

ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПОВЕДЕНИЕ СЕЧЕНИЙ УПРУГИХ И НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

*А. А. Логунов,
М. А. Мествиришвили,
О. А. Хрусталев*

Институт физики высоких энергий,
Серпухов

В работе приведены строгие результаты, следующие из основных принципов теории поля для сечения упругих и неупругих процессов в области высоких энергий.

Большое внимание уделяется изучению аналитических свойств амплитуды упругих и неупругих процессов как функции угловых переменных и возможности расширения соответствующих областей аналитичности при учете условия унитарности. Изучение соответствующих аналитических свойств амплитуды рассеяния позволяет перевести результаты аксиоматического изучения рассеяния на простой физический язык, почти полностью соответствующий полуклассическому описанию рассеяния. Помимо физических следствий в обзоре излагается метод гармонической меры — математический аппарат, используемый для оценки амплитуды рассеяния.

It is a review of the results concerning the cross sections of elastic and inelastic processes at high energies which were strictly proved on the basis of the fundamental principles of the quantum field theory.

For this purpose the analytical properties of the amplitudes of elastic and inelastic processes were studied as functions of angle variables and the possibility to extend the corresponding holomorphy domains by using the unitarity condition. This allows to translate the results of the axiomatic consideration into a simple language which corresponds almost completely to the semiclassical description of scattering phenomena.

Besides of the physical consequences in this review represented the harmonic measure method — the mathematical tool to be used in estimating the scattering amplitude.

В в е д е н и е

Теория сильных взаимодействий при высоких энергиях с каждым годом все меньше напоминает свою родоначальницу — квантовую теорию поля в том виде, который она имела в середине 50-х годов. Первоначально выделение теории сильных взаимо-

действий стимулировалось неудачами теории возмущений — единственного рабочего аппарата теории поля того времени — при описании реакций с участием сильновзаимодействующих частиц.

В основе квантовой теории поля лежит чрезвычайно ясное на первый взгляд представление о взаимодействии как об обмене частицами — переносчиками тех или иных квантовых чисел. В квантовой теории поля попытка описания взаимодействия даже двух частиц приводит к задаче с бесконечным числом степеней свободы. Такое описание коренным образом отличается от классических представлений о взаимодействии. Если взаимодействие достаточно слабо, можно считать, что все эффекты, связанные с излучением большого числа квантов обмена, пренебрежимо малы, и тогда описание взаимодействия действительно можно свести к почти классическим образам. Математически это связано с использованием теории возмущений. Подобное упрощение эффективно только в теории с малой постоянной связи, но отнюдь не в теории сильных взаимодействий, где постоянная связи > 1 .

Кроме того, теория возмущений приводит к таким лишенным физического смысла понятиям, как «голый заряд», «голая масса» и т. д. При описании взаимодействия с помощью теории возмущений все частицы первоначально как бы лишаются своей структуры, восстановление которой достигается методами с довольно сомнительной адекватностью физической природе частиц. Между тем в теории сильных взаимодействий при высоких энергиях, где излучение многих мезонов столь же вероятно, как и излучение одного мезона, вопрос о структуре частиц чрезвычайно существен.

Важным шагом к созданию новой теории были исследования Н. Н. Боголюбова по аксиоматическому построению теории возмущений [1, 2]. В этих работах в рамках теории возмущений была показана возможность построения S -матрицы на основе лишь самых общих принципов теории поля: лоренц-инвариантности, унитарности и причинности. Эти исследования явились первым указанием на очень простое, но трудно осваиваемое физиками обстоятельство, что источником многих затруднений квантовой теории поля является неадекватность физических идей теории и ее математического аппарата.

К этому времени единственным слабым намеком на теорию сильных взаимодействий, использующую лишь основные физические принципы квантовой теории поля и не связанную с образами теории возмущений, был аппарат дисперсионных соотношений. Дисперсионные соотношения, введенные в квантовую теорию поля Гольдбергером, формулировались, по существу, на основании аналогии с дисперсионными соотношениями классической электродинамики, обоснованными в двадцатых годах Крамерсом и Кронигом. При этом упускалось из виду, что Крамерс и Крониг исходили из четко сформулированного в класси-

ческой электродинамике понятия причинности. В квантовой теории поля основные трудности были связаны с тем, что не знали связи между микропричинностью и аналитичностью и не было четкой формулировки основных принципов квантовой теории поля. Исследования Н. Н. Боголюбова по обоснованию дисперсионных соотношений дали ответ на оба эти вопроса [3, 4]. В этих работах содержался глубокий анализ принципа причинности в квантовой теории поля и был сделан шаг к аксиоматическому построению квантовой теории поля.

В основу новой теории легло понятие об амплитуде рассеяния как о единой аналитической функции переменных рассеяния, и именно это понятие стало решающим для последующего развития теории сильных взаимодействий.

Оказалось, что аналитическая структура амплитуды рассеяния является отражением существующих в физике глубоких связей между, казалось бы, различными физическими процессами. Понятие амплитуды рассеяния как единой аналитической функции привело к мысли, что даже в том случае, когда нельзя найти амплитуду рассеяния заданного процесса, можно отыскать ее связь с амплитудами других процессов. При этом вскрылось чрезвычайно существенное обстоятельство, что в некоторых случаях эти связи становятся особенно простыми в пределе асимптотически больших энергий.

Основная цель работы — показать, что из общих принципов теории поля и строго доказанных следствий этих принципов вытекают достаточно содержательные оценки сечений упругих и неупругих процессов при высоких энергиях.

В некоторых случаях получение этих следствий требует глубокого математического аппарата, который еще недостаточно широко знаком физикам. Поэтому мы сочли целесообразным изложить не только физические следствия, но и познакомить читателей с математическими методами, используемыми для их получения, следуя классическому труду Неванлинны [5]. При этом не приводится та часть математического аппарата теории сильных взаимодействий, которая связана с теорией обобщенных функций и в которой доказываются основные аналитические свойства амплитуды рассеяния.

В настоящей работе делается особый упор на исследование неупругих процессов, которые имеют первостепенное значение в понимании динамики взаимодействия при высоких энергиях. Так как эти процессы зависят от большого числа переменных, изучение их сложно, поэтому необходимо найти наиболее простые и общие характеристики неупругих процессов, содержащие важные сведения о динамике взаимодействия.

В работах [6, 7] рассмотрены общие свойства дифференциальных сечений процессов множественного рождения по одной и двум

угловым переменным. Изучению этих характеристик неупругих процессов посвящена большая часть настоящей работы.

Большое внимание уделяется изучению аналитических свойств амплитуды упругих и неупругих процессов как функции угловых переменных и возможности расширения соответствующих областей аналитичности при учете условия унитарности. Изучение соответствующих аналитических свойств амплитуды рассеяния позволяет перевести результаты аксиоматического изучения рассеяния на простой физический язык, почти полностью соответствующий полуклассическому описанию рассеяния. Суть дела состоит в следующем. Если амплитуда рассеяния как функция переменной $z = \cos \theta$, где θ — угол рассеяния в системе центра инерции, аналитична внутри эллипса с фокусами в точках $z_0 = \pm 1$ (существование такого эллипса, сжимающегося в отрезок $[-1, 1]$ с ростом энергии, доказывается во втором разделе), то полное сечение рассеяния удовлетворяет оценке:

$$\sigma_{\text{tot}} \leq 4\pi R^2(s),$$

где $R(s)$ — некоторая положительная функция энергии и масс промежуточных частиц. Значение ее определяется длиной большой полуоси эллипса аналитичности. Если бы $R(s)$ была ограничена постоянной, то это означало бы, что рассеяние частицы высокой энергии сильно напоминает обычное полуклассическое рассеяние на черном шарике. Естественно выяснить, как функция $R(s)$ растет с увеличением энергии, т. е. позволяет ли оценка полного сечения с помощью функции $R(s)$ сохранить в квантовой теории поля полуклассические представления о рассеянии на черном шарике и связанные с этим представления об эффективной области взаимодействия. На языке аналитических свойств амплитуды рассеяния возможность сохранения в квантовой теории поля представления об эффективной области взаимодействия зависит от того, насколько медленно эллипс аналитичности выражается с ростом энергии в отрезок $-1 \leq z \leq 1$. Утвердительный ответ на вопрос о возможности сохранения представления об эффективной области взаимодействия в квантовой теории поля дается во втором и третьем разделах обзора.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Гармонические функции

Действительная функция двух переменных $u(z) = u(x, y)$ называется гармонической в области D , если она:

- 1) дважды непрерывно дифференцируема в области D ;

2) удовлетворяет в области D уравнению Лапласа:

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1.1)$$

Если функция $f(z)$ является аналитической в области D , то функции $\operatorname{Re} f(z)$ и $\operatorname{Im} f(z)$ будут гармоническими в области D . Пусть функция $u(z)$ — гармоническая в области D и пусть в окрестности точки $z_0 \in D$ функция $u(z) = 0$, тогда $u(z) \equiv 0$ во всей области D . Отсюда следует, что если функции $u(z)$ и $v(z)$ гармонические в области D , совпадают на множестве $E \subset D$, то они совпадают во всей области D . Это свойство гармонических функций называется единственностью.

Принцип максимума и минимума. Если функция $u(z)$ гармоническая в области D и непрерывна на \bar{D} , то она достигает своего наибольшего и наименьшего значения только на границе области D .

Если на границе области D задана какая-либо непрерывная функция $f(z)$, то нахождение гармонической в области D функции, которая на границе области совпадает с $f(\xi)$, называется решением задачи Дирихле. Условие непрерывности функции $f(\xi)$ на границе области в задаче Дирихле является слишком жестким и может быть ослаблено.

Пусть $u(z)$ — гармоническая функция в D и пусть $\xi = \varphi(z)$ конформно отображает область D на область \tilde{D} . Тогда функция $u(\varphi^{-1}(\xi))$ будет гармонической в области \tilde{D} .

Обобщенная задача Дирихле. Пусть на границе области D задана функция $f(\xi)$ с конечным числом точек разрывов. Нахождение в области D такой гармонической функции, что в каждой точке границы, в которой функция $f(\xi)$ непрерывна, имеет место предел

$$\lim_{z \rightarrow \xi} u(z) = f(\xi), \quad (1.2)$$

называется решением обобщенной задачи Дирихле. Заметим, что решение обобщенной задачи Дирихле в классе ограниченных функций единственно.

Перейдем теперь к формулировке принципа максимума и минимума гармонических функций для открытых областей.

Теорема. Пусть $u(z)$ — гармоническая функция в области D . Если для любой точки ξ на границе D и для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность точки ξ относительно D , в которой

$$u(z) < M + \varepsilon, \quad (1.3)$$

то $u(z) < M$ во всей области D . Для ограниченных гармонических функций сформулированная выше теорема справедлива и в том случае, когда неравенство (1.3) имеет место во всех граничных точках, за исключением конечного числа.

Обобщенный принцип максимума и минимума. Если гармоническая в области D функция $u(z)$ обладает следующими свойствами:

1) для любой точки ξ границы области D , за исключением конечного числа точек ξ_k ($k = 1, \dots, n$), и при любом $\varepsilon > 0$ существует окрестность точки ξ относительно D , в которой

$$u(z) < M + \varepsilon \quad (\text{или} \quad u(z) > m - \varepsilon), \quad (1.4)$$

и 2) функция $u(z)$ ограничена сверху (или снизу) в области D , то тогда в любой точке $z \in D$ имеем неравенство

$$u(z) \leq M \quad (\text{или} \quad u(z) \geq m). \quad (1.5)$$

Гармоническая мера и ее свойства [5]

Пусть D — некоторая область, а ∂D — ее граница. Обозначим через E часть границы ∂D .

Рассмотрим в области D гармоническую функцию $\omega(z, E, D)$ с граничным условием:

$$\omega(z, E, D) = \begin{cases} 1 & z \in E, \\ 0 & \text{на остальной части границы.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Функцию ω называют гармонической мерой множества E в точке z относительно области D . Множество E может состоять из отдельных непересекающихся дуг E_i . В этом случае

$$E = \bigcup_{i=1}^n E_i.$$

Из определения гармонической меры следует

$$\omega(z, E, D) = \sum_{i=1}^n \omega(z, E_i, D).$$

Очевидно, что

$$0 \leq \omega(z, E, D) \leq 1. \quad (1.7)$$

Гармоническая мера множества E относительно D единственна.

Возьмем область D и конформно отобразим на область \tilde{D} с помощью преобразования $\xi = \varphi(z)$. При этом преобразовании часть границы E перейдет в \tilde{E} , тогда

$$\omega(z, E, D) = \omega(\xi, \tilde{E}, \tilde{D}),$$

т. е. гармоническая мера инвариантна относительно конформного отображения. Если $E = \partial D$, где ∂D — граница области D , то гармоническая мера

$$\omega(z, \partial D, D) = 1. \quad (1.8)$$

Отсюда в силу аддитивности гармонической меры следует, что

$$\omega(z, \alpha, D) = 1 - \omega(z, \beta, D), \quad (1.9)$$

где β — дополнение к α относительно ∂D .

При расширении области D за счет части границы, не содержащей точек множества E , гармоническая мера увеличивается:
 $\omega(z, E, D) \leq \omega(z, E, G), \quad D \subset G$ (принцип Карлемана).

Теорема о двух постоянных и ее следствия

Пусть функция $f(z)$ голоморфна и ограничена в области D и пусть выполняются неравенства:

$$\sup_{z \in \alpha} |f(z)| \leq m; \quad \sup_{z \in \beta} |f(z)| \leq M, \quad (1.10)$$

где α — множество, состоящее из конечного числа дуг, принадлежащих границе ∂D ; β — дополнение к α относительно ∂D . Рассмотрим гармоническую функцию

$$\omega(z, \alpha, D) \ln m + [1 - \omega(z, \alpha, D)] \ln M, \quad (1.11)$$

равную $\ln m$ на α и $\ln M$ на β . Эта функция является гармонической мажорантной функцией $\ln |f(z)|$, а следовательно,

$$\ln |f(z)| \leq \omega(z, \alpha, D) \ln m + [1 - \omega(z, \alpha, D)] \ln M. \quad (1.12)$$

Приведем несколько примеров построения гармонической меры для некоторых простых областей.

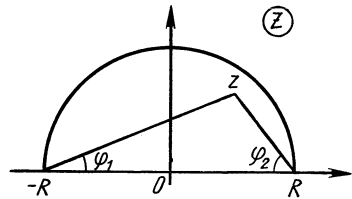
а. Пусть область D — внутренность полукруга в верхней полуплоскости радиуса R . Если в качестве множества взять окружность (рис. 1), то

$$\omega(z, E, D) = \frac{2}{\pi}(\pi - \theta) = \frac{2}{\pi}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad (1.13)$$

где $\theta = \pi - \varphi_1 - \varphi_2$;

$$\varphi_1 = \arg(z + R) = \arctg \frac{y}{R+x};$$

$$\varphi_2 = -\arg(z - R) + \pi = \arctg \frac{y}{R-x}. \quad (1.14)$$



Р и с. 1. Полукруг радиуса R .

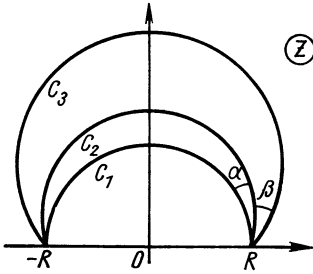
Так как аргумент аналитической функции есть функция гармоническая, то θ также будет гармонической функцией z . Таким образом, ω будет гармонической мерой.

б. Пусть область D — кольцо с внутренним радиусом r_1 и внешним радиусом r_2 . Если выбрать в качестве множества E окружность радиуса r_2 , то

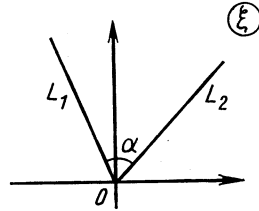
$$\omega(z, E, D) = \frac{\ln |z| - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1}. \quad (1.15)$$

Легко видеть, что эта функция удовлетворяет необходимым граничным условиям и является гармонической функцией в области D . Следовательно, ω также будет гармонической мерой.

в. Пусть область D ограничена двумя дугами окружностей C_1 и C_3 (рис. 2), проходящих через точки $(-R, R)$.



Р и с. 2. Область (между дугами C_1 и C_3), для которой найдена гармоническая мера (1.16).



Р и с. 3. Сектор с углом раствора α , который является областью, ограниченной дугами C_1 и C_2 .

В качестве множества E возьмем дугу C_3 . Угол между дугами C_1 и C_2 обозначим через α , а между дугами C_2 и C_3 — через β . Тогда

$$\omega(z, E, D) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \tag{1.16}$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям для гармонической меры. Покажем, что она является гармонической и в области D . С помощью дробно-линейного преобразования

$$\xi = \frac{z - R}{z + R} \tag{1.17}$$

окружности C_1 и C_2 преобразуются в прямые L_1 и L_2 (рис. 3). В силу конформности отображения угол между прямыми L_1 и L_2 равен углу между дугами C_1 и C_2 . Так как угол равен разности аргументов точек ξ_1 и ξ_2 , пробегающих линии L_1 и L_2 соответственно, то он будет гармонической функцией переменной ξ в области \tilde{D} , а следовательно, гармонической функцией переменной z в области D . Таким образом, функция ω будет гармонической мерой.

Теорема Адамара о трех кругах

Пусть область D — кольцо, ограниченное окружностями с радиусами r_1 и r_2 , и пусть $f(z)$ — аналитическая функция z в области D . Если функция $f(z)$ ограничена в области D и на границе

области удовлетворяет условиям:

$$\sup_{|z|=r_1} |f(z)| = m; \quad \sup_{|z|=r_2} |f(z)| \leq M, \quad (1.18)$$

то в силу теоремы о двух постоянных:

$$\ln |f(z)| \leq \frac{\ln |z| - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1} \ln M + \frac{\ln |z| - \ln r_2}{\ln r_1 - \ln r_2} \ln m. \quad (1.19)$$

Теорема. Пусть функция $f(z)$ голоморфна и ограничена в области D (см. рис. 2), на большом круге C_3 она ограничена постоянной M , а на малом круге C_1 — постоянной m , то в силу теоремы о двух постоянных она ограничена в области D неравенством

$$\ln |f(z)| \leq \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \ln M + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \ln m. \quad (1.20)$$

При получении неравенств (1.19) и (1.20) использовались формулы (1.15) и (1.16) для гармонической меры. Исходя из теоремы о двух постоянных можно доказать важную для дальнейших приближений теорему Фрагмена — Линделефа.

Теорема Фрагмена — Линделефа

Если функция голоморфна в верхней полуплоскости и ограничена в каждой конечной точке x действительной оси, так что в этих точках

$$\sup |f(x)| \leq 1, \quad (1.21)$$

то возможны только два случая: или 1) при $|z| \rightarrow \infty$ модуль функции $f(z)$ растет не медленнее линейной экспоненты, т. е.

$$M(R) = \sup_{|z|=R} |f(z)| \geq e^{\sigma R}, \quad \sigma > 0 \quad (1.22)$$

для любого сколь угодно большого значения R , или 2) функция $f(z)$ ограничена неравенством

$$|f(z)| < 1 \quad (1.23)$$

в каждой точке верхней полуплоскости.

Заметим, что если в некоторой точке z_0 в верхней полуплоскости $|f(z_0)| = 1$, то $f(z)$ будет постоянной. Рассмотрим полукруг радиуса R в верхней полуплоскости z .

Гармоническая мера для такой области на основании (1.13) и (1.14)

$$\omega(z, E, D) = \frac{2}{\pi} (\varphi_1 + \varphi_2),$$

где

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{y}{R+x}; \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{y}{R-x}; \quad z = x + iy.$$

Применяя теорему о двух постоянных, находим

$$\ln |f(z)| \leq \frac{2}{\pi} (\varphi_1 - \varphi_2) \ln M(R). \quad (1.24)$$

Так как

$$\operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \dots,$$

то после элементарных вычислений получаем

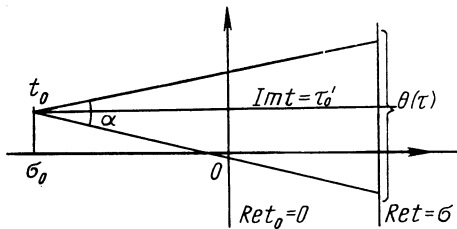
$$\omega(z, E, D) = \frac{4y}{\pi R} \left[1 + O\left(\frac{1}{R}\right) \right]. \quad (1.25)$$

Учитывая (1.25), неравенство (1.24) сводится к неравенству

$$\ln |f(z)| \leq \frac{4y}{\pi} \frac{\ln M(R)}{R} \left[1 + O\left(\frac{1}{R}\right) \right]. \quad (1.26)$$

Отсюда возможны два случая: или 1) $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln M(R)}{R} \gg \sigma$, где $\sigma > 0$, а следовательно, приходим к вышеприведенному неравенству (1.22), или 2) $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln M(R)}{R} = 0$, тогда,

согласно (1.26), $\ln |f(z)| \leq 0$, а следовательно, имеет место неравенство (1.23).



Оценки для гармонической меры

Рис. 4. Полу плоскость $\operatorname{Re} t \leq \sigma$, для которой построена гармоническая мера (1.29).

Пусть D — односвязная однолиственная область, расположенная в плоскости $t = \sigma + it$. Пусть далее $\theta(\sigma)$ означает сумму длин

сегментов $\theta_1^\sigma, \dots, \theta_h^\sigma$ прямой $\operatorname{Re} t = \sigma$, лежащих внутри или на границе области D , и D_σ означает часть области D , лежащую слева от этой прямой.

При этих условиях для гармонической меры множества $\theta_\sigma = \bigcup_{i=1}^h \theta_i^\sigma$ имеет место неравенство Карлемана

$$\omega(t_0, \theta_\sigma, D_\sigma) \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\theta(\sigma)}{2(\sigma - \sigma_0)}, \quad (1.27)$$

где

$$t_0 \in D_\sigma; \quad t_0 = \sigma_0 + i\tau_0. \quad (1.28)$$

Приведем пример, когда в неравенстве Карлемана равенство достигается. Пусть в качестве области D взята полу плоскость $\operatorname{Re} t \leq \sigma$, а в качестве множества θ_σ выберем сегмент длины

$\theta(\sigma)$, лежащий на границе $\operatorname{Re} t = \sigma$, симметрично относительно прямой $\operatorname{Im} t = \tau_0$ (рис. 4). Гармоническая мера $\omega(t_0, \theta_\sigma, \operatorname{Re} t \leq \leq \sigma)$, умноженная на π , будет равна углу, под которым виден сегмент $\theta(\sigma)$ из точки t_0 . Легко вычислить из треугольника, что

$$\omega(t_0, \theta_\sigma, \operatorname{Re} t \leq \sigma) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\theta(\sigma)}{2(\sigma - \sigma_0)}. \quad (1.29)$$

Если точка t пробегает прямую $\operatorname{Re} t = \sigma_0$, то гармоническая мера уменьшается.

**Дифференциальное неравенство
для гармонической меры**

Пусть область D рассечена прямыми $\operatorname{Re} t = \sigma'$ и $\operatorname{Re} t = \sigma$, причем

$$\sigma' < \sigma, \quad (1.30)$$

тогда на основании неравенства Карлемана имеем

$$\omega(\sigma' + it, \theta_\sigma, D_\sigma) \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\theta(\sigma)}{2(\sigma - \sigma')}. \quad (1.31)$$

Введем функцию

$$\omega(t, \theta_\sigma, D_\sigma) - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\theta(\sigma)}{2(\sigma - \sigma')} \omega(t, \theta_{\sigma'}, D_{\sigma'}), \quad (1.32)$$

где $t \in D_{\sigma'}$; $D_{\sigma'}$ — часть области D слева от прямой $\operatorname{Re} t = \sigma'$. Она гармоническая в области $D_{\sigma'}$. Когда $t \in \theta_{\sigma'}$, в силу неравенства (1.31) она отрицательна. На оставшейся части границы области $D_{\sigma'}$, по определению гармонических мер, она равна нулю. На основании принципа максимума во всей области $t \in D_{\sigma'}$ имеем

$$\omega(t, \theta_\sigma, D_\sigma) \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\theta(\sigma)}{2(\sigma - \sigma')} \omega(t, \theta_{\sigma'}, D_{\sigma'}) \quad (1.33)$$

$$t \in D_{\sigma'}.$$

Рассмотрим разность гармонических мер $\omega(t, \theta_\sigma, D) - \omega(t, \theta_{\sigma'}, D_{\sigma'})$, для точек $t \in D_{\sigma'}$.

Учитывая (1.33), имеем неравенство

$$\begin{aligned} & \omega(t, \theta_\sigma, D) - \omega(t, \theta_{\sigma'}, D_{\sigma'}) \leq \\ & \leq -\omega(t, \theta_{\sigma'}, D_{\sigma'}) \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2(\sigma - \sigma')}{\theta(\sigma)}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Здесь было принято во внимание, что

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\theta(\sigma)}{2(\sigma - \sigma')} - 1 = -\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2(\sigma - \sigma')}{\theta(\sigma)}. \quad (1.35)$$

Из выражения (1.34) следует, что функция $\omega(t, \theta_\sigma, D_\sigma)$ будет монотонно убывающей функцией σ .

Деля обе части неравенства (1.34) на $(\sigma - \sigma')$ и совершая предельный переход $\sigma \rightarrow \sigma'$, получаем дифференциальное неравенство для гармонической меры

$$\frac{d\omega(t, \theta_\sigma, D_\sigma)}{d\sigma} \leq -\frac{4}{\pi\theta(\sigma)} \omega(t, \theta_\sigma, D_\sigma). \quad (1.36)$$

Интегрируя это неравенство между сечениями $\operatorname{Re} t = \sigma_1$ и $\operatorname{Re} t = \sigma_2$, причем $\sigma_1 < \sigma_2$, получаем

$$\omega(t, \theta_{\sigma_2}, D_{\sigma_2}) \leq \omega(t, \theta_{\sigma_1}, D_{\sigma_1}) e^{-\frac{4}{\pi} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\theta(\sigma)}}, \quad (1.37)$$

где $t \in D_{\sigma_1}$; $D_{\sigma_1} \subset D_{\sigma_2}$; D_{σ_2} — часть области D , лежащей слева от прямой $\operatorname{Re} t = \sigma_2$.

Аналогичное неравенство имеет место справа от сечения θ_{σ_2} , т. е. (1.37) остается в силе, когда $\sigma_2 < \sigma_1$ и D_{σ_2} означает часть области D , лежащую справа от прямой $\operatorname{Re} t = \sigma_2$, если только при этом переставить в (1.37) пределы интегрирования

$$\omega(t, \theta_{\sigma_2}, D_{\sigma_2}) \leq \omega(t, \theta_{\sigma_1}, D_{\sigma_1}) e^{-\frac{4}{\pi} \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{\theta(\sigma)}}, \quad (1.38)$$

где $t \in D_{\sigma_1}$, $D_{\sigma_1} \subset D_{\sigma_2}$, D_{σ_2} — часть области D , лежащей справа от линии $\operatorname{Re} t = \sigma_2$.

Пусть область D рассечена прямыми $\operatorname{Re} t = \sigma_1$, $\operatorname{Re} t = \sigma$, $\operatorname{Re} t = \sigma_2$, причем $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$. Тогда, используя (1.37) и (1.38), находим

$$\begin{aligned} & \omega(t_\sigma, \theta_{\sigma_1}, D_{\sigma_1}) + \omega(t_\sigma, \theta_{\sigma_2}, D_{\sigma_2}) \leq \\ & \leq e^{-\frac{4}{\pi} \int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\theta(\sigma)}} + e^{-\frac{4}{\pi} \int_{\sigma}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\theta(\sigma)}}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

В выражении (1.39) область D_{σ_1} есть часть области D , лежащей справа от прямой $\operatorname{Re} t = \sigma_1$, а D_{σ_2} — часть области D , лежащей слева от прямой $\operatorname{Re} t = \sigma_2$. Тогда t_σ принадлежит области D и лежит на прямой $\operatorname{Re} t = \sigma$.

Так как в силу принципа Карлемана гармоническая мера уменьшается с сужением области за счет границы, не содержащей точек из θ_{σ_1} и θ_{σ_2} , то неравенство (1.39) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \omega(t_\sigma, \theta_{\sigma_1}, D_{12}) + \omega(t_\sigma, \theta_{\sigma_2}, D_{12}) \leq \\ & \leq e^{-\frac{4}{\pi} \int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\theta(\sigma)}} + e^{-\frac{4}{\pi} \int_{\sigma}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\theta(\sigma)}}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Здесь D_{12} — пересечение областей D_{σ_1} и D_{σ_2} . Выберем теперь значения σ так, чтобы оба интеграла, стоящие в показателях,

были равны, тогда получим

$$\omega(t_\sigma, \theta_{\sigma_1} + \theta_{\sigma_2}, D_{12}) \leq 2e^{-\frac{2}{\pi} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\theta(\sigma)}}. \quad (1.41)$$

В заключение сформулируем **принцип гармонической меры**. Пусть в области G_t с границей Γ_t задана однозначная аналитическая функция $W(t) = W$, удовлетворяющая условиям.

1. Значения W , принимаемые функцией $W(t)$ в $G(t)$, попадают в область G_W с границей Γ_W .

2. В каждой точке ξ некоторых дуг α_t , заданных на Γ_t , функция $W(t)$ непрерывна и ее значения на этих дугах попадают на часть A_W замкнутой области G_W , ограниченную дугами α_W . При этих условиях во всякой точке t области G_t , в которой функция $W(t)$ принимает значение, лежащее вне области A_W , имеет место соотношение

$$\omega(t, \alpha_t, G_t) \leq \omega(W(t), \alpha_W, G_W^*), \quad (1.42)$$

где G_W^* — подобласть области G_W , содержащая точку $W(t)$ и ограниченная дугами Γ_W и α_W .

Приведем доказательство принципа гармонической меры.

Пусть t — точка, для которой $W(t)$ лежит вне A_W , и пусть G_t^* — подобласть области G_t , содержащая точку t и ограниченная кроме дуг Γ_t еще множеством точек α_t , в которых $W(t)$ принимает значения, лежащие на α_W .

Функция

$$u(t) = \omega(W(t), \alpha_W, G_W^*) - \omega(t, \alpha_t, G_t) \quad (1.43)$$

будет гармонической и однозначной в области G_t^* . Относительно граничной точки t^* области G_t^* нужно различить четыре случая:

1) t^* лежит внутри G_t и тем самым принадлежит к множеству α_t . В этом случае $\omega(t^*, \alpha_t, G_t)$ гармонична и во всяком случае ≤ 1 . Функция $\omega(W(t), \alpha_W, G_W^*) \rightarrow 1$, когда точка $t \rightarrow t^*$, оставаясь внутри G_t^* , ибо $W(t)$ при $t = t^*$ принимает значение, лежащее на α_W . Таким образом, в рассматриваемой граничной точке t^* функция $u(t)$ непрерывна и неотрицательна;

2) граничная точка t^* лежит на дуге α_t . Тогда при $t \rightarrow t^*$ как первый, так и второй член соотношения (1.43) стремится к единице и разность $u(t)$ в точке $t = t^*$ равна нулю;

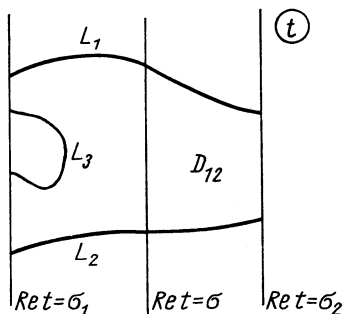
3) граничная точка t^* лежит на дуге β_t , дополнительной к α_t . Здесь второй член в правой части соотношения (1.43) исчезает, и так как первый член неотрицателен, то функция $u(t)$ в точке t^* также неотрицательна;

4) t^* является общим концом для дуг α_t и β_t , по предположению число таких точек разрыва конечно. Таким образом, мы нашли, что ограниченная гармоническая функция $u(t)$ имеет неотрицательную нижнюю границу во всех граничных точках

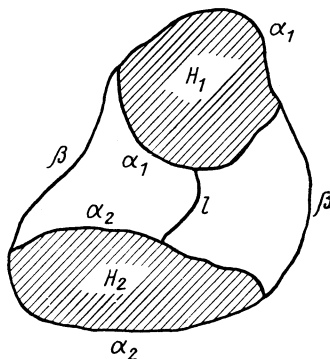
области G_t^* , исключая самое большое конечное число точек. Так как $u(t)$ ограничена, то по принципу минимума $u(t) \geq 0$ во всех точках области G_t^* .

Неравенства Неванлинны

Пусть область D_{12} ограничена сегментами θ_{σ_1} , θ_{σ_2} на прямых $\operatorname{Re} t = \sigma_1$, $\operatorname{Re} t = \sigma_2$ и некоторым числом дуг, из которых ровно две, L_1 и L_2 , соединяют граничные прямые $\operatorname{Re} t = \sigma_1$ и $\operatorname{Re} t = \sigma_2$. Кроме L_1 и L_2 граница может содержать еще другие дуги L_3



Р и с. 5. Область D_{12} , для которой оценивается m_t .



Р и с. 6. Область, являющаяся образом области D_{12} , которая получается при отображении $W = W(t)$.

и т. д., каждая из которых может иметь точки только на одной из граничных прямых $\operatorname{Re} t = \sigma_1$ или $\operatorname{Re} t = \sigma_2$ (рис. 5). Предположим далее, что заданная в области D_{12} однозначная и аналитическая функция $W(t)$ принимает в ней значения, попадающие в некоторую область G плоскости W . Кроме того, пусть функция $W(t)$ непрерывна на L_1 , L_2 , L_3 и принимает на L_1 и L_2 значения, расположенные соответственно на двух заданных множествах H_1 , H_2 области G , находящихся на положительном расстоянии друг от друга (рис. 6). Значения функции $W(t)$ на L_3 могут лежать или на H_1 или на H_2 .

Наибольшим расширением множеств H_1 и H_2 можно добиться того, чтобы их граница состояла из конечного числа дуг α_1 , α_2 , находящихся также на положительном расстоянии друг от друга. Множество $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ может лежать или частично или полностью на границе области G . Будем, однако, предполагать, что дополнительная к α часть β границы области G не пуста. Наконец, предположим, что множества α_1 и α_2 такие, что всякая связанная область G^* , получающаяся из G после удаления множеств

H_1 и H_2 , ограничена кроме некоторых дуг α_1 и α_2 еще некоторыми дугами, принадлежащими к β . Обозначим через $m(l)$ минимум гармонической меры множества $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ относительно области G^* на дуге l , соединяющей внутри G^* множества α_1 и α_2 , т. е.

$$m(l) = \min_{W \in l} \omega(W, \alpha, G^*). \quad (1.44)$$

Максимальное значение $m(l)$, когда l пробегает совокупность всех таких дуг, соединяющих α_1 и α_2 , обозначим через m_W , т. е.

$$m_W = \sup_l m(l). \quad (1.45)$$

Очевидно, что

$$0 < m_W < 1. \quad (1.46)$$

Аналогично обозначим через $m(\sigma)$ минимум гармонической меры дуг $L_1 + L_2 + L_3$ относительно области D_{12} на прямой $\text{Re } t = \sigma$, т. е.

$$m(\sigma) = \min_{\text{Re } t = \sigma} \omega(t, L_1 + L_2 + L_3, D_{12}),$$

а через m_t обозначим максимальное значение $m(\sigma)$, когда σ изменяется в интервале $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, т. е.

$$m_t = \sup_{\tau} m(\sigma). \quad (1.47)$$

На основании принципа Карлемана об увеличении гармонической меры заключаем, что

$$m_t \leq m_W. \quad (1.48)$$

Так как $\omega(t, L_1 + L_2 + L_3, D_{12}) = 1 - \omega(t, \theta_{\sigma_1} + \theta_{\sigma_2}, D_{12})$,

то, используя неравенство (1.41), получаем

$$\omega(t, L_1 + L_2 + L_3, D_{12}) \geq 1 - 2e^{-\frac{2}{\pi} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\theta(\sigma)}}. \quad (1.50)$$

Отсюда очевидно, что

$$m_t \geq 1 - 2e^{-\frac{2}{\pi} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\theta(\sigma)}} \quad (1.51)$$

или, учитывая (1.48), имеем неравенство Неванлинны

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\theta(\sigma)} \leq \frac{\pi}{2} \ln \frac{2}{1 - m_W}. \quad (1.52)$$

В качестве примера на общее соотношение (1.52) выберем области G , H_1 , H_2 следующим образом: пусть область G ограничена кривой Γ и H_1 и H_2 — две ее подобласти, отсекаемые от нее двумя не имеющими общих точек сечениями α_1 , α_2 . Остаточная область

будет ограничена кроме дуг α_1, α_2 еще дугами β_1, β_2 граничной кривой Γ (рис. 7). Соединим дуги β_1 и β_2 дугой l , лежащей в области G^* . Длину дуги l , отсчитываемую от начальной точки, обозначим s . Пусть s возрастает на l от s_1 до s_2 в направлении от β_1 к β_2 . Обозначим $\rho(s)$ кратчайшее расстояние от точки W_s на дуге l до граничных дуг α_1, α_2 .

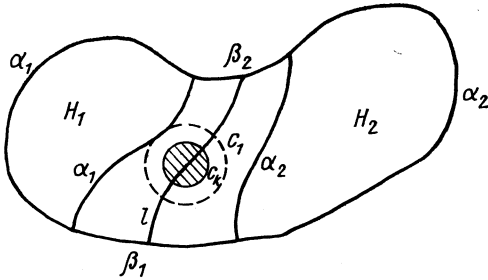


Рис. 7. Область, в которой оценивается m_W .

Рассмотрим теперь гармоническую меру $\omega(W, \beta_1 + \beta_2, G^*)$ и обозначим $m(s)$ минимум ω в пересечении области G^* с кругом:

$$\begin{aligned} |W - W_s| &\leq k\rho(s), \\ 0 < k < 1. \end{aligned} \quad (1.53)$$

На рис. 7 эта область заштрихована и имеет границу c_k — окружность с центром в точке W_s и радиусом $k\rho(s)$; c_1 — окружность с тем же центром и радиусом $\rho(s)$.

Для оценки величины $m(s)$ введем функцию

$$u(W) = m(s) \frac{\ln \frac{\rho(s)}{|W - W_s|}}{\ln \frac{1}{k}}. \quad (1.54)$$

Эта функция гармоническая в кольце $k\rho(s) \leq |W - W_s| < \rho(s)$ и принимает на внутренней окружности значение $m(s)$, а на внешней окружности — нуль.

Пересечение рассматриваемого кольца с областью G^* обозначим D_s , ограниченную точками трех видов:

- 1) точками окружности c_k ; 2) точками окружности c_1 ; 3) точками дуг $\beta_1 + \beta_2$.

Покажем теперь, что в области D_s гармоническая мера $\omega(W, \beta_1 + \beta_2, G^*)$ удовлетворяет неравенству

$$\omega(W, \beta_1 + \beta_2, G^*) \geq u(W). \quad (1.55)$$

В первом случае для точек окружности $c_k \subset G^*$ гармоническая мера $\omega(W, \beta_1 + \beta_2, G^*)$ больше или равна значению $m(s)$ по определению, а функция $u(W) = m(s)$, поэтому имеет место (1.55).

Во втором случае для точек окружности $c_1 \subset G^*$ гармоническая мера $\omega(W, \beta_1 + \beta_2, G^*)$ больше или равна нулю. Функция $u(W)$ для этих точек равна нулю по построению, а следовательно, и в этом случае имеет место неравенство (1.55).

В третьем случае гармоническая мера, по определению, равна единице. В силу принципа максимума функция $u(W)$ для точек области D_s удовлетворяет неравенству

$$u(W) \leq m(s).$$

Так как $m(s)$ всегда меньше единицы, то опять выполняется неравенство (1.55).

Функции ω и $u(W)$ гармонические в области D_s и на границе области D_s удовлетворяют неравенству (1.55), тогда на основании принципа минимума следует, что во всей области D_s имеет место неравенство

$$\omega(W, \beta_1 + \beta_2, G^*) \geq u(W), \quad W \in D_s. \quad (1.56)$$

Если теперь на дуге l взять точку $W_{s+\Delta s}$, то для достаточно малого $\Delta s > 0$ можно провести окружность c_k с центром в точке $W_{s+\Delta s}$ и радиусом $k\rho(s + \Delta s)$ таким образом, чтобы она находилась внутри круга c_1 . Обозначим $m(s + \Delta s)$ минимумом гармонической меры $\omega(W, \beta_1 + \beta_2, G^*)$ в пересечении области G^* с кругом радиуса $k\rho(s + \Delta s)$ и центром в точке $W_{s+\Delta s}$. Рассмотрим точки на окружности \tilde{c}_k . Для тех точек окружности \tilde{c}_k , которые лежат внутри круга c_k , справедливо неравенство

$$m(s + \Delta s) > m(s). \quad (1.57)$$

Для точек окружности \tilde{c}_k , лежащих вне круга c_k , на основании неравенства (1.56) имеем

$$m(s + \Delta s) \geq \min_W u(W). \quad (1.58)$$

Так как точка W лежит на окружности \tilde{c}_k вне круга c_k , то согласно неравенству треугольника

$$|W - W_s| \leq k\rho(s + \Delta s) + \Delta r, \quad \text{где } \Delta r = |W_{s+\Delta s} - W_s|.$$

Отсюда

$$\min_W u(W) \geq \frac{m(s)}{\ln \frac{1}{k}} \ln \frac{\rho(s)}{\Delta r + k\rho(s + \Delta s)},$$

а следовательно,

$$m(s + \Delta s) \geq \frac{m(s)}{\ln \frac{1}{k}} \ln \frac{\rho(s)}{\Delta r + k\rho(s + \Delta s)}. \quad (1.59)$$

Пусть окружность C_1 радиуса $\rho(s)$ с центром в точке W_s касается границы α_1 в точке x . Круг c_1 радиуса $\rho(s + \Delta s)$, проведенного из центра $W_{s+\Delta s}$, или не содержит точки x , или она принадлежит границе этого круга. Отсюда на основании неравенства треугольника имеем

$$\rho(s + \Delta s) \leq \rho(s) + \Delta r. \quad (1.60)$$

Учитывая это неравенство, имеем

$$m(s + \Delta s) \geq \frac{m(s)}{\ln \frac{1}{k}} \left[\ln \frac{1}{k} - \ln \left\{ 1 + \left(1 + \frac{1}{k} \right) \frac{\Delta r}{\rho(s)} \right\} \right],$$

откуда следует, что

$$\frac{m(s + \Delta s) - m(s)}{\Delta r} \geq - \frac{\left(1 + \frac{1}{k} \right) m(s)}{\rho(s) \ln \frac{1}{k}}. \quad (1.61)$$

Совершая предельный переход $\Delta s \rightarrow 0$ и замечая, что при этом $\frac{\Delta s}{\Delta r} \rightarrow 1$, находим

$$\frac{dm(s)}{ds} \geq - \frac{1 + \frac{1}{k}}{\rho(s) \ln \frac{1}{k}} m(s). \quad (1.62)$$

Полагая $k = \frac{1}{e}$ и учитывая, что $\frac{1 + \frac{1}{k}}{\ln \frac{1}{k}} < 4$, неравенство (1.62)

запишем в интегральной форме:

$$m(s) \geq m(s_1) e^{-4 \int_{s_1}^s \frac{ds'}{\rho(s')}}. \quad (1.63)$$

Оценим теперь значение $m(s_1)$ в круге $|W - W_{s_1}| \leq k\rho(s_1)$, где точка W_{s_1} лежит на граничной дуге β_1 . Для этой цели воспользуемся неравенством Карлемана. В плоскости W рассмотрим область G_{s_1} , которая является пересечением области G^* и круга C радиуса $\rho(s_1)$ с центром в точке W_{s_1} , лежащей на границе β_1 . Совершим отображение плоскости W на плоскость t с помощью конформного преобразования:

$$t = \ln(W_{s_1} - W). \quad (1.64)$$

Тогда область G_{s_1} перейдет в область D_σ . Часть окружности, составляющую границу области G_{s_1} , обозначим через β . При этом преобразовании β перейдет в плоскости t в некоторый участок линии $\operatorname{Re} t = \sigma$. Длину этого участка обозначим $\theta(\sigma)$, и ей в W -плоскости соответствует центральный угол дуги β , который всегда меньше или равен 2π . Длина $\theta(\sigma)$ в переменных W -плоскости записывается в виде

$$\theta(\sigma) = \arg \frac{W_{s_1} - W_2}{W_{s_1} - W_1},$$

здесь W_1 и W_2 — точки дуги β , лежащие на границе β_1 .

Так как гармоническая мера при конформных отображениях не изменяется, то

$$\omega(W, \beta, G_{s_1}) \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\theta(\sigma)}{2 \ln \frac{\rho(s_1)}{|W_{s_1} - W|}}. \quad (1.65)$$

Отсюда для α дополнения к β границы области G_{s_1} гармоническая мера

$$\omega(W, \alpha, G_{s_1}) \geq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2 \ln \frac{\rho(s_1)}{|W - W_{s_1}|}}{\theta(\sigma)}. \quad (1.66)$$

Пусть $|W - W_{s_1}| \leq \frac{1}{e} \rho(s_1)$, тогда, учитывая, что $\theta(\sigma) \leq 2\pi$, получаем

$$\omega(W, \beta_1 + \beta_2, G^*) \geq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\pi} \geq \frac{1}{2\pi}. \quad (1.67)$$

Учитывая принцип Карлемана о расширении области, имеем

$$\omega(W, \beta_1 + \beta_2, G^*) \geq \omega(W, \alpha, G_{s_1}), \quad \bar{W} \in G_{s_1}. \quad (1.68)$$

Заметим, что дуга α является частью дуги β_1 . На основании неравенств (1.67) и (1.68) найдем

$$\omega(W, \beta_1 + \beta_2, G^*) \geq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\pi} \geq \frac{1}{2\pi}, \quad (1.69)$$

а следовательно,

$$m(s_1) \geq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\pi} \geq \frac{1}{2\pi}. \quad (1.70)$$

Исходя из неравенств (1.63) и (1.70) получаем

$$m(s) \geq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\pi} e^{-4 \int_{s_1}^s \frac{ds'}{\rho(s')}}; \quad (1.71)$$

аналогичными рассуждениями находим

$$m(s) \geq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\pi} e^{-4 \int_s^{s_2} \frac{ds'}{\rho(s')}}. \quad (1.72)$$

Складывая неравенства (1.71) и (1.72), имеем

$$m(s) \geq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\pi} e^{-2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\rho(s)}}. \quad (1.73)$$

Так как $\omega(W, \alpha_1 + \alpha_2, G^*) = 1 - \omega(W, \beta_1 + \beta_2, G^*)$, то, учитывая неравенство (1.73), получаем

$$\omega(W, \alpha_1 + \alpha_2, G^*) \leq 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\pi} e^{-2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\rho(s)}}. \quad (1.74)$$

Отсюда

$$m_W \leq 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\pi} e^{-2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\rho(s)}}. \tag{1.75}$$

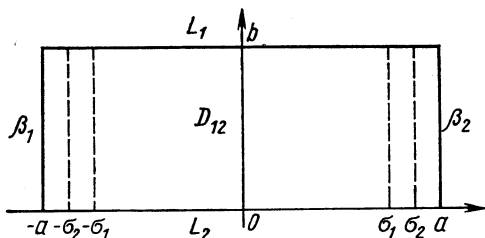
На основании неравенств (1.48) и (1.75) получим

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\rho(s)} \gg -\frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 - m_t}{\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\pi}} \right]. \tag{1.76}$$

Это неравенство в дальнейшем будет широко использоваться при исследовании асимптотического поведения сечений. В выражение (1.76) входит величина m_t , которая определяется гармонической мерой в t -плоскости, относительно некоторой области D_{12} , определенной ранее. В области D_{12} задается однозначная аналитическая функция $W(t)$. Величина $\rho(s)$ определяется областью G^* в плоскости W .

Определение величины m_t для прямоугольника

Возьмем в качестве области D_{12} прямоугольник, симметрично расположенный относительно мнимой оси y в плоскости t (рис. 8). Для вычисления m_t удобно перейти в плоскость τ с помощью конформного преобразования:



$$t = c \int_0^\tau \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}. \tag{1.77}$$

Р и с. 8. Прямоугольник, в котором найдена оценка для m_t .

Для прямоугольной области D_{12} гармоническая мера $\omega(t, L_1 + L_2, D_{12})$, по определению, равна единице на сторонах L_1 и L_2 и нулю на двух других

сторонах прямоугольника. Заметим, что минимум гармонической функции $\omega(t, L_1 + L_2, D_{12})$ на сечениях $\operatorname{Re} t = \pm \sigma_1$ больше, чем минимум на сечениях $\operatorname{Re} t = \pm \sigma_2$. Максимальное значение минимума в силу симметрии области D_{12} достигается на мнимой оси. Поскольку при конформном отображении (1.77) участок (Ob) переходит в плоскости τ в положительную часть мнимой оси, то максимальное значение минимума гармонической меры в τ -плоскости достигается на положительной части мнимой оси. Так как при преобразовании (1.77) отрезок β_2 перейдет в отрезок $\tilde{\beta}_2 = \left(1, \frac{1}{k}\right)$, а β_1 — в отрезок $\tilde{\beta}_1 =$

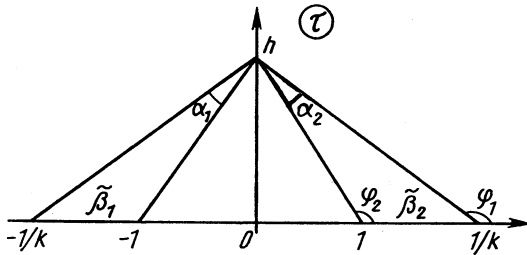
$= \left(-\frac{1}{k}, -1 \right)$, то, очевидно,

$$\omega(t, L_1 + L_2, D_{12}) = 1 - \omega(\tau, \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2, G_\tau). \quad (1.78)$$

Гармоническая мера $\omega(\tau, \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2, G_\tau)$ для любой точки в верхней полуплоскости равна:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\pi}, \quad (1.79)$$

где α_1 и α_2 — углы, под которыми видны сегменты β_1 и β_2 из точки τ (рис. 9). Найдем максимальное значение гармонической



Р и с. 9. Образ прямоугольника, получаемый при отображении (1.77).

меры $\omega(\tau, \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2, G_\tau)$ для точек τ на положительной части мнимой оси. Непосредственно из рисунка

$$\alpha_1 = \varphi_1 - \varphi_2; \quad \varphi_1 = \pi - \operatorname{arctg} kh; \quad \varphi_2 = \pi - \operatorname{arctg} h,$$

а следовательно,

$$\omega(ih, \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2, G_\tau) = -\frac{2}{\pi} [\operatorname{arctg} kh - \operatorname{arctg} h]. \quad (1.80)$$

Отсюда

$$\max_h \omega = 1 - \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{k}. \quad (1.81)$$

Учитывая (1.78) и (1.81), находим

$$m_t = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{k}. \quad (1.82)$$

С учетом (1.82) неравенство (1.76) для прямоугольной области D_{12} примет вид

$$\int_{s_1}^{s_0} \frac{ds}{\rho(s)} \geq -\frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 - \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{k}}{\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\pi}} \right]. \quad (1.83)$$

Величину k , входящую в неравенство (1.83), можно вычислить из следующего соотношения:

$$\frac{1}{a} = \frac{K(k')}{K(k)}. \quad (1.84)$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл, равный:

$$K(k) = \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}; \tag{1.85}$$

$$k' = \sqrt{1-k^2}.$$

Если $a \rightarrow \infty$, а $b = \text{const}$, то $K \rightarrow 1$, поскольку $K(k)$ монотонно возрастает от значения $\pi/2$ (при $k = 0$) до бесконечности, когда $k \rightarrow 1$. В области $k \approx 1$ воспользуемся асимптотической формулой

$$K(k) \approx \ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} + O[(1-k^2) \ln(1-k^2)]. \tag{1.86}$$

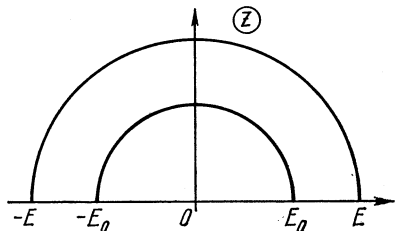


Рис. 10. Полукольцо, являющееся прообразом прямоугольника относительно отображения (1.91).

Подставляя (1.86) в соотношение (1.84), получаем

$$\ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{\pi a}{2b}. \tag{1.87}$$

Отсюда для больших значений a имеем

$$\sqrt{k} \approx 1 - 4e^{-\frac{\pi a}{b}}. \tag{1.88}$$

Подставляя (1.88) в (1.82) и учитывая разложение $\text{arctg } x \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + \dots$, находим

$$m_t \approx 1 - \frac{2}{\pi} (1 - \sqrt{k}). \tag{1.89}$$

Следовательно, неравенство (1.83) приобретает вид

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\rho(s)} \geq -\frac{1}{2} \ln \left[\frac{4 \exp\left(-\frac{\pi a}{b}\right)}{\text{arctg} \frac{1}{\pi}} \right]. \tag{1.90}$$

Рассмотрим важный для дальнейшего пример, когда область в плоскости z задана в виде полукольца (рис. 10). Эту область с помощью конформного преобразования

$$t = \ln z - \frac{1}{2} [\ln E + \ln E_0] \tag{1.91}$$

можно перевести в прямоугольник, симметричный относительно мнимой оси в плоскости t . Для данного прямоугольника вели-

чины, характеризующие его размеры, равны:

$$a = \frac{1}{2} \ln \frac{E}{E_0}; \quad b = \pi. \quad (1.92)$$

Подставляя эти значения в неравенство (1.90), получаем

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\rho(s)} \geq \frac{1}{4} \ln \left(\frac{E}{E_0} \right) - \frac{1}{2} \ln \left[\frac{4}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\pi}} \right]. \quad (1.93)$$

**2. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
ИОСТА — ЛЕМАНА — ДАЙСОНА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ
АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ
И МНОЖЕСТВЕННОГО РОЖДЕНИЯ**

**Аналитические свойства амплитуды
упругого рассеяния по $\cos \theta$**

Для амплитуды процесса

$$a + b \rightarrow a + b \quad (I)$$

имеем следующее выражение [2, 4]:

$$T(p, k, p', k') = \frac{2i}{(2\pi)^3} \sqrt{2p'_0 2k'_0} \int e^{i(p-k)\frac{x}{2}} \left\langle p', k' \left| \frac{\delta j_a \left(\frac{x}{2} \right)}{\delta \varphi_b \left(-\frac{x}{2} \right)} \right| 0 \right\rangle dx; \quad (2.1)$$

$$\langle p', k' | S - 1 | p, k \rangle = i \frac{(2\pi)^4 \delta(p' + k' - p - k)}{\sqrt{2p'_0 2k'_0 2p_0 2k_0}} T(p, k, p', k'); \quad (2.2)$$

$$j_a(x) = i \frac{\delta S}{\delta \varphi_a(x)} \overset{\pm}{S}, \quad (2.3)$$

где $\varphi_a(x)$ — поле частицы с начальным импульсом p и конечным p' .

Используя представление Дайсона [26], запишем (2.1) в виде [8]

$$T(p, k; p', k') = \frac{2}{(2\pi)^4} \sqrt{2k'_0, 2p'_0} \int d^4u \int d\kappa^2 \frac{\Phi(u, \kappa^2, p', k')}{\left[\left(u - \frac{k-p}{2} \right)^2 - \kappa^2 \right]}. \quad (2.4)$$

Функция Φ сосредоточена в области:

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{p+k}{2} \pm u \right) \in L^+; \\ & \kappa \geq \max \left\{ 0; m_1 - \sqrt{\left(\frac{p+k}{2} + u \right)^2}; m_2 - \sqrt{\left(\frac{p+k}{2} - u \right)^2} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

где L^+ — верхний световой конус; m_1 — масса низшего состояния $|n_1\rangle$, для которого

$$\langle p', k' | j_a(0) | n_1 \rangle \langle n_1 | j_b(0) | 0 \rangle \neq 0;$$

m_2 — масса низшего состояния $|n_2\rangle$, для которого

$$\langle p', k' | j_b(0) | n_2 \rangle \langle n_2 | j_a(0) | 0 \rangle \neq 0.$$

Изучим аналитические свойства амплитуды рассеяния (2.4) по комплексной переменной $\cos \theta$. Выберем трехмерную систему координат следующим образом: ось x направим по импульсу p' , а плоскость xoy проведем через векторы p и p' . Угол между импульсами p и p' обозначим θ . Вся зависимость от $\cos \theta$ в выражении (2.4) будет заключена только в знаменателе.

Спектральная функция Φ в представлении (2.4) зависит лишь от скалярных произведений векторов u , p' , k' и в выбранной системе координат может быть записана в виде

$$\Phi(u, \kappa^2, p', k') = \Phi(u_0, |u|, s, \kappa^2, \cos \alpha \cdot \sin \beta); \quad (2.6)$$

вектор u приняли

$$u = |u| (\cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \beta). \quad (2.7)$$

Учитывая (2.6) и (2.7), представление (2.4) преобразуем к виду

$$T(s, \cos \theta) = \int_{x_0(s)}^{\infty} dx \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{i\Psi(s, x \cos \alpha)}{x - \cos(\theta - \alpha)}, \quad (2.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Psi(s, x, \cos \alpha) = & \frac{2}{(2\pi)^4} \sqrt{2k'_0 2p'_0} \int du_0 \int |u| d|u| \int_{-1}^1 \frac{d \cos \beta}{2|p| \sin \beta}; \\ & \int d\kappa^2 \Phi(u_0, |u|, s, \kappa^2, \cos \alpha \sin \beta) \times \\ & \times \delta \left(x - \frac{\left[u_0 - \frac{k_0 - p_0}{2} \right]^2 - u^2 - p^2 - \kappa^2}{2|u||p| \sin \beta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

В представлении (2.8)

$$x_0(s) = \left[1 + \frac{(m_1^2 - m_b^2)(m_2^2 - m_a^2)}{|p|[s - (m_1 - m_2)^2]} \right]^{1/2} \quad (2.10)$$

для πN -рассеяния;

$$m_1 = 3m_\pi; \quad m_2 = m_\pi + M_N; \quad m_b = m_\pi; \quad m_a = M_N. \quad (2.11)$$

Из выражения (2.8) легко показать, что амплитуда $T(s, \cos \theta)$ аналогична по $\cos \theta$ в эллипсе с фокусами в точках ± 1 и большой полuosью $x_0(s)$.

Используя условие унитарности и спектральности

$$i[T^+(p, k; p', k') - T(p, k; p', k')] = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_n \delta(P_n - k - p) \times \\ \times \int e^{i(p-k)\frac{x}{2} + i(k'-p')\frac{y}{2}} \left\langle 0 \left| \frac{\delta j_b \left(\frac{y}{2} \right)}{\delta \varphi_a^* \left(-\frac{y}{2} \right)} \right| n \right\rangle \left\langle n \left| \frac{\delta j_a \left(\frac{x}{2} \right)}{\delta \varphi_b \left(-\frac{x}{2} \right)} \right| 0 \right\rangle dx dy, \quad (2.12)$$

а также представление Дайсона вида (2.4), можно показать, что мнимая часть амплитуды рассеяния аналитична по $\cos \theta$ в эллипсе с фокусами в точках ± 1 и большой полуосью $y_0(s) = 2x_0^2(s) - 1$. В дальнейшем будем называть эллипс с большой полуосью $x_0(s)$ эллипсом Лемана, а эллипс с большой полуосью $y_0(s)$ — большим эллипсом Лемана.

В области больших s большая полуось эллипса Лемана имеет вид

$$x_0(s) \approx 1 + \frac{2(m_1^2 - m_b^2)(m_2^2 - m_a^2)}{s^2} \quad (2.13)$$

или в плоскости t :

$$t_0(s) = \frac{\text{const}}{s}. \quad (2.14)$$

Таким образом, возможная ближайшая особенность по t с ростом энергии стремится к точке $t = 0$.

Аналитические свойства амплитуды и дифференциального сечения процесса множественного рождения по $\cos \theta$

В работах [9, 10] изучались, исходя из представления Дайсона, аналитические свойства амплитуды множественного рождения по косинусу угла рождения. Изложим основные результаты, полученные в этих работах.

Рассмотрим процесс

$$a + b \rightarrow c + A_j, \quad (II)$$

где A_j — группа адронов.

Для простоты рассмотрим бесспиновые частицы. По определению, полное сечение процесса (II) в системе центра инерции будет

$$\sigma_{\text{inel}}^{j,c}(s) = \frac{(2\pi)^4}{4\sqrt{s}|p_a|} \int |\langle k_c, k_i, \dots, k_j | T | p_a, p_b \rangle|^2 \times \\ \times \delta \left(p_a + p_b - k_c - \sum_{i=1}^f k_i \right) \frac{d^4 k_c}{(2\pi)^3} \delta(k_c^2 - m_c^2) \theta(k_c^0) \times \\ \times \prod_{i=1}^j \theta(k_i^0) \delta(k_i^2 - m_i^2) \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^3}. \quad (2.15)$$

Дифференциальное сечение запишется в виде

$$\frac{d\sigma_{inel}^{j,c}}{d \cos \theta} = \frac{1}{2 \sqrt{s} |p_a|} \int | \langle k_c, k_1, \dots, k_j | T | p_a, p_b \rangle |^2 d\Gamma, \quad (2.16)$$

где

$$d\Gamma = 2\pi \frac{(2\pi)^4}{2} \delta \left(p_a - p_b - k_c - \sum_{i=1}^j k_i \right) \frac{|k_c|^2 d|k_c|}{2k_c^0 (2\pi)} \prod_{i=1}^j \frac{d\mathbf{k}_i}{2k_i^0 (2\pi)^3}.$$

С помощью представления Дайсона амплитуда множественного рождения может быть представлена в форме

$$T_{j,c}(p_a, p_b, k_c, k_1, \dots, k_j) = \int d\kappa^2 \int d^4u \frac{\Phi(\kappa^2, u, k_c, k_1, \dots, k_j)}{\left[\frac{1}{2}(p_a - p_b) - u \right]^2 - \kappa^2}. \quad (2.17)$$

Функция Φ сосредоточена в области:

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{p_a + p_b}{2} \pm u \right) \in L^+; \\ & \kappa \geq \max \left\{ 0, m_1 - \sqrt{\left(\frac{p_a + p_b}{2} + u \right)^2}, m_2 - \sqrt{\left(\frac{p_a + p_b}{2} - u \right)^2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Здесь m_1 — масса низшего состояния $|n_1\rangle$, для которого

$$\langle k_c, k_1, \dots, k_j | j_a(0) | n_1 \rangle \langle n_1 | j_b(0) | 0 \rangle \neq 0; \quad (2.19)$$

m_2 — масса низшего состояния $|n_2\rangle$, для которого

$$\langle k_c, k_1, \dots, k_j | j_b(0) | n_2 \rangle \langle n_2 | j_a(0) | 0 \rangle \neq 0. \quad (2.20)$$

Импульсы частиц удовлетворяют закону сохранения:

$$p_a + p_b = k_c + \sum_{i=1}^j k_i. \quad (2.21)$$

Для удобства в дальнейшем будем работать в системе центра инерции.

Введем следующие 4-вектора:

$$q_\nu = \sum_{i=\nu}^j k_i, \quad \nu = 1, \dots, j. \quad (2.22)$$

Количество независимых переменных, от которых зависит амплитуда $T_{j,c}$, будет $3j - 1$.

В качестве независимых переменных выберем величины: $s = (p_a + p_b)^2$ — квадрат полной энергии системы; θ — угол между векторами p_a и k_c ; $q_\nu^2 = \omega_\nu^2$, $\nu = 1, 2, \dots, j-1$; α_ν, β_ν ; $\nu = 2, \dots, j-1$ — полярные углы векторов q_ν . Выберем трехмерную систему координат так, чтобы ось x была направлена

вдоль \mathbf{k}_c , а вектор \mathbf{p}_p лежал в плоскости xoy , тогда

$$\left. \begin{aligned} p_a &: \left[\frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_a^2 - m_b^2), |\mathbf{p}_a| (\cos \theta, \sin \theta, 0) \right]; \\ p_b &: \left[\frac{1}{2\sqrt{s}} (s - m_a^2 + m_b^2), |\mathbf{p}_b| (-\cos \theta, -\sin \theta, 0) \right]; \\ k_c &: \left[\frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_c^2 - \omega_1^2), |\mathbf{k}_c| (1, 0, 0) \right]; \\ q_1 &: \left[\frac{1}{2\sqrt{s}} (s - m_c^2 + \omega_1^2), |q_1| (-1, 0, 0) \right]; \\ q_v &: [q_v^0 |\mathbf{q}| (\cos \alpha_v \sin \beta_v, \sin \alpha_v \sin \beta_v, \cos \beta_v)]; \\ & \quad v = 2, \dots, j; \end{aligned} \right\} \cdot (2.23)$$

$$u : [u_0, |\mathbf{u}| (\cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \beta)]. \quad (2.24)$$

Для определения $|\mathbf{k}_i|$ можно воспользоваться равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=v}^j \sqrt{\mathbf{k}_i^2 + m_i^2} &= \sqrt{\mathbf{q}_v^2 + \omega_v^2}, \quad v = 1, \dots, j-1; \\ \mathbf{k}_i^2 &= (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1})^2, \quad i = 1, \dots, j-1; \\ \mathbf{k}_j^2 &= \mathbf{q}_j^2. \end{aligned} \right\} (2.25)$$

Учитывая (2.23) и (2.25), легко показать, что $|\mathbf{k}_i|$, $i = 1, \dots, j$ зависит от углов α_v только через $\cos \alpha_v$ и $\cos(\alpha_v - \alpha_\mu)$; $v, \mu = 2, \dots, j$.

Спектральная функция Φ в силу инвариантности является функцией только скалярных произведений (uk_i) , $(k_i k_j)$, поэтому представление Дайсона (2.17) можно записать в виде

$$T_{j,c}(s, \cos \theta, \alpha_2 \dots) = \int_{x_0(s)}^{\infty} dx \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{\Psi[x, s, \cos \alpha, \cos \alpha_2, \dots, \cos(\alpha - \alpha_2), \dots, \cos(\alpha_i - \alpha_l) \dots]}{x - \cos(\theta - \alpha)}, \quad (2.26)$$

где

$$\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} du_0 \int_0^{\infty} |\mathbf{u}| d|\mathbf{u}| \int_{-1}^1 \frac{d \cos \beta}{2|\mathbf{p}_a| \sin \beta} \times \\ \times \int_0^{\infty} d\kappa^2 \Phi \delta \left(x - \frac{\left(u_0 - \frac{p_a^0 - p_b^0}{2} \right)^2 - u^2 - p_a^2 - \kappa^2}{2|\mathbf{u}| |\mathbf{p}_a| \sin \beta} \right).$$

Функция $x_0(s)$ определяется формулой (2.10), причем массы m_1 и m_2 находятся из условий (2.19) и (2.20).

Введем функции

$$T_{\pm}^{j,c}(s, \cos \theta, \alpha_2 \dots) = T_{j,c}(s, \cos \theta, \alpha_0, \dots, \alpha_j \dots) \pm \pm T_{j,c}(s, \cos \theta, 2\pi - \alpha_2, \dots, 2\pi - \alpha_j \dots). \quad (2.27)$$

С помощью представления (2.12) легко показать, что функция $T_{\pm}^{j,c}(s, \cos \theta, \alpha_2 \dots)$ будет аналитической в эллипсе Лемана с большой полуосью $x_0(s)$.

Так как функция $T_{\pm}^{j,c}(s, \cos \theta, \dots)$ будет содержать в качестве множителя $\sin \theta$, то аналитической функцией по $\cos \theta$ в эллипсе Лемана будет комбинация $\frac{1}{\sin \theta} T_{\pm}^{j,c}(s, \cos \theta, \alpha_2 \dots)$. Если образовать для физических значений $\cos \theta$ функции $T_{\pm}^{j,c} \cdot T_{\pm}^{*j,c}$, $T_{\pm}^{j,c} \cdot T_{\pm}^{*j,c}$, а потом рассматривать их как функции комплексной переменной $\cos \theta$, то легко убедиться, что эти функции будут аналитическими в эллипсе Лемана. Изучим теперь аналитические свойства дифференциального сечения (2.16) по переменной $\cos \theta$.

При нашем выборе независимых переменных величины $|k_c|$ и k_c^0 не зависят от α_i ($i = 2, \dots, j$). Что касается величин $k_1^{(0)}, \dots, k_j^{(0)}$, то они зависят от α_i только через $\cos \alpha_i$ и $\cos(\alpha_i - \alpha_2)$. Таким образом, при замене $\alpha_i \rightarrow 2\pi - \alpha_i$

$$d\Gamma \rightarrow (-1)^{j-1} d\Gamma,$$

и выражение (2.16) можно записать в виде

$$\frac{d\sigma_{i \text{ nel}}^{j,c}}{d \cos \theta} = \frac{(2\pi^4)}{4 |p_a| \sqrt{s}} \int [|T_{j,c}(s, \cos \theta, \alpha_2 \dots \alpha_j, \dots)|^2 + |T_{j,c}(s, \cos \theta, 2\pi - \alpha_2 \dots 2\pi - \alpha_j \dots)|^2] d\Gamma. \quad (2.28)$$

Учитывая равенство

$$\begin{aligned} & |T_{j,c}(s, \cos \theta, \alpha_2 \dots \alpha_j \dots)|^2 + \\ & + |T_{j,c}(s, \cos \theta, 2\pi - \alpha_2, \dots, 2\pi - \alpha_j \dots)|^2 = \\ & = \frac{1}{2} [T_{+}^{j,c} \cdot T_{+}^{*j,c} + T_{-}^{j,c} \cdot T_{-}^{*j,c}], \end{aligned} \quad (2.29)$$

на основании ранее изложенного видно, что сечение (2.28) является аналитической функцией в эллипсе Лемана с большой полуосью $x_0(s)$.

Аналитические свойства амплитуды процесса множественного рождения по двум комплексным переменным $\cos \theta, e^{i\varphi}$ [7, 11]

Рассмотрим реакцию вида

$$a + b \rightarrow c + d + A_j, \quad (\text{III})$$

где A_j — группа адронов.

Введем систему координат следующим образом. Ось z направим вдоль импульса \mathbf{k}_c , а плоскость xoz проведем через векторы \mathbf{k}_c и \mathbf{k}_d . В качестве независимых переменных возьмем: $s = (p_a + p_b)^2$; $\cos \theta$, θ — угол между импульсами \mathbf{p}_a и \mathbf{k}_c ; φ — азимутальный угол вектора \mathbf{p}_a ; ψ — угол между импульсами \mathbf{k}_c и \mathbf{k}_d ; α_i и β_i — сферические координаты вектора \mathbf{k}_i ($i = 1, \dots, j-1$); $|\mathbf{k}_i|$ — длина вектора \mathbf{k}_i ($i = 1, \dots, j-1$) и $|\mathbf{k}_d|$ — длина вектора \mathbf{k}_d .

Вводя сферические координаты для вектора \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = |\mathbf{u}| (\sin \beta \cos \alpha, \sin \beta \sin \alpha, \cos \beta)$$

представление (2.17) запишем в виде

$$\begin{aligned} & T_{j,cd}(s, \cos \theta, e^{i\varphi} \dots) = \\ & = \int_{x_0(s)}^{\infty} dx \int_{-1}^1 d \cos \beta \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{\Psi(x, \beta, \alpha, s, \dots)}{[x - \sin \beta \sin \theta \cos(\alpha - \varphi) - \cos \beta \cos \theta]}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Заметим, что переменные θ и φ входят только в знаменатель представления (2.30).

Изучим аналитические свойства амплитуды $T_{j,cd}$ по комплексным переменным $z = \cos \theta$ и $\omega = e^{i\varphi}$ одновременно.

Для этой цели введем переменные:

$$z = \frac{1}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right); \quad u = \omega e^{-i\alpha}. \quad (2.31)$$

Заметим, что когда z пробегает эллипс с большой полуосью x_ρ , то v пробегает окружность радиуса ρ , причем

$$x_\rho = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right). \quad (2.32)$$

Функция (2.30) будет заведомо несингулярной в области, где

$$x_0(s) - \operatorname{Re} [\sin \beta \sin \theta \cos(\alpha - \varphi) - \cos \beta \cos \theta] \neq 0. \quad (2.33)$$

Представив v и u как

$$v = \rho e^{i\xi}, \quad u = g e^{i\zeta}, \quad (2.34)$$

уравнение (2.33) перепишем в виде

$$\begin{aligned} & x_0(s) - \sin \beta [x_\rho x_g \sin \xi \cos \zeta + \\ & + y_\rho y_g \cos \xi \sin \zeta] - x_\rho \cos \beta \cos \xi \neq 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Здесь

$$x_g = \frac{1}{2} \left(g + \frac{1}{g} \right); \quad y_g = \frac{1}{2} \left(g - \frac{1}{g} \right); \quad y_\rho = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right). \quad (2.36)$$

Минимальная область по переменным z и ω , в которой знаменатель (2.30) не обращается в нуль, будет:

$$x_0(s) - \max_{\beta, \xi, \zeta} f(\beta, \xi, \zeta) > 0; \quad (2.37)$$

$$f(\beta, \xi, \zeta) = \sin \beta [x_\rho x_g \sin \xi \cos \zeta + y_\rho y_g \cos \xi \sin \zeta] + x_\rho \cos \beta \cdot \cos \xi. \quad (2.38)$$

Вычисляя максимум функции $f(\beta, \xi, \zeta)$ по переменным β и ζ , получаем

$$\max_{\beta, \zeta} f(\beta, \xi, \zeta) = \sqrt{x_\rho^2 x_g^2 + \cos^2 \xi (1 - x_g^2)}. \quad (2.39)$$

Из этого выражения очевидно, что

$$\max_{\beta, \zeta, \xi} f(\beta, \xi, \zeta) = x_\rho x_g. \quad (2.40)$$

Из неравенства (2.37) и выражения (2.40) находим

$$\frac{x_\rho}{x_0(s) + \sqrt{x_0^2(s) - x_\rho^2}} < |\omega| < \frac{x_0(s) + \sqrt{x_0^2(s) - x_\rho^2}}{x_\rho}. \quad (2.41)$$

Наряду с функцией $T_{j, cd}(s, \theta, \dots)$, имеющей представление (2.30), введем функцию

$$T_{j, cd}(s, 2\pi - \theta, e^{i\varphi}, \dots) = \int_{x_0(s)}^{\infty} dx \int_{-1}^1 d \cos \beta \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{\Psi(x, \beta, \alpha, s, \dots)}{[x + \sin \beta \sin \theta \cos(\alpha - \varphi) - \cos \beta \cos \theta]}. \quad (2.42)$$

Знаменатель (2.43) также будет заведомо отличен от нуля, когда переменная $z = \cos \theta$ находится в эллипсе с большой полуосью x_ρ и фокусами в точках ± 1 , а переменная ω — в кольце (2.41). Эту область обозначим $G(z, \omega)$. Поэтому комбинации

$$T_{j, cd}^{\text{четн}} = \frac{1}{2} [T_{j, cd}(s, \theta, \dots) + T_{j, cd}(s, 2\pi - \theta, \dots)]; \quad (2.43)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} T_{j, cd}^{\text{нечетн}} = \frac{1}{2 \sin \theta} [T_{j, cd}(s, \theta, \dots) + T_{j, cd}(s, 2\pi - \theta, \dots)] \quad (2.44)$$

будут аналитическими функциями по z и ω в области $G(z, \omega)$. Функция $T_{j, cd}^{\text{четн}}(s, \theta, e^{i\varphi}, \dots)$ может быть разложена в двойной ряд вида

$$T_{j, cd}^{\text{четн}}(s, \theta, e^{i\varphi}, \dots) = \left(\frac{2 \sqrt{s}}{|\mathbf{p}_\alpha|} \right)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_m (2l+1) T_l^m(s, \xi_l) d_{m, 0}^l(\theta) e^{im\varphi}. \quad (2.45)$$

Суммирование по m в (2.45) ведется только по четным значениям в интервале $[-l, l]$. Аналогично, функция (2.44) разлагается в двойной ряд вида

$$T_{j, cd}^{\text{нечетн}} = \left(\frac{2 \sqrt{s}}{|\mathbf{p}_a|} \right)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_m (2l+1) T_l^m(s, \xi_i) d_{m, 0}^l(\theta) e^{im\varphi}. \quad (2.46)$$

Суммирование по m в (2.46) идет только по нечетным значениям в интервале $[-l, l]$.

В силу аналитичности функций (2.43) и (2.44) в области $G(z, \omega)$ порядок суммирования по l и m в рядах (2.45) и (2.46) может быть изменен. Поэтому наряду с разложением вида

$$T_{j, cd}(s, \theta, e^{i\varphi}, \dots) = \left(\frac{2 \sqrt{s}}{|\mathbf{p}_a|} \right)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (2l+1) T_l^m(s, \xi_i) d_{m, 0}^l(\theta) e^{im\varphi} \quad (2.47)$$

будем пользоваться и разложением

$$T_{j, cd}(s, \theta, e^{i\varphi}, \dots) = \left(\frac{2 \sqrt{s}}{|\mathbf{p}_a|} \right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \sum_{l=|m|}^{\infty} (2l+1) T_l^m(s, \xi_i) d_{m, 0}^l(\theta). \quad (2.48)$$

Функцию

$$F_m(s, \theta, \dots) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=|m|}^{\infty} (2l+1) T_l^m(s, \xi_i) d_{m, 0}^l(\theta) \quad (2.49)$$

будем называть амплитудой процесса (III) с фиксированным значением проекции момента.

При физических значениях переменной $\omega = e^{i\varphi}$ функции (2.43) и (2.44) будут аналитическими по $\cos \theta$ в эллипсе Лемана с большой полуосью $x_0(s)$.

При физических значениях переменной $\cos \theta$ функция (2.47) будет аналитической по ω в кольце:

$$r_-(s) = x_0(s) - \sqrt{x_0^2(s) - 1} < |\omega| < x_0(s) + \sqrt{x_0^2(s) - 1} = r_+(s). \quad (2.50)$$

Амплитуду $T_{j, cd}$ можно разбить на две части:

$$T_{j, cd}(s, \theta, e^{i\varphi}, \dots) = T_{j, cd}^{(+)}(s, \theta, e^{i\varphi}, \dots) + T_{j, cd}^{(-)}(s, \theta, e^{i\varphi}, \dots); \quad (2.51)$$

$$T_{j, cd}^{(+)}(s, \theta, e^{i\varphi}, \dots) = 4\pi \left(\frac{2 \sqrt{s}}{|\mathbf{p}_a|} \right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} F_m(s, \cos \theta, \dots) e^{im\varphi}; \quad (2.52)$$

$$T_{j, cd}^{(-)}(s, \theta, e^{i\varphi}, \dots) = 4\pi \left(\frac{2 \sqrt{s}}{|\mathbf{p}_a|} \right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{-1} F_m(s, \cos \theta, \dots) e^{im\varphi}. \quad (2.53)$$

На основании (2.50) следует, что при физических значениях переменных $\cos \theta$, ξ_i функция $T_{j, cd}^{\text{четн}}$ будет аналитична внутри круга:

$$|\omega| \leq r_+(s), \quad (2.54)$$

а функция $T_{j, cd}^-$ аналитична вне круга:

$$|\omega| \geq r_-(s). \quad (2.55)$$

Отметим в заключение, что введенные выше переменные позволяют ввести дифференциальное сечение вида

$$\frac{d^2\sigma_{i, \text{nel}}^{j, cd}}{d \cos \theta d\varphi} = \frac{1}{2|\mathbf{p}_a|/\sqrt{s}} \int d\Gamma/T_{j, cd}|^2.$$

Здесь интегрирование ведется по всем переменным, кроме θ , φ и s .

Условие унитарности [27]

Рассмотрим неупругий процесс:

$$a + b \rightarrow A_{\nu}, \quad (IV)$$

где A_{ν} — произвольная группа адронов.

Обозначив начальное состояние $|i\rangle$, а конечное $|f\rangle$, введем амплитуду перехода T :

$$\langle f|S|i\rangle = \delta_{if} + i(2\pi)^4 \delta(p_a + p_b - \sum_{i=1}^{\nu} q_i) \langle f|T|i\rangle n_i n_f, \quad (2.56)$$

нормировочные множители удобно определить следующим образом:

$$n_i = \frac{1}{2V} \left(\frac{1}{p_a^0 p_b^0} \right)^{1/2}; \quad n_f = \prod_{i=1}^{\nu} \left(\frac{1}{2V q_i^0} \right)^{1/2}. \quad (2.57)$$

Здесь V — нормировочный объем.

Вероятность перехода из состояния $|i\rangle$ в состояние $|f\rangle$ в единицу времени

$$\frac{\delta W}{\delta t} = (2\pi)^4 \delta \left(p_a + p_b - \sum_{i=1}^{\nu} q_i \right) n_i^2 n_f^2 |\langle f|T|i\rangle|^2 V. \quad (2.58)$$

Так как в начальном состоянии имеется только две частицы, то удобно ввести поперечное сечение реакции, которое в нашем случае будет:

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu}(s) &= (2\pi)^4 \frac{V^2}{v_a} \frac{V^{\nu}}{(2\pi)^{3\nu}} \int \dots \\ &\dots \int d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_{\nu} n_i^2 n_f^2 \left(p_a + p_b - \sum_{i=1}^{\nu} q_i \right) |\langle f|T|i\rangle|^2, \end{aligned} \quad (2.59)$$

где v_a — скорость падающей частицы a в лабораторной системе отсчета.

Подставляя нормировочные множители (2.57), получаем

$$\sigma_{\nu}(s) = \frac{(2\pi)^4}{4p_a^0 p_b^0 v_a} \int \cdots \int \prod_{i=1}^{\nu} \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2q_i^0} \delta \left(p_a + p_b - \sum_{i=1}^{\nu} q_i \right) |\langle f | T | i \rangle|^2. \quad (2.60)$$

Если частицы имеют спин, то необходимо просуммировать по конечным состояниям.

Заметим, что в системе центра инерции

$$4p_a^0 p_b^0 v_a = 4\sqrt{s} |\mathbf{p}_a|. \quad (2.61)$$

Здесь s — квадрат полной энергии, а \mathbf{p}_a — импульс начальной частицы в системе центра инерции.

Условие унитарности S -матрицы имеет вид $S\hat{S}^{\dagger} = \hat{S}S = 1$ или для T -матрицы оно может быть записано для двухчастичных начальных и конечных состояний в виде

$$\frac{1}{2i} \langle p'_a, p'_b | T - \hat{T}^{\dagger} | p_a, p_b \rangle = \frac{1}{2} (2\pi)^4 \sum_{\text{По состояниям } \nu} n_{\nu}^2 \delta \left(p_a + p_b - \sum_{i=1}^{\nu} q_i \right) \times \\ \times \langle p'_a, p'_b | \hat{T}^{\dagger} | q_1 \dots q_{\nu} \rangle \langle q_1 \dots q_{\nu} | T | p_a, p_b \rangle. \quad (2.62)$$

Здесь

$$n_{\nu} = \prod_{i=1}^{\nu} \left(\frac{1}{2Vq_i^0} \right)^{1/2}. \quad (2.63)$$

Проведя элементарные вычисления, можно переписать (2.62) в форме

$$\text{Im } T_{if} = \frac{1}{2i} \langle p'_a, p'_b | T - \hat{T}^{\dagger} | p_a, p_b \rangle = \\ = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_{\nu} \int \cdots \int \prod_{i=1}^{\nu} \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2q_i^0} \delta \left(p_a + p_b - \sum_{i=1}^{\nu} q_i \right) \times \\ \times \langle p'_a, p'_b | \hat{T}^{\dagger} | q_1 \dots q_{\nu} \rangle \langle q_1 \dots q_{\nu} | T | p_a p_b \rangle. \quad (2.64)$$

Для рассеяния вперед

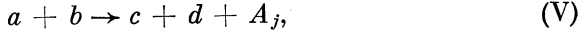
$$\text{Im } T_{i,i} = \frac{1}{2i} \langle p_a, p_b | T - \hat{T}^{\dagger} | p_a, p_b \rangle = \\ = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_{\nu} \int \cdots \int \prod_{i=1}^{\nu} \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2q_i^0} \delta \left(p_a + p_b - \sum_{i=1}^{\nu} q_i \right) \times \\ \times |\langle q_1 \dots q_{\nu} | T | p_a, p_b \rangle|^2. \quad (2.65)$$

Сравнивая выражения (2.60) и (2.65) и учитывая (2.61), имеем

$$\text{Im } T_{i, i} = 2 \sqrt{s} |p_a| \sigma_{\text{tot}}(s), \quad (2.66)$$

где $\sigma_{\text{tot}}(s) = \sum_{\nu} \sigma_{\nu}(s)$.

Рассмотрим реакцию вида



где A_j — произвольная группа адронов.

Полное сечение этой реакции записывается в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{inel}}^{j, cd}(s) &= \frac{(2\pi)^4}{4p_a^0 p_b^0 v_a} \int \dots \int \frac{d^3 k_c}{(2\pi)^3 2k_c^0} \cdot \frac{d^3 k_d}{(2\pi)^3 2k_d^0} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2q_i^0} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3 2q_j^0} \times \\ &\times \delta \left(p_a^0 + p_b^0 - k_c^0 - k_d^0 - \sum_{i=1}^j q_i^0 \right) |\langle k_c, k_d, q_1 \dots q_j | T | p_a, p_b \rangle|^2. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Введем единичные векторы \mathbf{n}_c , \mathbf{n}_d , \mathbf{n}_i вдоль импульсов \mathbf{k}_c , \mathbf{k}_d и \mathbf{q}_i ($i = 1, \dots, j-1$) и некоторый произвольный единичный вектор \mathbf{n} . Произведение дифференциалов может быть записано через скалярные произведения векторов:

$$\begin{aligned} d\mathbf{n}_c d\mathbf{n}_d \prod_{i=1}^{j-1} d\mathbf{n}_i &= \\ &= 2\pi \frac{d(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_d) d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_c) d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_d)}{K(\mathbf{n}_c, \mathbf{n}_d, \mathbf{n})} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{d(\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{n}_i) d(\mathbf{n}_d \cdot \mathbf{n}_i)}{K(\mathbf{n}_c, \mathbf{n}_d, \mathbf{n}_i)}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Здесь

$$\begin{aligned} K(\mathbf{n}_c, \mathbf{n}_d, \mathbf{n}) &= \\ &= \sqrt{1 - (\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{n}_d)^2 - (\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{n})^2 - (\mathbf{n}_d \cdot \mathbf{n})^2 + 2(\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{n}_d)(\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n}_d \cdot \mathbf{n})}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

В системе координат, где ось z направлена по импульсу \mathbf{k}_c , вектор \mathbf{n} выбран равным $\mathbf{p}_a / |\mathbf{p}_a|$, а плоскость xoz проведена через векторы \mathbf{k}_c и \mathbf{k}_d , имеем

$$d^3 k_c d^3 k_d = 2\pi |\mathbf{k}_c|^2 |\mathbf{k}_d| d|\mathbf{k}_c| d|\mathbf{k}_d| d\cos\theta d\varphi d\cos\psi. \quad (2.70)$$

Здесь θ и φ — сферические углы импульса \mathbf{p}_a ; ψ — угол между импульсами \mathbf{k}_c и \mathbf{k}_d .

Введем дифференциальное сечение

$$\frac{d^2 \sigma_{\text{inel}}^{jcd}}{d\cos\theta d\varphi} = \frac{1}{2p_a^0 p_b^0 v_a} \int d\Gamma |\langle k_c, k_d, q_1 \dots q_j | T | p_a, p_b \rangle|^2, \quad (2.71)$$

$$\text{где } d\Gamma = \pi (2\pi)^4 \frac{|\mathbf{k}_c|^2 d|\mathbf{k}_c|}{(2\pi)^3 2k_c^0} \cdot \frac{|\mathbf{k}_d|^2 d|\mathbf{k}_d|}{(2\pi)^3 2k_d^0} d \cos \psi \prod_{i=1}^{j-1} \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2q_i^0} \times \\ \times \frac{1}{(2\pi)^3 2q_j^0} \delta \left(p_a^0 + p_b^0 - k_c^0 - k_d^0 - \sum_{i=1}^j q_i^0 \right). \quad (2.72)$$

В системе центра инерции начальный и конечный векторы состояний могут быть представлены в виде:

$$\left. \begin{aligned} |p_a, p_b\rangle &= |n_a, s\rangle = \sum_{l, m} \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi}} D_{m, 0}^l(n_a) |s, l, m\rangle; \\ \langle p'_a, p'_b| &= \langle s, n'_a| = \sum_{l, m} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \overset{*}{D}_{m, 0}^l(n'_a) \langle s, l, m|. \end{aligned} \right\} \quad (2.73)$$

Учитывая (2.73), амплитуду упругого рассеяния представляем в виде следующего разложения:

$$\langle p'_a, p'_b | T | p_a, p_b \rangle = \sum_{l, m} \sum_{l', m'} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi}} \times \\ \times D_{m, 0}^l(n_a) \overset{*}{D}_{m', 0}^{l'}(n'_a) \langle s, l', m' | T | s, l, m \rangle.$$

Принимая во внимание, что

$$\langle s, l', m' | T | s, l, m \rangle = \frac{32\pi^2 \sqrt{s}}{|\mathbf{p}_a|} \delta_{l'l} \delta_{m'm} f_l(s), \quad (2.74)$$

находим

$$\langle p'_a, p'_b | T | p_a, p_b \rangle = \frac{8\pi \sqrt{s}}{|\mathbf{p}_a|} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(s) P_l(n_e \cdot n'_a). \quad (2.75)$$

При получении (2.75) было учтено, что

$$P_l(n_a \cdot n'_a) = \sum_{m=-l}^l D_{m, 0}^l(n_a) \overset{*}{D}_{m, 0}^l(n'_a). \quad (2.76)$$

Учитывая (2.73), записываем соотношение унитарности (2.64) в следующей форме:

$$\text{Im } T_{if} = J_{el} + J_{nel}; \quad (2.77)$$

$$J_{el} = \frac{1}{2} (2\pi)^4 \sum_{l, m} \sum_{l', m'} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi}} D_{m, 0}^l(n_a) \overset{*}{D}_{m', 0}^{l'}(n'_a) \times \\ \times \int \int \frac{d^3 k_a}{(2\pi)^3 2k_a^0} \cdot \frac{d^3 k_b}{(2\pi)^3 2k_b^0} \delta(p_a + p_b - k_a - k_b) \langle s', l', m' | T | k_a k_b \rangle \times \\ \times \langle k_a, k_b | T | s, l, m \rangle. \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned}
J_{i \text{ nel}} = & \frac{1}{2} (2\pi)^4 \sum_{l, m} \sum_{l', m'} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi}} D_{m, 0}^l(\mathbf{n}_a) D_{m', 0}^{*l'}(\mathbf{n}'_a) \times \\
& \times \sum_{\nu} \int \dots \int \prod_{i=1}^{\nu} \frac{d^3 q_{\nu}}{(2\pi)^3 2q_i^{(0)}} \delta(p_a + p_b - \sum_{i=1}^{\nu} q_i) \langle s, l', m' | T^{\dagger} | q_1 \dots q_{\nu} \rangle \times \\
& \times \langle q_1 \dots q_{\nu} | T | s, l, m \rangle. \quad (2.79)
\end{aligned}$$

Так как

$$\text{Im } T_{if} = \frac{8\pi \sqrt{s}}{|\mathbf{p}_a|} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \text{Im } f_l(s) P_l(\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}'_a), \quad (2.80)$$

то

$$\int \text{Im } T_{if} P_l(\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}'_a) d\mathbf{n}_a d\mathbf{n}'_a = 4\pi \frac{32\pi^2 \sqrt{s}}{|\mathbf{p}_a|} \text{Im } f_l(s) \quad (2.81)$$

с учетом, что

$$\int P_l(\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}'_a) P_{l'}(\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}'_a) d\mathbf{n}_a d\mathbf{n}'_a = \frac{(4\pi)^2}{2l+1} \delta_{l, l'}.$$

Учитывая (2.78) и (2.75), находим

$$\int J_{el} P_l(\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}'_a) d\mathbf{n}_a d\mathbf{n}'_a = 4\pi \frac{32\pi^2 \sqrt{s}}{|\mathbf{p}_a|} |f_l(s)|^2. \quad (2.82)$$

Из совокупности состояний ν выберем такое состояние, которое содержит частицы сорта c и d и некоторое произвольное число адронов j .

Амплитуду этого неупругого процесса представим в виде

$$\begin{aligned}
\langle k_c k_d, q_1 \dots q_j | T | p_a, p_b \rangle = & \left(\frac{2\sqrt{s}}{|\mathbf{p}_a|} \right)^{1/2} \sum_{l, m} (2l+1) T_l^m(s, \xi_i) \times \\
& \times D_{m, 0}^l(\mathbf{n}_a). \quad (2.83)
\end{aligned}$$

Обозначим здесь

$$T_l^m(s, \xi_i) = \left(\frac{|\mathbf{p}_a|}{8\pi \sqrt{s}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \langle k_c, k_d, q_1 \dots q_j | T | s, l, m \rangle. \quad (2.84)$$

Вклад данного процесса в выражение (2.79) равен:

$$\begin{aligned}
J_{i \text{ nel}}^{cd} = & \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_{l, m} \sum_{l', m'} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi}} D_{m, 0}^l(\mathbf{n}_a) D_{m', 0}^{*l'}(\mathbf{n}'_a) \times \\
& \times \int \dots \int \frac{d^3 k_c}{(2\pi)^3 2k_c^0} \cdot \frac{d^3 k_d}{(2\pi)^3 2k_d^0} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2q_i^0} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3 2q_j^0} \delta(p_a^0 + p_b^0 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -k_c^0 - k_d^0 - \sum_{i=1}^j q_i^0 \langle s, l', m' | \hat{T} | k_c, k_d, q_1, \dots, q_j \rangle \times \\
 & \quad \times \langle k_c, k_d, q_1 \dots q_j | T | s, l, m \rangle. \quad (2.85)
 \end{aligned}$$

Если выберем систему координат таким образом, что ось z направлена по импульсу \mathbf{k}_c , а плоскость xoy проходит через векторы \mathbf{k}_c и \mathbf{k}_d , то можно воспользоваться выражением (2.68) и написать дифференциал $d^3k_c d^3k_d$ в виде

$$d^3k_c d^3k_d = 2\pi |\mathbf{k}_c|^2 |\mathbf{k}_d|^2 d|\mathbf{k}_c| d|\mathbf{k}_d| dn d \cos \psi. \quad (2.86)$$

Матричные элементы амплитуды T в (2.85) не зависят от вектора \mathbf{n} , поскольку амплитуда инвариантна относительно вращений системы координат.

Учитывая (2.86) и интегрируя по dn , получаем

$$\begin{aligned}
 J_{i \text{ nel}}^{cd} &= \frac{1}{2} (2\pi)^4 \sum_{l, m, l', m'} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi}} D_{m, 0}^l(\mathbf{n}_o) D_{m', 0}^{l'}(\mathbf{n}'_a) \times \\
 & \times 8\pi^2 \int \dots \int \frac{|\mathbf{k}_c|^2 d|\mathbf{k}_c|}{(2\pi)^3 2k_c^0} \cdot \frac{|\mathbf{k}_d|^2 d|\mathbf{k}_d|}{(2\pi)^3 2k_d^0} d \cos \psi \prod_{i=1}^{j-1} \frac{d^3q_i}{(2\pi)^3 2q_i^0} \times \\
 & \times \frac{1}{(2\pi)^3 2q_j^0} \delta \left((p_a^0 + p_b^0 - k_c^0 - k_d^0 - \sum_{i=1}^j q_i^0) \right) \times \\
 & \times \langle s, l', m' | \hat{T} | k_c, k_d, q_1 \dots q_j \rangle \langle k_c, k_d, q_1 \dots q_j | T | s, l, m \rangle. \quad (2.87)
 \end{aligned}$$

Найдем вклад от выражения (2.87) в парциальную амплитуду:

$$\begin{aligned}
 & \int J_{i \text{ nel}}^{cd} P_l(\mathbf{n}_a \mathbf{n}'_a) d\mathbf{n}_a d\mathbf{n}'_a = (2\pi)^2 \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \times \\
 & \quad \times \int d\Gamma |\langle k_c, k_d, q_1 \dots q_j | T | s, l, m \rangle|^2. \quad (2.88)
 \end{aligned}$$

Здесь фазовый объем $d\Gamma$ определяется выражением (2.72). Так как на основании (2.84)

$$|\langle k_c, k_d, q_1 \dots q_j | T | s, l, m \rangle|^2 = \frac{8\pi \sqrt{s}}{|\mathbf{p}_a|} (2l+1) |T_l^m(s, \xi_i)|^2,$$

то

$$\begin{aligned}
 & \int J_{i \text{ nel}}^{cd} P_l(\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}'_a) d\mathbf{n}_a d\mathbf{n}'_a = \\
 & = 4\pi \frac{32\pi^2 \sqrt{s}}{|\mathbf{p}_a|} \sum_{m=-l}^l \int d\Gamma |T_l^m(s, \xi_i)|^2. \quad (2.89)
 \end{aligned}$$

Условие унитарности для парциальных амплитуд может быть записано в виде

$$\int \operatorname{Im} T_{if} P_l(\mathbf{n}_a \mathbf{n}'_a) d\mathbf{n}_a d\mathbf{n}'_a = \int J_{el} P_l(\mathbf{n}_a, \mathbf{n}'_a) d\mathbf{n}_a d\mathbf{n}'_a + \\ + \int J_{inel}^{cd} P_l(\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}'_a) d\mathbf{n}_a d\mathbf{n}'_a + \dots \quad (2.90)$$

Подставляя в (2,90) выражения (2.81), (2.82) и (2.89), имеем

$$\operatorname{Im} f_l(s) = |f_l(s)|^2 + \sum_{m=-l}^l \int d\Gamma |T_l^m(s, \xi_i)|^2 + \dots \quad (2.91)$$

Отсюда вытекает, в частности, что

$$\eta_l(s) = \sum_{m=-l}^l \int d\Gamma |T_l^m(s, \xi_i)|^2 \leq \frac{1}{4}. \quad (2.92)$$

Подставляя разложение (2.83) в (2.74) и учитывая (2.61), находим

$$\frac{d^2 \pi_i^{j, cd}}{d \cos \theta d\varphi} = \frac{1}{|\mathbf{p}_a|^2} \sum_{l, m} \sum_{l', m'} (2l+1)(2l'+1) D_{m, 0}^l(\mathbf{n}_a) D_{m', 0}^{*l'}(\mathbf{n}'_a) \times \\ \times \int d\Gamma T_l^m(s, \xi_i) T_{l'}^{*m'}(s, \xi_i). \quad (2.93)$$

Отсюда, интегрируя по углам, получаем

$$\sigma_{inel}^{j, cd}(s) = \frac{4\pi}{|\mathbf{p}_a|^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sum_{m=-l}^l \int d\Gamma |T_l^m(s, \xi_i)|^2. \quad (2.94)$$

Некоторые свойства функций Герглотца [12]

Функция, аналитическая в верхней полуплоскости и имеющая в этой области положительную мнимую часть, называется функцией Герглотца. Для функций Герглотца справедливо следующее представление:

$$H(z) = A + Bz + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} H(x)(1+zx)}{(1+x^2)(x-z)} dx, \quad (2.95)$$

где $B \geq 0$;

$$\operatorname{Im} H(x) \geq 0. \quad (2.96)$$

Легко видеть, что $\operatorname{Im} H(z) > 0$ для всех точек верхней полуплоскости.

Из представления (2.95) следует, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} H(x)}{1+x^2} dx \quad (2.97)$$

сходится. Так как функция $-1/H(z)$ также является функцией Герглотца, то интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} H(x) dx}{|H(x)|^2 (1+x^2)} \quad (2.98)$$

также сходится. Из представления (2.95) следует, что для комплексных z , у которых аргумент ограничен неравенством

$$\varepsilon < \arg z < \pi - \varepsilon,$$

где ε — любое сколь угодно малое положительное число, модуль функции $H(z)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{c_1}{|z|} \leq |H(z)| \leq c_2 |z|. \quad (2.99)$$

Найдем оценку снизу для функции Герглотца на действительной оси. Для этой цели построим функцию

$$G(z) = \frac{1}{z} \int_0^z H(t) dt. \quad (2.100)$$

Выбирая в (2.100) путь с интегрирования вдоль луча, проходящего через точку 0 и z (z лежит в верхней полуплоскости), легко убедиться, что функция $G(z)$ является функцией Герглотца, а следовательно, в силу (2.98) интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \left[\int_0^x \operatorname{Im} H(y) dy \right] dx}{\left| \int_0^x H(y) dy \right|^2 (1+x^2)} \quad (2.101)$$

сходится. Из (2.101) следует, что интеграл

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x} \cdot \frac{\int_0^x \operatorname{Im} H(y) dy}{\left| \int_0^x H(y) dy \right|^2} \quad (2.102)$$

также сходится. Поскольку функция $\int_0^x \operatorname{Im} H(y) dy$ не убывает

с ростом x из (2.102), следует, что интеграл

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x} \cdot \frac{1}{\left[\int_0^x |H(y)| dy \right]^2} \quad (2.103)$$

сходится, а следовательно, заведомо имеет место неравенство

$$\int_0^x |H(y)| dy > \text{const} [\ln x]^{1/2}. \quad (2.104)$$

Отсюда следует, что для больших x

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} x [\ln x]^{1/2} |H(x)| \rightarrow \infty. \quad (2.105)$$

Обобщенные функции Герглотца и нижняя граница для амплитуды рассеяния вперед [12]

Пусть функция $f(z)$ аналитична в плоскости z с размерами вдоль действительной оси от $-\infty$ до a и от b до $+\infty$ (причем $a < b$) и пусть далее функция $f(x)$ полиномиально ограничена:

$$|f(z)| < |z|^n, \quad (2.106)$$

и на верхнем берегу разреза ее мнимая часть положительна. Заметим, что в интервале $[a, b]$ мнимая часть функции $f(x)$ равна нулю.

Тогда функция $f(z)$ имеет конечное число нулей и допускает представление вида

$$f(z) = \varphi_i(z) H(z), \quad (2.107)$$

где $H(z)$ — функция Герглотца; $\varphi_i(z)$ — некоторый полином по z . Такие функции $f(z)$ будем называть обобщенными функциями Герглотца.

В силу условия

$$f(z) = \overset{*}{f}(z) \quad (2.108)$$

функция $f(z)$ будет иметь нули наряду с z_i и в комплексно сопряженных точках z_i^* . Покажем сначала, что функция $f(z)$ имеет конечное число нулей. Допустим обратное, что число нулей функции $f(z)$ бесконечно. Из бесконечного числа нулей возьмем $2p$ комплексных и $2q$ реальных нулей, причем p и q выберем так, чтобы

$$2p + 2q > n + 2. \quad (2.109)$$

Введем полином

$$\Phi_{2q}(z) = \prod_{i=1}^p (z - z_i) (z - z_i^*) \prod_{j=1}^{2q} (z - x_j). \quad (2.110)$$

Здесь z_i и z_i^* — комплексные нули функции $f(z)$; x_j — вещественные нули. Заметим, что

$$a < x_j < b.$$

Введем функцию

$$G(z) = \frac{f(z)}{\Phi_{2q}(z)}, \quad (2.111)$$

которая является аналитической по z в разрезанной z -плоскости, убывает, согласно построению, быстрее, чем $|z|^{-2}$, и имеет положительную мнимую часть на верхнем берегу разреза. Учитывая эти свойства функции $G(z)$, можно для нее написать дисперсионные соотношения без вычитания:

$$G(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^a \frac{\operatorname{Im} G(x)}{x-z} dx + \frac{1}{\pi} \int_b^{\infty} \frac{\operatorname{Im} G(x)}{x-z} dx. \quad (2.112)$$

Из этого представления следует, что вдоль любого луча в комплексной z -плоскости функция $G(z)$ не может убывать быстрее, чем $|z|^{-2}$, т. е. мы пришли к противоречию, ибо по построению функция $G(z)$ должна убывать быстрее, чем $|z|^{-2}$. Отсюда предположение, что число нулей функции $f(z)$ больше, чем $n + 2$, неверно. Итак, число нулей функции $f(z)$ не превосходит числа $n + 2$.

Пусть функция $f(z)$ имеет $2p$ комплексных нулей и ν вещественных нулей. Если ν четное, то введем функцию

$$H(z) = \frac{f(z)}{\Phi_{\nu}(z)}. \quad (2.113)$$

Эта функция не имеет нулей, и ее мнимая часть на верхнем берегу разреза положительна. Пусть модуль функции $H(z)$ ограничен неравенством

$$\frac{1}{|z|^m} \leq |H(z)| \leq |z|^n. \quad (2.114)$$

Рассмотрим сначала случай, когда $H(z)$ удовлетворяет более сильному неравенству:

$$\frac{1}{|z|^m} \leq |H(z)| \leq |z|^{1-\varepsilon}, \quad (2.115)$$

где ε — любое сколь угодно малое положительное число. Построим функцию

$$g(z) = e^{iH(z)},$$

и к ней применим теорему Фрагмена — Линделефа [5]. Функция $g(z)$ аналитична в верхней полуплоскости и ограничена единицей на всей вещественной оси. Согласно условию (2.115) она возрастает в верхней полуплоскости медленнее экспоненты, тогда на основании теоремы Фрагмена — Линделефа функция $g(z)$ по модулю будет меньше единицы во всей верхней полуплоскости z . Отсюда следует, что $\text{Im } H(z)$ положительна для всех z , у которых $\text{Im } z > 0$, а следовательно,

$$\frac{1}{|z|} \leq |H(z)|.$$

Если функция $H(z)$ ограничена неравенством

$$\frac{1}{|z|^{1-\varepsilon}} \leq |H(z)| \leq |z|^n, \quad (2.116)$$

то, переходя к функции $-1/H(z)$ и проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, находим, что и в этом случае $H(z)$ — функция Герглотца, а следовательно, $|H(z)| \leq |z|$. В том случае, когда ν нечетное, а производная функции $f(z)$ в точке $z = x_\nu$ положительна, построим функцию вида

$$H(z) = \frac{f(z)}{\varphi_{\nu-1}(z)}, \quad (2.117)$$

которая обращается в нуль в точке $z = x_\nu$. Принимая во внимание, что в окрестности точки $z = x_\nu$ в верхней полуплоскости

$$-\text{Im} \frac{1}{H(z)} = \frac{\varphi_{\nu-1}(x_\nu) \text{Im } z}{\left. \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right|_{z=x_\nu} |z-x_\nu|^2} > 0, \quad (2.118)$$

и повторяя предыдущие рассуждения, легко показать, что функция $H(z)$ и в этом случае будет функцией Герглотца. Если ν нечетное, а производная функции $f(z)$ в точке $z = x_\nu$ отрицательна, построим функцию

$$H(z) = \frac{f(z)}{\varphi_{\nu-1}(z)(z-x_\nu)^2}. \quad (2.119)$$

Учитывая, что в окрестности точки $z = x_\nu$ в верхней полуплоскости

$$\text{Im } H(z) = -\frac{\left. \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right|_{z=x_\nu} \text{Im } z}{\varphi_{\nu-1}(x_\nu) |z-x_\nu|^2} > 0, \quad (2.120)$$

аналогичным, как и выше, путем установим, что $H(z)$ — функция Герглотца.

На основании оценки (2.105) для функции Герглотца и представлений (2.113), (2.117) и (2.119) можно получить для функции

$f(x)$ в асимптотической области по x следующую нижнюю границу:

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x| |\ln |x||^{1/2} |f(x)| \rightarrow \infty. \quad (2.121)$$

В том случае, когда $\text{Im } f(x)$ меняет знак ν раз на действительной оси, введем функцию

$$\tilde{f}(z) = \prod_{k=1}^{\nu} (z - x_k) f(z); \quad (2.122)$$

точки x_k выбраны таким образом, что на действительной оси

$$\text{Im } \tilde{f}(x) \geq 0.$$

Отсюда следует, что для функции $\tilde{f}(x)$ справедливо неравенство (2.121), а следовательно, на основании (2.122) для функции $f(x)$ получим неравенство

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{\nu+1} |\ln |x||^{1/2} |f(x)| \rightarrow \infty. \quad (2.123)$$

Используя полученные выше результаты, покажем теперь, что из аналитичности амплитуды в s -плоскости, а также условия унитарности следует ограничение снизу для амплитуды рассеяния вперед.

Рассмотрим процессы:

$$A + B \rightarrow A + B;$$

$$A + \bar{B} \rightarrow A + \bar{B}.$$

Дисперсионные соотношения для амплитуды рассеяния вперед имеют вид

$$F_{\alpha}(s, 0) = P_n(s) + \frac{s^{n+1}}{\pi} \int_{(M_a + M_b)^2}^{\infty} \frac{\text{Im } F_{\alpha}(s', 0)}{(s')^{n+1} (s' - s)} ds' + \\ + \frac{u^{n+1}}{\pi} \int_{(M_a + M_b)^2}^{\infty} \frac{\text{Im } F_{\beta}(u', 0) du'}{(u')^{n+1} (u' - u)}. \quad (2.124)$$

Из условия унитарности следует, что в физической области:

$$\text{Im } F_{\alpha}(s, 0) > 0; \quad \text{Im } F_{\beta}(u, 0) > 0. \quad (2.125)$$

В силу кроссинг-симметрии мнимая часть амплитуды $F_{\alpha}(s, 0)$ на левом разрезе отрицательна, а поэтому можно воспользоваться

формулой (1.123), положив в ней $\nu = 1$, и получить для амплитуды рассеяния вперед следующую оценку *:

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} s^2 [\ln s]^{1/2} |F_\alpha(s, 0)| \rightarrow \infty. \quad (2.126)$$

При определении этой оценки использовали только общие утверждения теории и не прибегали к каким-либо модельным представлениям. Конечно, эта оценка слабая, ибо экспериментальные данные по полным сечениям свидетельствуют о том, что амплитуда рассеяния вперед возрастает с увеличением s .

3. УСЛОВИЕ УНИТАРНОСТИ И РАСШИРЕНИЯ ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ПРОЦЕССА МНОЖЕСТВЕННОГО РОЖДЕНИЯ ПО $\cos \theta$

О дифференцировании дисперсионного интеграла по $\cos \theta$ [13]

Мнимая часть амплитуды рассеяния может быть разложена по полиномам Лежандра:

$$\text{Im } F(s, \theta) = \frac{8\pi \sqrt{s}}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \text{Im } f_l(s) P_l(\cos \theta). \quad (3.1)$$

В силу условия унитарности

$$\text{Im } f_l \geq |f_l|^2 \quad (3.2)$$

и свойства полиномов Лежандра $P_l(1) = 1$ следует, что

$$\text{Im } F(s, 0) \geq 0. \quad (3.3)$$

Используя свойства полиномов Лежандра [29]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^n P_l(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^n} \Big|_{\theta=0} > 0, \quad l \geq n; \\ \left| \frac{d^n P_l(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^n} \right| \leq \frac{d^n P_l(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^n} \Big|_{\theta=0}, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^n \text{Im } F(s, t)}{dt^n} \Big|_{t=0} > 0; \\ \left| \frac{d^n \text{Im } F(s, t)}{dt^n} \right| \leq \left| \frac{d^n \text{Im } F(s, t)}{dt^n} \right|_{t=0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

* В работах [44, 45] для нижней границы амплитуды рассеяния вперед получена следующая более точная оценка:

$$|F_\alpha(s_n, 0)|_{s_n \rightarrow \infty} \geq \frac{\text{const}}{s_n^2},$$

здесь s_n — некоторая последовательность из физической области.

Здесь $t = -2k^2(1 - \cos \theta)$.

В дисперсионных соотношениях по s при фиксированном t имеется нефизическая область. Для значений s из нефизической области условие положительности (3.5) не выполняется.

Физическая область s -канала для рассеяния одинаковых частиц определяется условиями

$$s \geq 4m^2; |\cos \theta| \leq 1. \quad (3.6)$$

Пусть t фиксировано и пусть для такого значения t существуют дисперсионные соотношения (для простоты будем их записывать без вычитаний). Вклад от правого разреза тогда запишется в форме

$$\frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\text{Im } F(s', t)}{s' - s} ds'. \quad (3.7)$$

Легко убедиться, что условие $|\cos \theta| \leq 1$ выполняется лишь для энергий:

$$s' \geq 4m^2 + \tau, \quad (3.8)$$

где положили $\tau = -t$, $\tau > 0$.

Таким образом, для фиксированного переданного импульса $t = -\tau$ всегда имеется нефизическая область

$$4m^2 \leq s' \leq 4m^2 + \tau, \quad (3.9)$$

в которой $\cos \theta < -1$ и условие (3.5) не выполняется.

Как уже отмечалось, мнимая часть амплитуды рассеяния $\text{Im } F(s, t)$ аналитична в большом эллипсе Лемана с большой полуосью $y_0(s) = 2x_0^2(s) - 1$. Максимальное значение τ_0 , для которого имеют место дисперсионные соотношения, устанавливается, исходя из аналитичности в этом эллипсе. Функция $\text{Im } F(s, t)$ будет сколь угодно раз дифференцируемой по t в области $-\tau_0 \leq t \leq 0$, поскольку этот интервал для любого значения $s \geq 4m^2$ содержится в области аналитичности — большом эллипсе Лемана. Для того чтобы хорошо понять все детали доказательства, рассмотрим дисперсионные соотношения без вычитания и только с правым разрезом, т. е. пусть

$$F(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\text{Im } F(s', t)}{s' - s} ds', \quad (3.10)$$

когда

$$-\tau_0 \leq t \leq 0. \quad (3.11)$$

Согласно Бросу, Эпштейну и Глазеру [30], для любых значений \tilde{s}_0 вне разреза и значения \tilde{t}_0 в области $-\tau_0 \leq \tilde{t}_0 \leq 0$ существуют некоторые окрестности:

$$|s - \tilde{s}_0| < \eta(\tilde{s}_0, \tilde{t}_0); \quad |t - \tilde{t}_0| < \eta(\tilde{s}_0, \tilde{t}_0), \quad (3.12)$$

в которых амплитуда $F(s, t)$ аналитична по двум переменным одновременно.

Выберем вещественную точку $s_0 < 4m^2$ и рассмотрим функцию

$$F(s_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F(s', t)}{s' - s_0} ds', \quad -\tau_0 \leq t \leq 0. \quad (3.13)$$

По Бросу, Эпштейну и Глазеру, существует некоторая окрестность точки $t = 0$, где функция $F(s_0, t)$ представима в виде ряда

$$F(s_0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} F(s_0, t) \Big|_{t=0} t^n, \quad (3.14)$$

причем ряд сходится в области

$$|t| < R(s_0). \quad (3.15)$$

Таким образом, производные $\frac{d^n F(s_0, t)}{dt^n} \Big|_{t=0}$ существуют. Покажем теперь, что при дифференцировании по t соотношения (3.13) в правой части можно перенести дифференцирование под знак интеграла. Рассмотрим выражение

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} \frac{F(s_0, 0) - F(s_0, -\tau)}{\tau} = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F(s', 0) - \operatorname{Im} F(s', -\tau)}{\tau (s' - s_0)} ds', \quad (3.16)$$

правую часть представим в виде

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F(s', 0) - \operatorname{Im} F(s', -\tau)}{\tau (s' - s_0)} ds' = \\ & = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^x \frac{\operatorname{Im} F(s', 0) - \operatorname{Im} F(s', -\tau)}{\tau (s' - s_0)} ds' + \\ & + \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} \frac{1}{\pi} \int_x^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F(s', 0) - \operatorname{Im} F(s', -\tau)}{\tau (s' - s_0)} ds'. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Здесь $x > 4m^2 + \tau$.

В силу выбора x во втором интеграле правой части (3.17) $\operatorname{Im} F(s', 0) > \operatorname{Im} F(s', -\tau)$, а следовательно,

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} \frac{F(s_0, 0) - F(s_0, -\tau)}{\tau} \geq \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} \int_{4m^2}^x \frac{\operatorname{Im} F(s', 0) - \operatorname{Im} F(s', -\tau)}{\tau (s' - s_0)} ds'. \quad (3.18)$$

Мы уже отмечали, что когда τ принадлежит области (3.11), функ-

ция $\text{Im } F$ будет дифференцироваться по t , т. е.

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} \frac{\text{Im } F(s', 0) - \text{Im } F(s', -\tau)}{\tau} = \left. \frac{dF(s', t)}{dt} \right|_{t=0}. \quad (3.19)$$

Так как интегрирование в (3.18) ведется по ограниченной области, то

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^x \frac{\text{Im } F(s', 0) - \text{Im } F(s', -\tau)}{\tau(s' - s_0)} ds' &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^x \left. \frac{d \text{Im } F(s', t)}{s' - s_0} \right|_{t=0} ds'. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Неравенство (3.18) справедливо для любого x и, в частности, для $x \rightarrow \infty$, поскольку левая часть не зависит от x и существует. Отсюда

$$\left. \frac{dF(s_0, t)}{dt} \right|_{t=0} \geq \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \left. \frac{d \text{Im } F(s', t)}{s' - s_0} \right|_{t=0} ds'. \quad (3.21)$$

Учитывая неравенство (3.5), а также теорему Лагранжа

$$\text{Im } F(s', 0) - \text{Im } F(s', -\tau) = \left. \frac{d \text{Im } F(s', t)}{dt} \right|_{t=-\tau_1} \tau, \quad (3.22)$$

где $0 \leq \tau_1 < \tau$, получаем следующее неравенство:

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} \frac{1}{\pi} \int_x^{\infty} \frac{\text{Im } F(s', 0) - \text{Im } F(s', -\tau)}{\tau(s' - s_0)} ds' \leq \frac{1}{\pi} \int_x^{\infty} \left. \frac{d \text{Im } F(s', t)}{s' - s_0} \right|_{t=0} ds'. \quad (3.23)$$

Учитывая (3.23), на основании (3.17) имеем неравенство

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} \frac{F(s_0, 0) - F(s_0, -\tau)}{\tau} &\leq \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^x \frac{\text{Im } F(s', 0) - \text{Im } F(s', t)}{\tau(s' - s_0)} ds' + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_x^{\infty} \left. \frac{d \text{Im } F(s', t)}{s' - s_0} \right|_{t=0} ds', \end{aligned} \quad (3.24)$$

которое при $x \rightarrow 4m^2$ переходит в

$$\left. \frac{dF(s_0, t)}{dt} \right|_{t=0} \leq \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \left. \frac{d \text{Im } F(s', t)}{s' - s_0} \right|_{t=0} ds'. \quad (3.25)$$

Сравнивая неравенства (3.21) и (3.25), имеем

$$\left. \frac{dF(s_0, t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \left. \frac{d \operatorname{Im} F(s', t)}{dt} \right|_{t=0} \frac{ds'}{s' - s_0}. \quad (3.26)$$

Мы доказали возможность дифференцирования под интегралом в точке $t = 0$.

Покажем теперь, что соотношение (3.13) можно дифференцировать под интегралом в любой точке из интервала (3.14). Рассмотрим интеграл

$$J = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d \operatorname{Im} F(s', t)}{dt} \cdot \frac{ds'}{s' - s_0}, \quad -\tau_0 \leq t \leq 0. \quad (3.27)$$

Покажем, что этот интеграл сходится. Для этой цели разобьем область интегрирования на две части: от $4m^2$ до x и от x до ∞ . Первый интеграл будет сходиться в силу ограниченности области интегрирования, второй также будет сходиться, поскольку в силу условия (3.5) он мажорируется интегралом (3.26).

Покажем теперь, что интеграл (3.27) равен производной $dF(s_0, t)/dt$, когда t меняется в пределах (1.11). Рассмотрим

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} \frac{F(s_0, t + \tau) - F(s_0, t)}{\tau} = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F(s', t + \tau) - \operatorname{Im} F(s', t)}{\tau (s' - s_0)} ds'. \quad (3.28)$$

Используя теорему Лагранжа

$$\operatorname{Im} F(s', t + \tau) - \operatorname{Im} F(s', t) = \tau \left. \frac{d \operatorname{Im} F(s', t)}{dt} \right|_{t=\xi}, \quad (3.29)$$

где $t < \xi < t + \tau$, в силу сходимости интеграла (3.27) в (3.28) можно перейти к пределу $\tau \rightarrow 0$ под интегралом, тогда получаем

$$\frac{dF(s_0, t)}{dt} = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d \operatorname{Im} F(s', t)}{dt} \cdot \frac{ds'}{s' - s_0}, \quad -\tau_0 \leq t \leq 0. \quad (3.30)$$

Выражение (3.30) удовлетворяет всем свойствам интегрального представления (3.13), а поэтому оно может быть продифференцировано. Следовательно,

$$\frac{d^n F(s_0, t)}{dt^n} = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d^n \operatorname{Im} F(s', t)}{dt^n} \cdot \frac{ds'}{s' - s_0}, \quad -\tau_0 \leq t \leq 0. \quad (3.31)$$

Аналитическое продолжение по переменным s и t

На основании (3.14) и (3.15) в силу неравенства Коши имеем

$$\left. \frac{d^n F(s_0, t)}{dt^n} \right|_{t=0} \leq \frac{Mn!}{R^n(s_0)}.$$

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d^n \operatorname{Im} F(s', t)}{dt^n} \Big|_{t=0} \frac{ds'}{s' - s_0}. \quad (3.32)$$

Покажем, что он сходится для любого значения s вне разреза. В этом легко убедиться из неравенства

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d^n \operatorname{Im} F(s', t)}{dt^n} \Big|_{t=0} \frac{ds'}{s' - s_0} \right| \leq \mu_0(s_0, s) \frac{d^n F(s_0, t)}{dt^n} \Big|_{t=0}, \quad (3.33)$$

где

$$\mu(s_0, s) = \sup_{4m^2 \leq s' < \infty} \left| \frac{s' - s_0}{s' - s} \right|.$$

Таким образом, интеграл (3.32) можно считать аналитическим продолжением интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d^n \operatorname{Im} F(s', t)}{dt^n} \Big|_{t=0} \frac{ds'}{s' - s_0} \quad (3.34)$$

на все значения s вне разреза.

Повторяя рассуждения, приведенные выше, легко убедиться, что для некоторого интервала вещественных значений $\tilde{s}_0 < s < < 4m^2$ имеет место соотношение

$$\frac{d^n F(s, t)}{dt^n} \Big|_{t=0} = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d^n \operatorname{Im} F(s', t)}{dt^n} \cdot \frac{ds'}{s' - s}, \quad (3.35)$$

где $\tilde{s}_0 < s < 4m^2$. Но так как, согласно (3.33), правая часть соотношения (3.35) аналитически продолжается на все комплексные значения вне разреза, то для любого комплексного значения s имеет место соотношение

$$\frac{d^n F(s, t)}{dt^n} \Big|_{t=0} = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d^n \operatorname{Im} F(s', t)}{dt^n} \Big|_{t=0} \frac{ds'}{s' - s}. \quad (3.36)$$

Рассмотрим ряд

$$F(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n F(s, t)}{dt^n} \Big|_{t=0} t^n. \quad (3.37)$$

На основании (3.36) и неравенства (3.33) имеем

$$\left| \frac{d^n F(s, t)}{dt^n} \Big|_{t=0} \right| \leq \mu(s_0, s) \frac{d^n F(s_0, t)}{dt^n} \Big|_{t=0}. \quad (3.38)$$

С помощью (3.38) ряд (3.37) мажорируется следующим образом:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n F(s, t)}{dt^n} \Big|_{t=0} t^n \right| \leq \mu(s_0, s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left| \frac{d^n F(s, t)}{dt^n} \Big|_{t=0} \right| |t|^n. \quad (3.39)$$

Так как ряд в правой части неравенства (3.39) сходится в области (3.15), то функция $F(s, t)$ будет аналитической по t в этой области для любого значения s вне разреза. С другой стороны, для любого фиксированного t из области $|t| < R(s_0)$ ряд (3.36) представляет аналитическую функцию по s вне разреза.

В силу теоремы Гартогса [31], гласящей: если функция $f(z_1 \dots z_n)$ аналитична по каждой переменной при фиксированных остальных, то она аналитична и по совокупности переменных, находим, что функция $F(s, t)$ является аналитической по двум переменным s и t в области $|t| < R(s_0)$ и s вне разреза.

Выше был изложен метод аналитического продолжения по t , когда дисперсионные соотношения имеют только правый разрез. Перейдем теперь к реальному случаю, когда амплитуда рассеяния имеет наряду с правым и левый разрез. По-прежнему будем рассматривать дисперсионные соотношения без вычитаний:

$$\left. \begin{aligned} F(s, t, u) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_s(s', t)}{s' - s} ds' + \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_u(u', t)}{u' - u} du'; \\ s + t + u = 4m^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

Функции A_s и A_u удовлетворяют свойству положительности:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^n A_s(s, t)}{dt^n} \Big|_{t=0} \geq 0; \quad \frac{d^n A_u(u, t)}{dt^n} \Big|_{t=0} \geq 0; \\ s, u \geq 4m^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

Для того чтобы эффективно воспользоваться свойством положительности, введем функцию

$$\Phi(s_0, t) = \frac{F(s_0, t)}{s_0 - t}, \quad (3.42)$$

где

$$t < s_0 < 4m^2.$$

Используя (3.40), получаем

$$\Phi(s_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} A_s(s', t) g(s', t) ds' + \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} A_u(u', t) h(u', t) du'. \quad (3.43)$$

Здесь

$$g(s, t) = \frac{1}{(s - s_0)(s_0 - t)}; \quad h(u, t) = \frac{1}{(u - 4m^2 + s_0) s_0 - t (u - 4m^2) - t^2}. \quad (3.44)$$

Легко убедиться, что

$$\left. \frac{d^n g(s, t)}{dt^n} \right|_{t=0} > 0; \quad \left. \frac{d^n h(a, t)}{dt^n} \right|_{t=0} > 0. \quad (3.45)$$

Повторяя рассуждения, приведенные выше, можно показать, что выражение (3.43) можно дифференцировать под интегралом:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^n}{dt^n} \Phi(s, t) \right|_{t=0} &= \sum_{p=0}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d^p A_s(s', 0)}{dt^p} \cdot \frac{d^{n-p} g(s', 0)}{dt^{n-p}} ds' + \\ &+ \sum_{p=0}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d^p A_u(u', 0)}{dt^p} \frac{d^{n-p} h(u', 0)}{dt^{n-p}} du'. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Так как, согласно (3.41) и (3.45), все члены в (3.46) положительны, имеем неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} A_s(s', 0) g(s', 0) ds' + \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} A_u(u', 0) h(u', 0) du' &\leq \\ &\leq \left. \frac{d^n}{dt^n} \Phi(s_0, t) \right|_{t=0}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Согласно Бросу, Эпштейну и Гладеру, функция $\Phi(s_0, t)$ будет аналитической по t в некотором круге радиуса $R(s_0)$. Тогда в силу неравенства Коши имеем

$$\left. \frac{d^n}{dt^n} \Phi(s_0, t) \right|_{t=0} \leq \frac{n!}{R^n} \frac{\max |F(s_0, t)|}{s_0 - R} \Big|_{|t|=R}. \quad (3.48)$$

На основании (3.47) и (3.48) имеем:

$$\frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} A_s(s', 0) \frac{ds'}{s' - s_0} \leq \frac{n! M}{R^n} \cdot \frac{s_0}{s_0 - R}; \quad (3.49)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} A_u(u', 0) \frac{du}{u' - m^2 + s_0} \leq \frac{n! M}{R^n} \cdot \frac{s_0}{s_0 - R}. \quad (3.50)$$

Проведенное рассмотрение дало возможность получить верхнюю оценку на интегралы (3.49) и (3.50) через одно и то же значение R .

Рассмотрим интегралы следующего вида:

$$F_s(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_s(s', t)}{s' - s} ds'; \quad (3.51)$$

$$F_u(u, t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_u(u', t)}{u' - u} du'. \quad (3.52)$$

Повторяя для (3.51) и (3.52) все рассуждения, приведенные выше, и учитывая неравенства (3.49) и (3.50), находим:

$$\left. \frac{d^n F_s(s, t)}{dt^n} \right|_{t=0} \leq \mu(s, s_0) \frac{n! M}{R^n} \cdot \frac{s_0}{s_0 - R}; \quad (3.53)$$

$$\left. \frac{d^n F_u(u, t)}{dt^n} \right|_{t=0} \leq \mu(u, u_0) \frac{n! M}{R^n} \cdot \frac{s_0}{s_0 - R} \quad (3.54)$$

для любого комплексного значения s и u соответственно. Отсюда следует, что функции $F_s(s, t)$ и $F_u(u, t)$ будут аналитическими по t в круге $|t| < R(s_0)$ для любого комплексного значения s и u соответственно. Используя, как и ранее, теорему Гартогса, находим, что амплитуда $F(s, t)$ будет аналитической функцией по двум переменным в области:

$$|t| < R(s_0) \text{ и } s \text{ вне разреза.} \quad (3.55)$$

Наличие возможных вычитаний в дисперсионных соотношениях не изменит полученных результатов [13].

Нахождение области аналитичности по переданному импульсу t

Следуя работам [14], найдем величину $R(s_0)$, определяющую радиус круга аналитичности в t -плоскости. Введем функцию

$$\varphi_\beta(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\beta} \frac{A_s(s', t)}{s' - s} ds'. \quad (3.56)$$

Так как $A_s(s', t)$ аналитична по t в большом эллипсе Лемана $E_L(s')$, то функция $\varphi_\beta(s, t)$ будет аналитической по двум переменным в области: s вне разреза $4m^2 \leq s \leq \beta$, а

$$t \in \bigcap_{4m^2 \leq s \leq \beta} E_L(s) = I. \quad (3.57)$$

Мы предположим, что функция $\varphi_\beta(s, t)$ будет аналитической по t в области I и для вещественных значений s из интервала $4m^2 < s < \beta$. Это следует из того факта, что первая производная по s' от $(\partial/\partial t)^n A_s(s, t)$ существует, и

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\beta(s + i\varepsilon, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n \varphi_\beta(s + i\varepsilon, t)$$

для любого $s \in [4m^2, \beta]$ и $t \in I$.

Введем функцию

$$F_\beta(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{\beta}^{\infty} ds' \frac{A_s(s', t)}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_u(u', t)}{u' - u} du'. \quad (3.58)$$

Легко видеть, что

$$F_{\beta}(s, t) = F(s, t) - \varphi_{\beta}(s, t). \quad (3.59)$$

Как мы уже знаем, амплитуда $F(s, t)$ аналитична по t в эллипсе Лемана $\varepsilon_L(s)$ для физических значений s .

На основании (3.59) заключаем, что функция $F_{\beta}(s, t)$ для s в интервале $4m^2 < s < \beta$ будет аналитической по t в области:

$$D = \varepsilon_L(\bar{s}) \cap I, \quad (3.60)$$

\bar{s} принадлежит интервалу $4m^2 < \bar{s} < \beta$. Заметим, что эта область содержит точку $t = 0$, поэтому ряд

$$F_{\beta}(\bar{s}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial t^n} F_{\beta}(\bar{s}, 0) t^n \quad (3.61)$$

будет сходиться в некотором круге $R(\bar{s}, \beta)$, содержащемся в области D . Повторяя рассуждения, приведенные выше, найдем, что функция $F_{\beta}(s, t)$ будет аналитической по двум переменным в области:

$$|t| < R(\bar{s}, \beta) \text{ и } s \text{ вне разреза.} \quad (3.62)$$

Учитывая аналитические свойства функции $\varphi_{\beta}(s, t)$, определенные в (3.57), заключаем, что амплитуда $F(s, t)$ будет аналитической по двум переменным в области (3.62). Найдем теперь $R(\bar{s}, \beta)$. Заметим, что круг с центром в точке $t = 0$ и радиусом

$$r_L(s) = 4p^2 [x_0^2(s) - 1] \quad (3.63)$$

содержится в большом эллипсе Лемана. Поскольку на основании (2.10) $r_L(s)$ — убывающая функция s , то минимальный круг, содержащийся в L , будет иметь радиус $r_L(\beta)$. В эллипсе Лемана $\varepsilon_L(s)$ содержится круг с центром в $t = 0$ и радиусом $r(s)$:

$$r(s) = 2p^2 (x_0^2(s) - 1). \quad (3.64)$$

На основании (3.60) имеем

$$|t| < \min [r(\bar{s}), r_L(\beta)] \equiv R(\bar{s}, \beta). \quad (3.65)$$

Выбирая \bar{s} сколь угодно близко к β , получаем

$$r_{\beta} < r_L(\beta), \quad (3.66)$$

а следовательно, вместо (3.65) будем иметь неравенство

$$|t| < r(\beta). \quad (3.67)$$

Но так как β можно выбрать произвольно, то

$$R(\bar{s}, \beta) = \max_{4m^2 \leq \beta \leq \infty} r(\beta) \quad (3.68)$$

для случая лл-рассеяния $m_1 = m_2 = 3m_{\pi}$. Максимум функции $r(\beta)$ будет достигаться в точке $\beta = 8m_{\pi}^2$ и равен $R(\bar{s}, \beta) = 4m_{\pi}^2$.

**Аналитические свойства
амплитуды рассеяния по $\cos \theta = z$
при физических значениях s**

Рассмотрим ряд

$$F_s(s_0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot \left. \frac{d^n F_s(s_0, t)}{dt^n} \right|_{t=0}. \quad (3.69)$$

На основании (3.53) этот ряд сходится в области

$$|t| < R(s_0). \quad (3.70)$$

Возьмем положительное $t = \tau$ сколь угодно близко к $R(s_0)$, тогда, используя равенство (3.36), получим

$$F_s(s_0, t = \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s_0} \cdot \left. \frac{d^n A(s', t)}{dt^n} \right|_{t=0}. \quad (3.71)$$

Так как функция

$$\frac{t^n}{n!} \cdot \frac{d^n A(s', 0)}{dt^n} \cdot \frac{1}{s' - s_0} \geq 0, \quad (3.72)$$

то на основании теоремы Фубини — Лебега [31, 32] в (3.71) можно переставить знаки суммирования и интегрирования:

$$F_s(s_0, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \cdot \left. \frac{d^n A_s(s', t)}{dt^n} \right|_{t=0}. \quad (3.73)$$

В силу сходимости ряда в (3.73) заключаем, что функция

$$A_s(s_0, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \cdot \left. \frac{d^n A_s(s, t)}{dt^n} \right|_{t=0} \quad (3.74)$$

будет аналитической по t в области $|t| < R(s_0)$, для любого вещественного значения

$$s \geq 4m^2. \quad (3.75)$$

Функция $A_s(s, t)$ может быть разложена в ряд:

$$A_s(s, t) = \frac{8\pi \sqrt{s}}{|p|} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \operatorname{Im} f_l(s) P_l \left(1 + \frac{t}{2p^2} \right). \quad (3.76)$$

Так как коэффициенты ряда (3.76) на основании условия унитарности положительны, то этот ряд будет абсолютно и равномерно сходиться внутри эллипса с фокусами в точках ± 1 и большой полуосью:

$$z_0(s) = 1 + \frac{R(s_0)}{2p^2}. \quad (3.77)$$

Этот эллипс будем называть большим эллипсом Мартена.

В случае равных масс для больших значений s имеем

$$z_0(s) = 1 + \frac{8m^2\pi}{s}. \quad (3.78)$$

Найдем область аналитичности по $\cos \theta$ амплитуды рассеяния $F(s, t)$. Для этой цели разложим ее в ряд по полиномам Лежандра:

$$F(s, t) = \frac{8\pi \sqrt{s}}{|p|} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(s) P_l(\cos \theta). \quad (3.79)$$

На основании оценок парциальных амплитуд, которые будут получены позднее [неравенства (3.106) и (3.117)], и условия унитарности следует, что ряд (3.79) сходится в эллипсе с фокусами в точках ± 1 и большой полуосью:

$$z(s) = \sqrt{\frac{z_0(s)+1}{2}}. \quad (3.80)$$

Этот эллипс будем называть эллипсом Мартена. Таким образом, амплитуда $F(s, t)$ будет аналитична по $\cos \theta$ в эллипсе Мартена для любых физических значений $s \geq 4m^2$.

Степень роста амплитуды упругого процесса [33, 34]

Пусть амплитуда возрастает по s не быстрее полинома n степени. Тогда в силу аналитичности по s она удовлетворяет дисперсионному соотношению вида

$$F(s, t) = \sum_{r=0}^n C_r(t) s^r + \frac{s^{n+1}}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_s(s', t) ds'}{(s')^{n+1} (s' - s)} + \frac{u^{n+1}}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_u(u', t) du'}{(u')^{n+1} (u' - u)} \quad (3.81)$$

для $|t| \leq 4m^2$.

Заметим, что для $t = 0$ амплитуда $F(s, 0)$ удовлетворяет для физических значений s неравенству Фруассара [13, 15]

$$|F(s, 0)| \leq \text{const } s \ln^2 s. \quad (3.82)$$

Покажем сначала, что для t из круга $|t| \leq t_1 < 4m^2$ дисперсионные соотношения (3.81) можно записать с двумя вычитаниями. Для этой цели в эллипсе Мартена проведем разрез вдоль отрезка $-1 \leq z \leq 1$ и посредством конформного отображения

$$\xi = z + \sqrt{z^2 - 1} \quad (3.83)$$

преобразуем эллипс в кольцо, составленное из двух концентрических окружностей с центрами в точке $\xi = 0$ и радиусами 1 и $\rho = z(s) + \sqrt{z^2(s) - 1}$. Здесь $z(s)$ — большая полуось эллипса Мартена.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} m &= \max_{|\xi|=1} |F(s, \xi)| \leq \text{const } s^{1+\delta}; \\ M &= \max_{|\xi|=\rho} |F(s, \xi)| \leq \text{const } s^n, \end{aligned} \tag{3.84}$$

где δ — сколь угодно малое положительное число.

Из теоремы Адамара о трех кругах следует, что

$$\ln |F(s, z)| \leq \left[\left(1 - \frac{\ln r}{\ln \rho}\right) (1 + \delta) + \frac{\ln r}{\ln \rho} n \right] \ln s, \tag{3.85}$$

$$\text{где } r = |z + \sqrt{z^2 - 1}|. \tag{3.86}$$

Из неравенства (3.85) следует, что для тех z , при которых справедливо неравенство

$$\ln r < \frac{1 - \delta - \varepsilon}{n - 1 - \delta} \ln \rho, \tag{3.87}$$

амплитуда рассеяния удовлетворяет условию

$$|F(s, z)| \leq \text{const } s^{2-\varepsilon}. \tag{3.88}$$

Неравенство (3.87) заведомо будет выполнено, если r выбрать следующим образом:

$$\ln r < \frac{1}{2n} \ln \rho. \tag{3.89}$$

Вспомнив связь r с переменной z и перейдя от z к t , получим, что при всех t из круга

$$|t| \leq t_1 = \frac{m^2}{n^2} \tag{3.90}$$

амплитуда $F(s, t)$ удовлетворяет неравенству (3.88). Тогда в интервале $|t| \leq t_1$ можно написать дисперсионные соотношения с двумя вычитаниями:

$$F(s, t) = \alpha(t) + s \beta(t) + \frac{s^2}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_s(s', t) ds'}{s'^2 (s' - s)} + \frac{u^2}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_u(u', t) du'}{u'^2 (u' - u)}. \tag{3.91}$$

Выражения (3.81) и (3.91) совпадают в области $|t| \leq t_1$.

Используя тождество

$$\frac{s^2}{(s')^2 (s' - s)} = \frac{s^2}{s'^3} + \dots + \frac{s^n}{(s')^{n+1}} + \frac{s^{n+1}}{(s')^{n+1}} \cdot \frac{1}{s' - s},$$

получаем для $0 \leq t \leq t_1$

$$\begin{aligned} \alpha(t) + s \beta(t) + \sum_{r=2}^n \left[\frac{s^r}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_s(s', t) ds'}{(s')^{r+1}} + \frac{u^r}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_u(u', t) du'}{(u')^{r+1}} \right] = \\ = \sum_{r=0}^n C_r(t) s^r. \end{aligned} \tag{3.92}$$

Пусть n — четное число, тогда

$$C_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_s(s', t)}{(s')^{n+1}} ds' + \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_u(u', t)}{(u')^{n+1}} du'. \quad (3.93)$$

Функция $C_n(t)$ аналитична в круге $|t| \leq 4m^2$. Это обстоятельство наводит на мысль, что интегралы в правой части (3.93) сходятся при всех $|t| \leq 4m^2$, а если это так, то дисперсионное соотношение для амплитуды рассеяния можно написать уже с n вычитаниями и т. д.

Из условия унитарности (3.41), (3.74) известно, что:

$$A_s(s', t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_s^{(n)}(s') t^n; \quad (3.94)$$

$$A_u(u', t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_u^{(n)}(u') t^n; \quad (3.95)$$

$$A_s^{(n)}(s') \text{ и } A_u^{(n)}(u') > 0. \quad (3.96)$$

Так как правая часть (3.93) сходится для $t \leq t_1$, то, меняя порядок интегрирования и суммирования, получаем

$$C_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_s^{(n)}(s') ds'}{(s')^{n+1}} + \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_u^{(n)}(u') du'}{(u')^{n+1}} \right\}. \quad (3.97)$$

Ряд (3.97) получили для $t \leq t_1$, однако в силу положительности коэффициентов в этом разложении, а также в силу аналитичности $C_n(t)$ в точке $t = 4m^2$ он сходится для всех $|t| \leq 4m^2$. Это означает, что можно вновь изменить порядок интегрирования и суммирования и получить формулу (3.93) для всех $|t| \leq 4m^2$. Итак, сходимость интегралов в (3.93) установлена.

При нечетных n аналитическое продолжение интеграла (3.93) в круг $|t| \leq 4m^2$ проводится аналогично. Повторив этот процесс много раз, покажем, что и интегралы

$$\int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_s(s', t)}{s'^3} ds'; \quad \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_u(u', t)}{u'^3} du' \quad (3.98)$$

абсолютно сходятся для всех $t < 4m^2$, а следовательно, для функции $F(s, t)$ можно написать дисперсионные соотношения с двумя вычитаниями во всей области $|t| < 4m^2$.

Поведение амплитуды парциальных волн с ростом момента l [16]

Мнимая часть амплитуды рассеяния аналитична по z в большом эллипсе Мартена. На основании теоремы Коши имеем

$$\operatorname{Im} F(s, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial E} \frac{\operatorname{Im} F(s', z')}{z' - z} dz', \quad z \in E. \quad (3.99)$$

Используя разложение

$$\frac{1}{z'-z} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(z) Q_l(z), \quad (3.100)$$

а также выражение

$$\operatorname{Im} f_l(s) = \frac{|\mathbf{p}|}{16\pi \sqrt{s}} \int_{-1}^1 \operatorname{Im} F(s, z) P_l(z) dz, \quad (3.101)$$

получаем

$$\operatorname{Im} f_l(s) = \frac{|\mathbf{p}|}{8\pi \sqrt{s}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial E} \operatorname{Im} F(s', z') Q_l(z') dz'. \quad (3.102)$$

Из выражения (3.102) можно найти оценку на величину $\operatorname{Im} f_l(s)$:

$$\operatorname{Im} f_l(s) \leq \frac{|\mathbf{p}|}{16\pi^2 \sqrt{s}} |\operatorname{Im} F(s, z)|_{\max} |Q_l(z)|_{\max} L, \quad (3.103)$$

максимум берется на эллипсе ∂E , где L — длина эллипса.

Учитывая полиномиальную ограниченность функции $\operatorname{Im} F(s, z)$ по s , т. е.

$$|\operatorname{Im} F(s, z)| \leq R(s), \quad z \in \partial E \cup E, \quad (3.104)$$

а также неравенство для Q_l (2.45) и

$$L < 2 [z_0(s) + \sqrt{z_0^2(s) - 1}], \quad (3.105)$$

здесь $z_0(s)$ — большая полуось большого эллипса Мартена, находим

$$\operatorname{Im} f_l(s) \leq \frac{R(s)}{\sqrt{l}} [z_0(s) + \sqrt{z_0^2(s) - 1}]^{-l}, \quad (3.106)$$

где $R(s)$ — некоторый полином по s .

В случае равных масс для больших s

$$z_0(s) = 1 + \frac{8m^2\pi}{s}, \quad (3.107)$$

отсюда

$$\operatorname{Im} f_l(s) \leq \frac{R(s)}{\sqrt{l}} \exp \left[-l \frac{4m\pi}{\sqrt{s}} \right]. \quad (3.108)$$

Поскольку амплитуда $F(s, z)$ аналитична в эллипсе Мартена, большая полуось его в области больших s будет

$$z(s) = 1 + \frac{2m^2\pi}{s}. \quad (3.109)$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получаем

$$|f_l(s)| \leq \frac{R(s)}{\sqrt{l}} \exp \left[-l \frac{2m\pi}{\sqrt{s}} \right]. \quad (3.110)$$

Аналитические свойства дифференциального сечения процесса множественного рождения по $\cos \theta$

Покажем теперь, что условие унитарности дает возможность расширить область аналитичности по $\cos \theta$ не только для амплитуды упругого процесса $a + b \rightarrow a + b$, но и для дифференциального сечения любого неупругого процесса:

$$a + b \rightarrow c + d + A_j, \quad (\text{VI})$$

где A_j — совокупность адронов.

На основании (2.54) имеем

$$\frac{d\sigma_{\text{inel}}^{j, cd}}{d\cos\theta} = \frac{2\pi}{|\mathbf{p}_a|^2} \sum_{l, l'} \sum_m (2l+1)(2l'+1) d_{m,0}^l(\theta) d_{m,0}^{l'}(\theta) \int d\Gamma T_l^m T_{l'}^{*m}. \quad (3.111)$$

Произведение функций $d_{m,0}^l(\theta) d_{m,0}^{l'}(\theta)$ является аналитической функцией комплексной переменной $z = \cos \theta$.

Для дальнейших рассуждений необходимо получить оценку на поведение функции $d_{m,0}^l(\theta)$ комплексных значений θ [35]. Для этой цели воспользуемся теоремой сложения

$$d_{\lambda, \mu}^l(\theta_1 + i\theta_2) = \sum_{\nu=-l}^l d_{\lambda\nu}^l \left[\frac{1}{2}(\theta_1 + i\theta_2) \right] d_{\nu\mu}^l \left[\frac{1}{2}(\theta_1 + i\theta_2) \right]. \quad (3.112)$$

Используя неравенство Буняковского — Шварца, находим

$$|d_{\lambda\mu}^l(\theta)|^2 \leq \sum_{\nu=-l}^l \left| d_{\lambda\nu}^l \left(\frac{\theta}{2} \right) \right|^2 \sum_{\nu=-l}^l \left| d_{\nu\mu}^l \left(\frac{\theta}{2} \right) \right|^2. \quad (3.113)$$

Но так как

$$d_{\lambda\mu}^{*l}(\theta) = d_{\mu\lambda}^l(-\theta^*), \quad (3.114)$$

то неравенство (3.113) можно записать, используя формулу сложения (3.113), в следующем виде:

$$|d_{\lambda\mu}^l(\theta_1 + i\theta_2)|^2 \leq d_{\lambda\lambda}^l(i \operatorname{Im} \theta) d_{\mu\mu}^l(i \operatorname{Im} \theta). \quad (3.115)$$

Для функции $d_{\lambda\lambda}^l(i \operatorname{Im} \theta)$ существует следующее неравенство:

$$d_{\lambda\lambda}^l(i \operatorname{Im} \theta) \leq P_l(\operatorname{ch} \operatorname{Im} \theta). \quad (3.116)$$

Для функции $P_l(\operatorname{ch} \operatorname{Im} \theta)$ справедливо неравенство [22]

$$|P_l(u)| \leq |u + \sqrt{u^2 - 1}|^l, \quad (3.117)$$

которое имеет место для всех значений u .

С помощью неравенств (3.116) и (3.117) найдем

$$|d_{\lambda\mu}^l(\theta_1 + i\theta_2)| \leq [\operatorname{ch} \operatorname{Im} \theta + \sqrt{(\operatorname{ch} \operatorname{Im} \theta)^2 - 1}]^l. \quad (3.118)$$

Заметим, что при изменении θ_1 и фиксированном значении $\operatorname{Im} \theta$ в плоскости $\cos \theta$ будем пробегать эллипс с фокусами в точках ± 1 и большей полуосью $x = \operatorname{ch} \operatorname{Im} \theta$. Запишем (3.111) в виде

$$\frac{d\sigma_{\text{inel}}^{j, cd}}{d \cos \theta} = \frac{2\pi}{|\mathbf{p}_a|^2} \sum_{l, l'} (2l+1)(2l'+1) \Phi_{ll'}(\cos \theta), \quad (3.119)$$

где

$$\Phi_{l, l'}(\cos \theta) = \sum_{m=-\min(l, l')}^{\min(l, l')} d_{m, 0}^l(\theta) d_{m, 0}^{l'}(\theta) d\Gamma T_l^m(s, \xi_i) T_{l'}^{*m}(s, \xi_i). \quad (3.120)$$

Используя неравенство Буняковского — Шварца, а также неравенства (3.115) и (3.116), находим

$$|\Phi_{ll'}| \leq P_l(\operatorname{ch} \operatorname{Im} \theta) P_{l'}(\operatorname{ch} \operatorname{Im} \theta) \left[\sum_{m=l}^l |d\Gamma |T_l^m|^2 \right]^{1/2} \times \\ \times \left[\sum_{m=-l'}^{l'} \int d\Gamma |T_{l'}^m|^2 \right]^{1/2}. \quad (3.121)$$

Согласно условию унитарности,

$$\operatorname{Im} f_l(s) \geq \sum_{m=-l}^l \int d\Gamma |T_l^m(s, \xi_i)|^2, \quad (3.122)$$

поэтому

$$|\Phi_{ll'}| \leq P_l(\operatorname{ch} \operatorname{Im} \theta) P_{l'}(\operatorname{ch} \operatorname{Im} \theta) [\operatorname{Im} f_l(s)]^{1/2} [\operatorname{Im} f_{l'}(s)]^{1/2}. \quad (3.123)$$

Учитывая неравенство (3.117) и (3.106), получаем

$$|\Phi_{ll'}| \leq R(s) \frac{[x + \sqrt{x^2 - 1}]^{l+l'}}{[z_0(s') + \sqrt{z_0^2(s') - 1}]^{\frac{1}{2}(l+l')}}. \quad (3.124)$$

Подставляя (3.124) в (3.119), находим мажорирующий ряд:

$$\frac{d\sigma_{\text{inel}}^{j, cd}}{d \cos \theta} = \frac{2\pi}{|\mathbf{p}_a|^2} \sum_{l, l'} (2l+1)(2l'+1) |\Phi_{ll'}| \leq \\ \leq \frac{2\pi R(s)}{|\mathbf{p}_a|^2} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left[\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1}} \right]^l \right\}^2. \quad (3.125)$$

Ряд в правой части неравенства (3.125) сходится абсолютно и равномерно, если

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{[z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1}]^{1/2}} < 1. \quad (3.126)$$

Таким образом, функция (3.119) будет аналитической по $\cos \theta$ в эллипсе с большой полуосью $x(s)$, определяемой из неравенства (3.126) и равной:

$$x(s) = \sqrt{\frac{z_0(s)+1}{2}}, \quad (3.127)$$

т. е. дифференциальное сечение процесса множественного рождения является аналитической функцией по $\cos \theta$ для любых физических значений s , в эллипсе с фокусами в точках ± 1 и большой полуосью $x(s)$.

Для больших s в случае, когда сталкиваются частицы равных масс, имеем

$$x(s) = 1 + \frac{2m_\pi^2}{s}, \quad (3.128)$$

т. е. возможная наименьшая масса частиц обмена в t -канале реакции не зависит от энергии и равна массе π -мезона, т. е.

$$t = m_\pi^2. \quad (3.129)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 1955, 19, 237.
2. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей. М., Гостехиздат, 1957.
3. Боголюбов Н. Н. Доклад на Международном конгрессе по теоретической физике в Сиеттле, сентябрь 1956. Не опубликовано.
4. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., Физматгиз, 1958.
5. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. М., ОГИЗ, 1941.
6. Logunov A. A., Mestvirishvili M. A., Nguyen Van Hieu. Phys. Lett., 1967, 25B, 617.
7. Ежела В. В., Логунов А. А., Мествиришвили М. А. ТМФ, 1971, 6, 42.
8. Lehman H. Nuovo cimento, 1958, 10, 579.
9. Ascoli R., Minguzzi A. Phys. Rev., 1960, 118, 1435.
10. Логунов А. А., Мествиришвили М. А., Нгуен Ван Хьеу. Препринт ИФВЭ СТФ 67-49-К, Серпухов, 1967.
11. Ascoli R. Nuovo cimento, 1960, 18, 754.
12. Jin Y., Martin A. Phys. Rev., 1964, 135, 1364.
13. Martin A. Nuovo cimento, 1966, 42, 930; 1966, 44, 1219.
Martin A. Материалы Международного семинара по аналитическим свойствам амплитуды рассеяния, 9—12 июня 1969 г. Препринт ИФВЭ СТФ 69-101, 1969, стр. 4.
14. Sommer G. Nuovo cimento, 1967, 48, 92; 1967, 52, 373; 1967, 52, 850; 1967, 52, 866. Sommer G. Материалы Международного семинара по аналитическим свойствам амплитуды рассеяния, 9—12 июня 1969 г. Препринт ИФВЭ СТФ 69-101, 1969, стр. 47.
15. Froissart M. Phys. Rev., 1961, 123, 1053.
16. Grinberg O. Z. and Low F. E. Phys. Rev., 1961, 123, 2047.
17. Померанчук И. Я. ЖЭТФ, 1958, 34, 725.
18. Khuri N. N., Kinoshita T. Phys. Rev., 1965, 137, 720.

19. Amati D., Fierz M., Glaser V. Phys., Lett., 1961, 4, 89.
20. Sugawara M., Kanazawa A. Phys. Rev., 1961, 123, 1995.
21. Мейман Н. Н. ЖЭТФ, 1962, 43, 2277.
22. Логунов А. А., Нгуен Ван Хъеу, Тодоров И. Т. УФН, 1966, 88, 51.
23. Волков Г. Г., Логунов А. А., Мествиришвили М. А. ТМФ, 1970, 4, 196.
24. Kinoshita T., Leoffel J. J. and Martin A. Phys. Rev., 1964, 135, 1464.
Ежеда В. В., Строганов Ю. Г. Препринт ИФВЭ СТФ 70-18, Серпухов, 1970.
Ежеда В. В., Мествиришвили М. А. Препринт ИФВЭ СТФ 70-42, Серпухов, 1970.
25. Логунов А. А. и др. Препринт ИФВЭ СТФ 68-54-К. Серпухов, 1968. Nucl. Phys., 1969, 10B, 692.
26. Dyson F. J. Phys. Rev., 1958, 110, 1460.
27. Jost R. and Lehman H. Nuovo cimento, 1957, 5, 1598.
27. Челен Г. Физика элементарных частиц. Перев. с англ. М., «Наука», 1966.
28. Bessis J. D., Glaser V. Nuovo cimento, 1967, 50, 568.
29. Гобсон Е. Теория сферических и эллипсоидальных функций. Перев. с англ., М., Изд-во иностр. лит., 1952.
30. Bros J., Epstein H. and Glaser V. Nuovo cimento, 1965, 31, 1265; Commun. Math. Phys., 1965, 1, 240.
31. Владимиров В. С. Методы теории функции многих комплексных переменных. М., «Наука», 1964.
32. Шварц Л. Математические методы для физических наук. М., «Мир», 1965.
33. Jin Y., Martin A. Phys. Rev., 1964, 135, 1375.
34. Логунов А. А., Нгуен Ван Хъеу, Хрусталева О. А. Проблемы теоретической физики. Сборник, посвященный Н. Н. Боголюбову в связи с его 60-летием. М., «Наука», 1969.
35. Mahoux G., Martin A. Phys. Rev., 1968, 174, 2140.
36. Логунов А. А., Нгуен Ван Хъеу. ТМФ, 1969, 1, 375.
37. Tiktououlos G., Treiman S. B. Phys. Rev., 1968, 167, 1408.
Epstein H. Topical Conference on High Energy Collisions of Hadrons CERN V. 1, Geneva, 1968, p. 290.
38. Singh V., Roy S. N. Ann. of Phys., 1970, 57, 461.
39. Логунов А. А., Нгуен Ван Хъеу. Международная школа по физике высоких энергий, Попрадске Плесо, Чехословакия, 1967.
40. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., «Наука», 1965.
41. Gunson J. J. Math. Phys., 1965, 6, 827.
Andrews M., Gunson J. J. Math. Phys., 1964, 5, 1391.
42. Ежеда В. В. Препринт ИФВЭ СТФ 70-39, Серпухов, 1970.
43. Грибов В. Н. ЖЭТФ, 1962, 41, 1962.
44. Kinoshita T. Phys. Rev., 1967, 154, 1438.
45. Khuri N. N. Rigorous Properties of Amplitudes at High Energies, Summer School in Elementary Particle Physics, Brookhaven National Laboratory, July 22 — August 29, 1969.