ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
1972, том 3, вып. 1
УДК 539. 126.4

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ (КВАРКОВ)

П. Н. Боголюбов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В статье рассмотрены различные варианты кварковых моделей, основанные на соответствующих уравнениях для связанных состояний. Полученные результаты, касающиеся внутренних свойств элементарных частиц, имеют хорошее согласие с экспериментом. Показана также связь кварковых моделей с методом когерентных состояний для высокоэнергетического рассеяния.

A few variants of the quark models, based on the corresponding equations for the bound states, are considered. The results of these models for the internal properties of the elementary particles are in good agreement with experiment.

There is shown also the connection between the quark models and the coherent state method for the high energy scattering.

Введение

Проблема построения систематики элементарных частиц, которая становится все более актуальной в связи с быстрым ростом числа частиц и резонансов с весьма разнообразными свойствами, приводит к необходимости ограничивать в теоретических исследованиях число фундаментальных частиц. Наиболее радикальным методом такого ограничения является применение составных моделей, приводящее к определенным успехам не только в систематизации, но и в построении динамики элементарных частиц.

Основная идея составных моделей, заключающаяся в том, что элементарные частицы представляются как связанные состояния других известных или не открытых еще частиц, не нова. Еще в 1949 г. Ферми и Янг [1] предположили, что π-мезоны могут быть связанными состояниями нуклона и антинуклона. Впоследствии, когда было окончательно экспериментально установлено наличие частиц с неравной нулю странностью, возникла необходимость их классификации и появились модели, включающие странные частицы в рассмотрение, например модель, в которой элементарные частицы представлялись как связанные состояния нуклонов, Λ-частиц и их античастиц. Подобные модели рассматривались в работах М. А. Маркова, С. Саката [2] и других авторов.

Естественным развитием этой модели является кварковая модель, предложенная Цвейгом и Гелл-Манном в 1964 г., в которой в роли фундаментальных частиц вместо реально существующих P-, N- и Λ-частиц выступают гипотетические p-, n- и λ-кварки. В этой модели мезоны представляются как связанные состояния кварка и антикварка, а барионы как связанные состояния трех кварков, причем масса кварков считается очень большой (порядка 10 *Гэв*). В связи с этим предполагается, что в таких системах кварков существует очень сильное взаимодействие, которое и компенсирует большую свободную массу кварков. Например, эффективная масса мезона в такой модели составляет менее 1% суммарной свободной массы двух кварков. При такой величине свободной массы кварков их магнитные моменты малы и из них нельзя составить магнитные моменты известных частиц. Существует и другая трудность в кварковых моделях, состоящая в том, что для получения правильных результатов необходимо помещать три кварка с одинаковым спином на один энергетический уровень, т. е. волновая функция системы трех кварков должна быть симметричной.

В работах сотрудников Лаборатории теоретической физики ОИЯИ были указаны возможности преодоления этих трудностей. Так, в работах Н. Н. Боголюбова, Б. В. Струминского и А. Н. Тавхелидзе [3] был выяснен механизм увеличения эффективного магнитного момента кварка и получены магнитные моменты известных барионов. Оказалось необходимым ввести существенное различие между очень большой свободной массой кварка и его эффективной массой, которая для кварка в барионе порядка $M_b/3$, а в мезоне $M_m/2$. В этих работах также было устранено противоречие с принципом Паули введением дополнительного квантового числа, и в результате стало возможно рассматривать кварки с целочисленными зарядами.

Рассмотрим различные варианты кварковых моделей, основываясь на соответствующих уравнениях для связанных состояний.

1. МОДЕЛЬ КВАЗИНЕЗАВИСИМЫХ КВАРКОВ

Общее обсуждение модели

Одной из простых кварковых моделей барионов, которая, несмотря на простоту, дает хорошее согласие с экспериментальными данными, является модель квазинезависимых кварков [4], до известной степени сходная с оболочечной моделью атомного ядра. Вместо того чтобы рассматривать задачу о связанных состояниях системы трех кварков, находящихся в интенсивном взаимодействии друг с другом, будем рассматривать, как и в оболочечной модели ядра, кварки в барионе как независимые частицы, движущиеся в некотором «усредненном» или самосогласованном поле.

В такой схеме имеет смысл не только волновая функция всей системы трех кварков, но и индивидуальные, одночастичные волновые функции каждого кварка. Эти одночастичные волновые функции описываются обычным уравнением Дирака для частицы, находящейся в некотором данном поле. Таким образом, здесь кварки, входящие в состав бариона, занимают одночастичные энергетические уровни, как это имеет место и в оболочечной модели для отдельных нуклонов, образующих атомное ядро.

Необходимо, конечно, подчеркнуть и существенные отличия от оболочечной модели атомного ядра. Так как в ядре энергия взаимодействия составляющих его нуклонов мала по сравнению с их собственной энергией, дефект массы, обусловленный взаимодействием нуклонов, мал по сравнению с массой ядра. В случае же рассматриваемой кварковой модели барионов будем считать массу одного кварка много большей массы бариона, и дефект массы будет практически равен сумме масс всех трех кварков (в свободном состоянии).

Далее, число кварков (три) вряд ли достаточно для того, чтобы имело полный смысл само понятие «усредненного поля». Еще более существенное отличие вызывается тем обстоятельством, что в рассматриваемой модели барионов для получения правильных результатов надо считать, что два или три кварка с одинаковым спином можно поместить на одном энергетическом уровне, т. е. необходимо, чтобы волновая функция системы трех кварков, образующих барион, была бы не антисимметричной, а симметричной функцией кварковых переменных $\xi_k \equiv (\mathbf{x}_k, A_k, j_k)$, $k = 1, 2, 3$. Здесь $\mathbf{x}$ — пространственные переменные; A — унитарные; j — спиновые индексы.

Эту трудность можно обойти рядом способов. Укажем здесь, например, на следующие две возможности.

1. Существует не один триплет кварков, а три:

$$(p^\alpha, n^\alpha, \lambda^\alpha), \qquad \alpha = 1, 2, 3,$$

и рассматриваемые барионы состоят только из кварков, принадлежащих к различным триплетам. Поэтому противоречие с принципом Паули не возникает, и вполне допустимо считать кварки фермионами. Действительно, «одинаковые кварки» с одинаковыми индексами (A, j), лежащие на одном энергетическом уровне, в данной схеме будут различными, отличаясь между собой новым квантовым числом — номером триплета α. Этот дополнительный индекс α позволяет также рассматривать волновые функции $\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, симметричные по отношению к ξ_1, ξ_2, ξ_3. В самом деле, взяв в качестве полной волновой функции выражение вида

$$\mathscr{E}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1} \psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

в котором $\mathscr{E}$ — антисимметричный тензор, получим функцию, антисимметричную по отношению к перестановкам полных систем переменных:

$$(\alpha_k, \xi_k) \equiv (\alpha_k, \mathbf{x}_k, A_k, j_k).$$

2. Существует только один триплет кварков (p, n, λ), и они являются парафермионами третьего порядка. Эта возможность впервые была показана Гринбергом [5].

С математической точки зрения обе эти схемы эквивалентны, так как квантовая амплитуда рождения или уничтожения парафермиона третьего порядка представляется суперпозицией соответствующих амплитуд трех различных фермионов. Таким образом, один триплет парафермионов возникает из суперпозиции трех фермионных триплетов.

Рассмотрим уравнение Дирака для одного кварка в поле V:

$$\left\{\gamma_0 E + \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\gamma}\frac{\partial}{\partial r}\right) - M - V(r)\right\}\psi = 0. \tag{1.1}$$

Развивая идеи работ [6, 7], будем считать, что усредненное поле характеризуется скалярным радиально симметричным потенциалом $V(r)$, где r — расстояние до «центра тяжести» бариона, и что низший энергетический уровень соответствует s-состоянию. В уравнении (1.1) M представляет массу кварка в свободном состоянии. Чтобы получить SU_3-приближение, надо считать равными массы M всех трех кварков. Для обеспечения изотопической инвариантности достаточно равенства масс p и n.

Детали формы зависимости $V(r)$ от переменной r нас сейчас не интересуют, важно лишь, чтобы состояние с наименьшей энергией $E = E_0$ было связанным s-состоянием, т. е. чтобы оно характеризовалось нормируемой волновой функцией вида

$$\psi = \psi_0(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \varphi(r) & \chi \\ \mathrm{i}g(r)\,(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r})\,\chi \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где χ — обычный двухкомпонентный спинор

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}.$$

Подставляя (1.2) в (1.1), получаем уравнения для определения радиально симметричных функций φ, g при данном V:

$$\left.\begin{aligned}(E-U(r))\,\varphi-\left(3g+r\frac{\partial g}{\partial r}\right)=0;\\ (E+U(r))\,g+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0,\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

где $U = M + V$. Рассмотрим орбитальный момент $\mathbf{L}$ и полный угловой момент кварка $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{J}=\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}+\mathbf{L};$$

$$L_x=\mathrm{i}\left(z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z}\right);$$

$$L_y=\mathrm{i}\left(x\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial x}\right);\quad L_z=\mathrm{i}\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Для полного углового момента

$$\mathbf{J}\begin{pmatrix}\varphi(r) & \chi\\ \mathrm{i}g(r) & (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r})\,\chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi(r) & \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\chi\\ \mathrm{i}g(r)\,(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}) & \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\chi\end{pmatrix},$$

откуда

$$\mathbf{J}^2\psi_0=\begin{pmatrix}\varphi(r) & \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)^2\chi\\ \mathrm{i}g(r)\,(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}) & \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)^2\chi\end{pmatrix}=\frac{3}{4}\,\psi_0=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\psi_0.\tag{1.4}$$

Таким образом, в рассматриваемом s-состоянии, как и следовало ожидать, $J = 1/2$. Из (1.2) видно, что L не имеет определенного значения, а именно $L = 0$ для верхних компонент спинора ψ_0 и $L = 1$ для нижних компонент. Также и собственный спин кварка не имеет определенного значения. В случае, когда движение кварка близко к нерелятивистскому, нижние компоненты спинора ψ_0 будут малы и приближенно $L = 0$; $\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma}/2$.

Рассмотрим теперь систему из трех кварков в состоянии с наименьшей энергией. Чтобы получить такое состояние в рассматриваемой схеме, необходимо поместить все три кварка на уровень E_0. Тогда масса соответствующего бариона

$$m_b = 3E_0.\tag{1.5}$$

Состояние данной системы трех кварков, находящихся на уровне E_0, представляется суперпозицией всех допустимых состояний, в которых индексы j_1, j_2, j_3, задающие $J_z^{(1)}$, $J_z^{(2)}$, $J_z^{(3)}$ и унитарные индексы A_1, A_2, A_3 имеют определенные значения. Чтобы характеризовать такую суперпозицию, введем в рассмотрение дискретную волновую функцию

$$\Phi\ (j_1,\ A_1;\ j_2,\ A_2;\ j_3,\ A_3). \tag{1.6}$$

Пространственная часть волновой функции будет симметричной, поскольку все кварки находятся на одном и том же уровне и для них пространственные функции $\varphi\ (r)$, $g\ (r)$ одинаковые. А так как мы потребовали, чтобы полная волновая функция была симметрична по отношению к перестановкам между $\xi_l = (\mathbf{r}_l, A_l, j_l)$, $l = 1, 2, 3$, то на функцию (1.6) необходимо наложить условие симметрии по отношению к комбинированным индексам: $a_l = (A_l, j_l)$, $l = 1, 2, 3$. Это условие симметрии заменяет в данной схеме подход, основанный на SU_6-группе, имея, по существу, то же значение. Именно благодаря ему получаем здесь 56-плет барионов с обычной систематикой.

Например, волновая функция Φ, симметричная отдельно и по A_1, A_2, A_3 и по j_1, j_2, j_3, характеризует декуплет резонансов с $J = 3/2$, функция со смешанной симметрией соответствует октету барионов с $J = 1/2$. Здесь используем полный угловой момент $\mathbf{J} = \sum\limits_{l=1}^{3} \mathbf{J}_l^{(j)}$.

Для барионов данного семейства P, N... соответствующие выражения функции Φ имеют тот же вид, что и в подходе, основанном на SU_6-группе. Дело в том, что все рассуждения группового подхода основаны в сущности только на упоминавшемся свойстве симметрии. Некоторое отличие рассматриваемой схемы состоит в том, что мы пользуемся угловыми моментами кварков, тогда как в обычном рассмотрении говорят только о спинах кварков. С другой стороны, в этой модели, так же как и в SU_6-теории, мы рассматриваем только статический случай — случай покоящихся барионов. Это ограничение было введено уже при формулировке уравнения для кварка в барионе, в которое был введен радиально симметричный скалярный потенциал $\mathbf{V}\ (r)$, зависящий от расстояния до центра тяжести r.

Заканчивая общее обсуждение рассматриваемой модели барионов, подчеркнем, что до настоящего времени кварковые модели вообще и модель квазинезависимых кварков, в частности, являются полностью гипотетическими и их ценность заключается пока только в тех результатах, которые можно найти с помощью этих моделей. Перейдем теперь к получению таких результатов.

Магнитные моменты барионов

Для нахождения магнитных моментов барионов в рамках принятой модели квазинезависимых кварков изучим реакцию одного кварка, находящегося на минимальном энергетическом уровне E_0, на внешнее магнитное поле и найдем возникающее при этом изменение энергии кварка.

Включим не зависящее от времени магнитное поле, характеризуемое вектор-потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, дополним уравнение (1.1) соответствующими членами и получим

$$\left\{\gamma_0 E + \boldsymbol{\gamma}\left[\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + eQ_A \mathbf{A}(\mathbf{r})\right] - U(r)\right\}\psi = 0, \qquad (1.7)$$

где eQ_A — электрический заряд кварка; $Q = 2/3,\ -1/3,\ -1/3$. Считая $\mathbf{A}$ достаточно малым, находим приращение δE, пропорциональное заряду кварка.

Стандартными методами теории возмущений для δE получим

$$\delta E = -\frac{eQ_A H}{2E_0} 2J_z(1-\delta), \qquad (1.8)$$

где

$$\delta = \frac{\int \psi_0^* L_z \psi_0\, d\mathbf{r}}{2J_z \int \psi_0^*\, \psi_0 d\mathbf{r}} = \frac{\frac{2}{3}\int\limits_0^\infty r^4 |g(r)|^2 dr}{\int\limits_0^\infty \{|\varphi(r)|^2 + r^2|g(r)|^2\} r^2 dr}.$$

Как видно, δ равно среднему значению z-компоненты орбитального момента в состоянии, в котором $J_z = 1/2$, $\delta = \langle L_z \rangle \uparrow$. Таким образом, из (1.8) для магнитного момента кварка получим

$$\mu_A = \frac{eQ_A}{2E_0}(1-\delta).$$

Определим теперь магнитные моменты барионов. Для этого возьмем суммарное приращение энергии всех трех кварков:

$$\sum_{l=1}^{3} \delta E_l = -\frac{(1-\delta)eH}{2E_0}\sum_{l=1}^{3} Q_{A_l} 2\mathbf{J}_z^{(l)}. \qquad (1.9)$$

Чтобы найти расщепление энергии для бариона, усредним выражение (1.9) по волновой функции Φ_b (a_1, a_2, a_3) данного бариона.

Рассмотрим барион из октета со спином 1/2. Подчеркнем, что в изучаемой схеме спин бариона — это суммарный угловой момент кварков, составляющих барион:

$$\mathbf{S}_b = \sum_{l=1}^{3} \mathbf{J}^{(l)}.$$

Тогда имеем две независимые функции $\Phi_b\uparrow$, $\Phi_b\downarrow$, соответствующие значениям $2s_z = 1,\ -1$. Но, очевидно,

$$\Phi_b^*\downarrow \sum_{l=1}^{3} Q_{A_l} 2J_z^{(l)} \Phi_b\downarrow = -\Phi_B^*\uparrow \sum_{l=1}^{3} Q_{A_l} 2J_z^{(l)} \Phi_b\uparrow,$$

и поэтому

$$\delta E_b = -\frac{(1-\delta)\,eH}{2E_0}\left(\Phi_b^* \uparrow \sum_{l=1}^{3} Q_{A_l}\, 2\mathbf{J}_z^{(l)}\, \Phi_b \uparrow\right) 2s_z.$$

Таким образом, магнитный момент бариона

$$\mu_b = \frac{(1-\delta)\,e}{2E_0}\left(\Phi_b^* \uparrow \sum_{l=1}^{3} Q_{A_l}\, 2\mathbf{J}_z^{(l)} \Phi_b \uparrow\right).$$

Обычно принято эти магнитные моменты выражать в единицах боровского ядерного магнетона для протонной массы $e/2m_p$. В таких единицах (при $\hbar = 1$, $c = 1$)

$$\mu_b = \frac{(1-\delta)\,m_p}{E_0}\left(\Phi_b^* \uparrow \sum_{l=1}^{3} Q_{A_l}\, 2\mathbf{J}_z^{(l)}\, \Phi_b \uparrow\right). \qquad (1.10)$$

Рассмотрим еще случай модели, в которой имеется три триплета кварков. Обозначим $Q_{A,\alpha}$ заряд кварка с номером A из триплета с номером α. Тогда, очевидно, в (1.10) необходимо заменить

$$\sum_{l=1}^{3} Q_{A_l}\, 2\mathbf{J}_z^{(l)} \to \sum_{l=1}^{3} Q_{A_l,\, \alpha_l}\, 2\mathbf{J}_z^{(l)}.$$

Далее усреднение совершаем по волновой функции

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \mathscr{E}_{\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3} \Phi_b \uparrow (a_1,\, a_2,\, a_3); \qquad \sum_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)} |\mathscr{E}_{\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3}|^2 = 6.$$

Так как

$$\frac{1}{6} \sum_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)} |\mathscr{E}_{\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3}|^2\, Q_{A,\,\alpha} = \frac{1}{3}\sum_{\alpha=1}^{3} Q_{A,\,\alpha},$$

то, если в этом случае взять

$$\frac{1}{3}\sum_{\alpha=1}^{3} Q_{A,\,\alpha} = Q_A = \frac{2}{3},\; -\frac{1}{3},\; -\frac{1}{3},$$

опять будем иметь ту же самую формулу (1.10). Подробно такая модель была рассмотрена в работе [8], где указывается на возможность выбора целых значений для $Q_{A,\alpha}$.

Вернемся теперь к (1.10) и найдем, в частности, μ_p и μ_N, выполнив усреднение способом, аналогичным указанному Б. В. Струминским [9]. Для нуклонов:

$$\Phi_P \uparrow = \frac{\sqrt{2}\, p\uparrow p\uparrow n\downarrow - p\uparrow p\downarrow n\uparrow}{\sqrt{3}};$$

$$\Phi_N \uparrow = \frac{n\uparrow n\downarrow p\uparrow - \sqrt{2}\, n\uparrow n\uparrow p\downarrow}{\sqrt{3}}.$$

В отличие от обычной SU_6-схемы здесь стрелка указывает на направление z-компоненты не спина кварка, а его полного углового момента. Так как

$$\sum_{l=1}^{3} Q_{A_l} 2J_z^{(l)} \Phi_P \uparrow = \frac{\sqrt{2}\frac{5}{3} p\uparrow p\uparrow n\downarrow + \frac{1}{3} p\uparrow p\downarrow n\uparrow}{\sqrt{3}},$$

из (1.10) получим

$$\mu_P = \frac{(1-\delta) m_P}{E_0}.$$

Совершенно аналогично

$$\mu_N = -\frac{2}{3}\cdot\frac{(1-\delta) m_P}{E_0}.$$

Из выражения (1.10), которое имеет полную формальную аналогию с известным результатом SU_6, нетрудно было бы вычислить магнитные моменты остальных барионов октета: они выразятся через μ_P обычными формулами. Однако при этом степень применимости полученных значений значительно ухудшится. Существенно, что самосогласованный потенциал является радиально симметричным. Такое допущение, если оно и пригодно для нуклонов, образованных p- и n-кварками с одинаковыми массами, по-видимому, плохо подходит для описания ситуации, при которой в барионе имеются нарушающие симметрию тяжелые λ-кварки. Если ее все же попытаться описать с помощью такого потенциала V, то надо ввести в него значительные спин-орбитальные члены, которые разрушают радиальную симметрию.

Отношение F_A/F_V

Для вычисления отношения F_A/F_V аксиальной и векторной констант для β-распада можно воспользоваться тем же приемом, что и для вычисления магнитных моментов. Как показано в работе [4], в рамках модели квазинезависимых кварков для этой величины можно получить следующую формулу:

$$F_A/F_V = \frac{5}{3}(1-2\delta).$$

Здесь δ — среднее значение z-компоненты орбитального момента кварка, которое можно интерпретировать так же, как вклад орбитального момента кварка в спин нуклона. В случае приближенно нерелятивистского характера движения кварков в нуклоне, когда $rg(r)$ мало по сравнению с $\varphi(r)$, δ должно быть мало.

Если пренебречь δ в формулах для магнитного момента протона и для F_A/F_V и воспользоваться соотношением (1.5), то для магнитного момента протона

$$\mu_P = 3, \tag{1.11}$$

а для отношения аксиальной и векторной констант

$$F_A/F_V = \frac{5}{3} = 1,67 \tag{1.12}$$

результаты SU_6.

Так как экспериментальное значение магнитного момента протона $\mu_P = 2,79$, то, принимая во внимание простоту использованной модели квазинезависимых кварков, результат (1.11) следует считать удовлетворительным. В формуле же (1.12) согласие с экспериментом значительно хуже. Так как из определения δ следует, что $\delta > 0$, то сразу видно, что учет δ в формуле для отношения аксиальной и векторной констант изменит правую часть в нужном направлении. (Напомним экспериментальное значение $F_A/F_V = 1,18$.) Здесь необходимо отметить, что важность учета вклада орбитального момента была подчеркнута в нескольких работах [10]. В этих работах, однако, авторы исходили из того, что к представлению (56) с $L = 0$ примешивались другие представления, например (20) с $L = 1$. В нашей схеме не требуется выходить за пределы представления (56), так как примесь состояний с $L = 1$ обусловлена самим уравнением Дирака.

Для ориентировочной оценки величины δ возьмем простейшую форму скалярного поля:

$$V(r) = -M, \quad r < r_0;$$
$$V(r) = 0, \quad r > r_0,$$

предложенную в работе [3]. Как видно, здесь интенсивность поля в зоне $0 < r < r_0$ столь велика, что скалярное поле фактически полностью «компенсирует» всю собственную массу кварка, а энергия E_0 получается положительной только из-за того, что потенциальный барьер локализует кварк в сфере радиуса r_0.

Итак, воспользуемся уравнением (1.3), в котором теперь:

$$U = 0, \quad r > r_0;$$
$$U = M, \quad r < r_0.$$

Непосредственным вычислением получим $\delta = 0,17$. Таким образом, в случае прямоугольной потенциальной ямы $\mu_P = 2,49$ и $F_A/F_V = 1,10$. Как видно, значение магнитного момента протона отличается от экспериментального на 12%, а отношение аксиальной и векторной констант — на 7%.

Здесь использовано значение δ, полученное для случая прямоугольной потенциальной ямы. Но необходимо подчеркнуть, что в данной модели никаких оснований для выбора именно такой формы эквивалентного потенциала нет, если не иметь в виду упоминавшейся аналогии с теорией ядра. Можно было бы рассмотреть те же вопросы, встав на более общую точку зрения, не фиксируя конкретной формы потенциала $V(r)$, но тогда бы не смогли уже определить величину δ из уравнения Дирака.

В таком случае воспользуемся для определения δ экспериментальным значением μ_P. Для улучшения точности результата примем во внимание коллективную энергию кварков в нуклоне. Если без учета такой дополнительной энергии полагаем

$$m_P = 3E_0,$$

то теперь, исходя из выражения коллективной энергии в виде (с учетом лишь «вращения») $WJ(J+1)$, найдем для нуклона и для изобара:

$$m_P = 3E_0 + \frac{3}{4}W \quad (938{,}2 \ \textit{Мэв});$$

$$m_{N^*} = 3E_0 + \frac{15}{4}W \quad (1236 \ \textit{Мэв}).$$

Тогда, учитывая формулу для магнитного момента протона, получаем $\delta = 0{,}145$. В этом случае для отношения аксиальной и векторной констант $F_A/F_V = 1{,}185$ имеем значение, очень близкое к эксперименту.

Здесь необходимо заметить, что в работе Гелл-Манна [11] на основе других соображений для отношения аксиальной и векторной констант была получена следующая формула:

$$-F_A/F_V = \frac{5}{3}\left[1 - \frac{1}{3}\frac{\langle \mathbf{p}^2 \rangle}{m^2} + 0\left(\frac{\mathbf{p}^4}{m^4}\right)\right],$$

где $\langle \mathbf{p}^2 \rangle$ — среднее значение квадрата импульса кварка в нуклоне; m — эффективная масса кварка, т. е. в наших обозначениях $m = E_0$, причем в этой формуле имеется в виду разложение по степеням $1/m$, последовательно учитывающее релятивистские поправки.

Соответствующее разложение для нашей величины δ на основании (1.3) и определения δ будет:

$$\delta = \frac{\langle \mathbf{p}^2 \rangle}{6E_0} + \ldots$$

Таким образом, из рассмотренной здесь формулы

$$F_A/F_V = \frac{5}{3}(1 - 2\delta)$$

точно получается приведенная выше формула Гелл-Манна.

Другие результаты

1. В рамках модели квазинезависимых кварков легко вычислить средний квадрат радиуса нуклона:

$$\langle r_P^2 \rangle = \frac{\int r^2 \rho(r)\, d\mathbf{r}}{\int \rho(r)\, d\mathbf{r}},$$

где $\rho(r)$ — плотность распределения электрического заряда.

В рассматриваемой модели $\rho(r)$ пропорционально:

$$\psi_0^*(r)\, \psi_0(r) = |\varphi(r)|^2 + r^2\, |g(r)|^2$$

и для прямоугольной потенциальной ямы, рассмотренной выше, нетрудно получить

$$\langle r_P^2 \rangle = 0{,}43 \frac{1}{m_\pi^2}.$$

Здесь тоже имеем хорошее согласие с экспериментом

$$\langle r_P^2 \rangle_{\text{эксп}} = 0{,}40 \frac{1}{m_\pi^2}.$$

2. Выше был рассмотрен случай, когда три кварка находятся на низшем энергетическом уровне в s-состоянии, и считали массу нуклона $m_N = 3E_{s,0}$. Для случая прямоугольной потенциальной ямы легко получить уравнение для спектра Er_0:

$$\operatorname{ctg} Er_0 = \frac{1 - Er_0}{Er_0}.$$

Взяв решение, соответствующее возбужденному состоянию одного из кварков, можно вычислить массу резонанса Рупера N (1470) $m_R = 2E_{s,0} + E_{s,1} = 1460$ *Мэв*. Этот результат был получен в работе [4] на основе замечания, сделанного проф. Вижье.

3. В работе [12] распады π-мезонов и векторных мезонов рассматривались как процесс аннигиляции кварков с учетом релятивистских эффектов. На основе модели квазинезависимых кварков для случая прямоугольной потенциальной ямы были получены следующие величины времени жизни и вероятностей распадов $\tau_\pi = 2{,}4 \cdot 10^{-8}$ *сек*; $W(\rho \to e^+e^-) = 4{,}25 \cdot 10^{-3}$ *Мэв*; $W(\omega \to e^+e^-) = 0{,}54 \cdot 10^{-3}$ *Мэв*, находящиеся в согласии с экспериментом.

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ ДВУХ И ТРЕХ ЧАСТИЦ

Виды уравнений

Здесь рассмотрим более сложную модель, основанную, в частности, на уравнениях типа Бете — Солпитера. В одной из работ [13] была исследована динамическая модель мезонов, в которой они представлены как связанные состояния кварка и антикварка. В этой работе авторы пользуются релятивистски инвариантным уравнением, а взаимодействие представляют в виде факторизующегося потенциала. Как было показано в работах [14, 15], можно получить результаты, установленные в работе [13], а также другие результаты, пользуясь уравнениями типа Бете — Солпитера. Здесь будем вести изложение, основываясь на работах [14, 15].

Рассмотрим модель мезона как связанного состояния кварка и антикварка. Соответствующее уравнение типа Бете — Солпитера напишем в виде

$$\{(\partial^{(1)} - M)(\partial^{(2)} + M) - V\}\ \psi = 0. \tag{2.1}$$

Входящая в это уравнение волновая функция $\psi_{a_1a_2}(x^{(1)}, x^{(2)})$ зависит от двух спинорных индексов a_1, $a_2 = 1, 2, 3, 4$ и от двух точек $x^{(1)}$ $(x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$, $x^{(2)}$ $(x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})$ пространства — времени. Для упрощения обозначений пока не будем вводить унитарные индексы, характеризующие номера кварков и антикварков. Далее, в уравнении

$$\partial^{(j)} = \sum_{\nu=0}^{3} \gamma_\nu^{(j)} \frac{\partial}{\partial x_\nu^{(j)}}, \quad j = 1, 2, \tag{2.2}$$

где $\gamma_\nu^{(j)}$ — обычные γ-матрицы, причем $\gamma_\nu^{(1)}$ действует на спинорный индекс a_1 слева, а $\gamma_\nu^{(2)}$ действует на a_2 справа, например

$$\gamma_\alpha^{(1)}\gamma_\beta^{(2)}\psi = \gamma_\alpha\psi\gamma_\beta\,.$$

Величина M, как и ранее, представляет свободную массу кварка и антикварка. Сделаем обычное допущение в отношении V-члена, представляющего взаимодействие кварка и антикварка, предположив, что V является функцией инвариантного скаляра $\{(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)})^2 - (x_0^{(1)} - x_0^{(2)})^2\}$.

Как известно, уравнения типа (2.1) являются весьма сложными и их исследование наталкивается на большие трудности. В такой ситуации кажется целесообразным добиваться максимально возможного упрощения задачи. Для этого произведем предельный переход $M \to \infty$ и причем так, чтобы не потерять релятивистского характера этой модели. Чтобы совершить такой предельный переход, используем замечание работы [4] о том, что такой переход удобнее всего совершать в случае псевдоскалярного потенциала. Исходя из этих соображений, будем рассматривать случай, когда

$$V = \gamma_5^{(1)}\gamma_5^{(2)}\quad (M^2 - U), \tag{2.3}$$

где U — скалярная функция

$$U = U\ \{(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)})^2 - (x_0^{(1)} - x_0^{(2)})^2\}, \tag{2.4}$$

которая остается конечной при $M \to \infty$.

Итак, рассматриваем уравнение (2.1) для потенциала (2.3). Подчеркнем, что, как и в работе [13], не будем рассматривать его в связи с какой-либо схемой квантовой теории поля, поэтому и не говорим об уравнении Бете — Солпитера, а лишь об уравнении этого типа. Вероятно, уравнение (2.1) можно рассматривать просто как одно из возможных релятивистски инвариантных обобщений уравнения для простейшей модели, в которой кварк и антикварк находятся в потенциальной яме, компенсирующей практически полностью большую собственную массу.

Упростив уравнение (2.1) посредством предельного перехода при $M \to \infty$, получим

$$\{(\partial^{(1)})^2 + (\partial^{(2)})^2 - 2U\}\,\psi = 0 \tag{2.5}$$

с дополнительным условием

$$\psi = -\gamma_5^{(1)}\gamma_5^{(2)}\psi. \tag{2.6}$$

Выделим теперь движение центра тяжести и относительное движение двух частиц. Для этого произведем замену переменных:

$$\frac{(x^{(1)} + x^{(2)})}{2} = x; \quad x^{(1)} - x^{(2)} = y.$$

Используем далее виковский поворот оси времени [16], положив

$$y_0 = \mathrm{i}y_4,$$

и введем евклидовский квадрат 4-вектора $y^2 = \sum_{\alpha=1}^{4} y_\alpha^2$.

Тогда на основании (2.5) получим

$$\left\{-\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha^2} + U(y^2) + \frac{1}{4}\sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)^2\right\}\psi = 0.$$

Отсюда ясно, что переменные x, характеризующие центр тяжести, могут быть исключены из уравнения для ψ. Действительно, положив

$$\psi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(px)}F(y),$$

найдем

$$\left\{-\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha^2} + U(y^2) - \frac{p^2}{4}\right\}F(y) = 0, \qquad p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2. \tag{2.7}$$

Как видно,

$$\mathrm{i}\,g_{\nu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu^{(1)}} + \frac{\partial}{\partial x_\nu^{(2)}}\right)\psi = \mathrm{i}\,g_{\nu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\psi = p\psi,$$

и, таким образом, p представляет полный 4-вектор энергии-импульса мезона; p^2 — квадрат массы мезона. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\left\{-\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha^2}+U(y^2)-\varepsilon\right\}\varphi(y)=0 \tag{2.8}$$

в четырехмерном евклидовом пространстве точек $y\ (y_1, y_2, y_3, y_4)$ и сделаем следующие допущения: 1) все собственные значения ε положительны; 2) наименьшее значение $\varepsilon=\varepsilon_0$ соответствует s-состоянию:

$$\varphi_0(y)=f(R), \qquad R=\sqrt{y^2}.$$

Тогда, как показывает уравнение (2.7), мезоны с наименьшей массой m_0, $m_0^2=4\varepsilon$, будут характеризоваться волновой функцией

$$\psi=F(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(px)}=\Phi_{a_1,a_2}f(R)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(px)}. \tag{2.9}$$

Как видно, вся матричная структура ψ характеризуется матрицей Φ, поскольку $f(R)$ является, по определению, скалярной функцией. Поэтому из дополнительных условий (2.6) следует, что

$$\gamma_5^{(1)}\gamma_5^{(2)}\Phi=-\Phi \text{ или } \gamma_5\Phi\gamma_5=-\Phi. \tag{2.10}$$

Далее, $\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha^2}f(R)=\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\cdot\frac{y_\alpha}{R}\cdot\frac{\partial f(R)}{\partial R}=\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{y_\alpha^2}{R}\cdot\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\times\right.$ $\left.\times\frac{\partial f(R)}{\partial R}\right)+\frac{4}{R}\cdot\frac{\partial f(R)}{\partial R}=\frac{\partial^2 f}{\partial R^2}+\frac{3}{R}\cdot\frac{\partial f}{\partial R}$, и таким, образом, из (2.8) для $f(R)$ получается одномерное уравнение

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial R^2}-\frac{3}{R}\cdot\frac{\partial f}{\partial R}+(U(R^2)-\varepsilon)f=0.$$

Выберем теперь систему отсчета, в которой мезон покоится:

$$\mathbf{p}=0.$$

В этой системе (2.9) дает

$$\psi=\Phi f(R)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0x_0}=\Phi f(R)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_0x_0}. \tag{2.11}$$

Рассмотрим оператор пространственного отражения

$$J_{1,2}=\gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}\Lambda_{x^{(1)}}\Lambda_{x^{(2)}}=\gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}\Lambda_x\Lambda_y,$$

где Λ_x — оператор изменения знака пространственных координат точки x. Поскольку квадрат $J_{1,2}$ равен единичному оператору, его собственные значения будут ± 1. Далее нетрудно заметить, что $J_{1,2}$ коммутирует с оператором:

$$(\partial^{(1)}-M)(\partial^{(2)}+M)-\gamma_5^{(1)}\gamma_5^{(2)}(M^2-U),$$

поэтому с основным уравнением (2.1) будут совместны оба уравнения для собственных функций $J_{1,2}$:

$$J_{1,2}\psi=\psi; \qquad J_{1,2}\psi=-\psi.$$

В первом случае имеем положительную внутреннюю четность, во втором — отрицательную. Рассмотрим волновую функцию (2.11). Так как для нее $\Lambda_x \Lambda_y \psi = \psi$, то условия четности принимают вид:

$$\gamma_0^{(1)} \gamma_0^{(2)} \Phi = \Phi; \quad \gamma_0^{(1)} \gamma_0^{(2)} \Phi = -\Phi,$$

т. е.

$$\gamma_0 \Phi \gamma_0 = \Phi; \quad \gamma_0 \Phi \gamma_0 = -\Phi.$$

Эти условия четности совместно с (2.10) определяют матричную структуру Φ, но не имеют отношения к величине массы мезона $m_0 = 2\sqrt{\varepsilon_0}$, определяемой из скалярного уравнения (2.8). Таким образом, в рассматриваемой ситуации (после предельного перехода $M \to \infty$) имеем полное вырождение по четности.

Рассмотрим подробнее матричную структуру Φ в случае $\gamma_0 \Phi \gamma_0 = -\Phi$. Учитывая (2.10), получаем структуры: $\Phi = \gamma_0 \gamma_5 Q$ и $\Phi = \sum_{\nu=1}^{3} \gamma_\nu Q_\nu$.

Вводя индексы кварков и антикварков $A, B = 1, 2, 3$, можно написать:

$$\Phi = \gamma_0 \gamma_5 Q_A^B \tag{2.12}$$

и

$$\Phi = \sum_{\nu=1}^{3} \gamma_\nu Q_{\nu, A}^B = \gamma_0 \gamma_5 \sum_{\nu=1}^{3} \sigma_\nu Q_{\nu, A}^B. \tag{2.13}$$

Как видно, решение (2.12) соответствует псевдоскалярным мезонам, а решение (2.13) — векторным. Так как

$$\gamma_0 \gamma_5 = \begin{vmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{vmatrix},$$

где I — единичная двумерная матрица $I = |\, \delta_j^k \,|$, то из (2.12) и (2.13) можно получить

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & F \\ -F & 0 \end{vmatrix}, \tag{2.14}$$

где F — шестимерная матрица с элементами $F_{A, j}^{B, k}$, $A, B = 1, 2, 3$; $k, j = 1, 2$, причем для псевдоскалярных мезонов

$$F_{A, j}^{B, k} = Q_A^B \delta_j^k, \tag{2.15}$$

а для векторных мезонов

$$F_{A, j}^{B, k} = \sum_{\nu=0}^{3} (\sigma_\nu)_j^k Q_{\nu, A}^B. \tag{2.16}$$

Отсюда в последнем случае

$$\sum_{j=1}^{2} F_{A; j}^{B; k} = 0. \tag{2.17}$$

Нетрудно заметить, что любую матрицу $F_{B,j}^{B,k}$, удовлетворяющую условиям (2.17), можно представить в виде (2.16). Здесь получено обычное представление для дискретной волновой функции мезона, используемой в нерелятивистском групповом подходе.

Так как в рассматриваемой ситуации масса m_0 одинакова и для псевдоскалярных, и для векторных мезонов, имеем вырождение по отношению к спину. Далее, если, как это неявно предполагалось, $U(y^2)$ является скаляром по отношению к унитарным индексам (вообще от них не зависит), то имеем также вырождение по отношению к унитарной группе U_3. Итак, получаем вырождение по отношению к четности, спину и группе U_3 для нонета псевдоскалярных и нонета векторных мезонов с одинаковой массой m_0. С той же массой будут и мезоны противоположной четности (случай $\gamma_0\Phi\gamma_0 = \Phi$). В этом случае получаем: $\gamma_0\Phi\gamma_0 = \Phi$; $\gamma_5\Phi\gamma_5 = -\Phi$.

Повторяя предыдущие рассуждения, построим скалярный нонет

$$\Phi = \gamma_0 Q_A^B$$

и аксиальный нонет

$$\Phi = \sum_{\nu=1}^{3} \gamma_\nu\gamma_5 Q_{\nu,\,A}^B = \gamma_0 \sum_{\nu=1}^{3} \sigma_\nu Q_{\nu,\,A}^B.$$

В матричном представлении

$$\Phi = \begin{vmatrix} F & 0 \\ 0 & -F \end{vmatrix},$$

где матрица F имеет ту же структуру, что и в предыдущем.

Рассмотрим теперь возможности снятия вырождения. Для расщепления энергетического уровня ε_0 достаточно дополнить функцию взаимодействия U соответствующими членами, имеющими матричную структуру. Чтобы воспользоваться теорией возмущения и получить явные выражения для зависимости $\varepsilon_0 + \delta\varepsilon$ от четности, спина и т. п., будем считать член δU достаточно малым.

Итак, вместо (2.1) будем исходить из следующего уравнения:

$$\{(\partial^{(1)} - M)(\partial^{(2)} + M) - \gamma_5^{(1)}\gamma_5^{(2)}(M^2 - U(y^2)) - \delta U(y)\,\gamma_5^{(1)}\gamma_5^{(2)}\}\,\psi = 0.$$

Нетрудно показать, каким образом, например, выражение

$$\delta U = v(y^2)\, D_x^{(1)} D_x^{(2)} + D_y^{(1)} w(y^2)\, D_y^{(2)} + D_y^{(2)} w(y^2)\, D_y^{(1)},$$

в котором

$$D_x^{(j)} = \sum_{\nu=0}^{3} i\gamma_\nu^{(j)} \frac{\partial}{\partial x_\nu};$$

$$D_y^{(j)} = \sum_{\nu=0}^{3} i\gamma_\nu^{(j)} \frac{\partial}{\partial y_\nu} = \sum_{\nu=1}^{3} i\gamma_\nu^{(j)} \frac{\partial}{\partial y_\nu} + \gamma_0^{(j)} \frac{\partial}{\partial y_4},$$

вызывает расщепление ε_0 и делает массу связанных состояний зависящей от четности и от спина.

С точностью до членов второго порядка малости для масс соответствующих связанных состояний получаем:

$$\begin{aligned} m_{ps}^2 &= m_0^2 - (L + 2L'); \\ m_{vec}^2 &= m_0^2 - (L - 2L'); \\ m_{ax}^2 &= m_0^2 + (L - 2L'); \\ m_{sc}^2 &= m_0^2 + (L + 2L'), \end{aligned}$$

где $L = 2\pi^2 \int\limits_0^\infty v(R^2) f^2(R) R^3 \, dR m_0^2;$

$$L' = -\pi^2 \int\limits_0^\infty w(R^2) \left(\frac{\partial f(R)}{\partial R}\right)^2 R^3 \, dR m_0^2.$$

Выберем теперь функции v, w так, чтобы

$$L' > 0, \quad L > 4L'.$$

В этом случае

$$m_{ps}^2 < m_{vec}^2 < m_{ax}^2 < m_{sc}^2$$

и, как видно, массы мезонов с отрицательной внутренней четностью оказываются меньшими масс мезонов с положительной внутренней четностью.

Сейчас рассмотрели одну из возможных форм δU, вызывающих снятие вырождения по четности и по спину. Подобный результат можно было бы получить и с помощью других выражений для δU. Чтобы снять также вырождение по отношению к группе U_3, достаточно ввести к δU члены, явно действующие на унитарные индексы волновых функций, разрушающие унитарную симметрию, например члены, содержащие $\lambda_8^{(1)}$, $\lambda_8^{(2)}$. Конкретные формы таких величин можно было бы построить, основываясь на работе [13], в которой снятие вырождения изучалось в нерелятивистском случае.

Сделаем сейчас несколько замечаний относительно выражений для Φ_{ps} и Φ_{vec} в общем случае, когда $\mathbf{p} \neq 0$. Придадим для этого релятивистски инвариантную форму условию отрицательной четности:

$$\gamma_0 \Phi \gamma_0 = -\Phi, \quad \mathbf{p} = 0. \tag{2.18}$$

В этом случае можно написать $\gamma_0 \Phi + \Phi \gamma_0 = 0$ или $\gamma_0 p_0 \Phi + \Phi \gamma_0 p_0 = 0$.

Так как $\gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p}$ является инвариантным скаляром, видно, что для $\mathbf{p} \neq 0$ условие (2.18) должно принимать форму

$$(\gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p}) \Phi + \Phi (\gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p}) = 0. \tag{2.19}$$

Это условие будем рассматривать совместно с полученным ранее дополнительным условием (2.10):

$$\gamma_5 \Phi \gamma_5 + \Phi = 0.$$

Нетрудно заметить, что по отношению к спинорным индексам $\Phi = \Phi_{a_1, a_2}$ представляет собой матрицу четвертого порядка, но, как известно, такую матрицу можно построить с помощью шестнадцати дираковских матриц:

$$\Phi = F_0 + F_1 \gamma_5 + \sum_{\nu=0}^{3} \gamma_\nu Q_\nu + \sum_{\nu=0}^{3} \gamma_\nu \gamma_5 R_\nu + \sum_{\nu,\,\mu=0}^{3} \sigma_{\nu,\,\mu} s_{\nu,\,\mu},$$

где

$$\sigma_{\nu,\,\mu} = \frac{i}{2} (\gamma_\nu \mu_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu); \quad s_{\nu,\,\mu} + s_{\mu,\,\nu} = 0.$$

Так как

$$\Phi + \gamma_5 \Phi \gamma_5 = 2F_0 + 2F_1 \gamma_5 + 2 \sum_{\nu,\,\mu} \sigma_{\nu,\,\mu} s_{\nu,\,\mu},$$

то из (2.10) находим $F_0 = 0$; $F_1 = 0$, $s_{\nu,\,\mu} = 0$.

Таким образом,

$$\Phi = \sum_{\nu=0}^{3} \gamma_\nu Q_\nu + \sum_{\nu=0}^{3} \gamma_\nu \gamma_5 R_\nu. \qquad (2.20)$$

Рассмотрим теперь условие (2.19). Имеем

$$0 = \sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} \gamma_\alpha p_\alpha \Phi + \Phi \sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} \gamma_\alpha p_\alpha =$$

$$= \sum_{\alpha,\,\nu} g_{\alpha\alpha} (\gamma_\alpha \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\alpha) p_\alpha Q_\nu + \sum_{\alpha,\,\nu} g_{\alpha\alpha} (\gamma_\alpha \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\alpha) \gamma_5 p_\alpha R_\nu =$$

$$= \sum_{\alpha} p_\alpha Q_\alpha + \sum_{\alpha,\,\nu} (\gamma_\alpha \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\alpha) \gamma_5 \frac{1}{2} (g_{\alpha\alpha} p_\alpha R_\nu - g_{\nu\nu} p_\nu R_\alpha).$$

Откуда

$$\sum_{\alpha=0}^{3} p_\alpha Q_\alpha = 0; \qquad (2.21)$$

$$g_{\alpha\alpha} p_\alpha R_\nu - g_{\nu\nu} p_\nu R_\alpha = 0. \qquad (2.22)$$

Соотношение (2.22) показывает, что R_α пропорционально $g_{\alpha\alpha} p_\alpha$, и можно написать $R_\nu = g_{\alpha\alpha} p_\alpha k$. Следовательно, из (2.20) получаем $\Phi = (\gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p}) \gamma_5 k + \sum_{\nu=0}^{3} \gamma_\nu Q_\nu$ и потому $\Phi_{ps} = (\gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p}) \gamma_5 k$; $\Phi_{vec} = \sum_{\nu=0}^{3} \gamma_\nu Q_\nu$.

Чтобы нормировка здесь совпала со случаем $\mathbf{p}=0$, положим $k=Q/m_0^2$. Вводя явно индексы кварков, запишем найденные выражения в виде:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{ps}&=(\gamma_0 p_0-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p})\,\gamma_5\frac{Q_A^B}{m_0^2}\,;\\ \Phi_{vec}&=\sum_{\nu=0}^{3}\gamma_\nu Q_{\nu,\,A}^B,\end{aligned}\right\}\tag{2.23}$$

причем благодаря (2.21) $\sum\limits_{\nu=0}^{3} p_\nu Q_{\nu,\,A}^B=0$.

Представление (2.23) было впервые получено из групповых соображений в работе Бега и Пайса [17]. Для случая модели барионов, представляя барионы как связанные состояния трех кварков, можно рассмотреть аналогичные уравнения для трех частиц. Здесь лишь кратко рассмотрим такое уравнение, основываясь на работе [18], где исследование этой модели проведено подробно.

Обобщение уравнения (2.1) для случая трех частиц имеет вид

$$\{(\partial^{(1)}-M)(\partial^{(2)}-M)(\partial^{(3)}-M)+MV_{1,2,3}\}\,\psi=0.\tag{2.24}$$

Здесь, исходя из тех же соображений, что и в предыдущем, берем $V_{1,2,3}$ в виде

$$V_{1,2,3}=\frac{1}{3}\left(\gamma_5^{(1)}\gamma_5^{(2)}+\gamma_5^{(1)}\gamma_5^{(3)}+\gamma_5^{(2)}\gamma_5^{(3)}\right)[M^2-U(R_1^2,\,R_2^2,\,R_3^2)].$$

Далее уравнение (2.24) упрощается за счет предельного перехода при $M\to\infty$ и принимает вид

$$\left\{(\partial^{(1)})^2+(\partial^{(2)})^2+(\partial^{(3)})^2-\frac{4}{3}U\right\}\psi=0\tag{2.25}$$

с дополнительными условиями

$$(1-\gamma_5^{(1)}\gamma_5^{(2)})\,\psi=(1-\gamma_5^{(1)}\gamma_5^{(3)})\,\psi=(1-\gamma_5^{(2)}\gamma_5^{(3)})\,\psi=0.$$

Рассмотрев свободное уравнение (без внешних полей), как и для случая мезонов, можно получить представление Бега и Пайса

$$\tilde{\Phi}^{(j)}=\prod_{k=1}^{3}\left\{\frac{m+E+\mathscr{E}_j\mathbf{p}\mathbf{s}_k}{\sqrt{2m\,(m+E)}}\right\}B_{(A_1,\,j_1)\,(A_2,\,j_2)\,(A_3,\,j_3)},$$

где $\mathscr{E}_1=1$; $\mathscr{E}_2=-1$; $\mathbf{s}_k$ — спиновые матрицы; $A=1,\,2,\,3$; $j=1,\,2$.

Здесь нужно отметить, что для вычисления, например, магнитных моментов мезонов и барионов можно включать в операторы $\partial^{(j)}$ внешнее электромагнитное поле. Форма уравнений — (2.5) для мезонов и (2.25) для барионов при этом не меняется.

Массовые формулы

В рассматриваемых кварковых моделях мезонов и барионов имеются различные возможности получения массовых формул. Для простейшего случая осцилляторного потенциала $U(y^2) = \omega^2 y^2$ для уравнения типа (2.1) в работе [19] были найдены линейные мезонные траектории $m^2 = 8\omega(l + 2q + n + 2)$, где l — орбитальный момент; $q, n = 0, 1, 2 \ldots$

В работе [20] рассматривались возможности получения массовых формул, описывающих присутствие в мезоне или барионе странного λ-кварка. Здесь использовались уравнения типа (2.1) и (2.24), однако массы кварков полагались различными $M_j^2 = M_0^2 + m_j$.

Для квадратных уравнений типа (2.1) и (2.24) получены следующие формулы для мезонов и барионов соответственно:

$$M_M^2 = M_{0M}^2 + 2(m_1 + m_2);$$

$$M_B^2 = M_{0B}^2 + 3(m_1 + m_2 + m_3).$$

В работе [21] рассмотрены мезонные и барионные резонансы как связанные состояния соответственно в p-волне системы кварк-антикварк и в p-волне системы трех кварков. Для уравнения типа (2.1) потенциал был взят с членами, нарушающими унитарную симметрию, зависящими от спина, а также от спин-орбитальной связи, а именно:

$$W(y) = W_0\Lambda_8 + W_1 S_\mu^2 + W_2(S_\mu S_\nu L_{\mu,\nu}) + W_3(S_\mu y_\mu)^2,$$

где $\Lambda_8 = (\lambda_8)_1 + (\lambda_8)_2$; $S_\mu = (s_\mu)_1 + (s_\mu)_2$; $(S_\mu)_k = \frac{1}{2i}(\gamma_5\gamma_\mu)_k$, $k = 1, 2$; $L_{\mu,\nu} = -i\left(y_\mu \frac{\partial}{\partial y_\nu} - y_\nu \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right)$; W_j — скалярные функции от y_μ^2.

Для потенциала такого вида получены следующие формулы для квадратов масс мезонов:

$$\begin{aligned}
&M^2(j^{pc}) \\
&(2^+) = m^2 + \alpha\Lambda_8 + \beta - \gamma + \delta; \\
&(1^{++}) = m^2 + \alpha\Lambda_8 + \beta - \gamma - 5\delta; \\
&(0^+) = m^2 + \alpha\Lambda_8 + \beta - 2\gamma + 10\delta; \\
&(1^{+-}) = m^2 + \alpha\Lambda_8; \\
&(1_\sigma^-) = m^2 + \alpha\Lambda_8 + \beta; \\
&(0_\sigma^-) = m^2 + \alpha\Lambda_8; \\
&(1^-) = m^2 + \alpha_0\Lambda_8 + \beta_0; \\
&(0^-) = m^2 + \alpha_0\Lambda_8,
\end{aligned}$$

где индекс σ обозначает мультиплет дополнительных векторных и псевдоскалярных мезонов, для которых $\sigma = l_{\text{макс}} - l = 1$; α и α_0 описывают унитарное расщепление; β и β_0 — спиновую зависимость; γ — спин-орбитальную связь; δ соответствует тензорным силам в потенциале двух кварков. Если в этих формулах пренебречь тензорными силами и спин-спиновым взаимодействием ($\beta = \delta = 0$), можно получить сравнительные формулы, хорошо согласующиеся с экспериментом.

Массовые формулы для барионов определяются введением в потенциал взаимодействия кварков для уравнения типа (2.25) членов, содержащих унитарное расщепление, спиновую зависимость и спин-орбитальную связь, а именно

$$W = W_1 (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2) + W_2 (\tau_1\tau_2 + \tau_1\tau_3 + \tau_2\tau_3) + W_3 S_\mu^2 + W_4 (S_\mu S_\nu L_{\mu\nu}),$$

где $S_\mu = \sum_{j=1,\,2,\,3} (s_\mu)_j$; $(s_\mu)_k = \frac{1}{2i} (\gamma_5\gamma_\mu)_k$, $k = 1, 2, 3$; $L_{\mu\nu} =$

$= -i \sum_{j=1,\,2,\,3} \left(y_\mu \frac{\partial}{\partial y_\nu} - y_\nu \frac{\partial}{\partial y_\mu} \right)$; $\boldsymbol{\tau}_j$ — вектор изотопического спина j-кварка; W_i — скалярные функции y_j. Для p-волны получаются массовые формулы вида

$$M^2 = M_0^2 + \alpha Y + \beta T (T + 1) + \text{поправки},$$

а для s-волны

$$M = m_0^2 + \alpha_0 Y + \beta_0 T (T + 1) + \text{поправки},$$

из которых также можно найти сравнительные формулы, хорошо согласующиеся с экспериментом.

Связь с методом когерентных состояний

В последнее время при теоретическом исследовании высокоэнергетического рассеяния адронов имеется определенная тенденция рассматривать адроны в таких столкновениях, как сложные системы с внутренними степенями свободы. В рамках таких представлений находится не только кварковая модель. Сюда можно отнести, например, дроплетную модель [22] и партонную [23], с помощью которых достигнуты определенные успехи в описании высокоэнергетических взаимодействий адронов. В связи с этим большой интерес представляют результаты работы В. А. Матвеева и А. Н. Тавхелидзе [24], основанной на предположении о когерентной природе возбужденных состояний взаимодействующих адронов. Процессы соударения адронов описываются в ней с помощью когерентных волновых функций четырехмерного релятивистского осциллятора.

В работе [25] показано, как можно установить связь кварковых моделей с методом когерентных состояний для высокоэнергетического рассеяния адронов.

Рассмотрим сначала случай мезонов. Будем исходить из уравнения

$$\{p_1^2+p_2^2+V[(x_1-x_2)^2]\}\,\psi(x_1, x_2)=0, \tag{2.26}$$

характеризующего движение кварка (*1*) и антикварка (*2*) в мезоне. Это уравнение соответствует пределу, в котором не учитывается нарушение ни спиновой симметрии, ни U_3. Здесь пользуемся метрикой $g_{00}=1$, $g_{\alpha\alpha}=-1$, $\alpha=1, 2, 3$,

$$p_{j,\alpha}=\mathrm{i}g_{\alpha\alpha}\frac{\partial}{\partial x_{j\alpha}}, \quad \alpha=0, 1, 2, 3.$$

Сделав замену переменных, разделяющую движение мезона как целого и относительное движение кварка — антикварка:

$$x_1=x+\xi, \qquad x_2=x-\xi,$$

получим

$$p_1=\frac{1}{2}\hat{p}+\frac{1}{2}\eta; \quad p_2=\frac{1}{2}\hat{p}-\frac{1}{2}\eta,$$

где *

$$\hat{p}_\alpha=\mathrm{i}g_{\alpha\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}; \quad \eta_\alpha=\mathrm{i}\,g_{\alpha\alpha}\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}.$$

Произведя такую замену, рассмотрим движение мезона как целого, положим

$$\psi(x_1, x_2)=e^{-\mathrm{i}(px)}\,\psi(\xi)$$

и найдем

$$\{M^2+\eta^2+2V(4\xi^2)\}\,\psi(\xi)=0,$$

где $M^2=p^2$ представляет квадрат массы мезона. При решении уравнений такого типа возникает существенная трудность. Рассмотрим, например, простой случай, когда потенциальная функция V соответствует гармоническому осциллятору:

$$2V(4\xi^2)=\omega^2\xi^2+c.$$

Для такого потенциала

$$\left\{M^2+c+\left(-\frac{\partial^2}{\partial\xi_0^2}+\omega^2\xi_0^2\right)-\sum_{\alpha=1}^{3}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\xi_\alpha^2}+\omega^2\xi_\alpha^2\right)\right\}\psi(\xi)=0. \tag{2.27}$$

Видно, что решение будет либо нековариантно, либо ненормируемо в обычном смысле. Имея в виду такую ситуацию, положим

$$\xi_0=\mathrm{i}\xi_4. \tag{2.28}$$

---

* Знак $\hat{p}$ отличает оператор $\mathrm{i}g_{\alpha\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ от фиксированного импульса мезона, который обозначим знаком p.

Считая ξ_4 вещественной переменной, определим норму $\langle\psi, \psi\rangle$ как интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \psi^* (\xi) \psi (\xi) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4.$$

При таком определении нормы решение является нормируемым, для него

$$\langle\psi, \psi\rangle = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega\xi^2} d\xi \right)^4 = \frac{\pi^2}{\omega^2}.$$

Производя в уравнении (2.27) замену ξ (2.28), получаем

$$\left\{ M^2 + c - \sum_{\alpha=1}^{4} \left(-\frac{\partial^2}{\partial\xi_\alpha^2} + \omega^2\xi_\alpha^2 \right) \right\} \psi(\xi) = 0. \tag{2.29}$$

Нетрудно видеть, что в таком случае получаем ковариантную форму волновой функции и положительный эквидистантный спектр для M^2. Введем квантовые амплитуды, характерные для гармонического осциллятора:

$$a_\alpha = \frac{\omega\xi_\alpha + i\eta_\alpha}{\sqrt{2\omega}}; \quad a_\alpha^+ = \frac{\omega\xi_\alpha - i\eta_\alpha}{\sqrt{2\omega}} \Big\} . \tag{2.30}$$

Положив $4c = 4\omega - M_0^2$, запишем уравнение (2.29) в виде

$$\left(M^2 + 2\omega \sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} a_\alpha^+ a_\alpha - M_0^2\right) \psi = 0. \tag{2.31}$$

Как видно, основное состояние системы $\psi = | 0 \rangle$ является, так же как и в работе [24], состоянием с единичной нормой $\langle 0 | 0 \rangle = 1$, характеризуемым соотношением $a_\alpha | 0 \rangle = 0$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

Рассмотрев общее возбужденное состояние, содержащее n квантов

$$\psi = \sum_{\left(\substack{j_1 j_2 \dots j_n \\ j=0,\ 1,\ 2,\ 3}\right)} \mathscr{E}_{j_1, j_2 \dots j_n} a_{j_1}^+ a_{j_2}^+ \dots a_{j_n}^+ | 0 \rangle, \tag{2.32}$$

нетрудно заметить, что норма здесь может оказаться отрицательной. Например, для состояния с одним временны́м квантом:

$$\psi = a_0^+ | 0 \rangle;$$

$$\langle\psi, \psi\rangle = \langle 0 | a_0 a_0^+ | 0 \rangle = \langle 0 | a_0^+ a_0 | 0 \rangle - \langle 0, 0 \rangle = -1.$$

Видно, что интеграция по мнимой оси ξ_0, которая обеспечивает ковариантность и положительность спектра M^2, вызывает отрицательность нормы. Отсюда ясно, что норма состояний (2.32) будет положительна, если в них не содержится ни одного оператора a_0^+ рождения временнóго кванта.

Таким образом, приходим к условию

$$\sum_{\alpha=0}^{3} e_\alpha \mathscr{E}_{\alpha,\, j_2 \ldots j_n} = 0, \tag{2.33}$$

где e — некоторый времениподобный вектор, например $e = p$. Условие (2.33) обеспечивает отсутствие в выражении для ψ временных квантов и тем самым положительность нормы. На условие трансверсальности (2.33) как критерий для отбора физически допустимых состояний указывалось в работе [24].

Перейдем теперь к получению формулы Матвеева — Тавхелидзе для амплитуды рассеяния двух мезонов при высокой энергии. По аналогии с работой [24] выберем операторный потенциал, определяющий такое рассеяние в виде

$$\left.\begin{aligned} W^{(\mathrm{I,\,II})} &= \mathrm{i} \sum_{j=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} G_{j,\,l}^{(\mathrm{I,\,II})} V_{j,\,l}; \qquad V_{j,\,l} = \sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} V_{j,\,l}^{(\alpha)}; \\ V_{j,\,l}^{(\alpha)} &= \hat{p}_\alpha \left(\hat{p}'_\alpha \delta(x_j - x'_l) + \delta(x_j - x'_l)\,\hat{p}'_\alpha\right) + \\ &\quad + \left(\hat{p}'_\alpha \delta(x_j - x'_l) + \delta(x_j - x'_l)\,\hat{p}'_\alpha\right) \hat{p}_\alpha = \\ &= \hat{p}'_\alpha \left(\hat{p}_\alpha \delta(x_j - x'_l) + \delta(x_j - x'_l)\,\hat{p}_\alpha\right) + \\ &\quad + \left(\hat{p}_\alpha \delta(x_j - x'_l) + \delta(x_j - x'_l)\,\hat{p}_\alpha\right) \hat{p}'_\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{2.34}$$

Здесь $\hat{p}$, x_j относятся к первому мезону (I); $\hat{p}'$, x'_l — ко второму (II); $G_{j,l}^{(\mathrm{I,II})}$ — постоянные, характеризующие взаимодействие кварка ($j = 1$) или антикварка ($j = 2$) в первом мезоне с кварком ($l = 1$) или антикварком ($l = 2$) во втором мезоне. Борновская амплитуда рассеяния T определяется матричным элементом $W^{(\mathrm{I,II})}$ потенциала взаимодействия между состояниями:

$$\psi_{\mathrm{I}}\psi_{\mathrm{II}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(px+p'x')}\,|0,\ 0'\rangle;$$

$$\psi^*_{\mathrm{II}}\psi^*_{\mathrm{I}} = \langle 0',\ 0\,|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(qx+q'x')},$$

а именно

$$(2\pi)^4\,\delta(q+q'-p-p')\,T(s,\ t) =$$

$$= \int \langle 0',\ 0\,|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(qx+q'x')} W^{(\mathrm{I,\,II})} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(px+p'x')}\,|0,\ 0'\rangle\, dx\, dx',$$

где $s = (p + p')^2$; $t = (p - q)^2$.

Подставив в (2.34) интегральное представление δ-функции, после несложных вычислений найдем формулу M — T:

$$T(s,\ t) = \mathrm{i}\,(s - u)\,G\mathrm{e}^{t/2\omega},$$

где $G = \sum_{j=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} G_{j,\,l}^{(\mathrm{I,\,II})}$.

Полученные результаты можно обобщить на случай модели барионов. Для этого будем исходить из следующего уравнения:

$$\left\{\sum_{j=1}^{3} p_j^2 + V\left(\frac{(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2}{3}\right)\right\}\psi(x_1, x_2, x_3)=0. \quad (2.35)$$

Для выделения движения барионов как целого и относительного движения введем переменные:

$$\left.\begin{aligned} &x_j = x + \xi_j; \quad \sum_{j=1}^{3}\xi_j = 0;\\ &\xi_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}y; \quad \xi_2 = -\sqrt{\frac{1}{6}}y + \sqrt{\frac{1}{2}}z;\\ &\xi_3 = -\sqrt{\frac{1}{6}}y - \sqrt{\frac{1}{2}}z \end{aligned}\right\} \quad (2.36)$$

и соответствующие импульсы:

$$\hat{p}_\alpha = \mathrm{i}g_{\alpha\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}; \quad \eta_\alpha = \mathrm{i}g_{\alpha\alpha}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}; \quad \zeta_\alpha = \mathrm{i}g_{\alpha\alpha}\frac{\partial}{\partial z_\alpha}.$$

Уравнение (2.35) запишем в виде

$$\left\{\frac{1}{3}\hat{p}^2 + \eta^2 + \zeta^2 + V(y^2+z^2)\right\}\psi = 0. \quad (2.37)$$

Как и в случае мезонов, положим здесь

$$y_0 = \mathrm{i}y_4; \quad z_0 = \mathrm{i}z_4$$

с вещественными y_4, z_4 и определим норму ψ через интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \psi^*(y, z)\,\psi(y, z)\,d_4y\,d_4z.$$

Рассмотрим частный случай осцилляторного потенциала:

$$V(y^2+z^2) = \frac{\omega^2}{4}(y^2+z^2) + c, \quad \omega, \ c = \mathrm{const}$$

и введем соответствующие квантовые амплитуды:

$$a_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\frac{\omega}{2}y_\alpha + \mathrm{i}\eta_\alpha\right); \quad a_\alpha^+ = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\frac{\omega}{2}y_\alpha - \mathrm{i}\eta_\alpha\right);$$

$$b_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\frac{\omega}{2}z_\alpha + \mathrm{i}\zeta_\alpha\right); \quad b_\alpha^+ = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\frac{\omega}{2}z_\alpha - \mathrm{i}\zeta_\alpha\right).$$

С помощью этих амплитуд уравнение (2.37) принимает вид

$$\left\{M^2 - M_0^2 + 3\omega\sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha}(a_\alpha^+ a_\alpha + b_\alpha^+ b_\alpha)\right\}\varphi = 0. \quad (2.38)$$

Видно, что общая форма собственных функций для этого уравнения будет

$$\varphi = \sum_{(j,\ \mu=0,1,2,3)} \mathscr{E}_{j_1\ldots j_r,\ \mu_1\ldots\mu_s} a_{j_1}^+ \ldots a_{j_r}^+ b_{\mu_1}^+ \ldots b_{\mu_s}^+ |0\rangle, \quad (2.39)$$

а соответствующие значения квадрата массы

$$M^2 = 3\omega\,(r + s) + M_0^2.$$

Чтобы обеспечить отсутствие в (2.38) временны́х квантов, в некоторой данной системе отсчета можно написать, как и в случае мезонов, соответствующие условия трансверсальности.

В общем случае потенциала $V\,(y^2 + z^2)$ для получения амплитуды упругого рассеяния двух барионов (или бариона и мезона) предположим, что до соударения обе частицы обладают наименьшей массой в своем спектре, т. е. их состояниями являются $e^{-ipx}\mid 0_{\mathrm{I}}\rangle$; $e^{-ip'x'}\mid 0_{\mathrm{II}}\rangle$, а после соударения $e^{-iqx}\mid 0_{\mathrm{I}}\rangle$; $e^{-iq'x'}\mid 0_{\mathrm{II}}\rangle$.

Для потенциала W, характеризующего рассматриваемое рассеяние, выберем такую же форму (2.34), как и для мезонов. К I частице относятся $\hat{p}$, x_j, ко второй — $\hat{p}'$, x'_l. В случае, если I частица является мезоном, $j = 1, 2$ и

$$x_j = x + \xi_j; \qquad \xi_1 = \xi; \qquad \xi_2 = -\xi,$$

если I частица есть барион, $j = 1, 2, 3$ и $x_j = x + \xi_j$, где ξ_j выражаются через переменные y, z формулами типа (2.36). Вторую частицу будем всегда считать барионом. В этом случае для борновской амплитуды получим

$$T\,(s, t) = i\,(s - u) \sum_{(j,\,l)} G_{j,\,l}^{(\mathrm{I},\,\mathrm{II})} F_{\mathrm{I}}\,(t)\, F_{\mathrm{II}}\,(t), \tag{2.40}$$

где $F\,(k^2) = \langle 0 \mid e^{ik\xi_j} \mid 0\rangle$.

Сравнивая эту формулу с формулой для мезонов, видим, что она относится как к мезон-мезонному, так и мезон-барионному и барион-барионному рассеянию.

Как указано в работе [24], найденную борновскую амплитуду T можно использовать для построения соответствующего квазипотенциала и на основе квазипотенциального уравнения получить более точные выражения для амплитуды рассеяния. Можно, однако, непосредственно воспользоваться формулой (2.40), считая T амплитудой рассеяния, т. е. пренебрегая поправками к борновскому приближению. Тогда, учитывая, что $F_{\mathrm{I}}\,(0) = F_{\mathrm{II}}\,(0) = 1$, получим, как и в работе [24], следующее выражение для полного сечения при высоких энергиях: $\sigma_{tot} = 2 \sum_{j,l} G_{j,l}^{(\mathrm{I},\mathrm{II})}$.

Как видно, здесь можно интерпретировать $2G_{(j,l)}^{(\mathrm{I},\mathrm{II})}$ как полное сечение $\sigma_{tot}^{j,l}$ взаимодействия j-го кварка (антикварка) с l-кварком (антикварком).

В такой интерпретации имеем закон аддитивности:

$$\sigma_{tot} = \sum_{j,\,l} \sigma_{tot}^{(j,\,l)}, \tag{2.41}$$

который ранее был рассмотрен рядом авторов исходя из других соображений. Дискуссия о пределах применимости закона аддитивности и сравнение его с экспериментом были предметом многочисленных работ, поэтому здесь этого касаться не будем. Отметим, однако, что в данной схеме сразу видна необходимость существенного уточнения формул (2.40) и (2.41), так как при их выводе не учитывалась ни спиновая, ни изотопическая структура частицы, а основные уравнения не содержат никаких нарушений симметрии, обусловленных спиновой и изотопической структурами, различием эффективных масс λ- и p, n-кварков. Если все же использовать (2.40), то, так как дифференциальное сечение упругого рассеяния при $s \to \infty$ пропорционально

$\left| \sum\limits_{j,l} G_{j,l}^{(\mathrm{I},\mathrm{II})} F_{\mathrm{I}}(t) F_{\mathrm{II}}(t) \right|^2$, получим соотношение

$$\frac{d\sigma_{el}}{dt} = \left(\frac{d\sigma_{el}}{dt}\right)_{t=0} F_{\mathrm{I}}^2(t) F_{\mathrm{II}}^2(t). \tag{2.42}$$

Здесь, как следует из работ [13, 18], функции $F_{\mathrm{I}}(t)$, $F_{\mathrm{II}}(t)$ соответствуют электромагнитным форм-факторам сталкивающихся I, II частиц. Соотношение (2.42), найденное на основе других соображений, приводится в монографии Коккеди [26]. Там же имеются аналоги формулы (2.40), в которых вместо постоянных $G_{j,l}$ стоят функции $g_{j,l}(t)$. Такое обобщение нетрудно получить и в данной схеме. Для этого достаточно вместо δ-образного закона взаимодействия кварков взять размазанное взаимодействие, положив

$$W = \mathrm{i} \sum_{j,l,\alpha} g_{\alpha\alpha} V_{j,l}^{(\alpha)}; \quad V_{j,l}^{(\alpha)} = \hat{p}_\alpha (\hat{p}'_\alpha \Phi_{j,l}(x_j - x'_l) +$$
$$+ \Phi_{j,l}(x_j - x'_l) \hat{p}'_\alpha) + (\hat{p}'_\alpha \Phi_{j,l}(x_j - x'_l) + \Phi_{j,l}(x_j - x'_l) \hat{p}'_\alpha) \hat{p}_\alpha,$$

где

$$\Phi_{j,l}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int g_{j,l}(k^2) e^{\mathrm{i}kx} dk.$$

Тогда, дословно повторяя такие вычисления, вместо (2.40) получаем

$$T(s, t) = \mathrm{i}(s - u) \sum_{j,l} g_{j,l}(t) F_{\mathrm{I}}(t) F_{\mathrm{II}}(t).$$

Рассмотрим еще одну возможную форму операторного потенциала W, которая для упругого рассеяния частиц приводит к тому же результату (2.40), что и форма (2.34). Предлагаемое изменение состоит в замене в (2.34) полных импульсов частиц $\hat{p}$, $\hat{p}'$ индивидуальными импульсами кварков p_j, p'_l:

$$\widetilde{W}^{(\mathrm{I},\mathrm{II})} = \mathrm{i} \sum_{j,l} G_{j,l}^{(\mathrm{I},\mathrm{II})} N^{(\mathrm{I})} N^{(\mathrm{II})} \widetilde{V}_{j,l}; \quad \widetilde{V}_{j,l} = \sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} V_{j,l}^{(\alpha)};$$
$$V_{j,l}^{(\alpha)} = p_{j,\alpha} (p'_{l,\alpha} \delta(x_j - x'_l) + \delta(x_j - x'_l) p'_{l,\alpha}) +$$
$$+ (p'_{l,\alpha} \delta(x_j - x'_l) + \delta(x_j - x'_l) p'_{l,\alpha}) p_{j,\alpha}, \tag{2.43}$$

где N — нормировочные множители; $N = 2$, если частица является мезоном; $N = 3$, если частица является барионом. Можно доказать, что потенциал (2.43) приводит к той же борновской амплитуде T для упругого рассеяния, что и потенциал (2.34). Отметим, что потенциал $\widetilde{W}$ можно рассматривать как взаимодействие через кварковые токи. Действительно, подставляя в (2.43) выражение для четырехмерной δ-функции

$$\delta(x_j - x'_l) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ik(x_j - x'_l)}\, dk,$$

получаем

$$\widetilde{W} = i \sum_{j,l} \frac{G_{j,l}^{(I,II)} N^{(I)} N^{(II)}}{(2\pi)^4} \int (p_j e^{ikx_j} + e^{ikx_j} p_j)(p'_l e^{-ikx'_l} + e^{-ikx'_l} p'_l)\, dk. \tag{2.44}$$

Введем четырехмерные плотности тока j-го кварка

$$I_j(X) = \frac{N}{2} \{p_j \delta(X - x_j) + \delta(X - x_j) p_j\}, \tag{2.45}$$

откуда имеем

$$\int I_j(X)\, dX = N p_j.$$

В случае мезона

$$N \langle 0 \mid p_j \mid 0 \rangle = 2 \langle 0 \mid p_j \mid 0 \rangle = 2 \langle 0 \mid p_1 + p_2 \mid 0 \rangle = \hat{p},$$

а в случае бариона

$$N \langle 0 \mid p_j \mid 0 \rangle = 3 \langle 0 \mid p_j \mid 0 \rangle = \langle 0 \mid p_1 + p_2 + p_3 \mid 0 \rangle = \hat{p}.$$

Как видно, нормировочный коэффициент N выбран так, чтобы

$$\langle 0 | \int I_j(X)\, dX | 0 \rangle = \hat{p}.$$

Рассмотрим фурье-компоненты от введенной четырехмерной плотности тока (2.45):

$$J_j^{(I)}(k) = \int I_j^{(I)}(X) e^{ikX}\, dX = \frac{1}{2} N^{(I)} (p_j e^{ikx_j} + e^{ikx_j} p_j). \tag{2.46}$$

Тогда (2.44) можно представить в виде

$$\widetilde{W}^{(I,II)} = i \sum_{j,l} G_{j,l}^{(I,II)} \int J_j^{(I)}(k) J_l^{(II)}(-k)\, dk.$$

Но из (2.46) следует, что $J_j^{(I)}(k)$, $J_l^{(II)}(-k)$ будут пропорциональны соответственно e^{ikx} и $e^{-ikx'}$. С другой стороны, борновская амплитуда T упругого рассеяния I и II частиц, которые до соударения обладали импульсами p, p', а после соударения — q, q', определяется матричным компонентом Фурье формы $\widetilde{W}^{(I,II)}$, стоящим при $e^{ik(x-x')}$, $k = p - q = q' - p'$.

Таким образом, соответствующий оператор будет

$$i\frac{4}{(2\pi)^4}\sum_{j,\,l} G_{j,\,l}^{(\mathrm{I},\,\mathrm{II})} J_j^{(\mathrm{I})}(k)\, J_l^{(\mathrm{II})}(-k). \tag{2.47}$$

В специальной системе отсчета, когда

$$k^0 = 0, \tag{2.48}$$

оператор (2.47), матричный элемент которого определяет форму амплитуды T, примет форму

$$i\frac{4}{(2\pi)^4}\sum_{j,\,l} G_{j,\,l}^{(\mathrm{I},\,\mathrm{II})} J_j^{(\mathrm{I})}(\mathbf{k})\, J_l^{(\mathrm{II})}(-\mathbf{k}), \tag{2.49}$$

где $J_j^{(\mathrm{I})}(\mathbf{k}) = J_j^{(\mathrm{I})}(0,\,\mathbf{k}) = \frac{N^{(\mathrm{I})}}{2}\left(p_j e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_j} + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_j} p_j\right);$

$$J_l^{(\mathrm{II})}(-\mathbf{k}) = J_l^{(\mathrm{II})}(0,\,-\mathbf{k}) = \frac{N^{(\mathrm{II})}}{2}\left(p'_l e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}'_l} + e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}'_l} p'_l\right)$$

или

$$J_j^{(A)}(\mathbf{k}) = \int e^{-i\mathbf{k}X} I_j^{(A)}(\mathbf{X})\, d\mathbf{X}, \quad A = \mathrm{I},\ \mathrm{II},$$

причем

$$\left.\begin{aligned} I_j^{(\mathrm{I})}(\mathbf{X}) &= \frac{N^{(\mathrm{I})}}{2}\{p_j\delta(\mathbf{X}-\mathbf{x}_j) + \delta(\mathbf{X}-\mathbf{x}_j)\, p_j\}; \\ I_l^{(\mathrm{II})}(\mathbf{X}) &= \frac{N^{(\mathrm{II})}}{2}\{p'_l\delta(\mathbf{X}-\mathbf{x}'_l) + \delta(\mathbf{X}-\mathbf{x}'_l)\, p'_l\}. \end{aligned}\right\} \tag{2.50}$$

Как видно, операторы (2.50) могут рассматриваться как обычные трехмерные плотности кварковых токов.

Таким образом, в специальной системе отсчета (2.48) амплитуда T определяется соответствующим матричным элементом оператора (2.49), являющегося линейной комбинацией от произведений фурье-компонент трехмерных плотностей (2.50) кварковых токов. Выражения (2.50), однако, построены по образцу плотностей токов скалярных частиц, какими, вероятно, нельзя считать кварки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fermi E., Yang C. N. Phys. Rev., 1949, **76**, 1739.
2. Марков М. А. Гипероны и K-мезоны. М., Физматгиз, 1958; Sakata S. Progr. Theor. Phys., 1956, **16**, 686.
3. Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н. Препринт ОИЯИ Д-1968, Дубна, 1965.
4. Bogolioubov P. N. Ann. Ins. Henri Poincaré, 1968, VIII, 2.
5. Greenberg O. W. Phys. Rev., Lett., 1964, **13**, 598.
6. Lipkin H. J., Tavkhelidze A. N. Preprint ICTP, IC/65/54, Trieste, 1965.

7. Боголюбов П. Н. Препринт ОИЯИ Р-2569, Дубна, 1966.
8. Боголюбов Н. Н. и др. Препринт ОИЯИ Р-2141.
9. Струминский Б. В. Препринт ОИЯИ Р-1939, Дубна, 1965.
10. Gatto R., Maiani L., Preparata G. Phys. Rev., Lett., 1966, **16**, 377; Harari H. Preprint SLAC, Feb., 1966.
11. Gell-Mann M. Preprint CALTEN, Oct., 1966.
12. Струминский Б. В. Препринт ИТФ 68-48, Киев, 1968.
13. Боголюбов Н. Н. и др. Препринт ОИЯИ Д-2075, 1965.
14. Боголюбов П. Н. Препринт ОИЯИ Р-2098, 1965.
15. Боголюбов П. Н. «Ядерная физика», 1967, № 2.
16. Wick. Phys. Rev., 1954, **96**, 1124.
17. Beg M. A. B., Pais A. Phys. Rev., Lett., 1965, **14**, 267.
18. Боголюбов П. Н. Препринт ОИЯИ Р-2186, Дубна, 1965.
19. Кулешов С. П. Препринт ОИЯИ Р2-3353, Дубна, 1967.
20. Боголюбов П. Н. Препринт ОИЯИ Р2-4418, Дубна, 1969.
21. Боголюбов П. Н., Матвеев В. А., Струминский Б. В. Препринт ОИЯИ Р-2442, Дубна, 1965.
22. Byers N., Yang C. N. Phys. Rev., 1966, **142**, 976.
23. Feynman R. P. Phys. Rev., Lett., 1969, **23**, 1415.
24. Matveev V. A., Tavkhelidze A. N. Preprint JINR E2-5141, Dubna, 1970.
25. Боголюбов П. Н. Препринт ОИЯИ Р2-5682, Дубна, 1971.
26. Kokkedee J. J. The quark model in particle physics, W. N. Y., Benjamin.