

УДК 539.171.5

ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПОВЕДЕНИЕ СЕЧЕНИЙ УПРУГИХ И НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ. II*.

**А. А. Логунов,
М. А. Мествиришвили,
О. А. Хрусталев**

Институт физики высоких энергий,
Серпухов

Во второй части обзора широко используется понятие эффективного радиуса взаимодействия. Устанавливаются ограничения на поведение сечений упругих и неупругих процессов и рассматривается вопрос о равенстве полных сечений взаимодействия частиц и античастиц. На основании условия унитарности и аналитичности получены важные выводы о поведении дифференциального сечения множественного рождения с ростом энергии в области больших углов рождения.

In the second part of the review a notion of interaction effective radius is widely used. Limitations of the behaviour of elastic and inelastic processes have been established. Besides problem of equality of the total cross sections for interaction of particles with antiparticles is being considered. On the basis of unitary and analyticity conditions very important conclusions on behaviour of differential cross-section for multiparticle production with the energy increase in the range of large production angles have been obtained.

4. КОРОТКОДЕЙСТВИЕ ЯДЕРНЫХ СИЛ И ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПОВЕДЕНИЕ СЕЧЕНИЙ УПРУГИХ И НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ

Эффективный радиус взаимодействия [1, 2]

Для описания взаимодействия при высоких энергиях введем понятие эффективного радиуса. Для этой цели напомним, что если бы мы рассматривали задачу рассеяния на потенциале вида $U(r) = U_0$ при $r \leq a$ и $U(r) = 0$ при $r > a$, то мы нашли бы, что в амплитуду рассеяния дают вклад лишь парциальные волны с $l < ka$, где k — импульс частицы.

* Первая часть была опубликована в журнале ЭЧАЯ, т. 3, вып. 1, с. 3, 1972.

Отсюда видно, что конечность радиуса действия сил проявляется в своеобразном обрезании парциальных волн на l_0 , где $l_0 = ka$.

Взаимодействие частиц при высоких энергиях также должно иметь короткодействующий характер, поскольку возможные частицы обмена имеют массу, отличную от нуля. Наименьшая масса частиц обмена есть масса π -мезона. Короткодействующий характер сильных взаимодействий, как и в простейшем примере, рассмотренном выше, должен проявиться в обрезании вклада парциальных волн, т. е. в амплитуду рассеяния суммарный вклад парциальных волн свыше некоторого l_0 должен быть пренебрежимо мал. В полном соответствии с классической картиной определим эффективный радиус взаимодействия как отношение

$$r_0(s) = l_0/k. \quad (4.1)$$

Заметим, что эффективный радиус $r_0(s)$ не должен являться постоянной величиной; он может зависеть от энергии.

Существуют ли какие-нибудь ограничения, следующие из принципов теории, на поведение эффективного радиуса? Оказывается, что такие ограничения существуют. В этом легко убедиться, если вспомнить (см. гл. 3, первая часть статьи опубликована в ЭЧАЯ, 1972, т. 3, вып. 1), что

$$|f_l(s)| \leq \frac{R(s)}{\sqrt{l}} \exp[-4lm_\pi/\sqrt{s}]. \quad (4.2)$$

Отсюда видно, что вклад от парциальных волн свыше

$$l_{\text{макс}} = \sqrt{s} \ln R(s)/4m_\pi \quad (4.3)$$

будет пренебрежимо мал в области высоких энергий.

Таким образом,

$$r_0(s) \leq \ln R(s)/2m_\pi. \quad (4.4)$$

Если воспользоваться неравенством Буняковского — Шварца в разложении амплитуды рассеяния по парциальным волнам (см. гл. 3), то легко получить

$$\frac{1}{2} r_0(s) \geq \sqrt{\left. \frac{d\sigma_{el}}{dt} \right|_{t=0} / \sigma_{el}}. \quad (4.5)$$

В правую сторону неравенства (4.5) входят экспериментально наблюдаемые величины, следовательно, изучение этой величины поможет ответить на вопрос о зависимости эффективного радиуса от энергии.

Короткодействующий характер сильных взаимодействий явился следствием неравенства (4.2), которое получено в гл. 3, исходя из аналитичности амплитуды рассеяния по $\cos \theta$ в эллипсе Мар-

тена. Таким образом, аналитичность в плоскости $\cos \theta$ будет по существу математическим отражением того фундаментального физического факта, что переносчиками сильного взаимодействия являются частицы с массой, отличной от нуля.

Ограничения на поведение сечений упругих и неупругих процессов [3—6]

Исходя из неравенства (4.2) и учитывая соотношение унитарности, можно получить ограничение на возможный рост полного сечения взаимодействия от энергии. Как известно,

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{1}{2k\sqrt{s}} \operatorname{Im} F(s, \cos \theta) |_{\theta=0}. \quad (4.6)$$

Разлагая мнимую часть амплитуды по парциальным волнам и учитывая (4.2), получаем

$$\sigma_{tot}(s) \leq \frac{4\pi}{m_\pi^2} \ln^2 \frac{s}{s_0}, \quad (4.7)$$

где s_0 — некоторая неопределенная постоянная. При получении (4.7) было учтено, что степень роста амплитуды упругого процесса не превышает двух (см. гл. 3).

Наличие ограничения для возможного роста полного сечения взаимодействия не является удивительным, поскольку оно будет прямым следствием короткодействующего характера сильных взаимодействий. Действительно, ввиду ограниченности эффективного радиуса величиной (4.4) полное квантовомеханическое сечение, равное $4\pi r_0^2$, также ограничено неравенством (4.7). Неравенство вида (4.7) впервые получено Фруассаром [5].

Более точные оценки, проведенные в работе [7], дают

$$\sigma_{tot}(s) \leq \frac{\pi}{m_\pi^2} \ln^2 \frac{s}{\sigma_{el}}. \quad (4.8)$$

Используя неравенства (4.5) и (4.4), найдем ограничение на поведение дифференциального сечения упругого рассеяния вперед:

$$\left. \frac{d\sigma_{el}(s)}{dt} \right|_{t=0} \leq \frac{1}{4m_\pi^2} \sigma_{el}(s) \ln^2 \frac{s}{s_0}. \quad (4.9)$$

Уточненная оценка, проведенная в работе [7], дает

$$\left. \frac{d\sigma_{el}}{dt} \right|_{t=0} \leq \frac{1}{16m_\pi^2} \sigma_{el}(s) \ln^2 \frac{s}{\sigma_{el}}. \quad (4.10)$$

Учитывая (4.8), из неравенства (4.10) имеем

$$\left. \frac{d\sigma_{el}}{dt} \right|_{t=0} \leq \frac{\pi}{16m_\pi^4} \ln^4 \frac{s}{\sigma_{el}}. \quad (4.11)$$

Перейдем теперь к нахождению оценки возможного роста дифференциального сечения неупругого процесса. Полагая в выражении (3.111) (см. ЭЧАЯ, 1972, т. 3, вып. 1) $\theta = 0$, получаем

$$\frac{d\sigma_{inel}^{j, cd}}{d \cos \theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{2\pi}{p_a^2} \sum_{l, l'=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) \int d\Gamma T_{l'}^{*0}(s, \xi_i) T_{l'}^0(s, \xi_i). \quad (4.12)$$

Используя неравенство Буняковского — Шварца, найдем

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{inel}^{j, cd}}{d \cos \theta} \Big|_{\theta=0} \leq \frac{2\pi}{p_a^2} \sum_{l, l'=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) \sqrt{\int d\Gamma \sum_{m=-l}^l |T_l^m|^2} \times \\ \times \sqrt{\int d\Gamma \sum_{m=-l'}^{l'} |T_{l'}^m|^2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Заметим, что

$$\sigma_{inel}^{j, cd}(s) = \frac{4\pi}{p_a^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int d\Gamma \sum_{m=-l}^l |T_l^m(s, \xi_i)|^2. \quad (4.14)$$

Применяя условие унитарности и неравенство (4.2), имеем

$$\frac{d\sigma_{inel}^{j, cd}}{d \cos \theta} \Big|_{\theta=0} \leq \frac{s}{8m_\pi^2} \sigma_{inel}^{j, cd}(s) \ln^2(s/s_0), \quad (4.15)$$

аналогично получается и неравенство

$$\frac{d\sigma_{inel}^{j, c}}{d \cos \theta} \Big|_{\theta=0} \leq \frac{s}{8m_\pi^2} \sigma_{inel}^{j, c}(s) \ln^2(s/s_0), \quad (4.16)$$

или просуммировав по всем каналам j , содержащим частицу c , находим

$$\frac{d\sigma_{inel}^c}{d \cos \theta} \Big|_{\theta=0} \leq \frac{s}{8m_\pi^2} \sigma_{inel}^c \ln^2(s/s_0). \quad (4.17)$$

Используя (4.7), из неравенства (4.17) имеем

$$\frac{d\sigma_{inel}^c}{d \cos \theta} \Big|_{\theta=0} \leq \frac{\pi s}{2m_\pi^4} \ln^4(s/s_0). \quad (4.18)$$

Следует заметить, что при получении неравенств (4.15) и (4.17) мы не вводили предположения относительно степени роста по s амплитуды неупругого процесса. Во все эти оценки вошла лишь степень роста амплитуды соответствующего упругого процесса.

Рассмотрим, какие ограничения следуют из неравенств (4.9) и (4.17) для ширины дифракционного пика упругого и неупру-

того процессов. Для этой цели введем следующие определения ширины пика [8]:

$$\Delta_{el} = s\sigma_{el} / \left. \frac{d\sigma_{el}}{d \cos \theta} \right|_{\theta=0}; \quad \Delta_{inel} = s\sigma_{inel} / \left. \frac{d\sigma_{inel}}{d \cos \theta} \right|_{\theta=0}. \quad (4.19)$$

Из неравенств (4.9) и (4.17) находим:

$$\Delta_{el}(s) \geq 8m_{\pi}^2 / \ln^2 s / s_0; \quad \Delta_{inel} \geq 8m_{\pi}^2 / \ln^2 (s/s_0). \quad (4.20)$$

Согласно определению F (см. гл. 3), дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma_{el}}{d \cos \theta} = \frac{1}{32\pi s} |F(s, \theta)|^2. \quad (4.21)$$

Но так как

$$\text{Im } F(s, 0) = 2k \sqrt{s} \sigma_{tot},$$

то неравенство (4.5) можно записать для больших s в виде

$$[\text{Re } F(s, 0) / \text{Im } F(s, 0)]^2 + 1 \leq 4\pi r_0^2(s) \frac{\sigma_{el}(s)}{\sigma_{tot}^2(s)}. \quad (4.22)$$

В частности, из неравенств (4.22) и (4.4) следует, что

$$\sigma_{el}(s) \geq \frac{m_{\pi}^2}{4\pi} \cdot \sigma_{tot}^2(s) / \ln^2(s/s_0). \quad (4.23)$$

Если полное сечение стремится с ростом s к постоянному пределу, то полное упругое сечение, как это вытекает из (4.23), не может убывать быстрее, чем $\text{const } \ln^{-2}(s/s_0)$.

Неравенство (4.22) будет использовано в дальнейшем для анализа поведения отношения реальной части амплитуды к мнимой части с ростом энергии.

О равенстве полных сечений взаимодействия частиц и античастиц при высоких энергиях [9, 10—14]

В работе [9], исходя из дисперсионных соотношений, было показано, что если взаимодействие происходит в области, размеры которой определяются комптоновской длиной π -мезона, а полные сечения взаимодействия процессов $a + b$ и $\bar{a} + b$ стремятся с ростом s к постоянным пределам, отличным от нуля, то эти предельные сечения совпадают. Повторим ход рассуждений работы Померанчука.

Рассмотрим процессы упругого рассеяния π^+ -мезона (частица) на нуклоне:



и π^- -мезона (античастица) на нуклоне:

$$\pi^- + N \rightarrow \pi^- + N. \quad (\text{VIII})$$

Обозначим амплитуды этих процессов соответственно через $F^{(+)}(s, 0)$ и $F^{(-)}(s, 0)$. Если предположить, что взаимодействие происходит в области, размеры которой не превышают длину волны π -мезона, то

$$|F^{(\pm)}(s, 0)| \leq \frac{8\pi \sqrt{s}}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |f_l(s)| \leq \frac{4\pi}{m_\pi^2} s. \quad (4.24)$$

Заметим, что в данном случае в амплитуду рассеяния дают вклад лишь парциальные волны с

$$l \leq \sqrt{s}/2m_\pi. \quad (4.25)$$

Для амплитуд процессов (VII) и (VIII) в области больших s можно написать дисперсионные соотношения в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F^{(\pm)}(s, 0) = & sd_\pm + \\ & + \frac{s^2}{\pi} \int_{2Mm_\pi}^{\infty} \frac{ds'}{\sqrt{s'-4M^2m_\pi^2}} \left[\frac{\sigma_{tot}^{(\pm)}(s')}{s'-s} + \frac{\sigma_{tot}^{(\mp)}(s)}{s'+s} \right], \end{aligned} \quad (4.26)$$

где d_\pm — некоторые постоянные, равные

$$d_\pm = \frac{1}{4Mm_\pi} [\operatorname{Re} F^{(\pm)}(s_0, 0) - \operatorname{Re} F^{(\mp)}(s_0, 0)] \pm 2f^2/m_\pi^2; \quad (4.27)$$

f — постоянная связи; $s_0 = (M + m_\pi)^2$. Если предположить, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma_{tot}^{(\pm)}(s) = \sigma_{tot}^{(\pm)}(\infty) \neq 0, \quad (4.28)$$

то из (4.26) найдем следующее асимптотическое поведение реальных частей амплитуд процессов (VII) и (VIII):

$$\operatorname{Re} F^{(\pm)}(s, 0) \approx s \ln s [\sigma_{tot}^{(\mp)}(\infty) - \sigma_{tot}^{(\pm)}(\infty)] (1/\pi). \quad (4.29)$$

Сравнивая (4.24) и (4.29), И. Я. Померанчук установил, что полные сечения взаимодействия частиц и античастиц на одинаковой мишени при сделанных выше предположениях в асимптотической области равны, т. е.

$$\sigma_{tot}^{(+)}(\infty) = \sigma_{tot}^{(-)}(\infty). \quad (4.30)$$

Обратим внимание еще и на следующее обстоятельство. Представив $\sigma_{tot}^{(\pm)}(s)$ в виде суммы

$$\sigma_{tot}^{(\pm)}(s) = \sum_n \sigma_n^{(\pm)}(s),$$

где $\sigma_n^{(+)}(s)$ — сечение n -го канала; $\sigma_n^{(-)}$ — сечение соответствующего кроссинг-канала, запишем реальную часть упругого процесса в виде [см. (4.26)]

$$\operatorname{Re} F^{(\pm)}(s, 0) - sd_{\pm} = \sum_n \operatorname{Re} F_n^{(\pm)}(s, 0),$$

где

$$\operatorname{Re} F_n^{(\pm)}(s, 0) = \frac{s^2}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{\sqrt{s' - 4M^2 m_{\pi}^2}} \left[\frac{\sigma_n^{(\pm)}(s')}{s' - s} + \frac{\sigma_n^{(\mp)}(s')}{s' + s} \right].$$

Предположим, что при $s \rightarrow \infty$ $\sigma_n^{(\pm)}(s) = \sigma_n^{(\pm)}(\infty) \neq 0$. Тогда в асимптотической области

$$\operatorname{Re} F_n^{(\pm)}(s, 0) \approx \frac{1}{\pi} s \ln s [\sigma_n^{(\mp)}(\infty) - \sigma_n^{(\pm)}(\infty)].$$

Допустим $\sigma_n^{(\mp)}(\infty) - \sigma_n^{(\pm)}(\infty) \neq 0$, тогда если эффективный радиус взаимодействия постоянен [см. (4.25)], то $\operatorname{Re} F^{(\pm)}$ не может возрастать быстрее чем $s4\pi/m_{\pi}^2$ [см. (4.24)], и поэтому среди возможных каналов обязательно существует канал n_1 или несколько каналов, дающих в $\operatorname{Re} F^{(\pm)}$ вклад вида $\operatorname{Re} F_{n_1}^{(\pm)} \approx -\operatorname{Re} F_n^{(\pm)}$ или $\sum_{\nu} \operatorname{Re} F_{n_{\nu}}^{(\pm)} \approx -\operatorname{Re} F_n^{(\pm)}$, т. е.

$$(\sigma_{n_1}^{(\mp)}(\infty) - \sigma_{n_1}^{(\pm)}(\infty)) = \sigma_n^{(\pm)}(\infty) - \sigma_n^{(\mp)}(\infty)$$

или

$$\sum_{\nu} [\sigma_{n_{\nu}}^{(\mp)}(\infty) - \sigma_{n_{\nu}}^{(\pm)}(\infty)] = \sigma_n^{(\pm)}(\infty) - \sigma_n^{(\mp)}(\infty).$$

При получении (4.30) существенным было предположение (4.25). Это предположение является достаточно сильным. Оно не вытекает из принципов теории и для ряда процессов, о чем свидетельствуют экспериментальные данные, не выполняется.

В настоящем разделе, основываясь на принципах теории, сформулируем те физические условия, при которых сечения стремятся к одинаковым пределам, а также рассмотрим возможные режимы, при которых эти сечения не совпадают.

Неравенство (4.22) для амплитуды процесса (VII) можно записать в виде [14]

$$\frac{1}{\ln^2(s/s_0)} \left[\frac{|\operatorname{Re} F^{(+)}(s, 0)|}{\operatorname{Im} F^{(+)}(s, 0)} \right]^2 + \frac{1}{\ln^2(s/s_0)} \leq 4\pi \frac{[r_0^{(+)}(s)]^2}{\ln^2(s/s_0)} \cdot \frac{\sigma_{el}^{(+)}(s)}{[\sigma_{tot}^{(+)}(s)]^2}, \quad (4.31)$$

аналогичное неравенство [можно написать и для амплитуды $F^{(-)}(s, 0)$].

Утверждение I. Если одно из сечений (например, $\sigma_{tot}^{(+)}(s)$) не убывает с ростом s , то и сечение $\sigma_{tot}^{(-)}(s)$ не может убывать с ростом энергии.

Действительно, если $\sigma_{tot}^{(-)}(s)$ убывает с увеличением s , тогда из дисперсионного соотношения (4.26) вытекает, что асимптотика реальных частей амплитуд $F^{(\pm)}$ будет определяться только сечением $\sigma_{tot}^{(+)}(s)$, а следовательно, получим, что в асимптотической области $\text{Re } F^{(-)}(s)$ растет не медленнее, чем $s \ln s$. Символически запишем

$$\text{Re } F^{(-)}(s) \geq s \ln s. \quad (4.32)$$

Подставляя (4.32) в (4.31), приходим к противоречию. Таким образом, сечение $\sigma_{tot}^{(-)}(s)$ не может убывать, если сечение $\sigma_{tot}^{(+)}(s)$ не убывает с ростом s . Отсюда следует, что если сечение $|\text{например, } \sigma_{tot}^{(+)}(s)|$ убывает, то и сечение $\sigma_{tot}^{(-)}(s)$ также убывает.

Утверждение II. Если одно из полных сечений [например $\sigma_{tot}^{(+)}(s)$] возрастает с увеличением s , то и другое сечение $\sigma_{tot}^{(-)}(s)$ также должно возрастать. Действительно, если $\sigma_{tot}^{(+)}(s)$ возрастает с увеличением s , а $\sigma_{tot}^{(-)}(s)$ стремится к постоянной, отличной от нуля, то асимптотика реальных частей амплитуд реакций (VII) и (VIII) будет определяться поведением сечения $\sigma_{tot}^{(+)}(s)$, а следовательно, $\text{Re } F^{(-)}(s, 0)$ должна возрастать быстрее, чем $s \ln s$, т. е. символически:

$$\text{Re } F^{(-)}(s, 0) \geq s \ln s, \quad (4.33)$$

а это значит, что функция $\Psi^{(-)}(s) = \frac{\text{Re } F^{(-)}(s, 0)}{\ln(s/s_0) \text{Im } F^{(-)}(s, 0)}$ будет возрастать с увеличением s , что противоречит неравенству типа (4.31) для амплитуды $F^{(-)}(s, 0)$. Итак, если сечение $\sigma_{tot}^{(+)}(s)$ возрастает с увеличением энергии, то и сечение $\sigma_{tot}^{(-)}(s)$ также должно возрастать. Поэтому, если одно из сечений (например, $\sigma_{tot}^{(+)}(s)$) стремится к постоянной, отличной от нуля, то и сечение $\sigma_{tot}^{(-)}(s)$ также должно стремиться к постоянной, отличной от нуля.

Утверждения I и II носят общий характер и не связаны с какими-либо частными модельными представлениями о структуре сильных взаимодействий. Они являются следствиями основных постулатов теории, таких, как причинность, унитарность и полиномиальная ограниченность амплитуды рассеяния. Если бы экспериментальные данные противоречили таким утверждениям, то это свидетельствовало бы о нарушении принципов теории.

Утверждение III. Покажем теперь, что если полное сечение $\sigma_{tot}^{(+)}(s)$ не убывает, а величина

$$\Psi^{(+)}(s) = \frac{\text{Re } F^{(+)}(s, 0)}{\ln(s/s_0) \text{Im } F^{(+)}(s, 0)} \quad (4.34)$$

с ростом s стремится к постоянному пределу, отличному от нуля, то и величина

$$\Psi^{(-)}(s) = \frac{\text{Re } F^{(-)}(s, 0)}{\ln(s/s_0) \text{Im } F^{(-)}(s, 0)} \quad (4.35)$$

также должна стремиться к постоянному пределу, отличному от нуля.

Действительно, если $\Psi^{(+)}(s)$ стремится к постоянному пределу, отличному от нуля, то из неравенства (4.31) следует, что $\sigma_{tot}^{(+)}(s)$ тоже должно стремиться к постоянному пределу с ростом s . Отсюда в силу утверждения II полное сечение $\sigma_{tot}^{(-)}(s)$ также должно стремиться к постоянному пределу, отличному от нуля.

Так как сечения $\sigma_{tot}^{(\pm)}$ имеют постоянный предел, то можно воспользоваться выражением (4.29) и на основании условия, что $\Psi^{(+)}(s)$ стремится к постоянному пределу, отличному от нуля, сделать вывод:

$$\sigma_{tot}^{(+)}(\infty) \neq \sigma_{tot}^{(-)}(\infty),$$

а следовательно, на основании (4.29) придем к выводу, что $\Psi^{(-)}(s)$ также стремится к постоянному пределу, отличному от нуля.

Утверждение IV. Если одно из полных сечений взаимодействия (например, $\sigma_{tot}^{(+)}(s)$) не убывает с ростом s , а одна из функций (например, $\Psi^{(-)}(s)$) убывает с ростом s , то $\Psi^{(+)}(s)$ также должна убывать при s , стремящемся к бесконечности.

Действительно, если $\sigma_{tot}^{(+)}(s)$ не убывает с ростом s , то, согласно утверждению I, $\sigma_{tot}^{(-)}(s)$ также не убывает. Отсюда на основании неравенства (4.31) следует, что функции $\Psi^{(\pm)}(s)$ не могут возрастать с увеличением s . Но так как $\Psi^{(-)}(s)$ по условию убывает, то, согласно утверждению III, функция $\Psi^{(+)}(s)$ также должна убывать с ростом s .

Перейдем теперь к изучению поведения разности между сечениями $\sigma_{tot}^{(+)}(s)$ и $\sigma_{tot}^{(-)}(s)$ с ростом s . Для этой цели остановимся вначале на некоторых свойствах аналитических функций.

Теорема [12, 15].

Пусть $g(s)$ — аналитическая функция по s в верхней полуплоскости вне полукруга некоторого радиуса и пусть она удовлетворяет условиям:

а) кроссинг-симметрии

$$g(s) = g^*(-s); \quad (4.36)$$

б) при s , стремящемся к бесконечности,

$$|g(s)| \text{ стремится к нулю}; \quad (4.37)$$

в) пусть в окрестности точки $s \rightarrow \infty$ функция $g(s)$ не имеет нулей и пусть, начиная с некоторого вещественного значения s , мнимая часть функции $g(s)$ также не обращается в нуль, кроме как в точке $s \rightarrow \infty$;

г) при вещественных значениях $s \geq s_0$ для функции имеет место неравенство

$$|\operatorname{Im} g(s)| \geq \operatorname{const} |\operatorname{Re} g(s)|^\nu, \quad (4.38)$$

где $\nu > 1$.

Тогда на основании теоремы Неванлинны [16] имеет место следующее:

$$|\operatorname{Im} g(s)| \leq \frac{|\operatorname{Im} g(s_0)|}{[1 + c \ln(s/s_0)]^{\nu/(\nu-1)}}. \quad (4.39)$$

Здесь $c = \frac{\nu-1}{4} \cdot \frac{a}{b} \left(\frac{\operatorname{Im} g(s_0)}{a} \right)^{(\nu-1)/\nu}$; a и b — некоторые постоянные.

Границу области, где выполняется (4.38), зададим уравнениями

$$\operatorname{Im} g = \pm a \left(\frac{\operatorname{Re} g}{b} \right)^\nu. \quad (4.40)$$

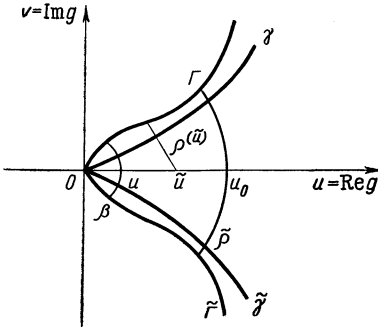


Рис. 11. Образ внешней части полукруга $\operatorname{Im} g \geq 0$, $|s| \geq s_0$ в плоскости $g(s)$.

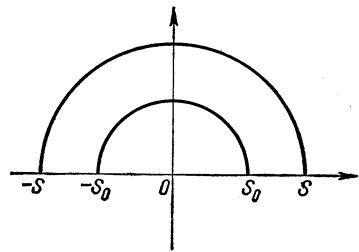


Рис. 12. Полукольцо D в плоскости s .

Эти кривые обозначим через γ и $\tilde{\gamma}$, а область, ограниченную этими кривыми и содержащую полуось $\operatorname{Re} g \geq 0$, — через G (рис. 11).

На основании (4.37) часть вещественной оси (s_0, ∞) отображается в плоскости $g = g(s) = u + i v$ на некоторую кривую Γ , выходящую из начала координат и лежащую вне области G . На основании (4.36) часть оси $(-\infty, -s_0)$ отобразится в плоскости g на кривую $\tilde{\Gamma}$, выходящую из начала координат и симметричную кривой Γ относительно реальной оси в g -плоскости.

Если мы возьмем в плоскости s область D , ограниченную двумя полукругами радиусов s_0 и s (рис. 12), то в плоскости $g = u + i v$ эта область D отобразится на область \tilde{D} , ограниченную кривыми Γ , $\tilde{\Gamma}$, β и $\tilde{\beta}$ (см. рис. 11).

Согласно теореме Неванлинны [16] [см. (1.93), ЭЧАЯ, 1972, т. 3, вып. 1],

$$\int_u^{u_0} \frac{d\tilde{u}}{\rho(\tilde{u})} \geq 0,25 \ln(s/s_0). \quad (4.41)$$

Здесь $\rho(\tilde{u})$ — кратчайшее расстояние от точки \tilde{u} ($u \leq \tilde{u} \leq u_0$) до кривой Γ .

Если будем вместо кратчайшего расстояния от точки \tilde{u} до кривой Γ вычислять кратчайшее расстояние от точки \tilde{u} до кривой γ , то неравенство (4.41) только усилится. Этим обстоятельством и воспользуемся в дальнейшем изложении.

Опустим из точки \tilde{u} на кривую γ перпендикуляр. Координаты точки пересечения кривой γ и перпендикуляра обозначим через u' и v' (рис. 13):

$$\rho(\tilde{u}) = \sqrt{(\operatorname{Re} g - u')^2 + v'^2} \geq v'. \tag{4.42}$$

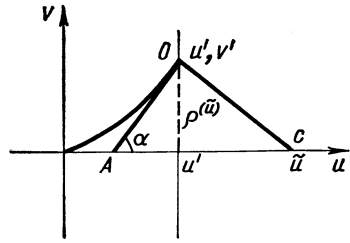


Рис. 13. Построение, позволяющее оценить функцию $\rho(\tilde{u})$.

Вместо интегрирования по \tilde{u} в неравенстве (4.41) введем интегрирование по переменной v' . Для этой цели выразим \tilde{u} через переменную v' . Легко видеть, что

$$\tilde{u} = u' + v' \operatorname{tg} \alpha = b(v'/a)^{1/\nu} + (\nu a^2/b)(v'/a)^{(\nu-1)/\nu+1}. \tag{4.43}$$

Учитывая (4.42) и (4.43), из неравенства (4.41) получаем искомое неравенство (4.39).

Неравенство (4.39) для функции $g(s)$ можно усилить, если вместо условия (4.38) для функции $g(s)$ при вещественных значениях $s \geq s_0$ будет иметь место неравенство

$$|\operatorname{Im} g(s)| \geq \operatorname{tg} \beta \lambda |\operatorname{Re} g(s)|, \quad 0 < \beta \leq 1/2. \tag{4.44}$$

Если вместо $g(s)$ введем функцию $\tilde{g}(s)$, равную

$$\tilde{g}(s) = [g(s)]^{1/2\beta}, \tag{4.45}$$

то для функции $\tilde{g}(s)$ стремление к нулю в плоскости $\tilde{g} = u + iv$ с ростом s будет идти из области, лежащей налево от мнимой оси. Поэтому

$$\rho(\tilde{u}) \geq \sqrt{\tilde{u}^2 + |\tilde{g}(s)|^2}. \tag{4.46}$$

Применяя теперь теорему Неванлинны, найдем

$$|\tilde{g}(s)| \leq \operatorname{const} (s_0/s)^{1/4}, \tag{4.47}$$

или, переходя к функции $g(s)$, имеем

$$|g(s)| \leq \operatorname{const} (s_0/s)^{\beta/2}. \tag{4.48}$$

Это неравенство более сильно, чем неравенство (4.39).

Рассмотренный выше случай, когда было применено преобразование (4.45), соответствовал наихудшей ситуации, когда кривая $g(s)$ выходила из начала координат вправо от мнимой оси в плоскости g .

Утверждение V. Если выполняется неравенство вида

$$\text{const}/\ln^{1-\varepsilon}s \leq |\text{Im } F/\text{Re } F| \leq \text{const}, \quad (4.49)$$

где

$$F(s) = F^{(+)}(s) - F^{(-)}(s), \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (4.50)$$

то разность между полными сечениями взаимодействия частиц и античастиц удовлетворяет соотношению

$$|\sigma_{tot}^{(+)}(s) - \sigma_{tot}^{(-)}(s)| \leq \text{const}/[\ln s]^\lambda, \quad (4.51)$$

где λ — любое сколь угодно большое положительное число.

Введем функцию

$$g(s) = \frac{F(s)}{s[\ln s - i\pi/2]^\nu}, \quad \nu > 2. \quad (4.52)$$

На основании неравенства Фруассара и теоремы Фрагмена — Линделефа $|g(s)|$ будет стремиться к нулю с ростом s по любому направлению в верхней полуплоскости комплексной переменной s .

Легко убедиться, что функция $g(s)$, введенная в (4.52), удовлетворяет условию кроссинг-симметрии (4.36).

Покажем теперь, что $g(s)$ удовлетворяет неравенству (4.38). Используя (4.52) и учитывая неравенство (4.49), имеем

$$|\text{Im } g(s)| \geq \frac{|\text{Re } F|}{s \ln^{1+\nu-\varepsilon}s} \left[1 + o\left(\frac{1}{\ln^\varepsilon s}\right) \right]. \quad (4.53)$$

Учитывая неравенство Фруассара

$$|\text{Re } F|/s \leq \ln^2 s, \quad (4.54)$$

запишем (4.53) в форме

$$|\text{Im } g(s)| \geq |\text{Re } F/s \ln^\nu s|^\nu, \quad (4.55)$$

где

$$\nu = 1 + (1 - \varepsilon)/(\gamma - 2) > 1. \quad (4.56)$$

Так как

$$|\text{Re } g(s)| \approx |\text{Re } F|/s \ln^\nu s [1 + o(1/\ln s)], \quad (4.57)$$

то выражение (4.55) можно записать в виде

$$|\text{Im } g(s)| \geq \text{const} |\text{Re } g(s)|^\nu.$$

Если функция $F(s)$ не имеет нулей в окрестности точки $s \rightarrow \infty$, а разность сечений $\sigma_{tot}^{(+)}(s) - \sigma_{tot}^{(-)}(s)$ не обращается в нуль бесконечное число раз, то функция $g(s)$, введенная в (4.52), будет удовлетворять условиям а), б), в) и г), а следовательно, для нее имеет место неравенство (4.39).

В гл. 3 было показано, что амплитуды упругих процессов $F^{(\pm)}(s, 0)$ в комплексной s -плоскости имеют конечное число нулей. Если бы $F(s, 0)$ в окрестности $s \rightarrow \infty$ имела бесконечное число нулей, то, очевидно, между амплитудами $F^{(\pm)}(s, 0)$ возникли бы связи. Однако мы здесь исключаем такую возможность.

Учитывая, что в асимптотической области

$$|\operatorname{Im} g(s)| \approx \frac{|\operatorname{Im} F|}{s \ln^\gamma s} [1 + o(1/\ln^\varepsilon s)], \quad (4.58)$$

и принимая во внимание (4.39), найдем

$$|\operatorname{Im} F(s)|/s \leq \operatorname{const}/[\ln(s/s_0)]^\lambda. \quad (4.59)$$

Здесь

$$\lambda = [\varepsilon(\gamma - 1) - 1]/(1 - \varepsilon). \quad (4.60)$$

Для любого значения ε из интервала $0 < \varepsilon < 1$ всегда можно выбрать такое γ , что степень λ можно сделать сколь угодно большой.

Утверждение VI. Если выполняется неравенство

$$|\operatorname{Im} F/\operatorname{Re} F| \geq \operatorname{tg} \alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1/2, \quad (4.61)$$

то разность между полными сечениями взаимодействия частиц и античастиц удовлетворяет соотношению

$$|\sigma_{tot}^{(+)}(s) - \sigma_{tot}^{(-)}(s)| \leq \operatorname{const} \frac{\ln^\gamma(s/s_0)}{s^{\beta/2}}. \quad (4.62)$$

Здесь

$$\gamma > 2, \quad 0 < \beta \leq 1/2. \quad (4.63)$$

Если функция $\operatorname{Im} F/\operatorname{Re} F$ возрастает с увеличением s , то отношение $\operatorname{Im} g/\operatorname{Re} g$ также возрастает, и поэтому в данном случае в (4.44) β можно выбрать сколь угодно близким к $1/2$, и для функции $|g(s)|$ мы получаем наилучшую оценку в данном методе. В том случае, когда отношение $|\operatorname{Im} F/\operatorname{Re} F|$ не возрастает, можно всегда выбрать такое α , что

$$|\operatorname{Im} F(s)/\operatorname{Re} F(s)| \geq \operatorname{tg} \alpha, \quad 0 < \alpha < 1/2.$$

Отсюда на основании асимптотического соотношения

$$\operatorname{Im} g(s)/\operatorname{Re} g(s) \approx [\operatorname{Im} F(s)/\operatorname{Re} F(s)] [1 - (\operatorname{Im} F/\operatorname{Re} F)(\gamma\pi/2 \ln s)]^{-1} \quad (4.64)$$

получим

$$|\operatorname{Im} g(s)/\operatorname{Re} g(s)| \geq \operatorname{tg} \pi \alpha, \quad (4.65)$$

следовательно, β можно взять равным α . Отсюда на основании неравенства (4.44) находим искомое неравенство (4.62). Для формулировки последующего утверждения необходимо ввести понятие допустимой функции.

Функцию $\varphi(s)$ будем называть допустимой, если она удовлетворяет свойствам:

а) аналитична по s в верхней полуплоскости вне некоторого круга и в области аналитичности не имеет нулей;

б) кроссинг-симметрична, т. е.

$$\varphi(s) = \varphi^*(-s^*); \quad (4.66)$$

в) при любом $\varepsilon > 0$ при достаточно больших s имеем

$$|\ln s|^{-\varepsilon} < |\varphi(s)| < |\ln s|^{\varepsilon}; \quad (4.67)$$

г) вдоль вещественной оси s

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |\operatorname{Im} \varphi(s)/\operatorname{Re} \varphi(s)| \ln s \rightarrow 0. \quad (4.68)$$

Примером допустимой функции будет $\ln[\ln s - i\pi/2]^\gamma$.

Утверждение VII. Пусть

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left| \frac{\operatorname{Im} F(s)}{\operatorname{Re} F(s)} \right| \ln s \rightarrow 0 \quad (4.69)$$

и существует предел

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \operatorname{Re} F/[s \ln^\gamma s |\varphi(s)|] = c > 0 \quad (4.70)$$

при некотором значении γ . Для определенности мы взяли $c > 0$, так как в противном случае была рассмотрена разность $F^{(-)} - F^{(+)}$. Тогда оказывается, что γ должно быть сколь угодно близко к нулю, а следовательно, асимптотическое поведение реальной части F имеет вид

$$\operatorname{Re} F \approx cs |\varphi(s)|. \quad (4.71)$$

Разность полных сечений взаимодействия при этом будет ограничена следующим неравенством:

$$|\sigma_{tot}^{(+)}(s) - \sigma_{tot}^{(-)}(s)| < |\varphi(s)|/\ln s. \quad (4.72)$$

Доказательство. Введем функцию

$$g(s) = \frac{F(s)}{s \left[\ln s - i \frac{\pi}{2} \right]^\gamma \varphi(s)}.$$

На основании (4.68) — (4.70) легко показать, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \operatorname{Re} g(s) = c; \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\operatorname{Re} g(s) - \frac{2}{\pi\gamma} \ln s \operatorname{Im} g(s) \right] = 0.$$

Отсюда следует, что с ростом s (s вещественно) кривые $g(s)$ в плоскости g стремятся к точке $\operatorname{Re} g = c$.

В асимптотической области

$$\operatorname{tg} \theta(s) = |\operatorname{Im} g(s) / \operatorname{Re} g(s)| = \pi\gamma/2 \ln s. \quad (4.73)$$

Так как в нашем случае

$$\rho(\tilde{u}) \geq \tilde{u} \sin \theta(s),$$

то, применяя теорему Неванлинны, получаем

$$\ln(c/u_0) \geq \pi\gamma/8. \quad (4.74)$$

Постоянную u_0 можно выбрать сколь угодно близкой к постоянной c , а следовательно, γ должна быть близка к нулю и для реальной части F имеет место асимптотическое равенство (4.71). На основании (4.69) и (4.71) получаем искомую оценку (4.72).

Утверждение VIII. Пусть

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im} F(s)}{\operatorname{Re} F(s)} \ln(s) = a \neq 0, \quad (4.75)$$

тогда $\gamma = -2a/\pi$, а следовательно, возможны следующие случаи:

а) если a положительно, то разность полных сечений взаимодействия имеет асимптотическое поведение вида

$$|\sigma_{tot}^{(+)} - \sigma_{tot}^{(-)}| \approx ac [|\varphi(s)| / |\ln s|^{1+2a/\pi}]; \quad (4.76)$$

б) если a отрицательно и заключено в интервале $-\pi \leq a \leq 0$, то

$$|\sigma_{tot}^{(+)} - \sigma_{tot}^{(-)}| \approx |a|c [|\varphi(s)| / (\ln s)^{1-\frac{2}{\pi}|a|}]. \quad (4.77)$$

В том случае, когда $a < -\pi$, постоянная $\gamma > 2$, а следовательно, это противоречит неравенству Фруассара и случай не реализуется.

На основании (4.68), (4.70) и (4.75) имеем

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \operatorname{Re} g(s) = c; \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\operatorname{Re} g(s) - \frac{1}{a + \pi\gamma/2} \ln s \operatorname{Im} g(s) \right] = 0.$$

Отсюда в асимптотической области

$$\operatorname{tg} \theta(s) = |\operatorname{Im} g(s) / \operatorname{Re} g(s)| = \frac{1}{\ln s} |a + \pi\gamma/2|. \quad (4.78)$$

Так как в нашем случае $\rho(\tilde{u}) \geq \tilde{u} \sin \theta(s)$, то, применяя теорему Неванлинны, найдем $\ln c/u_0 \geq 0,25 |a + \pi\gamma/2|$. Отсюда, выбирая u_0 близко к постоянной c , находим, что γ должна быть близка

к величине

$$\gamma = -2a/\pi. \quad (4.79)$$

Учитывая (4.70), (4.75) и (4.79), найдем искомые формулы (4.76) и (4.77).

Пусть $\ln^{1-\varepsilon_s} |\operatorname{Im} F| < |\operatorname{Re} F| < \ln s |\operatorname{Im} F|$, где ε — любое сколь угодно малое положительное число, тогда, повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые были использованы при доказательстве утверждения VII, придем к противоречию с теоремой Неванлинны. Это означает, что данный случай не реализуется.

Отметим одно важное следствие. Из утверждений V и VI следует, что если

$$|\operatorname{Re} F| \leq \ln^{1-\varepsilon_s} |\operatorname{Im} F|, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (4.80)$$

а полные сечения взаимодействия частиц и античастиц с одинаковой мишенью ограничены снизу неравенством:

$$\sigma_{tot}^{(\pm)}(s) \geq [\ln s]^{-r}, \quad (4.81)$$

r — любое фиксированное положительное число, то отношение этих сечений стремится с ростом s к единице, т. е.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [\sigma_{tot}^{(+)}(s)/\sigma_{tot}^{(-)}(s)] \rightarrow 1. \quad (4.82)$$

Утверждение IX. Если

$$|\operatorname{Re} F| \geq \ln s |\operatorname{Im} F|, \quad (4.83)$$

а одно из полных сечений взаимодействия возрастает с увеличением s , то отношение этих сечений стремится к единице, т. е.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [\sigma_{tot}^{(+)}(s)/\sigma_{tot}^{(-)}(s)] = 1. \quad (4.84)$$

Действительно, если одно из полных сечений взаимодействия возрастает, то другое сечение, согласно утверждению II, также растёт, а следовательно, на основании неравенства (4.31)

$$\frac{1}{\ln s} |\operatorname{Re} F^{(\pm)} / \operatorname{Im} F^{(\pm)}| \rightarrow 0. \quad (4.85)$$

Теперь легко убедиться, что если не выполняется (4.84), то неравенство (4.83) противоречит условию (4.85). В заключение этого параграфа заметим, что из предыдущего вытекают следующие следствия:

1. Если одно из полных сечений взаимодействия возрастает, то

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [\sigma_{tot}^{(+)}(s)/\sigma_{tot}^{(-)}(s)] = 1. \quad (4.86)$$

Таким образом, если одно из полных сечений не убывает, то нарушение теоремы Померанчука возможно лишь в единственном случае, когда оба сечения стремятся к постоянным пределам.

2. Если

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Psi^{(\pm)}(s) = b^{(\pm)} \neq 0, \quad (4.87)$$

то полные сечения частиц и античастиц не совпадают при s , стремящемся к бесконечности, эффективные радиусы взаимодействия, как это следует из неравенства (4.31), с ростом s логарифмически возрастают. Полные упругие сечения не убывают, ширина дифракционного конуса $\Delta(s)$ сужается с ростом s максимально допустимым в теории образом, т. е.

$$\Delta(s) = \text{const}/\ln^2 s. \quad (4.88)$$

Заметим, что если одно из полных сечений не убывает, то условие (4.87) — не только достаточное, но и необходимое условие нарушения теоремы Померанчука.

Таким образом, если одно из сечений не убывает, а одна из функций $\Psi^{(\pm)}(s)$ стремится к нулю, то

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [\sigma_{tot}^{(+)}(s)/\sigma_{tot}^{(-)}(s)] = 1. \quad (4.89)$$

Ограничения на поведение полных сечений взаимодействия при высоких энергиях [15]

Для дальнейшего введем кроссинг-симметричную функцию

$$\Phi(s) = F^{(+)}(s) + F^{(-)}(s) \quad (4.90)$$

и изучим поведение сечения взаимодействия в зависимости от ограничений, налагаемых на функцию $\Phi(s)$.

Пусть функция $\Phi(s)$ не имеет нулей в окрестности точки $s \rightarrow \infty$, а ее реальная часть начиная с некоторого значения s не обращается в нуль и пусть

$$|\text{Re } \Phi / \text{Im } \Phi| \geq \text{const} |\ln^{1-\varepsilon} s, \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (4.91)$$

Тогда полные сечения взаимодействия с ростом s будут убывать быстрее, чем любая обратная степень логарифма, т. е.

$$[\sigma_{tot}^{(+)}(s) + \sigma_{tot}^{(-)}(s)] \leq \text{const} / [\ln s]^{\lambda + \varepsilon - 1}. \quad (4.92)$$

Здесь λ — любое сколь угодно большое положительное число.

Если функция $\Phi(s)$ не имеет нулей в окрестности точки $s \rightarrow \infty$, а ее реальная часть начиная с некоторого вещественного значения s не обращается в нуль, то функция $g(s)$, связанная с $\Phi(s)$ равенством

$$g(s) = \frac{\Phi(s)}{is [\ln s - i\pi/2]^\gamma}, \quad (4.93)$$

удовлетворяет условиям а), б), в) и г) и для нее справедливо неравенство (4.39). Так как в асимптотической области

$$|\operatorname{Re} \Phi| \approx s |\operatorname{Im} g(s)| |\ln s|^\gamma, \quad (4.94)$$

то, учитывая неравенства (4.39) и (4.94), получаем искомое соотношение (4.92).

Пусть

$$|\operatorname{Re} \Phi / \operatorname{Im} \Phi| \geq \operatorname{tg} \alpha \pi, \quad 0 < \alpha \leq 1/2, \quad (4.95)$$

тогда

$$[\sigma_{i0t}^{(+)}(s) + \sigma_{i0t}^{(-)}(s)] \leq \operatorname{const} [\ln s]^\gamma (s_0/s)^{\alpha/2}. \quad (4.96)$$

Вспоминая, что при выполнении неравенства (4.95) для функции g справедливо соотношение (4.48), находим искомое неравенство (4.96).

Пусть с ростом s

$$|\operatorname{Re} \Phi / \operatorname{Im} \Phi| \ln s \rightarrow 0 \quad (4.97)$$

и существует предел

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{\operatorname{Im} \Phi}{s \ln^\gamma s |\varphi(s)|} \right] = c > 0 \quad (4.98)$$

при некотором значении постоянной γ . Тогда полные сечения взаимодействия не могут возрастать быстрее любой сколь угодно малой степени логарифма, т. е.

$$[\sigma_{i0t}^{(+)}(s) + \sigma_{i0t}^{(-)}(s)] = c |\varphi(s)| < \ln^e s. \quad (4.99)$$

Повторяя рассуждения, использованные ранее при доказательстве утверждения VII, для функции

$$g(s) = \Phi(s) / [is (\ln s - i\pi/2)^\gamma \varphi(s)]$$

получаем, что γ должно быть близко к нулю, а следовательно, выполняется неравенство (4.33).

В том случае, когда

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [\operatorname{Re} \Phi / \operatorname{Im} \Phi] \ln s = a \neq 0$$

и

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [\operatorname{Im} \Phi / s \ln^\gamma s |\varphi(s)|] = c > 0,$$

} (4.100)

сумма полных сечений взаимодействия при больших s имеет следующее асимптотическое поведение:

$$[\sigma_{i0t}^{(+)}(s) + \sigma_{i0t}^{(-)}(s)] = c |\varphi(s)| \ln^{2a/\pi} s, \quad (4.101)$$

где $a \leq \pi$.

Формула (4.101) получена с помощью рассуждений, использованные ранее при доказательстве утверждения VIII.

Заметим, что, когда

$$\ln |1 - \varepsilon_s| \operatorname{Re} \Phi | < | \operatorname{Im} \Phi | < \ln s | \operatorname{Re} \Phi |, \quad (4.102)$$

где ε — любое положительное число, близкое к нулю, тогда, повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые были использованы при доказательстве утверждения VII, приходим к противоречию с теоремой Неванлинны, а это означает, что данный случай не реализуется.

5. УСЛОВИЕ УНИТАРНОСТИ И ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА УБЫВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ И МНОЖЕСТВЕННОГО РОЖДЕНИЯ С РОСТОМ s [17—19]

В настоящей главе на основании условия унитарности и аналитичности будут получены важные выводы о поведении дифференциального сечения множественного рождения с ростом энергии в области больших углов рождения. Необходимые для наших целей предположения об аналитичности будут сформулированы позднее.

Интегральное представление

Амплитуда процесса

$$a + b \rightarrow c + d + A_j,$$

где A_j — произвольная система адронов, может быть разложена в ряд [см. (2.48), ЭЧАЯ, 1972, т. 3, вып. 1]:

$$\begin{aligned} T_{j, cd}(s, \theta, \exp[i\varphi], \dots) = \\ = 4\pi [2\sqrt{s}|p_a|]^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m(s, \theta, \dots) \exp im\varphi. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} F_m(s, \theta, \xi_i) = \frac{1}{8\pi^2} [|p_a|/2\sqrt{s}]^{1/2} \int_0^{2\pi} T_{j, cd}(s, \theta, \exp[i\varphi], \xi_i) \times \\ \times \exp[-im\varphi] d\varphi. \end{aligned} \quad (5.2)$$

На основании результатов (гл. 2) функция $F_m(s, \theta, \xi_i)$ будет аналитической по $\cos \theta$ в эллипсе Лемана с большой полуосью $x_0(s)$ и разрезами $[-x_0(s), -1]$, $[1, x_0(s)]$. Следует отметить, что область аналитичности по $\cos \theta$ с ростом энергии сужается и при $s \rightarrow \infty$ вырождается в отрезок $[-1, 1]$. Однако мы будем предполагать следующее.

Предположение I. Пусть амплитуда неупругого процесса для любых физических значений s , $\exp [i \varphi]$, ξ_i является аналитической функцией комплексной переменной $z = \cos \theta$ в некоторой окрестности δ интервала $(-1, 1)$ (рис. 14).

На основании предположения I функция $F_m(s, \theta, \xi_i)$ также будет аналитична в области δ .

Если функция $T(s, \theta, \exp [i \varphi] \xi_i)$ в области аналитичности по $\cos \theta$ полиномиально ограничена по s , то и функция $F_m(s, \theta, \xi_i)$ в области аналитичности по $\cos \theta$ также полиномиально ограничена по s . Построим для

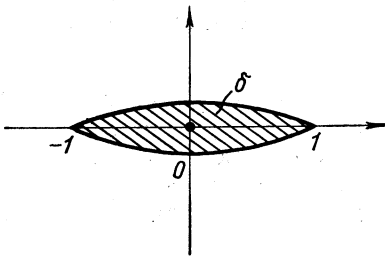


Рис. 14. Окрестность интервала $(-1, 1)$ δ в плоскости $z = \cos \theta$.

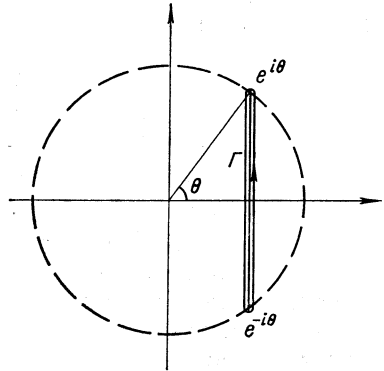


Рис. 15. Контур интегрирования Γ в представлении (5.6).

функции F_m интегральное представление. Для этой цели введем функцию

$$G_m(s, z, \xi_i) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=|m|}^{\infty} (2l+1) T_l^m(s, \xi_i) \frac{l! |m| z^{l-|m|}}{\sqrt{(l-m)! (l+m)!}}. \quad (5.3)$$

Из гл. 2 следует, что функция $G_m(s, z, \xi_i)$ — аналитическая по переменной z в круге радиуса

$$r_+(s) = x_0(s) + \sqrt{x_0^2(s) - 1}. \quad (5.4)$$

Используя для функции $d_{m,0}^l(\theta)$ представление вида [20]

$$d_{m,0}^l(\theta) = \frac{im}{2\pi i} \cdot \frac{l!}{\sqrt{(l-m)! (l+m)!}} \oint_{|t|=1} (t \cos \theta/2 + i \sin \theta/2)^{l-m} \times \\ \times (i t \sin \theta/2 + \cos \theta/2)^{l+m} dt / t^{l+1} \quad (5.5)$$

и принимая во внимание разложения (2.49) [ЭЧАЯ, 1972, т. 3, вып. 1] и (5.3), получаем следующее интегральное представле-

ние для функции F_m :

$$F_m(s, \theta, \xi_i) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{\sqrt{R}} \cdot \frac{G_m(s, z, \xi_i)}{i^{|m|}} (\cos \theta/2 + it \sin \theta/2)^{2|m|}, \quad (5.6)$$

где

$$t = (z - \cos \theta - \sqrt{R})/i \sin \theta; \quad R = z^2 - 2z \cos \theta + 1. \quad (5.7)$$

Контур интегрирования Γ изображен на рис. 15. Ветвь функции \sqrt{R} фиксируется условием

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [z/\sqrt{R}] \rightarrow 1. \quad (5.8)$$

Ядро $H_m(\theta, z)$ в (5.6), равно

$$H_m(\theta, z) = \frac{1}{\sqrt{R} i^{|m|}} [\cos \theta/2 + it \sin \theta/2]^{2|m|}, \quad (5.9)$$

для фиксированного значения θ будет аналитической функцией по z во всей комплексной плоскости z с разрезом $\exp [i \theta]$, $\exp [-i \theta]$. Так как функция G_m аналитична по z в круге радиуса (5.4), то в представлении (5.6) контур интегрирования можно деформировать в круг радиуса $r_+(s)$. При фиксированном значении z функция $H_m(\theta, z)$ будет аналитической по $\cos \theta$ вне разрезом:

$$[-\infty, -1], \quad [1, \infty], \quad \left[\frac{1}{2}(z + 1/z), \infty \right]. \quad (5.10)$$

Когда точка z пробегает значения на круге, начало третьего разреза описывает эллипс. Поэтому функция $F_m(s, \cos \theta, \xi_i)$ будет аналитической по $\cos \theta$ в эллипсе Лемана с большой полуосью $x_0(s)$ и разрезами $[-x_0(s), -1]$, $[1, x_0(s)]$. Если функция $G_m(s, z, \xi_i)$ будет аналитической по z в более широкой области, чем круг радиуса $r_+(s)$, то контур интегрирования в представлении (5.6) можно деформировать в области аналитичности функции G_m . В частности, этот контур можно провести вдоль границы области аналитичности функции G_m по z .

Если функция G_m аналитична по z в области D , то функция $F_m(s, \cos \theta, \xi_i)$ будет аналитической по $\cos \theta$ в области \bar{D} , за вычетом разрезом $[-\infty, -1]$, $[1, \infty]$.

Область \bar{D} получается из области D отображением вида

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(z + 1/z). \quad (5.11)$$

Обратное интегральное представление

Так как функция

$$(1 - z)^{-|m|/2} (1 + z)^{-|m|/2} F_m(s, z, \xi_i) \quad (5.12)$$

аналитична по z в эллипсе Лемана (см. гл. 2), то можно воспользоваться теоремой Коши:

$$F_m(s, z, \xi_i) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{E}_L(s)} \frac{(1-z)^{|m|/2}(1+z)^{|m|/2}}{(1-z')^{|m|/2}(1+z')^{|m|/2}} \cdot \frac{dz'}{z'-z} F_m(s, z', \xi_i). \quad (5.13)$$

Подынтегральную функцию можно разложить в ряд [21, 22]

$$\frac{(1-z)^{|m|/2}(1+z)^{|m|/2}}{(1-z')^{|m|/2}(1+z')^{|m|/2}} \cdot \frac{1}{z'-z} = \sum_{l=|m|}^{\infty} (2l+1) e_{m,0}^l(z') d_{m,0}^l(z). \quad (5.14)$$

Подставляя (5.14) в (5.13), находим

$$F_m(s, z, \xi_i) = \sum_{l=|m|}^{\infty} (2l+1) d_{m,0}^l(z) \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{E}_L(s)} F_m(s, z', \xi_i) e_{m,0}^l(z') dz'. \quad (5.15)$$

Сравнивая разложения (5.15) и (2.49), получаем

$$T_l^m(s, \xi_i) = \frac{4\pi}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{E}_i(s)} F_m(s, z', \xi_i) e_{m,0}^l(z') dz'. \quad (5.16)$$

Функция $e_{m,0}^l(z)$ — функция Вигнера второго рода. Для нее можно получить представление вида [22]

$$\begin{aligned} e_{m,0}^l(z) &= (-1)^{|m|} \left[\frac{\Gamma(l+m+1)\Gamma(l-m+1)}{\Gamma^2(l+1)} \right]^{1/2} (1-z)^{-|m|/2} \times \\ &\times (1+z)^{-|m|/2} \frac{1}{2} \int_{z+\sqrt{z^2-1}}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{Ru^{l+m+1}}} \times \\ &\times [(1-zu+\sqrt{R})^{|m|} + (1-zu-\sqrt{R})^{|m|}]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Здесь $R = u^2 - 2zu + 1$.

Подставив (5.17) в (5.16), а полученное выражение для T_l^m в ряд (5.3), найдем представление для функции G_m через F_m :

$$G_m(s, z, \xi_i) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{E}_L(s)} F_m(s, t, \xi_i) / (1-t^2)^{|m|/2} \mathcal{L}_m(z, t) dt, \quad (5.18)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m(z, t) &= \frac{i^{|m|}}{2} (2z\partial/\partial z + 2|m| + 1) \int_{t+\sqrt{t^2-1}}^{\infty} \frac{du u^{-2|m|}}{\sqrt{u^2-2tu+1}} \cdot \frac{1}{u-z} \times \\ &\times \{ [ut-1+\sqrt{u^2-2ut+1}]^{|m|} + [ut-1-\sqrt{u^2-2ut+1}]^{|m|} \}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Так как переменная интегрирования t в представлении (5.18) пробегает эллипс $\partial\mathcal{E}_L(s)$, то нижний предел интегрирования по u в (5.19) пробегает круг радиуса $r_+(s)$, а следовательно, функция $\mathcal{L}_m(z, t)$ будет аналитической по z внутри круга радиуса $r_+(s)$ для любого значения t на эллипсе $\partial\mathcal{E}_L(s)$. Отсюда на основании (5.18) заключаем, что $G_m(s, z, \xi_i)$ также будет аналитической функцией внутри круга радиуса $r_+(s)$.

Функция $(1 - z^2)^{-|m|/2} F_m(s, z, \xi_i)$, как известно, является аналитической по z в эллипсе Лемана. Если же она аналитична по z в более широкой области $D(z)$, то функция $G_m(s, z', \xi_i)$ будет аналитической по z' в области $\tilde{D}(z')$. Область $D(z)$ получается из области $\tilde{D}(z')$ отображением вида $z = 0,5(z' + 1/z')$. Найдем теперь степень роста функции $G_m(s, z', \xi_i)$ по s для любых значений z' из области аналитичности $\tilde{D}(z)$.

В силу полиномиальной ограниченности амплитуды процесса III функция $F_m(s, t, \xi_i) (1 - t^2)^{-|m|/2}$ будет удовлетворять неравенству

$$F_m(s, t, \xi_i) / |1 - t|^{m/2} |1 + t|^{m/2} \leq s^n / [x_0(s) - 1]^{m/2} [x_0(s) + 1]^{m/2} \tag{5.20}$$

Здесь n — степень роста амплитуды.

Из представления (5.19) можно получить следующее неравенство:

$$|\mathcal{L}_m(z, t)| \leq \text{const } s^{2, 5} 3^{|m|} (2|m| + 1). \tag{5.21}$$

Подставляя (5.20) и (5.21) в представление (5.18), находим

$$|G_m(s, z, \xi_i)| \leq \text{const } s^{n+|m|+2, 5} 3^{|m|} (2|m| + 1). \tag{5.22}$$

Постоянные в (5.21) и (5.22) не зависят от m и s . Следует подчеркнуть, что в отличие от функции F_m степень роста функции G_m зависит от проекции момента m .

Верхняя оценка амплитуды неупругого процесса с фиксированной проекцией момента

Вычисляя в (5.6) скачок подынтегральной функции на разрезе ($\exp[i\theta]$, $\exp[-i\theta]$) (см. рис. 15) и вводя новую переменную $x = z = \cos \theta + ix \sin \theta$, представление (5.6) запишем в виде

$$F_m(s, \cos \theta, \xi_i) = \frac{i^{|m|}}{2\pi} \int_{-1}^1 \tilde{G}_m(s, \cos \theta, x, \xi_i) dx, \tag{5.23}$$

где

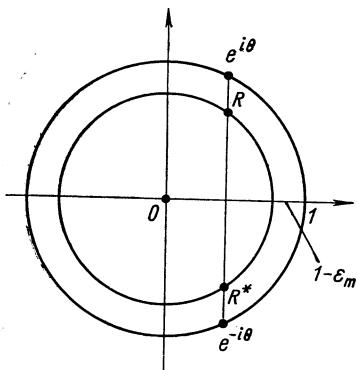
$$\begin{aligned} \tilde{G}_m(s, \cos \theta, x, \xi_i) = & [G_m(s \cos \theta + ix \sin \theta, \xi_i) / \sqrt{1 - x^2}] \times \\ & \times [(\sin \theta - ix \cos \theta - \sqrt{1 - x^2})^{|m|} + \\ & + (\sin \theta - ix \cos \theta + \sqrt{1 - x^2})^{|m|}]. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Для получения оценки $|F_m|$ разобьем отрезок $(\exp [i\theta], \exp [-i\theta])$ в z -плоскости окружностью радиуса $r = 1 - \varepsilon_m$, $\varepsilon_m > 0$ с центром в начале (рис. 16) на три части:

$$(\exp [-i\theta], R^*), (R^*, R), (R \exp [i\theta]). \tag{5.25}$$

Конкретный выбор ε_m обсуждается ниже.

Разбиению (5.25) соответствует следующее разбиение интеграла по x в (5.23):



$$F_m(s, \cos \theta, \xi_i) = i^{|m|} \left[\int_{-1}^{-\tau} dx \tilde{G}_m + \int_{-\tau}^{\tau} dx \tilde{G}_m + \int_{\tau}^1 dx \tilde{G}_m \right] / 2\pi, \tag{5.26}$$

где

$$\tau = \sqrt{(1 - \varepsilon_m)^2 - \cos^2 \theta} / \sin \theta. \tag{5.27}$$

Оценим сначала интеграл

$$\int_{-\tau}^{\tau} dx \tilde{G}_m. \text{ С этой целью найдем оценку модуля функции } G_m \text{ внутри круга сходимости ряда (5.3).}$$

Рис. 16. Разбиение линии интегрирования в (5.23) кругом радиуса $|r| = 1 - \varepsilon_m$ на три части.

Применяя неравенство Буняковского—Шварца к разложению (5.3), получаем

$$|G_m(s, z, \xi_i)|^2 \leq \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{l=|m|}^{\infty} \frac{(2l+1)^2 |T_l^m|^2}{(l+1)^2 (l+2)} \times \sum_{l=|m|}^{\infty} \frac{\Gamma(l+2) \Gamma(l+3) |z|^{2(l-|m|)}}{\Gamma(l-m+1) \Gamma(l+m+1)}. \tag{5.28}$$

Вторую сумму в (5.28) можно выразить через гипергеометрическую функцию:

$$\sum_{l=|m|}^{\infty} \frac{\Gamma(l+2) \Gamma(l+3) |z|^{2(l-|m|)}}{\Gamma(l-m+1) \Gamma(l+m+1)} = \frac{\Gamma(|m|+2) \Gamma(|m|+3)}{\Gamma(2|m|+1) (1-|z|^2)^4} F(|m|-2, |m|-1, 2|m|+1, |z|^2).$$

Используя представление

$$F(|m|-2, |m|-1, 2|m|+1, |z|^2) = \frac{\Gamma(2|m|+1) \Gamma(|m|+2)}{\Gamma(|m|-1) \Gamma(|m|+2)} \int_0^1 t^{|m|-2} (1-t)^{|m|+1} \frac{dt}{(1-|z|^2 t)^{|m|+2}}, \tag{5.29}$$

легко получить оценку сверху на модуль функции F , а следовательно, используя (5.28), — и на модуль функции G_m :

$$|G_m(s, z, \xi_i)| \leq \frac{2}{4\pi} \left[\sum_{l=|m|}^{\infty} \frac{|T_l^m(s, \xi_i)|^2}{l+2} \right]^{1/2} \left[\frac{\Gamma(|m|+3)}{\Gamma(|m|-1)} \right]^{1/2} \frac{t_0^{|m|-2}}{(1-|z|^2)^2}, \tag{5.30}$$

где $t_0 = [1 - \sqrt{1 - |z|^2}] / |z|^2$. Полученная выше оценка справедлива для $|m| \geq 2$. Подставляя (5.30) в интеграл $\int_{-\tau}^{\tau} dx |\tilde{G}_m|$,

находим

$$\left| \int_{-\tau}^{\tau} dx \tilde{G}_m \right| \leq \text{const} [\Gamma(|m|+3)/\Gamma(|m|-1)]^{1/2} \times \\ \times \left[\sum_{l=|m|}^{\infty} |T_l^m(s, \xi_i)|^2 / (l+2) \right]^{1/2} [1/\{\sin \theta [1 - (1 - \varepsilon_m)^2]^{3/2}\}].$$

Случаи $m = 0$ и $m = \pm 1$ легко вычисляются непосредственно и дают оценку аналогичного вида.

Общую формулу, верную для любых значений m , можно записать в виде

$$\left| \int_{-\tau}^{\tau} dx \tilde{G}_m \right| \leq \text{const} [\Gamma(|m|+5)/\Gamma(|m|+1)]^{1/2} \times \\ \times \left[\sum_{l=|m|}^{\infty} |T_l^m(s, \xi_i)|^2 / (l+1) \right]^{1/2} [1/\{\sin \theta [1 - (1 - \varepsilon_m)^2]^{3/2}\}]. \tag{5.31}$$

Перейдем теперь к оценке интеграла $\int_{-\tau}^{\tau} dx \tilde{G}_m$. Сначала, используя теорему о двух постоянных, найдем оценку сверху для модуля функции G_m в области интегрирования по x .

Согласно предположению I, функция G_m будет аналитической по z в области, ограниченной линией $\gamma(\delta)$ (рис. 17).

Для заданного угла θ из начала координат проведем три луча A , B и D под углами $\theta/2$, θ , $3\theta/2$ к оси абсцисс. Точки пересечения окружности радиуса $(1 - \varepsilon_m)$ с лучами A и D обозначим g и h . Точку пересечения луча B с окружностью единичного радиуса и кривой $\gamma(\delta)$ обозначим соответственно $e^{i\theta}$ и η' . Через точки g , h и $e^{i\theta}$ проведем окружность. Дугу этой окружности между точками g и h , содержащую точку $e^{i\theta}$, обозначим C_θ .

Аналогично дугу окружности, проходящей через точки g , h и η , обозначим C_η . Точка η лежит на луче B , причем $1 < \eta < \tilde{\eta}$. Дугу окружности радиуса $(1 - \varepsilon_m)$, заключенную в угле между лучами A и D , обозначим C . Угол между дугами C и C_θ обозначим α , а угол между C_θ и $C_\eta - \beta$.

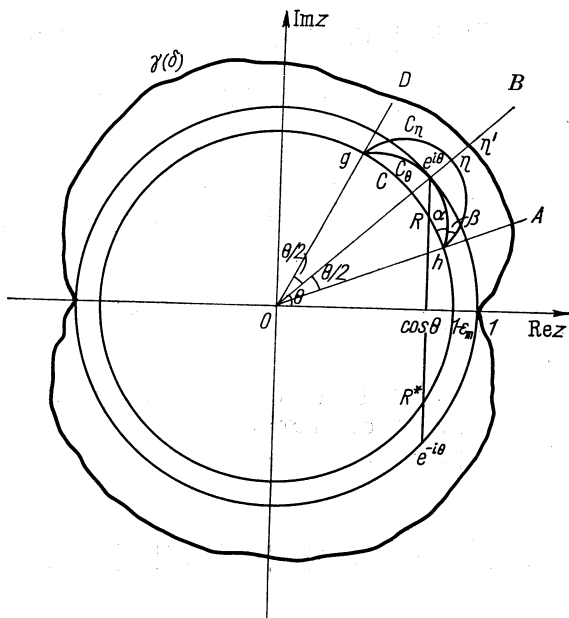


Рис. 17. Построение для определения гармонической меры области, ограниченной дугами C_η и C , в плоскости z .

Интегрирование по x от τ до 1 соответствует в z -плоскости отрезку от точки R до $e^{i\theta}$ (см. рис. 16). Чтобы точка R , лежащая на окружности радиуса $(1 - \varepsilon_m)$, находилась между точками g и h , достаточно рассматривать лишь такие углы θ , которые удовлетворяют неравенству

$$[\cos \theta / \cos \theta/2] < 1 - \varepsilon_m. \quad (5.32)$$

Поскольку, как мы увидим ниже, ε_m с ростом энергии стремится к нулю, неравенство (5.32) выполняется для любого фиксированного угла при достаточно больших x .

Согласно теореме о двух постоянных [см. (1.20), ЭЧАЯ, 1972, т. 3, вып. 1], максимумы модуля функции G_m на дугах

C , C_θ и C_η в плоскости z удовлетворяют неравенству

$$\begin{aligned} \max_{z \in C_\theta} |G_m(s, z, \xi_i)| \leq & [\max_{z \in C} |G_m(s, z, \xi_i)|]^{B/(\alpha+\beta)} \times \\ & \times [\max_{z \in C_\eta} |G_m(s, z, \xi_i)|]^{A/(\alpha+\beta)}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Между углами α , β , θ и величиной ε_m имеются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= 2 \operatorname{tg} \theta / 4 \operatorname{tgh} \chi / 2 / (\operatorname{tg}^2 \theta / 4 - \operatorname{th}^2 \chi / 2); \\ \operatorname{tg} \alpha &= 2 \operatorname{tg} \theta / 4 \operatorname{th} \xi / 2 / (\operatorname{tg}^2 \theta / 4 - \operatorname{th}^2 \xi / 2), \end{aligned} \quad (5.34)$$

где

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon_m &= \exp[-\xi]; \quad \chi = \ln a(\theta) + \xi; \quad \operatorname{th} \chi / 2 = \\ &= \{a(\theta) - \exp[-\xi]\} / \{a(\theta) + \exp[-\xi]\}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Здесь мы обозначили $|\eta|$ через $\alpha(\theta)$. Если выбрать ε_m следующим образом:

$$\operatorname{th} \xi / 2 = \operatorname{tg} \theta / 4 / (|m| + 1) \ln(s/s_0) \quad (5.36)$$

и ввести параметр

$$\rho = \operatorname{th} \chi / 2 / \operatorname{tg} \theta / 4, \quad (5.37)$$

то легко убедиться, что

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \rho / (1 - \rho^2); \quad (5.38)$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha = (|m| + 1) \ln(s/s_0) / [(|m| + 1)^2 \ln^2(s/s_0) - 1]. \quad (5.39)$$

На основании (3.35) и (3.37) получим

$$\alpha(\theta) = \alpha_0 \exp[-\xi], \quad (5.40)$$

где

$$a_0 = [1 + \rho \operatorname{tg} \theta / 4] / [1 - \rho \operatorname{tg} \theta / 4].$$

Для любого фиксированного значения $\theta \neq 0$, π всегда можно выбрать такое ρ , что $a_0 < \tilde{\eta}$, т. е. точка находится в области аналитичности. Поэтому согласно (5.38) ($\alpha + \beta$) будет постоянной, не зависящей от s . С ростом s уменьшается α согласно (5.39), но, с другой стороны, β будет увеличиваться, поскольку $a(\theta)$ возрастает, приближаясь к a_0 [см. (5.40)].

Используя неравенство (5.30) на дуге C , а также неравенство (5.22) на дуге C_η , с помощью неравенства (5.33) нетрудно найти

оценку сверху для интеграла:

$$\left| \int_{\tau}^1 dx \tilde{G}_m \right| \leq \text{const} [\Gamma(|m|+5)/\Gamma(|m|+1)]^{1/2} \times \\ \times \left[\sum_{l=|m|}^{\infty} |T_l^m(s, \xi_i)|^2 / (l+1) \right]^{1/2} \{1/\sin \theta [1 - (1 - \varepsilon_m)]^{3/2}\}. \quad (5.41)$$

Аналогичная оценка справедлива и для интеграла с пределами от -1 до $-\tau$.

Подставив полученные оценки в выражение (5.26), найдем

$$|F_m(s, \cos \theta, \xi_i)| \leq \text{const} \left[\frac{\Gamma(|m|+5)}{\Gamma(|m|+1)} (|m|+1)^3 \right]^{1/2} \times \\ \times \left[\sum_{l=|m|}^{\infty} |T_l^m(s, \xi_i)|^2 / (l+1) \right]^{1/2} [\ln^{3/2}(s/s_0) / \sin^{5/2} \theta]. \quad (5.42)$$

Следует отметить, что аналитичность по $\cos \theta$ функции G_m , которая является следствием предположения I, нам понадобилась лишь для того, чтобы с помощью теоремы о двух постоянных оценить интегралы по x в (5.26) по промежуткам $[\tau, 1]$ и $[-1, -\tau]$. Заметим, что точка τ с ростом s стремится к 1.

Верхняя граница убывания дифференциального сечения неупругого процесса в области больших углов при высоких энергиях

В гл. 2 (см. ЭЧАЯ, 1972, т. 3, вып. 1) мы видели, что из представления Дайсона следует: функция $T_{j,cd}^{(+)}$ при физических значениях $s, \cos \theta, \xi_i$ аналитична по ω внутри круга радиуса $r_+(s)$, а функция $T_{j,cd}^{(-)}$ аналитична по ω вне круга радиуса $r_-(s)$. При s , стремящемся к бесконечности, радиусы $r_{\pm}(s)$ стремятся к единице. Сделаем следующее предположение.

Предположение II. Пусть функция $T_{j,cd}^{(+)}$ при любых физических значениях $s, \cos \theta, \xi_i$ аналитически продолжается по ω в некоторую внешнюю окрестность Δ единичного круга (на рис. 18 эта окрестность заштрихована), а функция $T_{j,cd}^{(-)}$ аналитически продолжается в некоторую внутреннюю окрестность $\tilde{\Delta}$ единичного круга (на рис. 19 эта окрестность заштрихована). Это предположение означает, что амплитуда $T_{j,cd}$ аналитична по ω в окрестности единичного круга, равной $D = \Delta \cup \tilde{\Delta}$. Мы будем считать, что $T_{j,cd}$ полиномиально ограничена по s для любых значений

$\omega \in D$. Используя теорему Коши по переменной ω , найдем

$$T_{j,cd}^{(+)}(s, \cos \theta, \omega, \xi_i) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\omega'|=r_+(s)} \frac{T_{j,cd}(s, \cos \theta, \omega', \xi_i)}{\omega' - \omega} d\omega', \quad |\omega| < r_+(s); \quad (5.43)$$

$$T_{j,cd}^{(-)}(s, \cos \theta, \omega, \xi_i) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\omega'|=r_-(s)} \frac{T_{j,cd}(s, \cos \theta, \omega', \xi_i)}{\omega' - \omega} d\omega', \quad |\omega| < r_-(s). \quad (5.44)$$

Из формул (5.43) и (5.44) простой деформацией контуров интегрирования легко показать, что если амплитуда $T_{j,cd}$ аналитически продолжается по ω в область D для любых физических

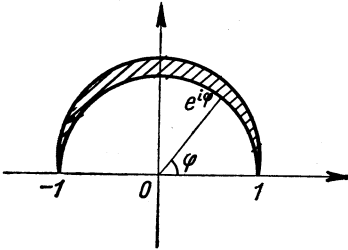


Рис. 18. Окрестность Δ вне единичного полукруга в плоскости $\omega = \exp [i\varphi]$.

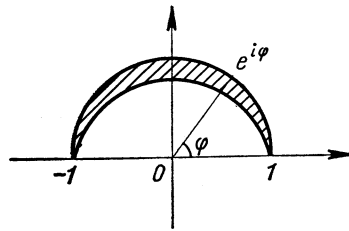


Рис. 19. Окрестность $\tilde{\Delta}$ внутри единичного полукруга в плоскости $\omega = \exp [i\varphi]$.

значений $s, \cos \theta, \xi_i$, то функция $T_{j,cd}^{(+)}(s, \cos \theta, \omega, \xi_i)$ будет аналитически продолжаться по ω в окрестность Δ , а функция $T_{j,cd}^{(-)}(s, \cos \theta, \omega, \xi_i)$ — в окрестность $\tilde{\Delta}$. Если функция $T_{j,cd}$ полиномиально ограничена по s в области $D = \Delta \cup \tilde{\Delta}$, то функции $T_{j,cd}^{(+)}$, $T_{j,cd}^{(-)}$ также полиномиально ограничены по s в соответствующих областях аналитичности.

Перейдем теперь к оценке значения $|T_{j,cd}^{(+)}|$. Для этой цели с помощью разложения (2.52) [см. ЭЧАЯ, 1972, т. 3, вып. 1], а также неравенства (5.42) вычислим верхнюю границу функции $|T_{j,cd}^{(+)}|$ на круге с центром в точке $\omega = 0$ и радиусом $1 - \varepsilon$:

$$\begin{aligned} & |T_{j,cd}^{(+)}(s, \cos \theta, \omega, \xi_i)| \leq \\ & \leq \frac{\text{const}}{[1 - (1 - \varepsilon)^2]^4} \cdot \frac{\ln^{3/2}(s/s_0)}{\sin^{5/2} \theta} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=|m|}^{\infty} \frac{|T_l^m(s, \xi_i)|^2}{l+1} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

При нахождении (5.45) мы воспользовались неравенством

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(|m|+5)}{\Gamma(|m|+4)} (|m|+1)^3 |\omega|^{2|m|} \leq \frac{\text{const}}{(1-|\omega|^2)^8}. \quad (5.46)$$

Для получения оценки сверху для модуля функции $T_{j, cd}^{(+)}$, когда переменная ω лежит в физической области, можно опять воспользоваться теоремой о двух постоянных. С этой целью в плоскости ω проведем построения, аналогичные ранее сделанным в плоскости z (рис. 20), с той лишь разницей, что вместо угла θ теперь

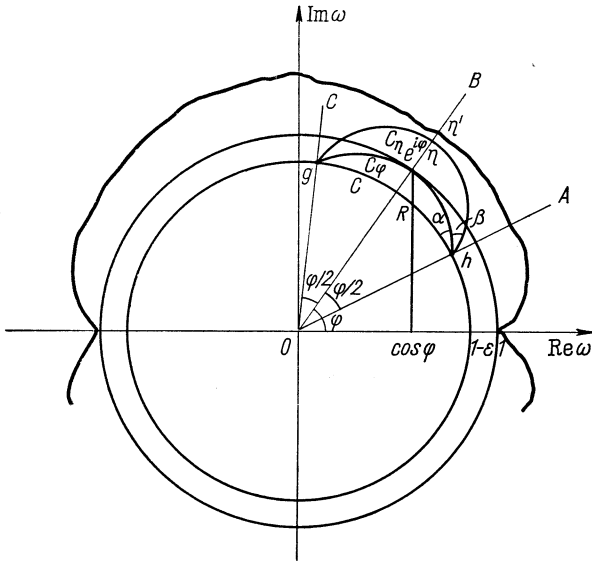


Рис. 20. Построение для определения гармонической меры области, ограниченной дугами C_η и C , в плоскости $\omega = \exp [i\varphi]$.

будет угол φ , а вместо параметра ε_m — параметр ε , равный значению ε_m при $m = 0$ [см. (5.35) и (5.36)].

Применив теорему о двух постоянных, найдем

$$\begin{aligned} & |T_{j, cd}^{(+)}(s, \cos \theta, \exp [i\varphi], \xi_i)| \leq \\ & \leq \frac{\text{const}}{[1-(1-\varepsilon)^2]^4} \cdot \frac{\ln^{3/2}(s/s_0)}{\sin^{5/2} \theta} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=|m|}^{\infty} \frac{|T_l^m(s, \xi_i)|^2}{l+1} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Аналогичную оценку можно получить и для модуля функции $T_{j, cd}^{(-)}$:

$$\begin{aligned} & |T_{j, cd}^{(-)}(s, \cos \theta, \exp [i\varphi], \xi_i)| \leq \frac{\text{const}}{[1-(1-\varepsilon)^2]^4} \cdot \frac{\ln^{3/2}(s/s_0)}{\sin^{5/2} \theta} \times \\ & \times \left[\sum_{m=-\infty}^{-1} \sum_{l=|m|}^{\infty} \frac{|T_l^m(s, \xi_i)|^2}{l+1} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Введем дифференциальное сечение процесса III (см. гл. 2)

$$\frac{d^2\sigma_{inel}^{j, cd}}{d \cos \theta d\varphi} = \frac{1}{2|p_a| \sqrt{s}} \int d\Gamma |T_{j, cd}^{(+)}(s, \cos \theta, \exp[i\varphi], \xi_i) + T_{j, cd}^{(-)}(s, \cos \theta, \exp[i\varphi], \xi_i)|^2. \quad (5.49)$$

Так как

$$\frac{d^2\sigma_{inel}^{j, cd}}{d \cos \theta d\varphi} \leq \frac{1}{|p_a| \sqrt{s}} \int d\Gamma [|T_{j, cd}^{(+)}|^2 + |T_{j, cd}^{(-)}|^2],$$

то, используя неравенства (5.47), (5.48) и формулу (5.36), получаем

$$\frac{d^2\sigma_{inel}^{j, cd}}{d \cos \theta d\varphi} \leq \text{const} \frac{\ln^{11}(s/s_0)}{s} \cdot \frac{1}{\sin^5 \theta \sin^8 \varphi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l+1} \int d\Gamma \sum_{m=-l}^l |T_l^m(s, \xi_i)|^2. \quad (5.50)$$

На основании условия унитарности

$$\text{Im} f_l(s) \geq \sum_{m=-l}^l \int d\Gamma |T_l^m(s, \xi_i)|^2, \quad (5.51)$$

где $f_l(s)$ — парциальные амплитуды процесса I, и неравенства (3.112) [см. ЭЧАЯ, 1972, т. 3, вып. 1] имеем

$$\left. \frac{d^2\sigma_{inel}^{j, cd}}{d \cos \theta d\varphi} \right|_{\substack{\theta \neq 0, \pi \\ \varphi \neq 0, \pi}} \leq \text{const} \frac{\ln^{12}(s/s_0)}{s \sin^5 \theta \sin^8 \varphi}. \quad (5.52)$$

Неравенство (5.52) дает верхнюю границу убывания для дифференциального сечения неупругого процесса III. В неравенство (5.50) входят парциальные волны T_l^m процесса III, когда в конце реакции имеются частицы c и d и определенная группа адронов. Нетрудно показать, что оценка (5.52) будет верна для дифференциального сечения, просуммированного по всем каналам реакции, содержащим частицы c и d . В этом легко убедиться, если воспользоваться соотношением унитарности

$$1 \geq \text{Im} f_l(s) \geq \sum_j \int d\Gamma \sum_{m=-l}^l |T_l^m|^2 \quad (5.53)$$

и неравенством (3.112). В выражении (5.53) сумма по j означает суммирование по каналам реакции.

Чувствительность оценок сечения множественного рождения к размерам области аналитичности по переменным $\cos \theta$ и ω

Здесь обсудим обременительность двух основных предположений, сделанных ранее относительно областей аналитичности амплитуды множественного рождения по $\cos \theta$ и $\omega = \exp [i\varphi]$.

Допустим, что амплитуда множественного рождения удовлетворяет предположению I, утверждающему, что имеет место аналитичность по переменной $z = \cos \theta$ в некоторой окрестности интервала $[-1, 1]$. Для простоты предположим, что массы сталкивающихся частиц равны. В качестве переменной t примем передачу импульса между частицами a и d . Тогда в системе центра инерции

$$\cos(\widehat{\mathbf{p}_a \mathbf{k}_d}) = (t - m_a^2 - m_d^2 + 2p_{a0}k_{d0})/2|\mathbf{p}_a||\mathbf{k}_d|, \quad (5.54)$$

где

$$p_{a0} = \sqrt{s}/2; \quad k_{d0} = (s + m_d^2 - q^2)/2\sqrt{s}; \quad q = k_0 + \sum_{i=1}^j k_i. \quad (5.55)$$

Введя специальное обозначение для $\cos \varphi$

$$\lambda = \cos \varphi = [\cos(\widehat{\mathbf{p}_a \mathbf{k}_d}) - \cos \psi \cdot \cos \theta] / \sin \theta \cdot \sin \psi, \quad (5.56)$$

найдем, что

$$\lambda = (\omega + 1/\omega)/2. \quad (5.57)$$

Предположим, что все особенности амплитуды множественного рождения в t -плоскости вещественны и для любых значений переменных $s, q^2 \dots$ они находятся на таком расстоянии от физической области реакции, что соответствующее значение

$\cos(\widehat{\mathbf{p}_a \mathbf{k}_d}) = \rho(s, \dots)$ больше единицы. Вычисляя минимальное значение λ при значениях θ и ψ из физической области реакции, найдем, что

$$\min \lambda = \rho(s, \dots). \quad (5.58)$$

Соотношение (5.57) показывает, что при стремлении $\rho(s, \dots)$ к единице все особенности в плоскости ω будут прижиматься к единичному кругу в точках $\omega = \pm 1$. Именно этот случай оговаривается в предположении II предыдущего раздела.

Если амплитуда множественного рождения имеет комплексные особенности в t -плоскости, которые при изменении $s, q^2 \dots$ приближаются к физической области по произвольному направлению (этому соответствует произвольность движения особенности в плоскости $\cos(\widehat{\mathbf{p}_a \mathbf{k}_d})$ к отрезку $[-1, 1]$), то из (5.57) следует, что особенности амплитуды в ω -плоскости могут прижиматься к кругу $\omega = 1$ в произвольных точках $\omega_1, \omega_2 \dots$

Оценим величины соответствующего дифференциального сечения в этом случае. Пусть ω_1 и ω_2 — точки на окружности $|\omega| = 1$ и пусть амплитуда $T_{j,cd}^{(+)}(s, \cos \theta, \omega, \xi_i)$ аналитична в области $\omega \in \Delta_1 \cup \{|\omega| < r_+(s)\}$, изображенной на рис. 21. Предположение о существовании области Δ_1 необходимо для возможности применения теоремы о двух постоянных.

Очевидно, что $T_{j,cd}^{(+)}(s, \cos \theta, \omega, \xi_i)$ удовлетворяет на круге $|\omega| = 1 - \varepsilon(s, \varphi)$ неравенству (5.45), с той только разницей,

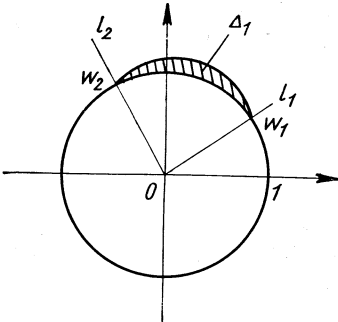


Рис. 21. Окрестность Δ_1 вне единичного круга в плоскости $\omega = \exp [i\varphi]$.

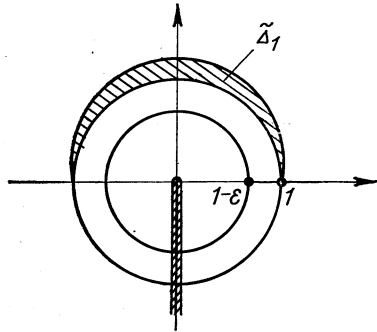


Рис. 22. $\tilde{\Delta}_1$ — образ окрестности Δ_1 при отображении (5.59).

что $\varepsilon(s, \varphi)$ отличается от ε предыдущего раздела. Нужное значение $\varepsilon(s, \varphi)$ будет избрано позднее. Чтобы получить оценку сверху для модуля $T_{j,cd}^{(+)}(s, \cos \theta, \omega, \xi_i)$ в том случае, когда ω лежит на дуге единичного круга между точками ω_1 и ω_2 , развернем сектор, заключенный между лучами L_1 и L_2 , на верхнюю полу-плоскость (рис. 22). Для этого необходимо сделать замену переменных

$$W = |\omega|^{\pi/(\varphi_1 - \varphi_2)} \exp [i\pi(\varphi - \varphi_1)/(\varphi_2 - \varphi_1)] = |W| \exp [i\alpha]; \quad \alpha = \pi(\varphi - \varphi_1)/(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{5.59}$$

Область Δ_1 при этом перейдет в область $\tilde{\Delta}_1$, изображенную на рис. 22. В плоскости W построим конструкцию, аналогичную изображенной на рис. 17. При этом будем рассматривать углы α , удовлетворяющие неравенству

$$\cos \alpha / \cos \alpha / 2 < 1 - \varepsilon(s, \varphi), \tag{5.60}$$

или в терминах переменной φ

$$\cos \frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \pi / \cos \frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \cdot \frac{\pi}{2} < 1 - \varepsilon(s, \varphi). \tag{5.61}$$

Пусть

$$1 - \varepsilon(s, \varphi) = \exp[-\xi],$$

где

$$\operatorname{tg} \xi/2 = \frac{\operatorname{tg} \alpha/4}{\ln(s/s_0)} = \operatorname{lg} \frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \cdot \frac{\pi}{4} / \ln(s/s_0). \quad (5.62)$$

Тогда, используя теорему о двух постоянных, найдем

$$\begin{aligned} |T_{j,cd}^{(+)}(s, \cos \theta, \omega, \xi_i)| &\leq \frac{\operatorname{const}}{[1 - (1 - \varepsilon)^2]^{1/4}} \cdot \frac{\ln^{3/2}(s/s_0)}{\sin^{5/2} \theta} \times \\ &\times \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=|m|}^{\infty} \frac{|T_l^m(s, \xi_i)|^2}{l+1} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Аналогичной оценке удовлетворяет и функция

$$\begin{aligned} |T_{j,cd}^{(-)}(s, \cos \theta, \omega, \xi_i)| &\leq \frac{\operatorname{const}}{[1 - (1 - \varepsilon)^2]^{1/4}} \cdot \frac{\ln^{3/2}(s/s_0)}{\sin^{5/2} \theta} \times \\ &\times \left[\sum_{m=-\infty}^{-1} \sum_{l=|m|}^{\infty} \frac{|T_l^m(s, \xi_i)|^2}{l+1} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Из этих оценок следует, что при углах φ из промежутка $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ дифференциальное сечение интересующего нас процесса ограничено сверху неравенством

$$\left. \frac{d^2 \sigma_{inel}^{j,cd}}{d \cos \theta d\varphi} \right|_{\substack{\theta \neq 0, \pi \\ \varphi_1 \neq \varphi < \varphi_2}} \leq \operatorname{const} \frac{\ln^{12}(s/s_0)}{s \sin^5 \theta \sin^8 \pi (\varphi - \varphi_1) / (\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (5.65)$$

Оценка (5.65) практически не отличается от полученной ранее оценки (5.52), если $\varphi_2 - \varphi_1 = \operatorname{const}$. Таким образом, предположение о том, что особенности в ω -плоскости подходят к единичному кругу лишь по действительной оси, несущественно и его можно заменить предположением о том, что особенность может приближаться к любой точке единичного круга, потребовав лишь существования некоторой дополнительной области аналитичности между особенностями вне круга $|\omega| = 1$.

Нетрудно убедиться, что если одновременно особенности в плоскости $\cos \theta$ также подходят к внутренним точкам сегмента $[-1, 1]$ (например, $\cos \theta_1$ и $\cos \theta_2$), но в некоторой окрестности сегмента между особенностями амплитуда множественного рождения аналитична, то дифференциальное сечение удовлетворяет неравенству

$$\left. \frac{d^2 \sigma^{j,cd}}{d \cos \theta d\varphi} \right|_{\substack{\theta_1 < \theta < \theta_2 \\ \varphi_1 < \varphi < \varphi_2}} \leq \frac{\operatorname{const}}{s} \cdot \frac{\ln^{12}(s/s_0)}{\sin^5 \pi (\theta - \theta_1) / (\theta_2 - \theta_1) \sin^8 \pi (\varphi - \varphi_1) / (\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (5.66)$$

Наконец, отметим, что изложенный в настоящей главе метод не приводит к оценкам типа (5.65), (5.66), если области аналитичности амплитуды множественного рождения по переменным $\cos \theta$ и $\omega = \exp [i\phi]$ приближаются с ростом s вплотную к физическим областям этих переменных.

Представление Киношиты — Лефеля — Мартена [18]

Амплитуда упругого рассеяния разлагается в ряд:

$$F(s, \theta) = \frac{8\pi \sqrt{s}}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(s) P_l(\cos \theta). \quad (5.67)$$

Вводя функцию $G(s, z)$, определенную рядом

$$G(s, z) = \frac{8\pi \sqrt{s}}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(s) z^l, \quad (5.68)$$

можно установить интегральную связь между функциями $F(s, \theta)$ и $G(s, z)$.

Эту связь можно получить из интегрального представления (5.6), полагая $m=0$:

$$F(s, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{R}} G(s, z). \quad (5.69)$$

Аналогично, используя обратное представление (5.18) и полагая в нем $m=0$, получаем

$$G(s, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{E}_L(s)} F(s, t) \mathcal{L}(z, t) dt, \quad (5.70)$$

где

$$\mathcal{L}(z, t) = \left(2z \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) \int_{t + \sqrt{t^2 - 1}}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{u^2 - 2tu + 1}} \frac{1}{u - z}. \quad (5.71)$$

Если амплитуда $F(s, z)$ аналитична по z для любых физических значений s в области \tilde{D} , то на основании представления (5.70) функция $G(s, u)$ будет аналитична по u в области D . Справедливо и обратное утверждение.

Если $G(s, u)$ аналитична в D , то $F(s, z)$ будет аналитична в \tilde{D} . Область \tilde{D} получается из области D отображением

$$z = (u + 1/u)/2. \quad (5.72)$$

Если амплитуда полиномиально ограничена по s , когда $z \in \tilde{D}$, то функция G также будет полиномиально ограничена по s , когда u принадлежит области D .

Представления (5.69) и (5.70) впервые были получены в работе Киношты — Лефеля — Мартена и использованы для нахождения верхней границы дифференциального сечения процесса упругого рассеяния при фиксированных углах.

Проведем разрез в (5.69) вдоль лучей $(0, \exp [i\theta])$ и $(0, \exp [-i\theta])$, тогда

$$F(s, \cos \theta) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{e^{i\theta}} \frac{G(s, u) du}{\sqrt{1-2u \cos \theta + u^2}} - \frac{1}{\pi i} \int_0^{e^{-i\theta}} \frac{G(s, u) du}{\sqrt{1-2u \cos \theta + u^2}}. \quad (5.73)$$

Отсюда

$$|F(s, \cos \theta)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dx |G(s, x \exp [i\theta])|}{\sqrt{\sin \theta} (1-x)^{1/2}}. \quad (5.74)$$

В силу условия унитарности из (5.68) можно получить для функции G в области $0 \leq x \leq 1 - \varepsilon$ следующее неравенство:

$$|G(s, x \exp [i\theta])| \leq \frac{16\pi \sqrt{s}}{k} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}. \quad (5.75)$$

Для получения оценки на функцию $G(s, u)$ в области $1 - \varepsilon \leq x \leq 1$ воспользуемся теоремой о двух постоянных. Выполняя построения, аналогичные проведенным ранее (см. рис. 17), найдем

$$|G(s, x \exp [i\theta])| \leq \text{const} (\sqrt{s/k}) (1/\varepsilon^2). \quad (5.76)$$

На основании (5.75) и (5.76) из неравенства (5.74) получим

$$|F(\cos \theta)| \leq \text{const} (1/\sqrt{\sin \theta} \varepsilon^{3/2}). \quad (5.77)$$

Величина ε определяется из уравнений

$$\varepsilon = 1 - \exp [-\xi]; \quad \text{th } \xi/2 = \frac{\text{tg } \theta/4}{\ln (s/s_0)}. \quad (5.78)$$

Отсюда легко показать, что

$$\varepsilon \gg \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \theta}{\ln (s/s_0)}. \quad (5.79)$$

Используя (5.79) и (5.77), найдем

$$|F(s, \cos \theta)| \leq \text{const} \frac{\ln^{3/2} (s/s_0)}{\sin^2 \theta}. \quad (5.80)$$

Следовательно, для дифференциального сечения упругого рассеяния получим неравенство

$$\frac{d\sigma_{el}}{d \cos \theta} \Big|_{\theta \neq 0, \pi} \leq \text{const} \frac{\ln^3 (s/s_0)}{s \sin^4 \theta}. \quad (5.81)$$

Оценка дифференциального сечения упругого рассеяния назад [2]

В настоящем параграфе будем предполагать, что для амплитуды рассеяния $F(s, t)$ справедливо представление Мандельштама. В действительности в рассуждениях будем использовать лишь дисперсионные соотношения по переданному импульсу t . Амплитуду рассеяния можно представить в виде

$$F(s, t) = G(s, t) + H(s, t), \quad (5.82)$$

где функция $G(s, t)$ определяет вклад t -канала в амплитуду рассеяния и мероморфна в t -плоскости с разрезом $t_0 \leq t \leq \infty$, а функция $H(s, t)$ связана с u -каналом и мероморфна в плоскости u с разрезом $u_0 \leq u \leq \infty$. Заметим, что функция G и H в случае πN -рассеяния имеют полюса лишь в точках $t = m_\pi^2$, $u = M_N^2$.

Если степень роста амплитуды рассеяния $F(s, t)$ по переменной t не превосходит n , то для парциальных амплитуд $f_l(s)$ при $l \geq n$ справедливо соотношение

$$f_l(s) = g_l(s) + (-1)^l h_l(s), \quad (5.83)$$

где

$$g_l(s) = \frac{1}{16\pi^2 k \sqrt{s}} \int_{t_0}^{\infty} Q_l \left(1 + \frac{t}{2k^2}\right) \operatorname{Im} G(s, t) dt; \quad (5.84)$$

$$h_l(s) = \frac{1}{16\pi^2 k \sqrt{s}} \int_{u_0}^{\infty} Q_l \left(1 + \frac{u}{2k^2}\right) \operatorname{Im} H(s, u) du. \quad (5.85)$$

В упругом приближении функции $g_l(s)$ и $h_l(s)$ удовлетворяют условию унитарности (см., например, [23]):

$$\operatorname{Im} g_l(s) = |g_l(s)|^2 + |h_l(s)|^2; \quad (5.86)$$

$$\operatorname{Im} h_l(s) = g_l(s) h_l^*(s) + g_l^*(s) h_l(s).$$

В случае наличия неупругих каналов предположим, что условия унитарности обобщаются следующим образом:

$$\operatorname{Im} g_l(s) = |g_l(s)|^2 + |h_l(s)|^2 + \int d\Gamma \sum_{m=-l}^l [|g_l^m(s, \xi_i)|^2 + |h_l^m(s, \xi_i)|^2 + \dots]; \quad (5.87)$$

$$\operatorname{Im} h_l(s) = g_l(s) h_l^*(s) + g_l^*(s) h_l(s) + \int d\Gamma \sum_{m=-l}^l [g_l^{m*} h_l^m + g_l^{m*} h_l^m] + \dots$$

Здесь

$$T_l^m(s, \xi_i) = g_l^m(s, \xi_i) + (-l)^l h_l^m(s, \xi_i). \quad (5.88)$$

Из условий унитарности (5.87) следует, что

$$|g_l(s)| \leq 1; \quad |h_l(s)| \leq 1/2. \tag{5.89}$$

Рассмотрим функцию

$$G(s, \cos \theta) = \frac{8\pi \sqrt{s}}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) g_l(s) P_l(\cos \theta). \tag{5.90}$$

Необходимо оценить ее в точке $\theta = \pi$. Для этого введем функцию

$$\Phi(s, z) = \frac{8\pi \sqrt{s}}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) g_l(s) z^l. \tag{5.91}$$

На основании представления Киношита—Лефеля—Мартена функция $\Phi(s, z)$ будет аналитической в z -плоскости с разрезом

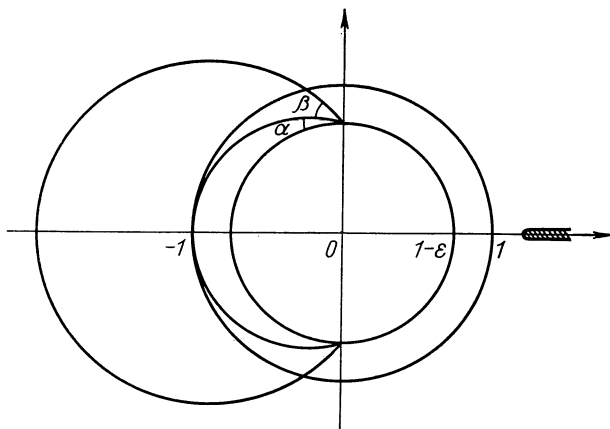


Рис. 23. Построение для определения гармонической меры $\alpha/(\alpha + \beta)$.

вдоль действительной оси от точки

$$z = z_0(s) + \sqrt{z_0^2(s) - 1} \tag{5.92}$$

до бесконечности.

Заметим, что $G(s, -1) = \Phi(s, -1)$. В силу условия унитарности на круге радиуса $|z| = 1 - \varepsilon = \exp[-\xi]$ функция $\Phi(s, z)$ удовлетворяет неравенству

$$|\Phi(s, z)| \leq (16\pi \sqrt{s}/k) (1 - |z|)^{-2}. \tag{5.93}$$

Для оценки значения функции $\Phi(s, z)$ в точке $z = -1$ воспользуемся теоремой о двух постоянных. Проводя построения

(рис. 23), найдем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{sh} \xi; \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \operatorname{sh} \chi; \operatorname{th} \chi/2 = \\ &= [a(\pi) - \exp(-\xi)]/[a(\pi) + \exp(-\xi)]. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Полагая

$$\operatorname{th} \chi/2 = \rho; \operatorname{th} \xi/2 = 1/\ln(s/s_0),$$

получим, что угол $\alpha + \beta$ будет постоянным, а угол α стремится к нулю с ростом s . Используя неравенство о двух постоянных, найдем $|G(s, -1)| \leq \operatorname{const} \ln^2(s/s_0)$. Отсюда вклад правого разреза в величину $\sqrt{\left. \frac{d\sigma_{el}}{d \cos \theta} \right|_{\theta=\pi}}$ не превосходит значения $\operatorname{const} [\ln^2(s/s_0)/\sqrt{s}]$.

Аналогично можно показать, что вклад левого разреза в t -плоскости в величину $\sqrt{\left. \frac{d\sigma_{el}}{d \cos \theta} \right|_{\theta=0}}$ не превосходит значения $\operatorname{const} [\ln^2(s/s_0)/\sqrt{s}]$. Если полное сечение взаимодействия не убывает или убывает не быстрее $[\ln(s/s_0)]^{-\gamma}$, то при вычислении асимптотического поведения по энергии дифференциального сечения упругого рассеяния вперед можно пренебречь вкладом от левого разреза амплитуды в t -плоскости ввиду его малости.

Вклад в дифференциальное сечение рассеяния назад функции $H(s, t)$ определяется наименьшей промежуточной массой в u -канале реакции и для πN -рассеяния:

$$|H|^2 \leq \frac{\pi s^2}{8(M_N + m_\pi)^4} \ln^4(s/s_0). \quad (5.95)$$

Таким образом, при высоких энергиях верхняя граница для дифференциального сечения рассеяния назад определяется левым разрезом и асимптотически:

$$\left. \frac{d\sigma_{el}}{du} \right|_{u \sim 0} \leq \frac{\pi}{4(M_N + m_\pi)^4} \ln^4(s/s_0). \quad (5.96)$$

Заметим, что верхняя грань сечения рассеяния назад на три порядка меньше максимально возможного сечения рассеяния вперед.

ЛИТЕРАТУРА

1. Логунов А. А., Нгуен Ван Хьюе. ТМФ, 1969, 1, 375.
2. Logunov A. A. et al. Nucl. Phys. 1969, 10B, 692; Препринт ИФВЭ, СТФ, 68-54-К, Серпухов, 1968.
3. Logunov A. A., Mestvirishvili M. A., Nguen Van Hieu. Phys. Lett., 1967, 25B, 617.
4. Martin A. Nuovo cimento, 1966, 42A, 930; 1966, 44A, 1219; Martin A. Материалы Международного семинара по аналитическим свойствам

- амплитуд рассеяния. 9—12 июня 1969 г. Препринт ИФВЭ, СТФ 69-101, Серпухов, 1969, стр. 4.
5. Froissart M. Phys. Rev., 1961, 123, 1053.
 6. Tiktopoulos G., Treiman S. B. Phys. Rev., 1968, 167, 1408; Epstein H. Topical Conference on High Energy Collisions of Hadrons. V. 1. CERN, Geneva. 1968, p. 290.
 7. Singh V., Roy S. N. Ann. Phys., 1970, 57, 461.
 8. Логунов А. А., Нгуен Ван Хьеу. Международная школа по физике высоких энергий. Чехословакия, Поградске Плесо, 1967.
 9. Померанчук И. Я. ЖЭТФ, 1958, 34, 725.
 10. Amati D., Fierz M., Glazer V. Phys. Rev. Lett., 1960, 4, 89.
 11. Sugawara M., Kanazawa A. Phys. Rev., 1961, 123, 1995.
 12. Мейман Н. Н. ЖЭТФ, 1962, 43, 2277.
 13. Логунов А. А., Нгуен Ван Хьеу, Тодоров И. Т. УФН, 1966, 88, 57.
 14. Волков Г. Г., Логунов А. А., Мествиришвили М. А. ТМФ, 1970, 4, 196.
 15. Khuri N. N., Kinoshita T. Phys. Rev., 1965, 137B, 720.
 16. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. Перев. с англ. М., ОГИЗ, 1940.
 17. Ежела В. В., Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Препринт ИФВЭ, СТФ 70-43, Серпухов, 1970; ТМФ, 1971, 6, 42.
 18. Kinoshita T., Loeffel J. J., Martin A. Phys. Rev., 1964, 135B, 1464; Ежела В. В., Строганов Ю. Г. Препринт ИФВЭ, СТФ 70-18, Серпухов, 1970; Ежела В. В., Мествиришвили М. А. Препринт ИФВЭ, СТФ 70-42, Серпухов, 1970.
 19. Mahoux G., Martin A. Phys. Rev., 1968, 174, 2140.
 20. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., «Наука», 1965.
 21. Gunson J. Math. Phys., 1965, 6, 827; Andreus M., Gunson J. Math. Phys., 1964, 5, 1391.
 22. Ежела В. В. Препринт ИФВЭ, СТФ 70-39, Серпухов, 1970.
 23. Грибов В. Н. ЖЭТФ, 1962, 41, 1262.