\mu}(q) v_{\alpha}^{\nu}(q) = 2M\delta^{\mu\nu}; \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1,2} \bar{u}_{\alpha}^{\mu}(q) u_{\beta}^{\mu}(q) &= (\not{q} + M)_{\beta\alpha}; \\ \sum_{\mu=1,2} v_{\alpha}^{\mu}(q) \bar{v}_{\beta}^{\mu}(q) &= (\not{q} - M)_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$(\not{q} = q_0 \gamma_0 - \mathbf{q}\boldsymbol{\gamma})$$

Примем следующие правила графического изображения частиц в начальных и конечных состояниях, приведенные в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Линия	Частица	Состояние	Фактор в матричном элементе
	Нуклон	in	$\frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2q_0}} u^\nu(q)$
	Антинуклон	in	$(2\pi)^{3/2}/\sqrt{2q_0} \bar{v}^\nu(q)$
	Мезон	in	$\frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2k_0}}$
	Нуклон	out	$\frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2q_0}} \bar{u}^\mu(p)$
	Антинуклон	out	$\frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2q_0}} v^\mu(p)$
	Мезон	out	$\frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2k_0}}$

Из уравнения (1.18) следует, что в первом приближении по константе связи оператор $R(\lambda\kappa, \lambda\kappa')$ равен

$$R_1(\lambda\kappa, \lambda\kappa') = -\tilde{H}(\lambda\kappa - \lambda\kappa') = \\ = g \int e^{-i\lambda(\kappa - \kappa')x} : \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) \varphi(x) : d^4x, \quad (1.23)$$

или, с учетом (1.20),

$$R_1(\lambda\kappa, \lambda\kappa') = \frac{g}{\sqrt{2\pi}} \int \delta(\lambda\kappa - \lambda\kappa' - p - q - k) \times \\ \times : \bar{\psi}(p) \gamma_5 \psi(q) \varphi(k) : dp dq dk. \quad (1.24)$$

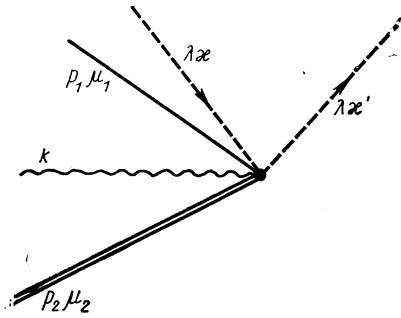
Легко получить выражение для R_1 в виде суммы нормальных произведений операторов $\psi^{(\pm)}(x)$, $\bar{\psi}^{(\pm)}(x)$, $\varphi^{(\pm)}(x)$. Например, оператор

$$-g \int e^{-i\lambda(\kappa - \kappa')x} d^4x : \bar{\psi}^{(+)}(x) \gamma_5 \psi^{(+)}(x) \varphi^{(+)}(x) : = \\ = \int e^{-i\lambda(\kappa - \kappa')x} H_1(x) d^4x$$

имеет отличный от нуля матричный элемент для перехода вакуум \rightarrow нуклон + антинуклон + мезон:

$$\langle p_1 \mu_1; p_2, \mu_2; k \left| \int e^{-i\lambda(\kappa - \kappa')x} H_1(x) dx \right| 0 \rangle = \\ = -(2\pi)^{9/2} \frac{g}{\sqrt{2\pi}} \delta(\lambda\kappa - \lambda\kappa' - p_1 - p_2 - k) \frac{\bar{u}^\mu(p_1) \gamma_5 v^{\mu_2}(p_2)}{\sqrt{2p_{10} 2p_{20} 2k_0}}. \quad (1.25)$$

Процессу (1.25) можно сопоставить следующую диаграмму:



Шпурионные пунктирные линии — квазичастицы — с 4-импульсами λx и $\lambda x'$ введены для того, чтобы в вершине соблюдался закон сохранения $\lambda x - \lambda x' - p_1 - p_2 - k = 0^*$.

В x -представлении [(1.23) и (1.25)] квазичастицам отвечают плоские волны вида $e^{-i\lambda x}$. Следовательно, оператор $\tilde{H}(\lambda x - \lambda x')$ можно интерпретировать как взаимодействие полей ψ , $\bar{\psi}$ и φ с плоской волной. При итерациях уравнения (1.18) возникают операторные выражения вида

$$R_n(\lambda x, \lambda x') = \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{n-1}} \int \tilde{H}(\lambda x - \lambda x_1) \frac{dx_1}{x_1 - i\epsilon} \dots$$

$$\dots \frac{dx_{j-1}}{x_{j-1} - i\epsilon} \tilde{H}(\lambda x_{j-1} - \lambda x_j) \frac{dx_j}{x_j - i\epsilon} \dots \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1} - i\epsilon} \tilde{H}(\lambda x_{n-1} - \lambda x'). \quad (1.26)$$

Приведем их к нормальному виду, считая, что гамильтонианы в (1.26) пронумерованы, так, что номер $\tilde{H}(\lambda x - \lambda x_1)$ равен единице, $\tilde{H}(\lambda x_1 - \lambda x_2)$ — двум и т. д. до n , соответствующего оператору $\tilde{H}(\lambda x_{n-1} - \lambda x')$. Каждому из операторов $\bar{\psi}$, ψ и φ припишем номер гамильтониана \tilde{H} , которому эти операторы принадлежат. Если \tilde{H} уже задан в нормальной форме, можно утверждать, что в случае приведения $R_n(\lambda x, \lambda x')$ к нормальному виду необходимо спаривать лишь операторы с разными номерами. В рассматриваемом случае из-за отсутствия в $R_n(\lambda x, \lambda x')$ хронологического произведения спаривания имеют вид:

$$\underline{\psi_\beta(q)} \bar{\psi}_\alpha(p) = \delta(q+p) \vartheta(p_0) (p+M)_{\beta\alpha} \delta(p^2 - M^2) \equiv$$

$$\equiv \delta(q+p) S_{\beta\alpha}^{(+)}(p, M); \quad (1.27)$$

$$\underline{\bar{\psi}_\alpha(p)} \psi_\beta(q) = \delta(p+q) \vartheta(q_0) (q-M)_{\beta\alpha} \delta(q^2 - M^2) \equiv$$




$$\equiv \delta(p+q) S_{\beta\alpha}^{(-)}(q, -M); \quad (1.28)$$

$$\underline{\varphi(k)} \varphi(k') = \delta(k+k') \vartheta(k'_0) \delta(k'^2 - m^2) \equiv \delta(k+k') \Delta^{(+)}(k'). \quad (1.29)$$

* В этом пункте становится ясно, почему поверхность $x = x' = 0$ можно называть поверхностью энергии-импульса.

Легко видеть, что аргументы $S^{(+)}$ и $\Delta^{(+)}$ -функций в (1.27)—(1.29) есть 4-импульсы операторов, которые в спариваниях стоят справа, т. е. имеют большие номера. Последнее обстоятельство определяет правило ориентации линий при графическом изображении спариваний (1.27)—(1.29) (табл. 2).

Таблица 2

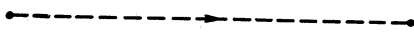
Линия	Частица	Спаривание	Фактор в матричном элементе
	Нуклон	$\underbrace{\psi_{\beta}(q_{j'}) \bar{\psi}_{\alpha}(q_j)}_{j' < j}$	$S_{\alpha\beta}^{(+)}(p_j, M)$
	Антинуклон	$\underbrace{\bar{\psi}_{\alpha}(p_{j'}) \psi_{\beta}(q_{j'})}_{j' < j}$	$S_{\beta\alpha}^{(+)}(q_j - M)$
	Мезон	$\underbrace{\psi(k_{j'}) \varphi(k_j)}_{j' < j}$	$\Delta^{(+)}(k_j)$

Основанием того, что первое спаривание в табл. 2 сопоставляется нуклону, а второе — антинуклону, является точное соответствие этих спариваний вкладу нуклонного и антинуклонного состояний в полную систему векторов u -го состояния.

Начиная со второго порядка по g в матричных элементах, как это видно из (1.26), появляются также факторы

$$g_0(\kappa_j) = (1/2\pi) \cdot (1/\kappa_j - i\epsilon) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1), \quad (1.30)$$

которые соответствуют «виртуальной» квазичастице с 4-импульсом λ_{κ_j} , выходящей из вершины с номером j и входящей в вершину с номером $j + 1$. Графически такая квазичастица будет изображаться следующим образом:



Теперь, принимая во внимание табл. 1 и 2, можно сформулировать в общем виде правила написания матричных элементов в данном формализме. Эти правила таковы:

1. Начертить диаграмму Фейнмана (или совокупность диаграмм), отвечающую рассматриваемому процессу, изображая свободные нуклонные и антинуклонные состояния в соответствии с табл. 1. Произвольным образом перенумеровать вершины и ориентировать каждую внутреннюю линию в направлении от большего номера к меньшему. Далее, не изменяя ориентации, заменить некоторые одинарные (нуклонные) внутренние линии двойными (антинуклонными) линиями так, чтобы в результате в каждой вершине диаграммы имело место сохранение нуклонного заряда. Приписать каждой внутренней линии некоторый 4-импульс p .

2. Соединить первую вершину со второй, вторую с третьей, третью с четвертой и т. д. пунктирными линиями, ориентированными в направлении возрастания номеров, и приписать каждой из них 4-импульс λ_{κ_j} , где $j = 1, 2, \dots, n - 1$ — номер вершины, из

которой данная пунктирная линия выходит. Кроме того, подсоединить к первой вершине входящую внешнюю пунктирную линию с импульсом λx , а к последней (с номером n) — выходящую пунктирную линию с импульсом $\lambda x'$.

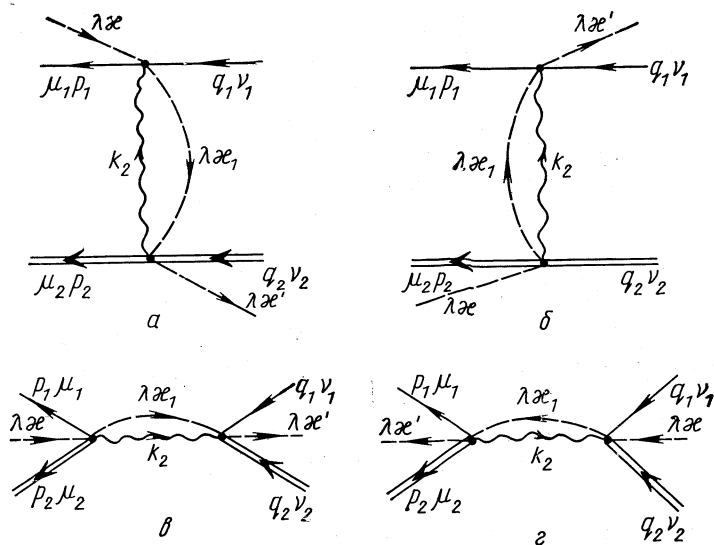
3. Каждой внутренней пунктирной линии с 4-импульсом λk_j поставить в соответствие пропагатор (1.30), а каждой внутренней физической линии с импульсом p — одну из функций $S^+(p, M)$, $S^+(p, -M)$ или $\Delta^+(p)$ (согласно табл. 2).

4. Каждой вершине диаграммы сопоставить фактор $g\gamma_5/\sqrt{2\pi}$ * и 4-мерную δ -функцию, учитывающую сохранение суммарного 4-импульса частиц и квазичастиц, приходящих в данную вершину и уходящих из нее.

5. По всем переменным x_j и независимым импульсам из числа векторов p произвести интегрирование в бесконечных пределах.

6. Повторить действия, предусмотренные предыдущими пунктами, при всех $n!$ нумерациях вершин данной диаграммы, сложить полученные выражения и умножить результат на $\delta p/\eta$, где η — количество перестановок внешних вершин, входящих в диаграмму симметричным образом; δ_p — известный знаковый множитель, связанный с четностью перестановки внешних нуклонных и антинуклонных линий.

Поясним данную процедуру на примере. Рассеяние нуклонов на антинуклонах во втором порядке по g



* Все матрицы, действующие на спинорные индексы, необходимо расположить в такой последовательности, считая слева направо, в какой они встречаются, если двигаться по спинорной линии, проходя антинуклонные участки в направлении их ориентации, а нуклонные — в обратном направлении.

Выберем теперь вектор λ , как в (1.17)*:

$$\lambda = \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{(p_1 + p_2)^2}} = \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{(q_1 + q_2)^2}}. \quad (1.31)$$

Тогда после несложных вычислений будем иметь:

$$\begin{aligned} & (T_2)_{\mu_2 \nu_2}^{\mu_1 \nu_1}(\kappa', p_1 p_2 | q_1, q_2, \kappa) = \\ & = - \frac{g^2}{\sqrt{m^2 - t + \frac{1}{4}(\kappa - \kappa')^2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}(\kappa + \kappa')^2 + \sqrt{m^2 - t + \frac{1}{4}(\kappa - \kappa')^2 - i\epsilon}} \times \\ & \quad \times \bar{u}^{\mu_1}(p_1) \gamma_5 u^{\nu_1}(q_1) \bar{v}^{\nu_2}(q_2) \gamma_5 v^{\mu_2}(p_2) + \\ & \quad + \frac{g^2}{2m} \left(\frac{1}{\kappa' + \sqrt{s_p} + m - i\epsilon} + \frac{1}{\kappa - \sqrt{s_p} + m - i\epsilon} \right) \times \\ & \quad \times \bar{u}^{\mu_1}(p_1) \gamma_5 v^{\mu_2}(p_2) \bar{v}^{\nu_2}(q_2) \gamma_5 u^{\nu_1}(q_1), \end{aligned} \quad (1.32)$$

где

$$t = (p_1 - q_1)^2, \quad s_p = (p_1 + p_2)^2, \quad s_q = (q_1 + q_2)^2, \quad (1.33)$$

причем

$$\kappa' + \sqrt{s_p} = \kappa + \sqrt{s_q}. \quad (1.34)$$

Очевидно, на поверхности энергии-импульса формула дает тот же результат, что и техника Фейнмана.

Заканчивая настоящий параграф, укажем одно важное свойство данного формализма. Известные ультрафиолетовые расходимости здесь возникают лишь в одномерных инвариантных интегралах по κ . Поэтому можно развить соответствующую технику, позволяющую устранить ультрафиолетовые расходимости релятивистски инвариантным способом [17].

Глава 2

УРАВНЕНИЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

3. УРАВНЕНИЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

С помощью диаграммной техники, развитой в параграфе 2, получим для амплитуды рассеяния уравнение, аналогичное (B.2). Для определенности будем рассматривать процесс упругого рассеяния

* Легко видеть, что в результате сохранения 4-импульса коллинеарность векторов λ и $p_1 + p_2 / \sqrt{(p_1 + p_2)^2}$ автоматически приводит к коллинеарности $p_1 + p_2 / \sqrt{(p_1 + p_2)^2}$ и $q_1 + q_2 / \sqrt{(q_1 + q_2)^2}$. Другими словами, при нашем выборе λ — 4-скорость системы сохраняется даже вне поверхности $\kappa = \kappa' = 0$.

нуклонов на антинуклонах

$$N + \bar{N} \rightarrow N + \bar{N} \quad (2.1)$$

в схеме с гамильтонианом взаимодействия (1.2).

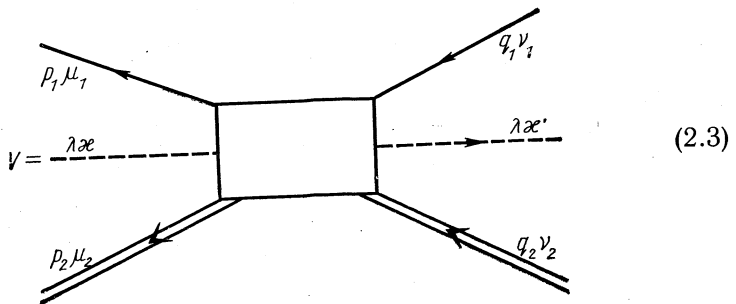
Условимся, что временная ось на наших графиках направлена справа налево, и ориентируем соответствующим образом концы диаграмм, описывающих процесс (2.1) вне поверхности $\kappa = \kappa' = 0$. Связанную диаграмму из этого класса будем называть неприводимой, если в ней нельзя выделить такие две связанные поддиаграммы, которые соединены между собой двумя спинорными линиями (нуклонной и антинуклонной), ориентированными справа налево, и одной пунктирной линией, ориентированной в обратную сторону.

В противном случае диаграмма считается приводимой. Ясно, что все связанные диаграммы можно построить из неприводимых компонент. Это обстоятельство и используем при написании уравнения для амплитуды рассеяния (сравним с соответствующей процедурой в формализме Бете—Солпитера [2, 3]).

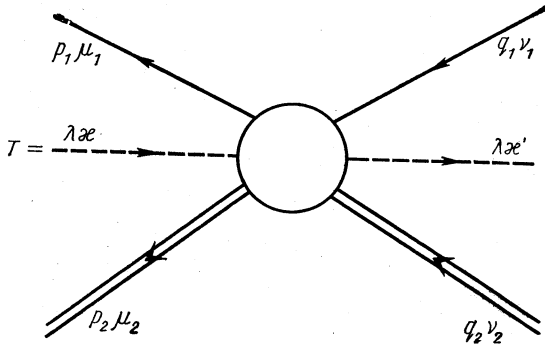
Пусть

$$\begin{aligned} V &= \frac{(2\pi)^4 \delta(\lambda\kappa' + p_1 + p_2 - q_1 - q_2 - \lambda\kappa)}{\sqrt{2p_{10} 2p_{20} 2q_{10} 2q_{20}}} V_{\mu_2 \nu_2}^{\mu_1 \nu_1}(\lambda\kappa, p_1, p_2 | \lambda\kappa', q_1, q_2) = \\ &= \frac{(2\pi)^4 \delta(\lambda\kappa' + p_1 + p_2 - q_1 - q_2 - \lambda\kappa)}{\sqrt{2p_{10} 2p_{20} 2q_{10} 2q_{20}}} \bar{u}_{\alpha_1}^{\mu_1}(p_1) \bar{v}_{\alpha_2}^{\nu_2}(q_2) \times \\ &\times V_{\alpha_1 \beta_1; \alpha_2 \beta_2}(\lambda\kappa, p_1, p_2 | \lambda\kappa', q_1, q_2) \cdot u_{\beta_1}^{\nu_1}(q_1) v_{\beta_2}^{\mu_2}(p_2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

есть матричный элемент, отвечающий совокупности всех неприводимых диаграмм, описывающих процесс (2.1) (переменные и индексы здесь имеют тот же смысл, что и в матричном элементе второго порядка (1.32)). Графически V изображается следующим образом:



Пусть далее амплитуда T , которую мы будем графически изображать:



$$= \frac{(2\pi)^4 \delta(-\lambda x + p_1 + p_2 - q_1 - q_2 + \lambda x')}{\sqrt{2p_{10} 2p_{20} 2q_{10} 2q_{20}}} \bar{u}_{\alpha_1}^{\mu_1}(p_1) \bar{v}_{\alpha_2}^{\mu_2}(q_2) \times \\ \times T_{\alpha_1 \beta_1; \alpha_2 \beta_2}(\lambda x; p_1, p_2 | \lambda x'; q_1, q_2) u_{\beta_1}^{\nu_1}(q_1) u_{\beta_2}^{\nu_2}(p_2) \quad (2.4)$$

есть амплитуда $\bar{N}N$ -рассеяния вне поверхности $\kappa' = \kappa = 0$, т. е. совокупность всех связанных диаграмм, отвечающих процессу (2.1). Тогда, принимая во внимание определение неприводимости, можно написать следующее графическое уравнение

$$(2.5)$$

которое, согласно правилам нашей диаграммной техники (см. параграф 2), эквивалентно интегральному уравнению

$$T_{\mu_2 \nu_2}^{\mu_1 \nu_1}(\lambda x, p_1, p_2 | \lambda x', q_1, q_2) = V_{\mu_2 \nu_2}^{\mu_1 \nu_1}(\lambda x, p_1, p_2 | \lambda x', q_1, q_2) + \\ + \sum_{\rho_1 \rho_2} \int V_{\mu_2 \rho_2}^{\mu_1 \rho_1}(\lambda x, p_1, p_2 | \lambda x_1, k_1, k_2) \vartheta(k_1^0) \delta(k_1^2 - M^2) d^4 k_1 \times \\ \times \left\{ \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\vartheta(k_2^0) \delta(k_2^2 - M^2)}{x_1 - i\varepsilon} \delta(-\lambda x_1 + k_1 + k_2 - q_1 - q_2 + \lambda x') \right\} \times \\ \times d^4 k_2 d x_1 T_{\rho_2 \nu_2}^{\rho_1 \nu_1}(\lambda x_1, k_1, k_2 | \lambda x', q_1, q_2). \quad (2.6)$$

При выводе уравнения (2.6) использовано соотношение полноты (1.22) и опущена общая для обеих частей (2.4) δ -функция, выражающая закон сохранения $p_1 + p_2 - \lambda x = q_1 + q_2 - \lambda x'$.

При условии [ср. с (1.17) и (1.31)], что

$$\lambda = \frac{p_1 + p_2}{V(p_1 + p_2)^2} = \frac{k_1 + k_2}{V(k_1 + k_2)^2} = \frac{q_1 + q_2}{V(q_1 + q_2)^2}, \quad (2.7)$$

в уравнении (2.6) можно ввести стандартные инвариантные переменные

$$\left. \begin{aligned} s_p &= (p_1 + p_2)^2; & s_k &= (k_1 + k_2)^2; & s_q &= (q_1 + q_2)^2; \\ t_{pq} &= (p_1 - q_1)^2; & u_{pq} &= (p_2 - q_1)^2; & t_{pk} &= (p_1 - k_1)^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Нетрудно убедиться, что величины (2.8) связаны соотношениями вида

$$V s_k s_q + t_{kq} + u_{kq} = 4M^2, \quad (2.9)$$

переходящими на поверхности энергии-импульса в известное равенство $s + t + u = 4M^2$.

Если теперь в (2.6) произвести интеграции по k_2 и κ_1 , то выражение, заключенное в фигурные скобки, примет вид

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{V s_k} \cdot \frac{1}{\kappa' + V s_k - V s_q - i\epsilon}. \quad (2.10)$$

Параметр κ' , введенный в параграфе 1 с целью дать более общую формулировку рассматриваемой схемы, сейчас можно положить равным нулю. В результате выражение (2.10) оказывается равным

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{V s_k (V s_k - V s_q - i\epsilon)} \equiv G_q^{(0)}(k) \quad (2.11)$$

или, с учетом (2.9),

$$G_q^{(0)}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{s_k + t_{kq} + u_{kq} - 4M^2 - i\epsilon}. \quad (2.12)$$

Сравнивая структуры уравнений (2.6) и (B.2), можно заключить, что в уравнении (2.6) величина $G_q^{(0)}(k)\delta^{\rho_1\sigma_1}\delta^{\rho_2\sigma_2}$ имеет значение свободной функции Грина данной двухчастичной системы, а V — квазипотенциала. Тесная аналогия между уравнениями (2.6) и (B.2) становится особенно заметной, если перейти в (2.6) к системе центра инерции. Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}; & \mathbf{q}_1 &= -\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}; & \mathbf{k}_1 &= -\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}; \\ E_p &= \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}; & E_k &= \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2}, & E_q &= \sqrt{\mathbf{q}^2 + M^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

и принимая во внимание равенства

$$2E_q + \kappa = 2E_p; \quad 2E_k + \kappa_1 = 2E_p + \kappa',$$

будем иметь вместо (2.6)

$$\begin{aligned} T_{\mu_2 \nu_2}^{\mu_1 \nu_1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= V_{\mu_2 \nu_2}^{\mu_1 \nu_1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E_q) + \\ + \frac{1}{(4\pi)^3} \sum_{\rho_1 \rho_2} \int V_{\mu_2 \rho_2}^{\mu_1 \rho_1}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) &\frac{d\mathbf{k}}{V \mathbf{k}^2 + M^2} \frac{T_{\rho_2 \nu_2}^{\rho_1 \nu_1}(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{E_k (E_k - E_q - i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Как видно из (2.14), функция Грина, или «энергетический знаменатель», не зависит от спиновых индексов. Вся специфика, привнесенная спином в амплитуду рассеяния, есть следствие зависимости от спина квазипотенциала*. Таким образом, ситуация здесь точно такая же, как и в нерелятивистской теории, где свободный гамильтониан выступает как скаляр в спиновом пространстве, а зависеть от спина могут лишь члены взаимодействия.

Учитывая данное обстоятельство, сосредоточим свое внимание в дальнейшем изложении на скалярном уравнении

$$T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E_q) + \frac{1}{(4\pi)^3} \int V(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} \frac{T(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{E_k(E_k - E_q - i\varepsilon)}. \quad (2.15)$$

4. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ФОРМАЛИЗМ ПРИ «НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ» НОРМИРОВКЕ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

Как уже говорилось выше (см. конец параграфа 3), нашей задачей теперь будет исследование скалярного квазипотенциального уравнения (2.15). При этом $T(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ следует интерпретировать как амплитуду рассеяния вне поверхности энергии-импульса**, а $V(\mathbf{p}, \mathbf{k}, E_q)$ — как квазипотенциал, отвечающий сумме соответствующих неприводимых диаграмм. В g^2 -приближении будем иметь

$$V^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, E_q) = \frac{g^2}{\sqrt{\mu^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2}} \frac{1}{E_p + E_k - 2E_q - i\varepsilon + \sqrt{\mu^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2}}, \quad (2.16)$$

где

$$E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \quad E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad E_q = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}.$$

На поверхности $E_p = E_q$ амплитуда $T(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ совпадает с инвариантной амплитудой $T(s, t)$, связанной с дифференциальным сечением упругого рассеяния соотношением

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{|T(s, t)|^2}{(8\pi)^2 s}. \quad (2.17)$$

Введем вместо T новую амплитуду A , положив

$$A(s, t) = \frac{T(s, t)}{8\pi \sqrt{s}}. \quad (2.18)$$

* Подчеркнем, что матрица $V_{\mu_2 \rho_2}^{\mu_1 \rho_1}$ параметрически зависит от энергии E_q и в общем случае не является эрмитовой.

** Совершенно очевидно, при нашем определении λ -вектора, что в системе центра инерции поверхность энергии-импульса есть просто энергетическая поверхность $E_p = E_q$.

В результате (2.17) примет вид

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = |A(s, t)|^2, \quad (2.19)$$

что совпадает с условием нормировки нерелятивистской амплитуды упругого рассеяния.

Чтобы получить из уравнения (2.15) соответствующее уравнение для A , необходимо экстраполировать (2.18) за поверхность энергии-импульса. С этой целью перепишем (2.18) в виде

$$A(s, t) = \frac{T(s, t)}{8\pi \sqrt{4m^2 - t - u}}$$

и учтем, что, согласно (2.9), при выходе за поверхность энергии-импульса справедливо соотношение

$$\sqrt{s_p s_q} + t + u = 4m^2,$$

где

$$s_p = (p_1 + p_2)^2 = 4E_p^2, \quad s_q = (q_1 + q_2)^2 = 4E_q^2.$$

Следовательно, искомая экстраполяция амплитуды $A(s, t)$ имеет вид

$$A(s, t) = A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \Big|_{E_p = E_q} \rightarrow A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \Big|_{E_p \neq E_q} = \frac{T(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{8\pi \sqrt{4E_p E_q}} \Big|_{E_p \neq E_q}. \quad (2.20)$$

Теперь, производя в (2.15) замену

$$T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 8\pi \sqrt{4E_p E_q} A(\mathbf{p}, \mathbf{q}); \quad (2.21)$$

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) = -2m \sqrt{4E_p E_k} \tilde{V}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q), \quad (2.22)$$

получаем окончательно

$$A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{m}{4\pi} \tilde{V}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E_q) + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{V}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) \times \\ \times \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{1 + \frac{\mathbf{k}^2}{m^2}}} \frac{A(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{2E_q - 2E_k + i\epsilon}. \quad (2.23)$$

Очевидно, уравнение (2.23) выглядит как прямое релятивистское обобщение уравнения Липпмана—Швингера.

В случае действительного квазипотенциала из (2.23) следует соотношение, по своей форме в точности совпадающее с нерелятивистским условием унитарности:

$$\text{Im } A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{|\mathbf{q}|}{4\pi} \int A(\mathbf{p}, \mathbf{k}) A^*(\mathbf{k}, \mathbf{q}) d\omega_k; \\ E_p = E_k = E_q = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}. \quad (2.24)$$

Записывая это равенство в терминах амплитуды $T(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ [см. уравнение (2.21)], нетрудно убедиться, что оно эквивалентно релятивистскому условию двухчастичной унитарности*:

$$\text{Im } T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{(8\pi)^2} \sqrt{\frac{E_q^2 - m^2}{E_q^2}} \int T(\mathbf{p}, \mathbf{k}) T^*(\mathbf{k}, \mathbf{q}) d\Omega_{\mathbf{k}}. \quad (2.25)$$

Теперь положим

$$\Psi_q(\mathbf{p}) = \left(2\pi\right)^3 \sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) - \frac{4\pi}{m} \cdot \frac{A(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{2E_q - 2E_p + i\varepsilon} \\ (E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \quad E_q = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}). \quad (2.26)$$

Отсюда из уравнения (2.23) находим уравнение для функции

$$\Psi_q(\mathbf{p}) = (2\pi)^3 \sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\int \tilde{V}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) \Psi_q(\mathbf{k}) d\Omega_{\mathbf{k}}}{2E_q - 2E_p + i\varepsilon}, \quad (2.27)$$

или

$$(2E_q - 2E_p) \Psi_q(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{V}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) \Psi_q(\mathbf{k}) d\Omega_{\mathbf{k}}, \quad (2.28)$$

где

$$d\Omega_{\mathbf{k}} = \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{1 + \frac{\mathbf{k}^2}{m^2}}}. \quad (2.29)$$

Следовательно, величину $\Psi_q(\mathbf{p})$ следует рассматривать как релятивистскую волновую функцию данной двухчастичной системы в \mathbf{p} -представлении, а уравнения (2.27) и (2.28) — как две формы (интегральную и дифференциальную) релятивистского уравнения Шредингера. Наша очередная задача — построить столь же естественное релятивистское обобщение теории рассеяния в конфигурационном представлении. При этом принципиально важное значение будет иметь то обстоятельство, что все 4-импульсы, фигурирующие в наших уравнениях, принадлежат верхней полё четырехмерного гиперболоида

$$p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \quad (2.30)$$

являющейся, как известно, одной из реализаций пространства постоянной отрицательной кривизны (пространства Лобачевского).

5. СЛУЧАЙ НЕРАВНЫХ МАСС

До сих пор рассматривались релятивистские уравнения, описывающие взаимодействия частиц с равными массами. Цель настоящего параграфа — найти столь же простое, как и (2.23), релятивист-

* Условию (2.25) при $\text{Im } V = 0$ удовлетворяет также амплитуда $T(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, подчиняющаяся квазипотенциальному уравнению (В.2). Это обстоятельство отражает одну из главных идей квазипотенциального подхода (КПП).

ское обобщение уравнения Липпмана—Швингера в случае неравных масс [23].

Как известно, для перехода к случаю неравных масс в нерелятивистском уравнении Липпмана—Швингера достаточно заменить параметр m в этом уравнении удвоенной приведенной массой

$$m \rightarrow 2\mu = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.31)$$

В релятивистском случае, однако, применение процедуры (2.31) к уравнению (2.23) с целью получения искомого уравнения лишено всякого основания. Чтобы сделать этот момент более ясным, напомним, как возникает в нерелятивистской теории само понятие приведенной массы.

Пусть

$$E = \frac{\mathbf{k}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{k}_2^2}{2m_2} = \frac{m v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \quad (2.32)$$

есть полная энергия двух свободных нерелятивистских частиц в произвольной системе отсчета. Введем в рассмотрение вектор суммарного импульса

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \quad (2.33)$$

и вектор относительного импульса

$$\mathbf{k} = \frac{m_2 \mathbf{k}_1 - m_1 \mathbf{k}_2}{m_1 + m_2} = \mu (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2). \quad (2.34)$$

Совершая теперь преобразование Галилея

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{k}}{m_1} + \frac{\mathbf{K}}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{v}_2 = -\frac{\mathbf{k}}{m_2} + \frac{\mathbf{K}}{m_1 + m_2}, \quad (2.35)$$

будем иметь вместо (2.32)

$$E = \frac{\mathbf{K}^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{\mathbf{k}^2}{2\mu}. \quad (2.36)$$

В системе центра инерции (с. ц. и.) $\mathbf{K} = 0$, и поэтому

$$E = \frac{\mathbf{k}^2}{2\mu}. \quad (2.37)$$

Разность двух одночастичных энергий типа (2.37) и дает энергетический знаменатель уравнения Липпмана—Швингера. Подчеркнем, что импульсом эффективной частицы, выступающей вместо двухчастичной системы, является относительный импульс \mathbf{k} , длина которого, в силу формулы

$$\mathbf{k}^2 = \mu^2 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 \equiv \mu^2 v^2, \quad (2.38)$$

есть инвариант галилеевых преобразований.

При релятивистском рассмотрении 4-импульсы двух свободных частиц в с. ц. и. могут быть записаны в виде

$$k_1 = (\sqrt{m_1^2 + \mathbf{k}^2}, \mathbf{k}), \quad k_2 = (\sqrt{m_2^2 + \mathbf{k}^2}, -\mathbf{k}). \quad (2.39)$$

Поэтому полная энергия частиц в этой системе отсчета выглядит так:

$$\sqrt{m_1^2 + \mathbf{k}^2} + \sqrt{m_2^2 + \mathbf{k}^2} \equiv \sqrt{s_h}. \quad (2.40)$$

При $m_1 = m_2 = m$ имеем

$$2\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} = \sqrt{s_h}. \quad (2.41)$$

Энергетический знаменатель в уравнении (2.23) есть, очевидно, разность выражений типа (2.41).

Из формул (2.40) и (2.41) следует, что независимо от соотношения между массами полную энергию двух свободных релятивистских частиц в с. ц. и. нельзя осмыслить как энергию некоторой эффективной релятивистской частицы с импульсом \mathbf{k} .

Однако то обстоятельство, что в случае равных масс полная энергия (2.41) пропорциональна энергии одной частицы, фактически позволяет рассматривать энергетический знаменатель релятивистского уравнения Липпмана—Швингера (2.23) как одночастичный и в результате свести релятивистскую проблему двух частиц с равными массами к проблеме описания движения частицы массы m в квазипотенциальном поле. Ясно поэтому, что если бы удалось представить (2.40) в виде выражения, пропорционального энергии релятивистской частицы с некоторой массой m' (переходящей в массу m при $m_1 = m_2 = m$), то и в случае неравных масс релятивистская проблема двух тел стала бы эквивалентной одночастичной проблеме. В этих условиях оказалось бы возможным применение тех математических методов, которые используются в задаче о частицах с равными массами.

Обозначая \mathbf{k}' импульс частицы с массой m' , согласно предположению будем иметь

$$\sqrt{s_h} = \sqrt{m_1^2 + \mathbf{k}^2} + \sqrt{m_2^2 + \mathbf{k}^2} = \text{const} \sqrt{m'^2 + \mathbf{k}'^2}. \quad (2.42)$$

В работе [23] показано, что 4-вектор k следует выбрать в виде

$$k_{\mu}' = (k_0', \mathbf{k}') = \sqrt{\frac{\mathcal{K}^2}{\mathcal{K}_{\perp}}} (\mathcal{K}_{\perp})_{\mu}, \quad (2.43)$$

где*

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{m_2 k_1 - m_1 k_2}{m_1 + m_2}; \\ \mathcal{K}_{\perp} &= \mathcal{K} - \lambda (\lambda \mathcal{K}) = \frac{k_1 - k_2}{2} - \frac{m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s_h}} \lambda; \\ (\lambda \mathcal{K}_{\perp}) &= 0; \quad \lambda = \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{s_h}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

* Вектор \mathcal{K}_{\perp} , фигурирующий здесь, носит название относительного импульса Вайтмана—Гардинга [25].

Как видно из (2.43),

$$\mathbf{k}'^2 = -\mathcal{K}^2 \quad (2.45)$$

во всех координатных системах. В системе центра инерции, где $\lambda = (1, 0)$, имеем $k'_0 = 0$, и для квадрата трехмерного относительного импульса получается выражение

$$\mathbf{k}'^2 = -\left(\frac{m_2 k_1 - m_1 k_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = 4\mu^2 \operatorname{sh}^2 \frac{s}{2} = -\mu^2 (u_1 - u_2)^2, \quad (2.46)$$

где u_1 и u_2 — релятивистские 4-скорости, имеющие в общем случае вид

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{k_1}{m_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v_1^2}}, \frac{v_1}{\sqrt{1-v_1^2}} \right); \\ u_2 &= \frac{k_2}{m_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v_2^2}}, \frac{v_2}{\sqrt{1-v_2^2}} \right), \end{aligned} \quad (2.47)$$

а параметр s связан с релятивистской относительной скоростью $v_{\text{отн}}$ по формуле

$$\frac{1}{\sqrt{1-v_{\text{отн}}^2}} = \operatorname{ch} s = u_1 u_2 = u_{10} u_{20} - \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2. \quad (2.48)$$

Комбинируя соотношения (2.46) и (2.48), можно получить формулу

$$\frac{\overline{\mathbf{k}'^2}}{2\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{1-v_{\text{отн}}^2}} - \mu, \quad (2.49)$$

из которой следует, что в релятивистском случае кинетическая энергия относительного движения выражается через относительный импульс \mathbf{k}' и приведенную массу μ нерелятивистским образом. Подставляя далее (2.46) в (2.42), находим

$$\sqrt{s_k} = \sqrt{m_1^2 + \mathbf{k}^2} + \sqrt{m_2^2 + \mathbf{k}^2} = \frac{m_1 + m_2}{\sqrt{m_1 m_2}} \sqrt{m_1 m_2 + \mathbf{k}'^2}. \quad (2.50)$$

Следовательно, масса m' «эффективной» частицы в соотношении (2.42) оказывается равной среднему геометрическому из масс m_1 и m_2 :

$$m' = \sqrt{m_1 m_2}. \quad (2.51)$$

В то же время легко видеть, что в нерелятивистском пределе знаменатель квазипотенциального уравнения, в случае неравных масс имеющий вид

$$\frac{1}{\sqrt{s_k} - \sqrt{s_q} - i\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{m_1^2 + \mathbf{k}} + \sqrt{m_2^2 + \mathbf{k}} - \sqrt{m_1^2 + \mathbf{q}^2} - \sqrt{m_2^2 + \mathbf{q}^2} - i\varepsilon}, \quad (2.52)$$

в точности переходит в знаменатель соответствующего нерелятивистского уравнения Липпмана—Швингера, зависящий от приведенной массы μ :

$$\frac{1}{\frac{m_1 + m_2}{\sqrt{m_1 m_2}} (\sqrt{m_1 m_2 + k'^2} - \sqrt{m_1 m_2 + q'^2} - i\epsilon)} \rightarrow \frac{1}{\frac{k'^2}{2\mu} - \frac{q'^2}{2m} - i\epsilon} \quad (2.53)$$

В результате несложных вычислений приходим к следующему релятивистскому уравнению для амплитуды рассеяния частиц с неравными массами:

$$A(\mathbf{p}', \mathbf{q}') = -\frac{\mu}{2\pi} V(\mathbf{p}', \mathbf{q}'; E_{q'}) + \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} \int \frac{V(\mathbf{p}', \mathbf{k}'; E_{q'}) d\Omega_{k'}}{E_{q'} - E_{k'} + i\epsilon} A(\mathbf{k}', \mathbf{q}'), \quad (2.54)$$

где

$$E_{k'} = \sqrt{m_1 m_2 + k'^2}; \quad E_{q'} = \sqrt{m_1 m_2 + q'^2}. \quad (2.55)$$

Уравнение (2.54) можно рассматривать как релятивистское обобщение уравнения Липпмана—Швингера в духе геометрии Лобачевского, реализующейся на верхней полё гиперboloида $p'^2 = m_1 m_2$.

Подчеркнем здесь, что уравнение (2.54) описывает рассеяние эффективной релятивистской частицы на квазипотенциале $V(\mathbf{p}', \mathbf{q}'; E_{q'})$.

Глава 3

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

6. p-ПРОСТРАНСТВО КАК ПРОСТРАНСТВО ЛОБАЧЕВСКОГО И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ШАПИРО

Рассмотрим квазипотенциальные уравнения (2.23), (2.27) и (2.28). Важной особенностью квазипотенциального формализма является наличие трехмерных кинематических объектов, имеющих релятивистскую природу. Например, в указанных уравнениях интегрирование ведется по трехмерному импульсному пространству с элементом объема

$$d\Omega_p = \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2}}}, \quad (3.1)$$

который служит лоренц-инвариантной мерой на гиперboloиде (2.30).

Уравнения (2.23), (2.27) и (2.28) могут рассматриваться как непосредственные релятивистские обобщения уравнений Липпмана —

Швингера и Шредингера. Действительно, эти уравнения носят «абсолютный» характер по отношению к геометрии импульсного пространства, т. е. их можно записать в таком виде, когда они внешне не отличаются от своих нерелятивистских аналогов. Разница состоит в том, что здесь нерелятивистские (евклидовы) выражения для энергии и элемента объема заменены на их релятивистские (неевклидовы) аналоги:

$$\left. \begin{aligned} E_p &= \frac{p^2}{2m} \rightarrow E_p = \sqrt{p^2 + m^2}; \\ d\Omega_p &= dp \rightarrow d\Omega_p = \frac{dp}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Верхняя пола гиперboloида (2.30), погруженного в 4-мерное импульсное пространство, служит моделью релятивистского неевклидова пространства импульсов. Ясно, что на этой поверхности можно вводить различные системы координат и получить, таким образом, разные выражения для элемента длины, элемента объема, оператора Лапласа и т. п. Мы выберем в качестве координат на поверхности (2.30) компоненты вектора импульса p . Эти величины есть декартовы координаты на гиперплоскости $p_0 = 0$, на которую отображается гиперboloид при проектировании из точки $(\infty, 0)$. Моделью пространства Лобачевского теперь является все трехмерное p -пространство с метрикой

$$ds^2 = dp^2 - \frac{(pdp)^2}{m^2 + p^2} \equiv g_{ik} dp_i dp_k. \quad (3.3)$$

Сделанные замечания являются почти очевидными, однако они позволяют яснее понять смысл дальнейших построений. Мы намерены последовательно провести точку зрения, что в релятивистском случае импульсное пространство частицы с массой m является пространством Лобачевского с метрикой (3.3). Поскольку рассмотренная задача о взаимодействии двух релятивистских частиц сводится к задаче о поведении одной релятивистской частицы в квазипотенциальном поле, это позволит эффективно использовать некоторые теоретико-групповые и геометрические аргументы и в результате сделать схему более жесткой и более похожей на нерелятивистскую теорию.

Пусть $\psi(p)$ — волновая функция частицы со спином нуль, массой m и импульсом p , принадлежащим пространству Лобачевского. Возникает вопрос: как определить в данном формализме операторы углового момента L и координаты x ? Поскольку группа движений пространства Лобачевского — группа Лоренца — содержит подгруппу $O(3)$, то оператор L имеет обычный вид:

$$L_k = \frac{1}{i} \epsilon_{klm} p_l \frac{\partial}{\partial p_m}. \quad (3.4)$$

Координата x в нерелятивистской теории является генератором трансляций евклидова p -пространства. Так как в рассматриваемом кривом p -пространстве роль трансляций играют собственно лоренцевские преобразования $\Lambda_k [k = (k_1, k_2, k_3) — \text{параметры}]$, то можно попытаться ввести релятивистский оператор x как генератор этих преобразований*.

Нетрудно показать [31], что

$$p' = (\overrightarrow{\Lambda_k p}) = p(+k) = p + k \left[\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2}} + \frac{pk}{m^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{k^2}{m^2}}\right)} \right]. \quad (3.5)$$

$$\text{Поэтому } x = i \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial p}. \quad (3.6)$$

Оператор (3.6) является эрмитовым в метрике

$$(\Psi, \Phi) = \int \Psi^*(p) \Phi(p) d\Omega_p. \quad (3.7)$$

Однако его компоненты не коммутируют между собой и не могут быть одновременно приведены к диагональному виду. Таким образом, величина (3.6) непригодна для построения конфигурационного представления, и, следовательно, к проблеме введения понятия релятивистской координаты необходимо искать другой подход.

В этой связи заметим, что тождественность нерелятивистской координаты x генератору сдвигов p -пространства — не единственное теоретико-групповое свойство x . В самом деле, очевидно, что скалярный квадрат x , т. е. величина $(i \frac{\partial}{\partial p})^2 = r^2$, является оператором Казимира группы движений евклидова p -пространства. При этом экспоненты e^{ipk} , осуществляющие преобразование от p -представления к r -представлению, есть матричные элементы унитарных представлений данной группы, отвечающие чистым трансляциям и значениям $r^2 > 0$.

Теперь возвратимся к группе Лоренца и рассмотрим тот из ее операторов Казимира C , который в нерелятивистском пределе $m' \rightarrow \infty$ переходит в $(i \frac{\partial}{\partial p})^{2***}$:

$$C = x^2 - \frac{1}{m^2} L^2. \quad (3.8)$$

* Аналогичным образом определяются операторы координат в теории квантованного пространства — времени [26—29] (в этой связи см. также работу [30]). Обозначение для операции сдвига в пространстве постоянной кривизны [формула (3.5)] мы заимствуем из работы [27].

** Второй оператор Казимира Lx в данном бесспиновом случае равен нулю.

Положим эту величину равной

$$\mathbf{x}^2 - \frac{1}{m^2} \mathbf{L}^2 = \frac{1}{m^2} + r^2 > 0, \quad (3.9)$$

где

$$0 < r < \infty. \quad (3.10)$$

Соотношения (3.8)—(3.10) выделяют так называемую главную серию унитарных представлений группы Лоренца (см., например, работу [32]).

Роль плоских волн, отвечающих «трансляциям» (3.5), играют функции

$$\xi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \left(\frac{p_0 - \mathbf{p}\mathbf{n}}{m} \right)^{-1 - i\mathbf{r}\mathbf{m}}, \quad (3.11)$$

где

$$p_0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}, \quad \mathbf{r} = r\mathbf{n} (\mathbf{n}^2 = 1).$$

В нерелятивистском пределе

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \xi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}. \quad (3.12)$$

Аналогия между этими двумя системами функций становится совсем очевидной, если выписать условия ортогональности и полноты для $\xi(\mathbf{p}, \mathbf{r})$:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \xi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \xi^*(\mathbf{p}', \mathbf{r}') d\Omega_p = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \xi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \xi^*(\mathbf{p}', \mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2}}. \quad (3.14)$$

Разложение по функциям (3.11) было впервые введено И. С. Шапиро [33] и в дальнейшем будет называться преобразованием Шапиро.

Очевидно, преобразование Шапиро играет роль преобразования Фурье в \mathbf{p} -пространстве Лобачевского, отображая последнее на некоторое релятивистское \mathbf{r} -пространство. При этом относительно группы Лоренца новое \mathbf{r} -пространство имеет весьма специфические свойства [33]: модуль радиус-вектора \mathbf{r} является, согласно (3.9), релятивистским инвариантом, а его направление преобразуется как трехмерная часть изотропного вектора

$$n_\mu = (1, \mathbf{n}). \quad (3.15)$$

Таким образом, можно сделать следующий вывод: в квазипотенциальной теории рассеяния, сформулированной в терминах геометрии Лобачевского (см. параграф 4), переход к конфигурационному представлению необходимо производить с помощью преобразования Шапиро, т. е. разложения по матричным элементам главной серии унитарных представлений группы Лоренца.

Рассмотрим более детально преобразование «трансляции» кривого \mathbf{p} -пространства, задаваемое формулой (3.5). Ясно, что в отли-

чие от евклидовых сдвигов совокупность преобразований (3.5) не образует группу. Однако, будучи элементами группы Лоренца, эти «сдвиги» обладают целым рядом групповых свойств. В частности,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}(+) \mathbf{0} &= \mathbf{p}; \\ \mathbf{p}(-) \mathbf{p} &= \mathbf{0}; \\ \mathbf{0}(+) \mathbf{k} &= \mathbf{k}; \\ \mathbf{p}(+) \mathbf{k}(-) \mathbf{k} &= \mathbf{p}. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Очевидно, элемент объема (3.1) инвариантен относительно преобразования (3.5):

$$d\Omega_{\mathbf{p}(+)\mathbf{k}} = d\Omega_{\mathbf{p}}. \quad (3.17)$$

Это свойство $d\Omega_{\mathbf{p}}$ позволяет ввести операцию свертки функций в пространстве Лобачевского [31]:

$$\Psi_1(\mathbf{p}) * \Psi_2(\mathbf{p}) = \int d\Omega_{\mathbf{k}} \Psi_1(\mathbf{k}) \Psi_2(-\mathbf{k}(+)\mathbf{p}). \quad (3.18)$$

Определим далее δ -функцию в пространстве Лобачевского в виде

$$\delta(\mathbf{k}(-)\mathbf{p}) = \frac{\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})}{\sqrt{g(\mathbf{k})}} = \sqrt{1 + \frac{\mathbf{k}^2}{m^2}} \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}). \quad (3.19)$$

Отметим также полезную формулу:

$$\sqrt{1 + \frac{(\mathbf{p}(-)\mathbf{k})^2}{m^2}} = \sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2}} \sqrt{1 + \frac{\mathbf{k}^2}{m^2}} - \frac{1}{m^2} \mathbf{p}\mathbf{k}. \quad (3.20)$$

В сферических координатах

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= m \operatorname{ch} \chi_p; & \mathbf{p} &= m \operatorname{sh} \chi_p \boldsymbol{\mu}; \\ k_0 &= m \operatorname{ch} \chi_k; & \mathbf{k} &= m \operatorname{sh} \chi_k \boldsymbol{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

это равенство принимает вид

$$\sqrt{1 + \frac{(\mathbf{p}(-)\mathbf{k})^2}{m^2}} = \operatorname{ch} \chi_p \cdot \operatorname{ch} \chi_k - \operatorname{sh} \chi_p \cdot \operatorname{sh} \chi_k \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}. \quad (3.22)$$

7. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Применим теперь преобразование Шапиро (см. параграф 6) с целью формулировки в релятивистском \mathbf{r} -представлении развитого выше варианта квазипотенциальной теории.

Полагая (сравним с соответствующими нерелятивистскими формулами)

$$\Psi_q(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \xi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \Psi_q(\mathbf{p}) d\Omega_p; \quad (3.23)$$

$$\tilde{V}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) = \int \xi^*(\mathbf{p}, \mathbf{r}) V(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E_q) \xi(\mathbf{k}, \mathbf{r}') dr dr'; \quad (3.24)$$

$$G_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \xi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \frac{d\Omega_k}{2E_q - 2E_k + i\epsilon} \xi^*(\mathbf{k}, \mathbf{r}'), \quad (3.25)$$

будем иметь из (2.27)

$$\Psi_q(\mathbf{r}) = \xi(\mathbf{q}, \mathbf{r}) + \int G_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}', \mathbf{r}''; E_q) \Psi_q(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'', \quad (3.26)$$

что является точным аналогом уравнения Шредингера в интегральной форме. Нерелятивистское выражение для амплитуды также обобщается очевидным образом:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{V}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) \Psi_q(\mathbf{k}) d\Omega_k = \\ &= -\frac{m}{4\pi} \int \xi^*(\mathbf{p}, \mathbf{r}) V(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E_q) \Psi_q(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Далее, для упрощения формул удобно перейти к системе единиц, в которой $\hbar = c = m = 1$. При этом «плоская волна» $\xi(\mathbf{q}, \mathbf{r})$ будет записываться как

$$\xi(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = (q_0 - \mathbf{q}\mathbf{n})^{-1-i\mathbf{r}},$$

причем предельный переход к нерелятивистской теории отвечает следующему приближению:

$$\begin{aligned} |\mathbf{q}| &\ll 1; & |\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{q}| &= \text{фикс.} \\ |\mathbf{r}| &\gg 1; \end{aligned} \quad (3.28)$$

Теперь обратимся к разложению по парциальным волнам. Прежде всего отметим (см. например, работу [34]), что

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{q}, \mathbf{r}) &= \sqrt{\frac{\pi}{2\text{sh } \chi_q}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{\Gamma(i\mathbf{r}+l+1)}{\Gamma(i\mathbf{r}+1)} P_{-1/2-l}^{-1/2+i\mathbf{r}}(\text{ch } \chi_q) \times \\ &\times P_l\left(\frac{\mathbf{q}\mathbf{k}}{qr}\right) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l p_l(\text{ch } \chi_q, r) P_l\left(\frac{\mathbf{q}\mathbf{r}}{qr}\right); \\ \xi^*(\mathbf{q}, \mathbf{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-i)^l p_l^*(\text{ch } \chi_q, r) P_l\left(\frac{\mathbf{q}\mathbf{r}}{qr}\right) \\ (q &= \text{sh } \chi_q, \quad q_0 = \text{ch } \chi_q). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Нетрудно убедиться, что в нерелятивистской области (3.28) функции*

$$\left. \begin{aligned} p_l(\text{ch } \chi_q, r) &= \frac{(-1)^{l+1}}{r} \sqrt{\frac{\pi}{2\text{sh } \chi_q}} (-r)^{(l+1)} P_{-1/2-l}^{-1/2+i\mathbf{r}}(\text{ch } \chi_q); \\ p_l^*(\text{ch } \chi_q, r) &= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\pi}{2\text{sh } \chi_q}} (r)^{(l+1)} P_{-1/2-l}^{-1/2+i\mathbf{r}}(\text{ch } \chi_q) \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

* Здесь введено обозначение:

$$i^\lambda \frac{\Gamma(-i\mathbf{r}+\lambda)}{\Gamma(-i\mathbf{r})} \equiv r^{(\lambda)}. \quad (3.30)$$

переходят в одну и ту же функцию $j_l(qr) = \sqrt{\frac{\pi}{2qr}} J_{l+1/2}(qr)$. Кроме того, подобно $j_l(qr)$, функции (3.31) выражаются через элементарные:

$$\left. \begin{aligned} rp_0(\operatorname{ch} \chi_q, r) &= \frac{\sin r\chi_q}{\operatorname{sh} \chi_q}; \\ r^{(l+1)} p_l(\operatorname{ch} \chi_q, r) &= (-1)^l (\operatorname{sh} \chi_q)^l \left(\frac{d}{d\operatorname{ch} \chi_q} \right)^l rp_0(\operatorname{ch} \chi_q, r). \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Легко проверить также, что

$$\frac{2\operatorname{sh} \chi \cdot \operatorname{sh} \chi'}{\pi} \int_0^\infty r^2 dr^2 p_l(\operatorname{ch} \chi, r) p_l^*(\operatorname{ch} \chi', r) = \delta(\chi - \chi'); \quad (3.33)$$

$$\frac{2rr'}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{sh}^2 \chi d\chi p_l(\operatorname{ch} \chi, r) p_l^*(\operatorname{ch} \chi, r') = \delta(r - r'). \quad (3.34)$$

Далее имеем

$$\left. \begin{aligned} G_q(r, r') &= \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) G_{lq}(r, r') P_l\left(\frac{r, r'}{rr'}\right); \\ G_{lq}(r, r') &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{p_l(\operatorname{ch} \chi_k, r) p_l^*(\operatorname{ch} \chi_k, r') \operatorname{sh}^2 \chi_k d\chi_k}{2\operatorname{ch} \chi_q - 2\operatorname{ch} \chi_k + i\varepsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

До сих пор мы занимались обобщением интегральной формы нерелятивистской теории рассеяния. Теперь найдем аналоги дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют соответствующие нерелятивистские функции. С помощью рекуррентных формул для сферических функций

$$\begin{aligned} (2\nu+1)zP_\nu^\mu(z) &= (\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(z) + (\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(z), \\ P_\nu^\mu(z) &= P_{-\nu-1}^\mu(z) \end{aligned} \quad (3.36)$$

нетрудно установить, что введенные функции $p_l(\operatorname{ch} \chi_q, r)$ подчиняются следующему «дифференциальному» уравнению:

$$\left[2\operatorname{ch} \chi_q - 2\operatorname{ch}\left(i\frac{d}{dr}\right) - \frac{2i}{r}\operatorname{sh}\left(i\frac{d}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}e^{i\frac{d}{dr}} \right] p_l(\operatorname{ch} \chi_q, r) = 0. \quad (3.37)$$

Отсюда, принимая во внимание (3.29), получаем аналог дифференциального уравнения Шредингера в релятивистской области для свободного случая:

$$\begin{aligned} &(2E_q - H_0) \xi(\mathbf{q}, r) \equiv \\ &\equiv \left[2\operatorname{ch} \chi_q - 2\operatorname{ch}\left(i\frac{d}{dr}\right) - \frac{2i}{r}\operatorname{sh}\left(i\frac{d}{dr}\right) + \frac{\Delta_{\Phi, \Psi}}{r^2}e^{i\frac{d}{dr}} \right] \xi(\mathbf{q}, r) = 0, \end{aligned} \quad (3.38)$$

где $\Delta_{\theta, \varphi}$ — угловая часть оператора Лапласа. В нерелятивистском пределе (3.38) в точности переходит в свободное дифференциальное уравнение Шредингера. Таким образом, можно рассматривать уравнения (3.37) и (3.38) как уравнения в конечных разностях и применять к ним соответствующие методы исследования. Подробно эта точка зрения будет обсуждаться в гл. 4.

Если применить преобразование Шапиро к уравнению (2.28), то в результате получится релятивистский аналог дифференциального уравнения Шредингера с взаимодействием:

$$(2E_q - H_0) \Psi_q(\mathbf{r}) = \int V(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E_q) \Psi_q(\mathbf{r}') dr' \quad (3.39)$$

[свободный гамильтониан H_0 дается формулой (3.38)].

Наконец, выпишем еще уравнение для парциальной функции Грина (3.35):

$$\left[-2 \operatorname{ch} \left(i \frac{d}{dr} \right) - \frac{2i}{r} \operatorname{sh} \left(i \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} e^{i \frac{d}{dr}} \right] G_{lq}(r, r') + 2E_q G_{lq}(r, r') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r'). \quad (3.40)$$

Таким образом, мы убедились, что релятивистскую теорию рассеяния можно сформулировать как последовательное геометрическое обобщение нерелятивистской теории рассеяния с нелокальным взаимодействием. Естественно возникает вопрос: можно ли построить аналогичное обобщение теории с локальным взаимодействием? Исследованию этого вопроса посвящен параграф 9.

В заключение же данного параграфа мы выясним, какую геометрию несет новое релятивистское \mathbf{r} -пространство.

Если судить по соотношению (3.13) и (3.14), уравнениям (3.26) и (3.39), то метрика этого пространства должна быть евклидовой. С другой стороны, его генераторы сдвигов не могут просто равняться $-i \frac{d}{dr}$, поскольку собственные значения данных операторов образуют евклидово \mathbf{p} -пространство, а вовсе не \mathbf{p} -пространство постоянной кривизны.

Оказывается, справедливо следующее утверждение: релятивистское \mathbf{r} -пространство является евклидовым, однако генераторы преобразований сдвига $[\mathbf{p} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)]$ в нем реализуются в форме дифференциально-разностных операторов, совместный спектр которых есть \mathbf{p} -пространство Лобачевского, а совместная собственная функция — плоская волна $\xi(\mathbf{p}, \mathbf{r})$.

В явном виде операторы импульса в \mathbf{r} -представлении \hat{p}_1, \hat{p}_2 и \hat{p}_3 выглядят так:

$$\hat{p}_1 = -\sin \theta \cos \varphi \left(e^{i \frac{d}{dr}} - \frac{H_0}{2} \right) - i \left(\frac{\cos \varphi \cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) e^{i \frac{d}{dr}};$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_2 &= -\sin \theta \sin \varphi \left(e^{i \frac{d}{dr}} - \frac{H_0}{2} \right) - \\ &- i \left(\frac{\sin \varphi \cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) e^{i \frac{d}{dr}}, \quad (3.41) \\ \hat{p}_3 &= -\cos \theta \left(e^{i \frac{d}{dr}} - \frac{H_0}{2} \right) + \frac{i \sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} e^{i \frac{d}{dr}}, \end{aligned}$$

где оператор H_0 определен в (3.38), а θ и φ — угловые координаты вектора \mathbf{r} .

Нетрудно убедиться непосредственно из (3.41), что

$$[\hat{p}_2, \hat{p}_2] = [\hat{p}_2, \hat{p}_3] = [\hat{p}_3, \hat{p}_1] = 0, \quad (3.42)$$

причем

$$\hat{\mathbf{p}}\xi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathbf{p}\xi(\mathbf{p}, \mathbf{r}). \quad (3.43)$$

В нерелятивистском пределе операторы (3.41) переходят в обычные генераторы трансляций $-i \frac{d}{dr}$, записанные в сферической системе координат.

Разумеется, наряду с (3.42) в релятивистском \mathbf{r} -пространстве сохраняются неизменными и остальные перестановочные соотношения евклидовой группы движений. В частности, имеем

$$[L_i, \hat{p}_k] = i\epsilon_{ikl} L_l, \quad (3.44)$$

где \mathbf{L} — оператор углового момента.

8. ГРУППА ЛОРЕНЦА, ОРИСФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ И ОПЕРАТОРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Преобразование Фурье можно обобщить на релятивистский случай различными способами. Это связано с тем, что трехпараметрическую совокупность преобразований, служащую релятивистским аналогом евклидовой группы трансляций, можно выделить из группы движений пространства Лобачевского по-разному. В настоящем параграфе рассмотрим релятивистское обобщение преобразования Фурье, связанное с так называемыми орисферическими сдвигами пространства Лобачевского. Орисферические сдвиги, в отличие от сдвигов (3.5), образуют группу. Вследствие этого данные преобразования существенно отличаются от преобразований Шапиро (см. параграф 6). В параграфе 14 применим развитую здесь технику при выводе высокоэнергетического представления для релятивистской амплитуды рассеяния.

Рассмотрим двумерное спинорное представление группы Лоренца, реализуемое комплексными 2×2 -матрицами с единичным детерминантом:

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}; \quad \det a = \alpha\delta - \gamma\beta = 1. \quad (3.45)$$

С помощью матриц Паули σ_i ($i = 1, 2, 3$), единичной матрицы $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и 4-вектора Δ_μ построим спин-тензор

$$\tilde{\Delta} = \Delta_\mu \sigma^\mu = \begin{pmatrix} \Delta_0 + \Delta_3 & \Delta_1 - i\Delta_2 \\ \Delta_1 + i\Delta_2 & \Delta_0 - \Delta_3 \end{pmatrix}$$

преобразующийся при лоренцевых вращениях $\Delta'_\mu = L_\mu^\nu \Delta_\nu$ по закону

$$\tilde{\Delta}' = a \tilde{\Delta} a^\dagger = \Delta'_\mu \sigma^\mu. \quad (3.46)$$

Выберем в группе (3.45) трехпараметрическую подгруппу, состоящую из треугольных матриц вида

$$K = \begin{pmatrix} e^{\frac{a}{2}} & 0 \\ \frac{a}{e^{\frac{a}{2}}} \gamma & e^{-\frac{a}{2}} \end{pmatrix} a - \text{real}; \quad \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2. \quad (3.47)$$

Если считать, что 4-вектор Δ принадлежит гиперboloиду $\Delta^2 = 1$, и положить в (3.43) $\Delta_\mu = (1, 0)$ и $a = k$, то в результате возникает соотношение, отображающее пространство параметров группы (3.47) на верхнюю полу гиперboloида $\Delta_0^2 - \Delta^2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} \Delta_0 + \Delta_3 & \Delta_1 - i\Delta_2 \\ \Delta_1 + i\Delta_2 & \Delta_0 - \Delta_3 \end{pmatrix} = KK^\dagger = \begin{pmatrix} e^a & e^a(\gamma_1 - i\gamma_2) \\ e^a(\gamma_1 + i\gamma_2) & e^{-a} + e^a \tilde{\gamma}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Посредством $\tilde{\gamma}$ здесь обозначен 2-вектор (γ_1, γ_2) .

Приравнявая соответствующие элементы матриц в (3.48), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0 + \Delta_3 &= e^a; \\ \Delta_0 - \Delta_3 &= e^{-a} + e^a \tilde{\gamma}^2; \\ \Delta &= (\Delta_1, \Delta_2) = e^a \tilde{\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

Соотношения (3.49) задают орисферическую* систему координат

* Орисферой в пространстве Лобачевского, реализованного на верхней поле гиперboloида $\Delta^2 = 1$, называется двумерная поверхность, определяемая уравнением

$$\begin{aligned} \Delta \xi &= \text{const}, \\ \xi^2 &= \xi_0^2 - \xi^2 = 0. \end{aligned}$$

В частности, уравнение

$$a = 0 \quad (3.50)$$

в силу (3.49) задает орисферу $\Delta_0 + \Delta_3 = 1$.

Замечательное свойство орисферы заключается в том, что ее внутренняя геометрия является евклидовой.

нат на поверхности $\Delta^2 = 1$. Поскольку матрицы (3.47) образуют группу, то в пространстве параметров $(a, \tilde{\gamma})$ и, в результате (3.49), на верхний поле гиперboloида $\Delta^2 = 1$ также индуцируется некоторая групповая операция.

В применении к 4-векторам вида $\Delta_\mu = (\sqrt{1 + \Delta^2}, \Delta)$ будем обозначать эту операцию символом \oplus и записывать

$$\Delta' = \Delta \oplus q. \quad (3.51)$$

Это равенство эквивалентно соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} a' &= a + c; \\ \tilde{\gamma}' &= e^{-c} \tilde{\gamma} + \tilde{\mu}, \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

где $(a', \tilde{\gamma}')$, $(a, \tilde{\gamma})$ и $(c, \tilde{\mu})$ — орисферические координаты, отвечающие 4-векторам Δ_μ' , Δ_μ и \tilde{q}_μ соответственно.

Наличие всех групповых свойств у операции \oplus можно проверить непосредственно с помощью (3.52). При этом обратное преобразование определяется как

$$q^{-1} \oplus q = 0, \quad (3.53)$$

откуда

$$q^{-1} \equiv (-c, -e^c \tilde{\mu}). \quad (3.54)$$

В дальнейшем совокупность \oplus преобразований будем называть группой орисферических сдвигов и обозначать посредством $T(3)$. Легко видеть из формул (3.49) и (3.52), что в нерелятивистском пределе $(a, |\tilde{\gamma}| \ll 1)$ орисферические координаты переходят в декартовы координаты трехмерного евклидова импульсного пространства, а группа $T(3)$ — в абелеву группу сдвигов этого пространства.

Элемент объема гиперboloида $d\Omega_\Delta = \frac{d\Delta}{\sqrt{1 + \Delta^2}}$ в [орисферических координатах (3.49) имеет вид

$$d\Omega_\Delta = e^{2a} da d^2 \tilde{\gamma}. \quad (3.55)$$

Поскольку $T(3)$ является подгруппой группы Лоренца, то

$$d\Omega_{\Delta \oplus q} = d\Omega_{\Delta'}. \quad (3.56)$$

[ср. с (3.17)]. Свойство (3.56) позволяет интерпретировать (3.55) как правоинвариантный элемент объема на самой группе $T(3)$.

С помощью (3.49), (3.52)—(3.54) легко показать также, что

$$\Delta_0 \lambda_0 - \Delta \lambda = \sqrt{1 + (\Delta \oplus \lambda^{-1})^2}. \quad (3.57)$$

Сравнивая (3.57) с (3.20), приходим к важному соотношению:

$$(\Delta (-) \lambda)^2 = (\Delta \oplus \lambda^{-1})^2. \quad (3.58)$$

Перейдем теперь к описанию преобразования Фурье на группе $T(3)$.

Обычное трехмерное преобразование Фурье есть разложение по плоским волнам, являющимся унитарными одномерными представлениями абелевой группы трансляций евклидова пространства, или, другими словами, унитарными решениями функционального уравнения:

$$U(\Delta_1 + \Delta_2) = U(\Delta_1)U(\Delta_2).$$

Поскольку группа $T(3)$ неабелева, она не имеет нетривиальных одномерных представлений, т. е. функциональное уравнение

$$U(\Delta_1 \oplus \Delta_2) = U(\Delta_1)U(\Delta_2) \quad (3.59)$$

допускает лишь операторные решения. Матричные элементы этих операторов образуют базис, по которому можно разлагать функции на группе $T(3)$. Соответствующие разложения и играют роль преобразования Фурье на данной группе. Получаемые при этом фурье-образы являются операторами в том же пространстве, что и операторы U из уравнения (3.59).

Допустим теперь, что в нашем распоряжении имеется некоторая полная и ортогональная система «векторов состояний» $|\tilde{\rho}\rangle$:

$$\left. \begin{aligned} \int d\tilde{\rho} |\tilde{\rho}'\rangle \langle \tilde{\rho} | &= I; \\ \langle \tilde{\rho} | \tilde{\rho}' \rangle &= \delta^{(3)}(\tilde{\rho} - \tilde{\rho}'); \quad \tilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2). \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

Зададим в пространстве этих векторов оператор $\hat{U}_z(\Delta) = \hat{U}_z(a, \tilde{\gamma})$, полагая

$$\langle \tilde{\rho}_1 | \hat{U}_z(a, \tilde{\gamma}) | \hat{\rho}_2 \rangle = e^{iaz + i\tilde{\gamma}\tilde{\rho}_1 - a} \delta(\tilde{\rho}_1 - e^{-a}\tilde{\rho}_2). \quad (3.61)$$

С помощью (3.61) нетрудно убедиться, что

$$\hat{U}_z(a_1 + a_2, e^{-a_2}\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2) = \hat{U}_z(a_1, \tilde{\gamma}_1)\hat{U}_z(a_2, \tilde{\gamma}_2); \quad (3.62)$$

$$\hat{U}_z^+(a, \tilde{\gamma}) = \hat{U}_z(-a, -e^a\tilde{\gamma}) = \hat{U}_z^{-1}(a, \tilde{\gamma}). \quad (3.63)$$

Таким образом, операторы $\hat{U}_z(a, \tilde{\gamma})$ реализуют унитарное представление группы $T(3)$.

Пусть, далее, $f(\Delta) = f(a, \tilde{\gamma})$ есть некоторая функция на группе $T(3)$. В согласии со сказанным выше преобразование Фурье на данной группе определим следующим выражением:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int f(\Delta) d\Omega_\Delta \langle \tilde{\rho}_1 | \hat{U}_z(\Delta) | \tilde{\rho}_2 \rangle \equiv \langle \tilde{\rho}_1 | \hat{f}(z) | \tilde{\rho}_2 \rangle. \quad (3.64)$$

Оказывается, существует также формула обращения, позволяющая вычислить $f(\Delta)$ по известным матричным элементам $\langle \tilde{\rho}_1 | \hat{f}(z) | \tilde{\rho}_2 \rangle$:

$$f(\Delta) = \int dz d\tilde{\rho}_1 d\tilde{\rho}_2 \langle \tilde{\rho}_1 | \hat{f}(z) \hat{U}_z^+(\Delta) | \tilde{\rho}_2 \rangle. \quad (3.65)$$

Как видно из (3.65), для нахождения $f(\Delta)$ фактически необходимо задать лишь интеграл от $\langle \tilde{\rho}_1 | \hat{f}(z) | \tilde{\rho}_2 \rangle$ по параметру $\tilde{\rho}_1$:

$$\int d\tilde{\rho}_1 \langle \tilde{\rho}_1 | \hat{f}(z) | \tilde{\rho}_2 \rangle \equiv f(z, \tilde{\rho}_2), \quad (3.66)$$

а знать сам матричный элемент $\langle \tilde{\rho}_1 | \hat{f}(z) | \tilde{\rho}_2 \rangle$ нет необходимости.

Этот момент является отражением того обстоятельства, что формула (3.66) также допускает обращение, т. е. по заданным величинам $f(z, \tilde{\rho})$ можно восстановить матрицу $\langle \tilde{\rho}_1 | \hat{f}(z) | \tilde{\rho}_2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\rho}_1 | \hat{f}(z) | \tilde{\rho}_2 \rangle &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)} \int e^{ia(z-z')} dz' da \delta^{(2)}(\tilde{\rho}_1 - e^{-a} \tilde{\rho}_2) f(z', \tilde{\rho}_2). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Используя (3.59), легко установить «теорему о свертке» для преобразования (3.64) и (3.65). Именно, если

$$\hat{f}_1(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f_1(\Delta) \hat{U}_z(\Delta) d\Omega_\Delta$$

и

$$\hat{f}_2(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f_2(\Delta) \hat{U}_z(\Delta) d\Omega_\Delta,$$

то

$$\left. \begin{aligned} \hat{f}_1(z) \hat{f}_2(z) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_\Delta \{f_1(\Delta) * f_2(\Delta)\} \hat{U}_z(\Delta); \\ f_1(\Delta) * f_2(\Delta) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int f_1(\Delta \oplus \lambda^{-1}) f_2(\lambda) d\Omega_\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

В нерелятивистском пределе, как нетрудно убедиться, все соотношения, связанные с разложением Фурье на группе $T(3)$, переходят в соответствующие формулы обычного фурье-анализа.

9. ОПЕРАЦИИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И АНАЛОГИ ВАЖНЕЙШИХ ФУНКЦИЙ

В параграфе 7 мы получили релятивистское уравнение Шредингера (3.39), в котором радиальная часть свободного гамильтониана представляет комбинацию операторов конечного сдвига $\exp(i d/dr)$ и $\exp(-i d/dr)$ [см. (3.38)]. Ясно поэтому, что свойства данных уравнений целесообразно исследовать методами, применяемыми в исчислении конечных разностей (см. работу [20]).

Определим операцию конечно-разностного дифференцирования Δ , полагая (ср. с работой [35])

$$\Delta = i \left(e^{-i \frac{d}{dr}} - 1 \right). \quad (3.69)$$

При действии Δ на некоторую функцию $f(r)$, согласно (3.69), будем иметь

$$\Delta f(r) = \frac{f(r-i) - f(r)}{-i}. \quad (3.70)$$

Очевидно, что рассматриваемые релятивистские уравнения Шредингера можно переписать в терминах Δ . Ясно также, что в нерелятивистском пределе*

$$\Delta f(r) \rightarrow \frac{d}{dr} f(r). \quad (3.71)$$

Легко убедиться, что Δ -производная от произведения двух функций $f(r)$ и $\varphi(r)$ дается выражением

$$\Delta [f(r) \varphi(r)] = [\Delta f(r)] \varphi(r) + f(r) [\Delta \varphi(r)] + \frac{1}{i} [\Delta f(r)] [\Delta \varphi(r)]. \quad (3.72)$$

Для эффективного применения операции Δ желательно иметь такую функцию, которая относительно Δ -дифференцирования ведет себя подобно обычной степенной функции. Оказывается, такой обобщенной степенью является функция $r^{(\lambda)}$, определяемая соотношением (3.30). Действительно, как нетрудно проверить,

$$\Delta r^{(\lambda)} = \lambda r^{(\lambda-1)}. \quad (3.73)$$

Очевидно, далее, что

$$r^{(0)} = 1. \quad (3.74)$$

Если $\lambda = n$, где n — целое положительное число, то с учетом (3.30)

$$r^{(n)} = r(r+i)(r+2i) \dots (r+i(n-1)). \quad (3.75)$$

При переходе к нерелятивистской теории

$$r^{(\lambda)} \rightarrow r^\lambda. \quad (3.76)$$

Отметим, что такое определение обобщенной степени более универсально, чем соответствующее определение в работе [35]. В отличие от обычного анализа произведение двух обобщенных степеней уже не является обобщенной степенью. Можно показать, однако, что при произвольных λ и μ

$$r^{(\lambda)} r^{(\mu)} = \frac{r^{(\lambda+\mu)}}{F(-\lambda, -\mu; -ir; 1)}, \quad (3.77)$$

* Напомним, что в обычных единицах (3.70) имеет вид

$$\Delta f(r) = \frac{f\left(r - \frac{i\hbar}{mc}\right) - f(r)}{-\frac{i\hbar}{mc}}.$$

где F — гипергеометрическая функция. Предположим теперь, что известно разложение Тейлора некоторой функции $f(r)$:

$$f(r+a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{d^n}{dr^n} f(r). \quad (3.78)$$

Найдем аналогичное разложение f в терминах Δ -операции. Прежде всего ясно, что

$$f(r+a) = e^{a \frac{d}{dr}} f(r) = \left(e^{-i \frac{d}{dr}} \right)^{ia} f(r) = (1 - i\Delta)^{ia} f(r). \quad (3.79)$$

Разлагая бином $(1 - i\Delta)^{ia}$ в ряд по степеням Δ , будем иметь

$$(1 - i\Delta)^{ia} = 1 + ia(-i\Delta) + \frac{ia(ia-1)}{2!} (-i\Delta)^2 + \\ + \frac{ia(ia-1)(ia-2)}{3!} (-i\Delta)^3 + \dots$$

Отсюда и из (3.79), учитывая (3.75), окончательно получаем

$$f(r+a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)}}{n!} \Delta^n f(r). \quad (3.80)$$

Сравнение разложений (3.80) и (3.78) показывает, что эти ряды совершенно аналогичны друг другу по своей структуре.

Имея в своем распоряжении обобщение степенной функции, можем ввести с помощью соответствующих рядов аналоги наиболее важных функций, употребляемых в непрерывном анализе [20].

Будем называть обобщенной экспоненциальной функцией выражение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n r^{(n)}}{n!} \equiv \exp[a; r]. \quad (3.81)$$

С учетом (3.73), очевидно, имеем

$$\Delta \exp[a; r] = a \exp[a; r]. \quad (3.82)$$

Легко установить, что

$$\exp[a; r] = F(-ir, 1; 1; ia), \quad (3.83)$$

или

$$\exp[a; r] = (1 - ia)^{ir} = e^{ir \ln(1 - ia)}. \quad (3.84)$$

Здесь уместно подчеркнуть, что введенные в параграфе 6 плоские волны $\xi(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ имеют структуру, которая выражается в терминах обобщенной экспоненты (3.84):

$$\xi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = (\rho_0 - \mathbf{p}\mathbf{n})^{-1 - ir} = (\rho_0 - \mathbf{p}\mathbf{n})^{-1} \exp[i(\rho_0 - 1 - \mathbf{p}\mathbf{n}); -r] \quad (3.85) \\ (\mathbf{r} = \mathbf{r}\mathbf{n}).$$

Интересно отметить также, что с учетом (3.84) формулу (3.79) можно записать в виде

$$f(r+a) = e^{a \frac{d}{dr}} f(r) = \exp[\Delta; a] f(r).$$

Следовательно, с точностью до мнимой единицы операция Δ является «генератором» трансляций на прямой r в том представлении, которое задается обобщенными экспонентами $\exp[\Delta, a]$. Базируясь на понятии обобщенной экспоненты, можно определить также обобщенные гиперболические и тригонометрические функции (см. работу [20]).

Рассмотрим далее так называемую логарифмическую производную Γ -функции:

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \quad (3.86)$$

Используя известное функциональное соотношение

$$\Psi(z+1) - \Psi(z) = \frac{1}{z}, \quad (3.87)$$

получаем

$$\Delta \Psi(ir+1) = \frac{1}{r-i} = r^{(-1)}. \quad (3.88)$$

Следовательно, функция $\Psi(ir+1)$ имеет в исчислении конечных разностей то же значение, что и $\ln r$ в непрерывном анализе. Этот вывод подтверждается также сходством разложений данных функций в ряды Тейлора (3.80) и (3.78) соответственно:

$$\begin{aligned} \Psi(ir+a+1) &= \Psi(ir+1) + \frac{a}{r-i} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a(a+i)}{(r-i)(r-2i)} + \\ &+ \frac{1}{3} \frac{a(a+i)(a+2i)}{(r-i)(r-2i)(r-3i)} + \dots = \Psi(ir+1) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{r^{(-n)} a^{(n)}}{n}; \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\ln(r+a) = \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{r^{-n} a^n}{n}. \quad (3.90)$$

Построим аналог гипергеометрической функции в рассматриваемом формализме [22]. Естественно предположить, что эта функция (обозначим ее ${}_2F_1[\alpha, \beta; \gamma; a; r]$) должна иметь следующее разложение по обобщенным степеням $r^{(n)}$:

$$\begin{aligned} {}_2F_1[\alpha, \beta; \gamma; a; r] &= 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} ar + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!} a^2 r(r+i) + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^{(n)} (i\beta)^{(n)}}{(i\gamma)^{(n)}} \cdot \frac{(-ia)^n r^{(n)}}{n!}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Вспомогая определение многопараметрической гипергеометрической функции

$$\begin{aligned}
 & {}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; az) = \\
 & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha_1)^{(n)} (i\alpha_2)^{(n)} \dots (i\alpha_p)^{(n)}}{(i\beta_1)^{(n)} \dots (i\beta_q)^{(n)}} \frac{(i^{p-q} a)^n z^n}{n!} \quad (3.92)
 \end{aligned}$$

приходим к выводу, что

$${}_2F_1[\alpha, \beta; \gamma; a; r] = {}_3F_1(\alpha, \beta, -ir; \gamma; ia). \quad (3.93)$$

Нетрудно проверить, что

$$\Delta {}_2F_1[\alpha, \beta; \gamma; a; r] = a \frac{\alpha\beta}{\gamma} {}_2F_1[\alpha + 1, \beta + 1; \gamma + 1; a; r].$$

Используя это равенство и рекуррентные соотношения для ${}_3F_1$, можно получить разностное уравнение для функции (3.91):

$$\begin{aligned}
 \{[r - i(\gamma + 2)] \Delta^3 + i[r - 2i(\gamma + 1) + a(\alpha + ir + 2)(\beta + ir + 2)] \Delta^2 + \\
 + [i\gamma - 2a\alpha\beta - a(ir + 2)(\alpha + \beta + 1)] \Delta - \\
 - ia\alpha\beta\} {}_2F_1[\alpha, \beta; \gamma; a; r] = 0. \quad (3.94)
 \end{aligned}$$

Видно, что это уравнение является уравнением третьего порядка относительно операции Δ . Однако в нерелятивистском пределе член, содержащий Δ^3 , исчезает и (3.94) переходит в гипергеометрическое дифференциальное уравнение для ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; ar)$:

$$\left\{ r(1 - ar) \frac{d^2}{dr^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)ar] \frac{d}{dr} - a\alpha\beta \right\} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; ar) = 0.$$

Определим теперь обобщенную вырожденную гипергеометрическую функцию $\Phi[\alpha; \gamma; a; r]$, полагая

$$\begin{aligned}
 \Phi[\alpha; \gamma; a; r] & \equiv {}_1F_1[\alpha; \gamma; a; r] = \lim_{\xi \rightarrow \infty} {}_2F_1\left[\alpha, \xi; \gamma; \frac{a}{\xi}; r\right] = \\
 & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^{(n)}}{(i\gamma)^{(n)}} \cdot \frac{a^n r^{(n)}}{n!}. \quad (3.95)
 \end{aligned}$$

Легко установить, что

$$\Phi[\alpha; \gamma; a; r] = {}_2F_1(\alpha, -ir; \gamma; ia), \quad (3.96)$$

где ${}_2F_1(\alpha, -ir; \gamma; ia)$ — обычная гипергеометрическая функция.

Применяя рекуррентные соотношения для обычной гипергеометрической функции ${}_2F_1$, нетрудно установить, что $\Phi[\alpha; \gamma; a; r]$ удовлетворяет следующему разностному уравнению:

$$\begin{aligned}
 \{[\gamma + i(r - i)] \Delta^2 + i[\gamma - a(r - i) + ia\alpha] \Delta - \\
 - ia\alpha\} \Phi[\alpha; \gamma; a; r] = 0. \quad (3.97)
 \end{aligned}$$

Как разностное уравнение второго порядка уравнение (3.97) должно иметь два линейно независимых решения. Можно показать,

что помимо (3.96), обозначим это выражение $y_1(r, a)$, решением (3.97) является также функция

$$y_2(r, a) = a^{1-\gamma} r^{(1-\gamma)} \Phi[\alpha - \beta + 1; 2 - \gamma; a; r + i(1 - \gamma)] = \\ = a^{1-\gamma} r^{(1-\gamma)} {}_2F_1(\alpha - \gamma + 1, -ir + 1 - \gamma; 2 - \gamma; ia).$$

Замечательно, что обе функции $y_1(r, a)$ и $y_2(r, a)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному гипергеометрическому уравнению по аргументу a . Такого рода «дуализм» характерен как для решений уравнения (3.94), так и для решений разностных уравнений, рассматриваемых в данной и следующей главах. В нерелятивистской области (3.97), очевидно, переходит в дифференциальное уравнение для вырожденной гипергеометрической функции:

$$\left[r \frac{d^2}{dr^2} + (\gamma - ar) \frac{d}{dr} - \alpha a \right] \Phi(\alpha; \gamma; ar) = 0.$$

Заметим, что уравнения (3.94) и (3.97) могут служить основой для построения теории специальных функций применительно к исчислению конечных разностей.

Теперь найдем обобщение ступенчатой функции $\vartheta(r)$:

$$\vartheta(r) = \begin{cases} 1 & \text{при } r > 0; \\ 0 & \text{при } r < 0. \end{cases} \quad (3.98)$$

Важнейшее свойство $\vartheta(r)$, как известно, выражается равенством

$$\frac{d\vartheta(r)}{dr} = \delta(r), \quad (3.99)$$

справедливость которого наиболее просто доказывается, если исходить из интегрального представления

$$\vartheta(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixr}}{x - i\varepsilon} dx. \quad (3.100)$$

Принимая во внимание (3.99), назовем обобщенной ϑ -функцией такую функцию $\hat{\vartheta}(r)$, для которой имеет место соотношение

$$\Delta \hat{\vartheta}(r) = \delta(r). \quad (3.101)$$

В полной аналогии с (3.100) будем иметь

$$\hat{\vartheta}(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixr} dx}{e^x - 1 - i\varepsilon}, \quad (3.102)$$

откуда после вычисления интеграла

$$\hat{\vartheta}(r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(1 + i\varepsilon)^{ir-1}}{1 - e^{-2\pi r}} = \frac{1}{1 - e^{-2\pi r}}. \quad (3.103)$$

Таким образом, $\hat{\vartheta}(r)$ при $r \neq 0$ есть функция с периодом i , и поэтому по отношению к Δ -дифференцированию [формула (3.70)] ее следует рассматривать как константу. В точке $r = 0$ выражение (3.103) имеет полюс, что и является причиной существования равенства (3.101). В нерелятивистском пределе $|r| \gg 1$ функция (3.103), очевидно, переходит в функцию (3.98).

Отметим также, что тождество $\hat{\vartheta}(r) + \hat{\vartheta}(-r) = 1$, справедливое для функции (3.98), имеет место для $\hat{\vartheta}$ -функции:

$$\hat{\vartheta}(r) + \hat{\vartheta}(-r) = 1. \quad (3.104)$$

При взятии Δ -производных от δ -функции последнюю необходимо трактовать как функцию комплексного переменного, поскольку Δ -операция сопровождается выходом в комплексную r -плоскость. Введем поэтому следующее представление $\delta(r)$:

$$\delta(r) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{r - i\mu} - \frac{1}{r + i\mu} \right). \quad (3.105)$$

С учетом (3.105) и (3.70) будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta \delta(r) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\mu \rightarrow 0} i \left[\frac{1}{r - i - i\mu} - \frac{1}{r - i + i\mu} - \frac{1}{r - i\mu} + \frac{1}{r + i\mu} \right] = \\ &= \frac{1}{i} \delta(r) + \frac{i}{\pi} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\mu}{(r - i)^2 + \mu^2}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Член $\frac{i\mu}{\pi} \cdot \frac{1}{(r - i)^2 + \mu^2}$ из (3.106) в интегралах по вещественной оси в r -пространстве можно считать непрерывной функцией μ , и, следовательно, (3.106) фактически эквивалентно соотношению

$$\Delta \delta(r) = -i \delta(r). \quad (3.107)$$

Это же равенство получается при формальном Δ -дифференцировании тождества $r\delta(r) = 0$ по правилу (3.72). Действительно,

$$\Delta [r\delta(r)] = \delta(r) + r \Delta \delta(r) + \frac{1}{i} \Delta \delta(r) = 0,$$

откуда

$$\Delta \delta(r) - \frac{-1}{r - i} \delta(r) = -i \delta(r).$$

Обратим внимание на то, что соотношение (3.105) с учетом (3.87) и (3.70) может быть записано в виде

$$\delta(r) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\mu \rightarrow 0} \Delta [\Psi(ir + \mu) - \Psi(ir - \mu)]. \quad (3.108)$$

Отсюда, учитывая (3.107) и (3.103), получаем выражение для «размазанной» $\hat{\vartheta}$ -функции:

$$\hat{\vartheta}_\mu = \frac{1}{2\pi i} [\Psi(ir + \mu) - \Psi(ir - \mu)] - \frac{\text{cth } \pi r}{2}. \quad (3.109)$$

10. СЛУЧАЙ ЛОКАЛЬНОГО КВАЗИПОТЕНЦИАЛА.
РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ
ЮКАВЫ И КУЛОНА

В работе [7] было установлено, что если от уравнения (В.2) потребовать только, чтобы оно давало правильную физическую амплитуду рассеяния, то квазипотенциал $V(\mathbf{p}, \mathbf{k}, E_q)$ можно выбрать локальным:

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) = V((\mathbf{p} - \mathbf{k})^2; E_q), \quad (3.110)$$

причем для функции (3.110) оказывается справедливым следующее спектральное представление* [8]:

$$V((\mathbf{p} - \mathbf{k})^2; E_q) = \int_{v_0}^{\infty} \frac{\rho(v; E_q) dv}{v + (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2}. \quad (3.111)$$

Другими словами, при таком подходе квазипотенциал является суперпозицией нерелятивистских потенциалов Юкавы со спектральной функцией, зависящей от энергии.

Небольшая модификация рассуждений, проводимых в [7] при выводе соотношения (3.110), позволяет при тех же предположениях доказать, что уравнение (2.23) приводит к правильной физической амплитуде $A(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ в случае квазипотенциалов вида [24]

$$\tilde{V}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) = \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{\rho(\sigma; E_q) d\sigma}{\sigma - (E_p - E_q)^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2} \quad (3.112)$$

(см. предыдущее примечание).

Принимая во внимание (3.20), формулу (3.112) можно переписать так:

$$\tilde{V}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q) = \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{\rho(\sigma; E_q) d\sigma}{\sigma - 2 + 2\sqrt{1 + (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2}} \equiv V(\mathbf{p}(-)\mathbf{k})^2; E_q). \quad (3.113)$$

Следовательно, построен квазипотенциал, который является локальным в смысле геометрии Лобачевского. Полагая

$$V(r, E_q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \xi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) V(\mathbf{p}^2; E_q) d\Omega_p, \quad (3.114)$$

* Строго говоря, соотношение (3.111) необходимо выписывать отдельно для четной и нечетной частей квазипотенциала, отвечающих четным и нечетным моментам l в разложении V по парциальным волнам. Кроме того, в этом соотношении необходимо делать вычитания. Однако в дальнейшем, чтобы не усложнять картины, будем работать с представлениями типа (3.111) и (3.112).

и учитывая (3.113), получаем

$$V(r, E_q) = - \int_{\sigma_0}^{\infty} \rho(\sigma, E_q) V(\sigma, r) d\sigma, \quad (3.115)$$

где

$$V(\sigma, r) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4\pi r} \cdot \frac{\operatorname{ch} \left(r \operatorname{arc} \cos \left(-1 + \frac{\sigma}{2} \right) \right)}{\operatorname{sh} \pi r} \text{ при } \sigma < 4; \\ \frac{1}{4\pi r} \cdot \frac{\operatorname{cos} \left(r \operatorname{Ar} \operatorname{ch} \left(-1 + \frac{\sigma}{2} \right) \right)}{\operatorname{sh} \pi r} \text{ при } \sigma > 4. \end{array} \right\} \quad (3.116)$$

Ясно, что функция $V(\sigma, r)$ может рассматриваться как релятивистский аналог потенциала Юкавы. Нетрудно убедиться, что при $r \gg 1$, $\sigma < 4$

$$V(\sigma, r) \rightarrow \frac{e^{-V\sigma r}}{4\pi r}. \quad (3.117)$$

Если в (3.116) положить $\sigma = 0$, то, очевидно, придем к релятивистскому обобщению потенциала Кулона

$$V(0, r) = \frac{1}{4\pi r} \operatorname{cth} \pi r. \quad (3.118)$$

Подчеркнем, что потенциалы (3.116) и (3.118) отвечают взаимодействиям, распространяющимся с конечной скоростью, поскольку в p -представлении им сопоставляются фейнмановские «пропагаторы»

$$\frac{1}{\sigma - (\rho_0 - k_0)^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2} \text{ и } \frac{1}{(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 - (\rho_0 - k_0)^2}. \quad (3.119)$$

Подставляя (3.113) в (2.28), получаем

$$(2E_q - 2E_p) \Psi_q(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int V((\mathbf{p}(-)\mathbf{k})^2; E_q) \Psi_q(\mathbf{k}) d\Omega_k \quad (3.120)$$

или, принимая во внимание (3.18), — определение свертки в пространстве Лобачевского,

$$(2E_q - 2E_p) \Psi_q(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}^2; E_q) * \Psi_q(\mathbf{p}). \quad (3.121)$$

В результате сферической симметрии функции $V((\mathbf{p}(-)\mathbf{k})^2; E_q)$ ее разложение по «плоским волнам» $\xi(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ приводится к виду [см. формулу (3.114)]

$$\begin{aligned} V((\mathbf{p}(-)\mathbf{k})^2; E_q) &= \int \xi^*((\mathbf{p}(-)\mathbf{k}), \mathbf{r}) V(r, E_q) d\mathbf{r} = \\ &= \int_0^{\infty} r^2 dr V(r, E_q) \int d\omega_n \xi^*((\mathbf{p}(-)\mathbf{k}), \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3.122)$$

откуда, применяя «теорему сложения» для ξ -функций (см. работу [19])

$$\int \xi^*(\mathbf{p}(-)\mathbf{k}, \mathbf{r}) d\omega_n = \int \xi^*(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \xi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) d\omega_n, \quad (3.123)$$

находим

$$V((\mathbf{p}(-)\mathbf{k})^2; E_q) = \int \xi^*(\mathbf{p}, \mathbf{r}) V(r, E_q) \xi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) dr. \quad (3.124)$$

Теперь, подставляя (3.124) в уравнение (3.120) и (3.121) и вводя обозначение

$$\Psi_q(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \xi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \Psi_q(\mathbf{p}) d\Omega_p, \quad (3.125)$$

будем иметь*

$$[H_0 - 2E_q + V(r, E_q)] \Psi_q(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.126)$$

Итак, в релятивистском \mathbf{r} -представлении получили дифференциально-разностное уравнение типа Шредингера с локальным квазипотенциалом, зависящим от энергии. Этот квазипотенциал является суперпозицией (3.115) релятивистских потенциалов Юкавы (3.116), причем конкретный вид спектральной функции $\rho(\sigma; E_q)$ в принципе определяется из теории поля. Ясно поэтому, что уравнение (3.126), подобно уравнению Шредингера (В.2) в ортодоксальном КПП, может применяться для вычисления релятивистских поправок к уровням энергии связанных состояний, а также нахождения асимптотического поведения релятивистской амплитуды рассеяния при высоких энергиях.

Кроме того, уравнение (3.126) интересно использовать для феноменологического описания системы двух взаимодействующих релятивистских частиц. При этом выбор квазипотенциала в локальной форме будет означать, с учетом сказанного выше, что в определенной степени учитывается существование спектрального представления релятивистской амплитуды рассеяния, или, в конечном счете, свойства локальности и причинности в смысле теории поля. Несколько задач с простыми локальными квазипотенциалами рассматривается в гл. 4.

Глава 4

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

11. РЕШЕНИЯ СВОБОДНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Согласно (3.126), при выключенном взаимодействии имеем в нашем формализме следующее свободное радиальное уравнение:

$$(H_0^{\text{rad}} - 2E_q) \Psi_{lq}^{(0)}(r) = 0, \quad (4.1)$$

* В случае $m_1 \neq m_2$ также можно получить разностное уравнение в \mathbf{r} -представлении с локальным квазипотенциалом [23].

где оператор H_0^{rad} определяется формулой [ср. с формулой (3.38)]

$$H_0^{\text{rad}} = 2 \operatorname{ch} i \frac{d}{dr} + \frac{2i}{r} \operatorname{sh} i \frac{d}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2} e^{i \frac{d}{dr}}. \quad (4.2)$$

Записывая (4.1) в терминах Δ -операции, легко убедиться, что это уравнение является уравнением второго порядка по Δ . Согласно общей теории разностных уравнений [35], отсюда следует, что уравнение (4.1) имеет два линейно независимых решения.

Найдем решения (4.1). Фактически одно из них уже известно: им является функция $p_l(\operatorname{ch} \chi_q, r)$, задаваемая формулой (3.31) и удовлетворяющая условию нормировки (3.33). Однако, как и в нерелятивистской теории, в данном случае удобно использовать решение с несколько другой нормировкой. Именно, положим

$$s_l(r, \chi) = r \operatorname{sh} \chi p_l(\operatorname{ch} \chi, r). \quad (4.3)$$

Тогда на основании (3.33) и (3.34) получаем следующие соотношения ортонормированности полноты для функций $s_l(r, \chi)$:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dr s_l(r, \chi) s_l^*(r, \chi') = \delta(\chi - \chi'); \quad (4.4)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\chi s_l(r, \chi) s_l^*(r', \chi) = \delta(r - r'). \quad (4.5)$$

Подставляя $p_l(\operatorname{ch} \chi, r)$, выраженное через $s_l(r, \chi)$, в (4.1), находим уравнение для $s_l(r, \chi)$:

$$H_0^{\text{rad}} s_l(r, \chi) \equiv \left(2 \operatorname{ch} i \frac{d}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2} e^{i \frac{d}{dr}} \right) s_l(r, \chi) = 2E s_l(r, \chi). \quad (4.6)$$

Таким образом, после замены (4.3) член с $\frac{1}{i} \operatorname{sh} i \frac{d}{dr}$ из уравнения (4.1) исчезает. Напомним для сравнения, что в нерелятивистской теории подстановка типа (4.3) приводит к исчезновению из уравнения Шредингера члена с первой производной.

Из (3.69) следует, что выражение $\frac{1}{i} \operatorname{sh} i \frac{d}{dr}$ является действительной частью оператора Δ :

$$\frac{\Delta + \Delta^*}{2} = \frac{1}{i} \operatorname{sh} i \frac{d}{dr}. \quad (4.7)$$

Применяя рекуррентные соотношения между сферическими функциями P_ν^μ , можно вывести следующую рекуррентную формулу для $s_l(r, \chi)$, использующую оператор (4.7) [ср. с функциями (3.32)]:

$$s_l(r, \chi) = - \frac{(-r)^{(l+1)}}{(\operatorname{sh} \chi)^{(l)}} \left[\frac{1}{ir} \operatorname{sh} i \frac{d}{dr} \right]^l \frac{s_0(r, \chi)}{r}. \quad (4.8)$$

В полной аналогии с нерелятивистской теорией можно утверждать, что функция

$$c_l = (-1)^l s_{-l-1} \quad (4.9)$$

также является решением уравнения (4.6), поскольку это уравнение не меняется при замене

$$l \rightarrow -l-1. \quad (4.10)$$

Используя (4.9), (4.3) и (3.31), получаем

$$c_l = \sqrt{\frac{\pi \operatorname{sh} \chi}{2}} (-r)^{(-l)} P_{-l/2+l}^{1/2+l}(\operatorname{ch} \chi). \quad (4.11)$$

Из рекуррентной формулы (3.32) не представляет труда найти асимптотическое поведение при $r\chi \rightarrow \infty$ функции $p_l(\operatorname{ch} \chi, r)$, а, следовательно, и функций $s_l(r, \chi)$ и $c_l(r, \chi)$. Простые вычисления дают:

$$\left. \begin{aligned} s_l(r, \chi) &\approx \sin\left(r\chi - \frac{l\pi}{2}\right) \text{ при } r\chi \gg 1; \\ c_l(r, \chi) &\approx \cos\left(r\chi - \frac{l\pi}{2}\right) \text{ при } r\chi \gg 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Таким образом, решения $s_l(r, \chi)$ и $c_l(r, \chi)$ уравнения (4.6) соответствуют стоячим волнам.

Введем теперь функции (см. работу [36])

$$e_l^{(1)}(r, \chi) = c_l^2(r, \chi) + i s_l(r, \chi); \quad (4.13)$$

$$e_l^{(2)}(r, \chi) = c_l(r, \chi) - i s_l(r, \chi). \quad (4.14)$$

Свободные решения этих функций выражаются через присоединенные функции Лежандра второго рода следующим образом:

$$e_l^{(1, 2)}(r, \chi) = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{2 \operatorname{sh} \chi}{\pi}} (-r)^{(-l)} Q_{-\frac{1}{2}+l}^{-\frac{1}{2} \pm ir}(\operatorname{ch} \chi). \quad (4.15)$$

Из (4.12) следует, что

$$e_l^{(1, 2)}(r, \chi) \approx e^{\pm i\left(r\chi - \frac{l\pi}{2}\right)} \text{ при } r\chi \gg 1. \quad (4.16)$$

Ясно, что выбор решений уравнения (4.6) в форме (4.15) отвечает рассмотрению расходящейся и сходящейся сферических волн.

В нерелятивистском пределе

$$\chi \ll 1, r \gg 1, \chi r = \text{фикс.} \quad (4.17)$$

Функции $s_l(r, \chi)$, $c_l(r, \chi)$, $e_l^{(1)}$ и $e_l^{(2)}$ переходят с точностью до множителя в соответствующие цилиндрические функции:

$$\left. \begin{aligned} s_l(r, \chi_q) &\rightarrow \sqrt{\frac{\pi r q}{2}} J_{l+1/2}(r q); \\ c_l(r, \chi_q) &\rightarrow -\sqrt{\frac{\pi r q}{2}} N_{l+1/2}(r q); \\ e^{(1, 2)}(r, \chi_q) &\rightarrow \pm i \sqrt{\frac{\pi r q}{2}} H_{l+1/2}^{(1, 2)}(r q). \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Согласно общей теории уравнений в конечных разностях [35], любые два решения $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$ разностного уравнения (4.6) линейно независимы, если отличен от нуля определитель

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(r) & \varphi_2(r) \\ \Delta \varphi_1(r) & \Delta \varphi_2(r) \end{vmatrix} \equiv W(\varphi_1, \varphi_2). \quad (4.19)$$

Ясно, что (4.19) следует рассматривать как аналог вронскиана в конечно-разностном анализе. В нерелятивистском пределе, очевидно,

$$W(\varphi_1, \varphi_2) \rightarrow \begin{vmatrix} \varphi_1(r) & \varphi_2(r) \\ \frac{d}{dr} \varphi_1(r) & \frac{d}{dr} \varphi_2(r) \end{vmatrix}. \quad (4.20)$$

На основании (4.13) и (4.14) имеем

$$\left. \begin{aligned} W(s_l, c_l) &= \frac{1}{2i} W(e_l^{(1)}, e_l^{(2)}); \\ W(s_l, c_l) &= W(s_l, e_l^{(1)}) = W(s_l, e_l^{(2)}). \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Как и в непрерывном случае, вронскианы (4.21) можно вычислить точно. Приведем здесь лишь окончательное выражение для обобщенного вронскиана [20]:

$$W(e_l^{(1)}, e_l^{(2)}) = \frac{2i(-r)^{(l+1)}}{(r)^{(l+1)}} (-1)^l \operatorname{sh} \chi. \quad (4.22)$$

Интересно отметить соотношение

$$\frac{W(e_l^{(1)}, e_l^{(2)})}{\begin{vmatrix} e_l^{(1)}(r, \chi) & e_l^{(2)}(r, \chi) \\ \frac{\partial}{\partial \chi} e_l^{(1)}(r, \chi) & \frac{\partial}{\partial \chi} e_l^{(2)}(r, \chi) \end{vmatrix}} \equiv \frac{W(e_l^{(1)}, e_l^{(2)})}{W_\chi(e_l^{(1)}, e_l^{(2)})} = \frac{\operatorname{sh} \chi}{r}. \quad (4.23)$$

Если учесть, что $\text{sh } \chi$ есть модуль трехмерного импульса, то сходство (4.23) с аналогичным отношением вронскианов в нерелятивистской теории становится совершенно очевидным. В некоторых вычислениях полезно иметь в виду равенство

$$W(e_l^{(1)}, e_l^{(2)}) = \frac{ir-l-1}{ir} \text{sh } \chi \begin{vmatrix} e_l^{(1)}(r, \chi) & e_l^{(2)}(r, \chi) \\ e_{l+1}^{(1)}(r, \chi) & e_{l+1}^{(2)}(r, \chi) \end{vmatrix}. \quad (4.24)$$

Аналог этого равенства в нерелятивистском случае также существует.

Наша следующая задача — построить из свободных решений уравнения (4.6) его функцию Грина $G_l(r, r'; \chi_q)$. Ясно, что $G_l(r, r'; \chi_q)$ удовлетворяет уравнению [ср. с выражением (3.40)]

$$\left[2 \text{ch } \chi_q - 2 \text{ch } i \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^{(2)}} e^{i \frac{d}{dr}} \right] G_l(r, r'; \chi_q) = \delta(r-r'). \quad (4.25)$$

Далее можно рассуждать так же, как и в нерелятивистском формализме. Именно, с учетом (4.25), при $r < r'$ и $r > r'$ функция Грина подчиняется свободному уравнению и, следовательно, должна быть линейной комбинацией функций $s_l, c_l, e_l^{(1,2)}$ с i -периодическими коэффициентами. В точке $r = r'$ эти коэффициенты обязаны иметь особенность, чтобы после дифференцирования по r возникла $\delta(r-r')$. Легко увидеть, учитывая принцип соответствия и определение функции $\hat{\vartheta}(r)$ [см. выражения (3.101)—(3.103)], что именно эта обобщенная ϑ -функция должна входить в выражения для коэффициентов.

Точный вид $G_l(r, r'; \chi_q)$ нетрудно найти из интегрального представления [см. (3.35)]:

$$G_l(r, r'; \chi_q) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\chi s_l(r, \chi) s_l^*(r', \chi)}{2 \text{ch } \chi_q - 2 \text{ch } \chi + i\epsilon}. \quad (4.26)$$

Интеграл (4.26) можно взять с помощью теории вычетов. Опуская довольно длинные вычисления, приведем лишь результаты:

$$G_l(r, r'; \chi_q) \equiv \frac{1}{W(e_l^{(1)}(r, \chi_q), e_l^{(2)}(r', \chi_q))} \times \\ \times \{ \hat{\vartheta}(r-r') e_l^{(1)}(r, \chi_q) e_l^{(2)}(r', \chi_q) + \hat{\vartheta}(r'-r) e_l^{(1)}(r', \chi_q) e_l^{(2)}(r, \chi_q) - \\ - \hat{\vartheta}(r+r') e_l^{(1)}(r, \chi_q) e_l^{(1)}(r', \chi_q) - \hat{\vartheta}(-r-r') e_l^{(2)}(r, \chi_q) e_l^{(2)}(r', \chi_q) \}. \quad (4.27)$$

Единственное отличие (4.27) от соответствующего выражения обычной теории [36] состоит в том, что в нашей функции Грина имеется «каузальный» член, пропорциональный $\hat{\vartheta}(-r-r')$. В нерелятивистском пределе это слагаемое, очевидно, исчезает.

12. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЯМА

Важную иллюстрацию развитой схемы дают точно решаемые примеры. Рассмотрим случай сферически симметричной потенциальной ямы конечной глубины [21, 24]:

$$V(r) = -V_0 \text{ при } r \leq a; \quad (4.28)$$

$$V(r) = 0 \text{ при } r > a. \quad (4.29)$$

Изучим сначала дискретный спектр, считая для простоты, что $l = 0$.

При $r \leq a$ уравнение (3.126) имеет вид

$$\left(2 \operatorname{ch} i \frac{d}{dr} - 2E_q - V_0 \right) \Psi_{q_0}^I(r) = 0. \quad (4.30)$$

В этом случае $E_q < 1$, и удобно пользоваться параметризацией

$$E_q = \cos \chi_q. \quad (4.31)$$

Будем искать $\Psi_{q_0}^I(r)$ в виде

$$\Psi_{q_0}^I(r) = A^I(r) \sin \alpha r, \quad (4.32)$$

где $A^I(r)$ — i -периодическая функция.

Функция $\Phi_{q_0}^I(r)$ удовлетворяет граничному условию

$$\Psi_{q_0}^I(0) = 0. \quad (4.33)$$

Подставляя $\Psi_{q_0}^I(r)$ в (4.30), получаем уравнение для α

$$\operatorname{ch} \alpha = E_q + \frac{V_0}{2}. \quad (4.34)$$

В области $r > 0$ уравнение (3.126) принимает вид

$$\left(2 \operatorname{ch} i \frac{d}{dr} - 2E_q \right) \Psi_{q_0}^I(r) = 0. \quad (4.35)$$

Решение $\Psi_{q_0}^{II}$, удовлетворяющее условию

$$\Psi_{q_0}^{II}(\infty) = 0, \quad (4.36)$$

следует искать в виде

$$\Psi_{q_0}^{II}(r) = A^{II}(r) e^{-r\chi_q}. \quad (4.37)$$

Уровни энергии определим теперь, потребовав, чтобы для решений $\Psi_{q_0}^I(r)$ и $\Psi_{q_0}^{II}(r)$ выполнялось условие сшивания в точке $r = a$ [24]

$$\mathcal{W}(\Psi_{q_0}^I(r), \Psi_{q_0}^{II}(r))|_{r=0} = 0. \quad (4.38)$$

Подставляя (4.32) и (4.37) в (4.38) и отбрасывая i -периодические константы A^I и A^{II} , получаем уравнение для определения связанных состояний

$$\operatorname{ctg} \alpha a = - \frac{\sin \chi q}{\operatorname{sh} \alpha}. \quad (4.39)$$

Рассмотрим случай, когда $V_0 = 2m$, а энергия связанного состояния $2E_q$ мала по сравнению с m :

$$\mu = 2E_q = 2m - |W| \ll m. \quad (4.40)$$

Если использовать язык составных моделей элементарных частиц (см., например, работы [37—39]), то условие (4.40) означает, что масса π -мезона должна быть значительно меньше массы кварка. Далее, пренебрегая в (4.39) всеми степенями μ выше первой, можно представить эту формулу в виде

$$\operatorname{ctg} \frac{amc}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{2m}} = - \sqrt{\frac{2m}{\mu}}, \quad (4.41)$$

откуда для величины a («радиуса» π -мезона) получается следующее приближенное значение:

$$a \approx \frac{\pi \sqrt{2} \hbar}{c \sqrt{m\mu}}. \quad (4.42)$$

Оценим теперь по порядку величины среднее значение модуля импульса кварка в яме. Из соотношения неопределенностей следует, что

$$\chi a \approx \frac{\hbar}{mc}.$$

Подставляя сюда вместо радиуса a его значение из (4.42) и снова учитывая малость величины μ/m , будем иметь

$$\frac{p^2}{m^2 c^2} \sim \frac{\mu}{m}. \quad (4.43)$$

Следовательно, кварки в яме можно рассматривать как нерелятивистские частицы, если масса связанного состояния достаточно мала по сравнению с массой кварка [условие (4.40)].

Таким образом, развитая нами релятивистская формулировка задачи двух тел позволяет подойти к обоснованию одной из основных гипотез, принятых в кварковой модели, а именно гипотезы о нерелятивистском характере движения кварков внутри составной частицы.

13. КУЛОНОВСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

Рассмотрим кулоновское поле притяжения [22, 24]

$$V(r) = -\frac{e^2}{r}. \quad (4.44)$$

Уравнение (3.126) для потенциала (4.44) принимает вид

$$\left(H_0 - 2E_q - \frac{e^2}{r}\right) \Psi_{ql}(r) = 0. \quad (4.45)$$

Найдем сначала решение этого уравнения, отвечающее дискретному спектру. Здесь опять удобно выбрать параметризацию (4.31). Легко проверить, что уравнению (4.45) удовлетворяет функция

$$\Psi_{ql}(r) = c_l(\chi_q, r) e^{-r\chi_q} (-r)^{(l+1)} \Phi \left[l+1 - \frac{e^2}{2 \sin \chi_q}; 2l+2; 2 \sin \chi_q e^{-i\chi_q}; r+i(l+1) \right], \quad (4.46)$$

где $\Phi[\alpha, \gamma; c; z]$ — обобщенная вырожденная гипергеометрическая функция (3.96), явный вид «константы» $c_l(\chi_q, r)$ не сказывается на формуле для уровней энергии. Очевидно,

$$\Psi_{ql}(0) = 0. \quad (4.47)$$

Гипергеометрический ряд в (4.46) растет не быстрее полинома, если

$$\frac{e^2}{2 \sin \chi_q} = n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.48)$$

С учетом (4.48) получаем отсюда правило квантования уровней энергии

$$E_q^h = \sqrt{1 - \frac{e^4}{4n^2}}. \quad (4.49)$$

В сплошном спектре $E_q = \text{ch } \chi_q \geq 1$ решение уравнения (4.45) имеет вид

$$\Psi_{ql}(r) = c'_l(\chi_q, r) e^{ir\chi_q} (-r)^{(l+1)} \times \Phi \left[l+1 - \frac{i e^2}{2 \text{sh } \chi_q}; 2l+2; -2i \text{sh } \chi_q e^{-\chi_q}; r+i(l+1) \right]. \quad (4.50)$$

Функция (4.50) при $r \rightarrow \infty$ имеет следующую асимптотическую форму:

$$\Psi_{ql}^{ac}(r) = c'_l(\chi_q, r) \left\{ \frac{\exp i \left[r\chi_q + \frac{e^2}{2 \text{sh } \chi_q} \ln r \text{sh } \chi_q \right]}{\Gamma \left(l+1 + \frac{i e^2}{2 \text{sh } \chi_q} \right)} + (-1)^{l+1} \frac{\exp i \left[-r\chi_q - \frac{e^2}{2 \text{sh } \chi_q} \ln r \text{sh } \chi_q \right]}{\Gamma \left(l+1 - \frac{i e^2}{2 \text{sh } \chi_q} \right)} \right\}. \quad (4.51)$$

Как и в нерелятивистском случае, радиальное решение представляется в виде суммы сходящейся и расходящейся сферических волн, искаженных логарифмическими членами.

Из асимптотического разложения (4.51) получаем выражение для парциальной матрицы рассеяния

$$s_l(q) = \frac{\Gamma\left(l+1 - \frac{ie^2}{2 \operatorname{sh} \chi_q}\right)}{\Gamma\left(l+1 + \frac{ie^2}{2 \operatorname{sh} \chi_q}\right)} = \frac{\Gamma\left(l+1 - \frac{ie^2}{2\sqrt{E^2-1}}\right)}{\Gamma\left(l+1 + \frac{ie^2}{2\sqrt{E^2-1}}\right)}. \quad (4.52)$$

В нерелятивистском пределе выражения (4.46), (4.49), (4.50) и (4.52) переходят в соответствующие выражения для квантовомеханической кулоновой проблемы.

14. ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

В данном параграфе будет получено замкнутое выражение для релятивистской квазипотенциальной амплитуды рассеяния, справедливое при высоких энергиях [40]. Это представление является релятивистским аналогом эйконального представления [41].

Рассмотрим уравнение (2.28). Предполагая, что квазипотенциал $\tilde{V}(\mathbf{p}, \mathbf{k}; E_q)$ локален [19], положим в этом уравнении

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}(-)\mathbf{q} = \Delta; \quad \mathbf{k}(-)\mathbf{q} = \lambda; \\ \Psi_q(\Delta(+)\mathbf{q}) \equiv \Phi_q(\Delta). \end{aligned} \right\} \quad (4.53)$$

Поскольку $\mathbf{p}(-)\mathbf{k}$ есть релятивистский инвариант, то

$$(\mathbf{p}(-)\mathbf{k})^2 = (\Delta(-)\lambda)^2. \quad (4.54)$$

Учитывая (4.54), а также инвариантность объема $d\Omega_{\mathbf{h}} = d\Omega_{\lambda}$, получаем следующее уравнение для функции $\Phi_q(\Delta)$:

$$\begin{aligned} \Phi_q(\Delta) = (2\pi)^3 \delta^3(\Delta) \frac{1}{2(E_{\Delta(+)\mathbf{q}} - E_q - i\epsilon)} \times \\ \times \frac{1}{(2\pi)^3} \int V((\Delta(-)\lambda)^2) \Phi_q(\lambda) d\Omega_{\lambda}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Принимая во внимание (3.20), функцию Грина в уравнении (4.55) можно переписать следующим образом:

$$G = \frac{1}{2(E_q - E_{\Delta(+)\mathbf{q}} + i\epsilon)} = \frac{1}{2(E_q - E_{\Delta} E_q - \Delta\mathbf{q} + i\epsilon)}. \quad (4.56)$$

При высоких энергиях $E_q \gg 1$ имеем приближенно

$$E_q \approx q + \frac{1}{2q}. \quad (4.57)$$

Если считать вектор \mathbf{q} параллельным оси $z[\mathbf{q} = (0,0,q)]$, то с учетом (4.57) получим вместо (4.56)

$$G = \frac{1}{2q \left(1 - \Delta_0 - \Delta_3 - \frac{\Delta_0 - 1}{2q^2} + i\varepsilon \right)}; \quad \Delta_0 \equiv E_{\Delta}. \quad (4.58)$$

Далее предположим, что при высоких энергиях слагаемое $\frac{\Delta_0 - 1}{2q^2}$ в знаменателе (4.58) можно опустить. В результате функция Грина (4.58) примет вид

$$G \approx \frac{1}{2q(1 - \Delta_0 - \Delta_3 + i\varepsilon)}. \quad (4.59)$$

При использовании этого приближенного выражения для функции Грина закономерно возникает вопрос об условиях, в которых допустимо сделанное пренебрежение членом $\frac{\Delta_0 - 1}{2q^2}$. Чтобы ответить на этот вопрос, перейдем к инвариантным мандельштамовским переменным s и t . Очевидно,

$$\left. \begin{aligned} s &= 4(\mathbf{q}^2 + m^2) \approx 4\mathbf{q}^2; \\ t &= (E_p - E_q)^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{q})^2 = \\ &= 2(1 - E_p E_q + \mathbf{p}\mathbf{q}) = 2(1 - \Delta_0), \end{aligned} \right\} \quad (4.60)$$

поэтому

$$\frac{\Delta_0 - 1}{2q^2} = \frac{|t|}{s}. \quad (4.61)$$

И, следовательно, пренебрежение величиной (4.61) означает, что полученное выражение может быть справедливо в области изменения кинематических инвариантов s и t , ограниченной условием

$$\left| \frac{t}{s} \right| \ll 1.$$

Далее, принимая во внимание (3.58), можно осмыслить интегральный член в уравнении (4.55) как свертку на группе $T(3)$ (см. § 8):

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int V((\Delta \oplus \lambda^{-1})^2) \Phi_q(\lambda) d\Omega_\lambda \equiv V(\Delta^2) * \Phi_q(\Delta). \quad (4.62)$$

Окончательно, после перехода к орисферическим координатам (3.49) и отбрасывания члена $\frac{\Delta_0 - 1}{2q^2}$, уравнение (4.55) принимает вид

$$\Phi_q(a, \tilde{\gamma}) = \delta(a) \delta^2(\tilde{\gamma}) - \frac{1}{2q(e^a - 1 - i\varepsilon)} V(a, \tilde{\gamma}) * \Phi_q(a, \tilde{\gamma}). \quad (4.63)$$

Применим теперь аппарат преобразования Фурье на группе $T(3)$ к уравнению (4.63). Прежде всего положим, по определению [ср. с формулой (3.64)],

$$\langle \tilde{\rho}_1 | \hat{\Phi}_q(z) | \tilde{\rho}_2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Phi_q(a, \tilde{\gamma}) \langle \tilde{\rho}_1 | \hat{U}_z(a, \tilde{\gamma}) | \tilde{\rho}_2 \rangle e^{2a} da d\tilde{\gamma}; \quad (4.64)$$

$$\langle \tilde{\rho}_1 | \hat{V}_q(z) | \tilde{\rho}_2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int V_q(a, \tilde{\gamma}) \langle \tilde{\rho}_1 | \hat{U}_z(a, \tilde{\gamma}) | \tilde{\rho}_2 \rangle e^{2a} da d\tilde{\gamma}. \quad (4.65)$$

Пользуясь формулами (3.62), (3.65)—(3.68), запишем уравнение (4.63) в виде

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\rho}_1 | \hat{\Phi}_q(z) | \tilde{\rho}_2 \rangle &= \langle \tilde{\rho}_1 | \tilde{\rho}_2 \rangle + \\ &+ \frac{1}{2qi} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \hat{\vartheta}(z-z') \langle \tilde{\rho}_1 | \hat{V}_q(z') \hat{\Phi}_q(z') | \tilde{\rho}_2 \rangle, \end{aligned} \quad (4.66)$$

где

$$\hat{\vartheta}(z-z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ia(z-z')}}{e^a - 1 - i\epsilon} da \quad (4.67)$$

есть «ступенчатая» функция в исчислении конечных разностей (см. параграф 9), удовлетворяющая неоднородному разностному уравнению первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_z \hat{\vartheta}(z-z') &= \delta(z-z'); \\ \Delta_z &\equiv \frac{e^{-i \frac{d}{dz}} - 1}{-i}. \end{aligned} \right\} \quad (4.68)$$

Учитывая это уравнение, получаем эквивалентное (4.66) разностное уравнение

$$\Delta_z \hat{\Phi}_q(z) = \frac{1}{2qi} \hat{V}_q(z) \hat{\Phi}_q(z) \quad (4.69)$$

с граничным условием для оператора $\hat{\Phi}_q(z)$

$$\hat{\Phi}_q(z) |_{z=-\infty} = 1. \quad (4.70)$$

Ясно, что величина $\hat{\Phi}_q(z)$ представляет собой релятивистский аналог «медленно меняющейся части» волновой функции (см., например, работы [40—42]).

Формальным решением уравнений (4.66) и (4.69) является «упорядоченная экспонента»

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_q(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2qi)^n} \int \hat{\vartheta}(z-z_1) \hat{\vartheta}(z_1-z_2) \dots \hat{\vartheta}(z_{n-1}-z_n) \times \\ &\times \hat{V}_q(z_1) \hat{V}_q(z_2) \dots \hat{V}_q(z_n) dz_1 \dots dz_n \equiv \\ &\equiv P_z \exp \left[\frac{1}{2qi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\vartheta}(z-z') \hat{V}_q(z') dz' \right]. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Для простых квазипотенциалов этот ряд может быть вычислен точно.

Перейдем теперь к рассмотрению квазипотенциальной амплитуды рассеяния $A(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Согласно (3.27),

$$A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int V_q((\mathbf{p}(-)\mathbf{k})^2) \Psi_q(\mathbf{k}) d\Omega_k. \quad (4.72)$$

Отсюда, принимая во внимание соотношения (4.53), (4.54), (4.58) и (4.62), с учетом того, что вектор $\mathbf{q} = (0, 0, q)$ находим

$$A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = A(\Delta, \mathbf{q}) = -\frac{1}{4\pi} V_q(\Delta^2) * \Phi_q(\Delta). \quad (4.73)$$

Далее на основании «теоремы о свертке» и формулы (3.65) заключаем что

$$A(\Delta^2, q) = -\frac{1}{4\pi} \int dz d\tilde{\rho}_1 d\tilde{\rho}_2 \langle \tilde{\rho}_1 | \hat{V}_q(z) \hat{\Phi}_q(z) \hat{U}_z(\Delta) | \tilde{\rho}_2 \rangle. \quad (4.74)$$

Затем можно показать, что при высокоэнергетическом режиме [см. (4.61)] справедливы следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} e^a &\approx 1; & a &\approx 0; \\ \tilde{\gamma} &\approx \tilde{\Delta}; & |t| &\approx \tilde{\gamma}^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.75)$$

Другими словами, в данном приближении вектор передачи импульса Δ лежит на орисфере (3.50). Этот факт можно рассматривать как своеобразное «условие поперечности» в релятивистском случае. Окончательно, после простых вычислений с использованием формул (3.61), (4.68), (4.69) и (4.75), получаем искомое высокоэнергетическое представление для квазипотенциальной амплитуды рассеяния

$$\begin{aligned} A(t, s) &= -\frac{iq}{2\pi} \int d\tilde{\rho} e^{-i\tilde{\Delta} \tilde{\rho}} \times \\ &\times \left[\int d\tilde{\rho}_1 \langle \tilde{\rho}_1 | P_z \exp \left[\frac{1}{2qi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(z) dz \right] | \tilde{\rho} \rangle - 1 \right] = \\ &= -iq \int_0^{\infty} \rho d\rho J_0(\sqrt{-t}\rho) \left[\int d\tilde{\rho}_1 \langle \tilde{\rho}_1 | P_z \exp \left[\frac{1}{2qi} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}_q(z) dz \right] | \tilde{\rho} \rangle - 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Эту формулу, очевидно, можно рассматривать как непосредственное обобщение эйконального представления на релятивистский случай [41].

Рассмотрим случай, когда матрица $\langle \tilde{\rho}_1 | \hat{V}_q(z) | \tilde{\rho}_2 \rangle$ диагональна:

$$\langle \tilde{\rho}_1 | \hat{V}_q(z) | \tilde{\rho}_2 \rangle = \delta^{(2)}(\tilde{\rho}_1 - \tilde{\rho}_2) V_q(z, \tilde{\rho}_1). \quad (4.77)$$

Тогда, исходя из разложения P_z -экспоненты по степеням квазипотенциала с помощью последовательного применения тождества

$$\hat{\theta}(z-z')\hat{\theta}(z-z'') = \hat{\theta}(z-z')\hat{\theta}(z'-z'') + \hat{\theta}(z-z'')\hat{\theta}(z''-z') + \frac{1}{i}\hat{\theta}(z-z')\delta(z'-z''), \quad (4.78)$$

можно доказать, что

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{\rho}_1 | P_z \exp \left[\frac{1}{2qi} \int \hat{V}_q(z) dz \right] | \tilde{\rho} \rangle = \\ & = \delta^{(2)}(\tilde{\rho}_1 - \tilde{\rho}) \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{V_q(z, \tilde{\rho})}{2q} \right) dz \right\}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

В итоге представление для амплитуды рассеяния (4.76) записывается следующим образом:

$$A(s, t) = -qi \int_0^{\infty} \rho d\rho J_0(\sqrt{-t\rho}) \left\{ e^{i \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{V_q(z, \tilde{\rho})}{2q} \right) dz} - 1 \right\}. \quad (4.80)$$

В частном случае, когда для квазипотенциала $V_q(z, \tilde{\rho})$ выполняется неравенство $\frac{V_q(z, \tilde{\rho})}{2q} \ll 1$, данное выражение совпадает с нерелятивистским эйкональным представлением амплитуды рассеяния.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. А. Н. Тавхелидзе за постоянное внимание к работе и ценные замечания, В. Р. Гарсеванишвили, А. Д. Донкову, М. Д. Магееву, В. А. Матвееву, Р. М. Мурадян, Л. А. Слепченко, И. Т. Тодорову, Р. Н. Фаустову за многочисленные полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwinger J. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1951, **37**, 452.
2. Salpeter E., Bethe H. Phys. Rev., 1951, **54**, 1232.
3. Gell-Mann M., Low F. Phys. Rev., 1951, **84**, 350.
4. Fock V. A. Phys. Assoc. Sowjetunion, 1934, **6**, 425.
5. Тамм И. Е. Phys. USSR, 1945, **9**, 449.
6. Dankoff S. M. Phys. Rev., 1950, **78**, 382.
7. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. Nuovo cimento, 1963, **29**, 380.
8. Logunov A. A. e. a. Nuovo cimento, 1963, **30**, 134.
9. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N., Khrustalev O. A. Phys. Lett., 1963, **4**, 325.
10. Арбузов Б. А. и др. ЖЭТФ, 1963, **44**, 1409.
11. Tavkhelidze A. N. Lectures on Quasipotential Method in Field Theory, Bombay, Tata Institute of Fundamental Research, 1964.
12. Кадышевский В. Г., Тавхелидзе А. Н. В сб. «Пробле-

мы теоретической физики» (сборник, посвященный Н. Н. Боголюбову в связи с его шестидесятилетием). М., «Наука», 1969. (В [11, 12] имеются подробные списки литературы.)

13. Матвеев В. А., Мурадян Р. М., Тавхелидзе А. Н. Препринт ОИЯИ Е-3498. [См. также Fronsdal C., Lundberg L. E. Phys. Rev., 1970, 3, 3447.]
14. Kadyshhevsky V. G. Nucl. Phys., 1968, **В6**, 125.
15. Kadyshhevsky V. G., Mateeov M. D. Nuovo cimento, 1967, **55A**, 275.
16. Кадышевский В. Г. ЖЭТФ, 1964, **46**, 654.
17. Кадышевский В. Г. ЖЭТФ, 1964, **46**, 872.
18. Кадышевский В. Г. «Докл. АН СССР», 1965, **160**, 573.
19. Kadyshhevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. V. Nuovo cimento, 1968, **55A**, 233.
20. Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б. «Ядерная физика», 1969, **9**, 219.
21. Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б. «Ядерная физика», 1969, **9**, 462.
22. Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Фриман М. «Ядерная физика», 1969, **9**, 646.
23. Кадышевский В. Г., Матеев М. Д., Мир-Касимов Р. М. «Ядерная физика», 1970, **11**, 692.
24. Freetman M., Mateeov M. D., Mir-Kasimov R. M. Nucl. Phys., 1969, **В12**, 197.
25. Wightman A. S. Lectures on Invariance in Relativistic Quantum Mechanics. (Les Houches, 1960); In: Dispersion Relations and Elementary Particles, Paris, 1960; Namislovski I. M. Phys. Rev., 1967, **160**, 1522.
26. Shyder N. Phys. Rev., 1947, **71**, 38.
27. Гольфанд Ю. А. ЖЭТФ, 1954, **37**, 504; 1962, **43**, 256; 1963, **44**, 1248.
28. Кадышевский В. Г. ЖЭТФ, 1961, **41**, 1885.
29. Тамм И. Е. В сб. «Тр. XII Международной конференции по физике высоких энергий». Т. II. М., Атомиздат, 1964.
30. Мир-Касимов Р. М. ЖЭТФ, 1967, **52**, 533.
31. Кадышевский В. Г. «Докл. АН СССР», 1962, **147**, 588.
32. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958.
33. Шапиро И. С. «Докл. АН СССР», 1956, **106**, 647; ЖЭТФ, 1962, **43**, 1727.
34. Виленкин М. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., Физматгиз, 1965.
35. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М., Физматгиз, 1967.
36. Brown L. e. a. Ann. Phys., 1963, **23**, 187.
37. Fermi E., Yang C. N. Phys. Rev., 1949, **76**, 1739.
38. Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н. Препринт ОИЯИ Д-1968, 1965.
39. Tavkhelidze A. N. High-Energy physics and elementary particles. IAEA, Vienna, 1965, p. 753.
40. Гарсеванишвили В. Р. и др. ТМФ, 1971, **7**, 203.
41. Glauber R. J. Lectures in Theoretical Physics. V. 1, Interscience Publishers, N.Y., 1959.
42. Garsevanishvili V. R. e. a. Phys. Lett., 1969, **29B**, 191.
43. Garsevanishvili V. R. e. a. Preprint IC/69/87, Trieste, 1969.
44. Гарсеванишвили В. Р., Матвеев В. А., Слепченко Л. А. В сб. «Проблемы физики элементарных частиц и теория ядра». Т. 1. Вып. 1, М., Атомиздат, 1970.