ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
1972, ТОМ 3, ВЫП. 3

УДК 539.17

АКСИОМЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ЛОКАЛИЗУЕМЫХ ПОЛЕЙ И ИХ СЛЕДСТВИЯ *

Нгуен Ван Хьеу

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Лаборатория теоретической физики

Статья является обзором по аксиоматическому подходу в квантовой теории взаимодействующих полей. Сравниваются аксиоматики Н. Н. Боголюбова и А. Вайтмана. Приведены следствия, которые могут проверяться на опыте (асимптотические теоремы).

Review of aximatic approach in quantum theory of interacting fields is given. N. N. Bogolubov's and A. S. Wightman's axiomatics are compared. Some consequences are considered which can be checked in experiment (asymptotic theorems).

ВВЕДЕНИЕ

Применение теории возмущений и процедуры перенормировки в квантовой электродинамике привели к ряду предсказаний, находящихся в хорошем согласии с экспериментальными данными. Несмотря на эти успехи, такую теорию нельзя считать удовлетворительной: в процедуре перенормировки мы работаем с бесконечными величинами, которые исчезают только после переопределений двух констант — массы и заряда. Аналогичная ситуация имеет место и в некоторых других теориях взаимодействующих полей с локальными лагранжианами определенных типов — мезон-барионное взаимодействие типа $\overline{\Psi}\gamma_5\Psi\varphi$, например. Взаимодействия такого рода называются перенормируемыми. Наряду с ними существуют еще так называемые неперенормируемые теории, в которых невозможно ликвидировать все ультрафиолетовые расходимости введением конечного числа констант перенормировки. С другой стороны, такие неперенормируемые взаимодей-

* Обзорный доклад на Международном симпозиуме по физике высоких энергий, Дрезден, апрель 1971 г.

ствия, по-видимому, осуществляются в природе: четырехфермионные слабые взаимодействия, взаимодействия заряженных массивных векторных мезонов и т. д. Все это означает, что, несмотря на успехи теории перенормировки, необходимо преодолеть трудности, связанные с наличием ультрафиолетовых расходимостей в теории поля, а именно найти способы избежать этих расходимостей.

Были сделаны различные попытки построить квантовую теорию поля без подобных расходимостей. Одна из них — попытка построить вместо локальной нелокальную теорию с надеждой на то, что наличие форм-фактора в лагранжиане взаимодействия обеспечит сходимость интегралов по импульсам. Начало нелокальной теории поля было заложено еще в сороковых годах. В последнее время она существенно продвинулась вперед, но, несмотря на это, еще далека от совершенства.

Наряду с новыми результатами нелокальной теории были достигнуты также значительные успехи в изучении локальной теории поля с неполиномиальными лагранжианами. Найдены рецепты, при помощи которых можно частично просуммировать ряд по теории возмущений и получить (хотя и неоднозначные) выражения для матричных элементов, не содержащие бесконечностей.

По вопросу о причине ультрафиолетовых расходимостей в квантовой теории поля и о пути избежать их имеется, однако, и другая точка зрения. При вычислении матричных элементов по теории возмущений необходимо воспользоваться представлением взаимодействия, а такого представления, промежуточного между шредингеровским и гейзенберговским, в действительности не существует, как это вытекает из знаменитой теоремы Хаага. Теория возмущений, таким образом, математически некорректна, и следствием этой нестрогости является возникновение ультрафиолетовых расходимостей. Естественно, тогда возникла идея о создании локальной теории поля без подобных недостатков. В такой теории должна соблюдаться математическая строгость всех рассуждений. Более того, теория возмущений не годится для сильных взаимодействий даже в том случае, когда нет ультрафиолетовых расходимостей, так как константа связи большая. В таком случае поиск непертурбационных методов построения S-матрицы обязателен. Построить нетривиальную квантовую теорию взаимодействующих полей без привлечения теории возмущений так, чтобы была соблюдена математическая строгость при формулировке основных предположений теории и при выводе их следствий,— вот задача аксиоматического подхода в квантовой теории поля.

Работы по аксиоматическому подходу в основном можно разделить на три группы: S-матричный формализм Боголюбова, полевой формализм Вайтмана и абстрактный алгебраический формализм Хаага — Араки — Кастлера. Здесь будем концентрировать внимание на двух первых формализмах: аксиоматике Боголюбова и аксиоматике Вайтмана. Забегая вперед, заметим, что они почти эквивалентны. Ради простоты изложения рассмотрим теорию нейтрального скалярного поля $A(x)$. Соответствующие асимптотические поля обозначим $A_{in}(x)$ и $A_{out}(x)$. Они удовлетворяют уравнениям для свободных полей

$$(\square - m^2)\, A_{in}(x) = (\square - m^2)\, A_{out}(x) = 0.$$

В обоих обсуждаемых формализмах теория релятивистски инвариантна. Состояния физических систем описываются нормированными векторами Φ (вернее, единичными лучами) в гильбертовом пространстве H с положительно дефинитной метрикой. Предполагается также, что существует единственное релятивистски инвариатное состояние с 4-импульсом, равным нулю,— состояние вакуума, обозначаемое через $|0>$, а этот вакуум вместе со всеми состояниями физических систем образует полный базис в пространстве H.

Основными величинами в аксиоматике Боголюбова являются S-матрица как функционал от асимптотических полей $A_{in}(x)$, например:

$$S = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int K_n(x_1, \ldots, x_n) : A_{in}(x_1) \ldots A_{in}(x_n) : dx_1 \ldots dx_n$$

и радиационные операторы, выражаемые через вариационные производные S-матрицы:

$$R_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\delta^n S}{\delta A_{in}(x_1) \ldots \delta A_{in}(x_n)}\, S^+.$$

Все матричные элементы S-матрицы полностью определяются вакуумными средними этих радиационных операторов. Последние назовем функциями Боголюбова и обозначим

$$B_n(x_1, \ldots, x_n) = \left\langle 0 \left| \frac{\delta^n S}{\delta A_{in}(x_1) \ldots \delta A_{in}(x_n)}\, S^+ \right| 0 \right\rangle.$$

Что касается аксиоматики Вайтмана, то в ней существование S-матрицы не предполагается. Основной величиной в этом формализме является оператор поля $A(x)$. Задание $A(x)$ полностью определяет вакуумные средние

$$W_n(x_1, \ldots, x_n) = \langle 0 | A(x_1) \ldots A(x_n) | 0 \rangle,$$

называемые функциями Вайтмана. Обратно, зная функции Вайтмана, можно определить поле $A(x)$ однозначно до унитарной эквивалентности.

В аксиоматике Боголюбова S-матрица должна удовлетворять условию микропричинности

$$\frac{\delta}{\delta A_{in}(x)}\left[\frac{\delta}{\delta A_{in}(y)} S^{+}\right]=0, \quad x \lesssim y, \tag{B.1}$$

а в формализме Вайтмана вместо этого условия имеем условие локальной коммутативности операторов поля

$$[A(x), A(y)]=0, \; x \sim y. \tag{B.2}$$

Эти условия представляют собой фундаментальный принцип локальной теории поля.

Прежде чем перейти к систематической формулировке основных постулатов теории и изучению их следствий, обсудим подробнее математическую природу используемых нами величин: операторов поля $A(x)$, радиационных операторов $R_n(x_1, \ldots, x_n)$, функций Вайтмана $W_n(x_1, \ldots, x_n)$ и функций Боголюбова $B_n(x_1, \ldots, x_n)$. Эти величины необходимо выбрать так, чтобы можно было охватить достаточно широкий класс теорий или по возможности даже самый широкий класс. С другой стороны, покажем, что условия (B.1) и (B.2) имеют смысл только в том случае, когда эти величины удовлетворяют некоторым требованиям математического характера. Иначе говоря, начнем с обсуждения природы математического аппарата, которым будем пользоваться.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

Что такое оператор поля $A(x)$? Является ли он действительно зависящим от x оператором, определенным на некотором (плотном) множестве D гильбертова пространства? Допустим, что это именно так. Поскольку состояние вакуума должно принадлежать области определения D этого оператора, то в таком случае

$$|\Phi(x)\rangle = A(x)|0\rangle$$

представляет собой некоторый вектор в гильбертовом пространстве, и имеем

$$\|\Phi(x)\|^2 = \langle\Phi(x)|\Phi(x)\rangle = \langle 0|A(x)A(x)|0\rangle < \infty. \tag{1.1}$$

Из полноты набора, состоящего из вакуума и всех состояний физических систем, и трансляционной инвариантности следует, что для вакуумных средних произведения двух операторов поля имеем спектральное представление Челена — Лемана

$$\langle 0|A(x)A(y)|0\rangle = \int \exp[ik(x-y)]\,\rho(k)\,dk, \tag{1.2}$$

причем, согласно условию положительной определенности метрики, $\rho(k)$ неотрицательна:

$$\rho(k) \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Условие (1.1) означало бы, что

$$\int \rho(k)\, dk < \infty. \tag{1.4}$$

С другой стороны, релятивистская инвариантность требует, чтобы $\rho(k)$ была инвариантной функцией от 4-импульса k:

$$\rho(\Lambda k) = \rho(k), \tag{1.5}$$

где Λ — любое однородное преобразование Лоренца. Нетрудно показать, что уравнения (1.3) — (1.5) имеют следующее единственное решение:

$$\rho(k) = c\delta^4(k),$$

а в таком случае

$$\langle 0 | A(x) A(y) | 0 \rangle = c,$$

т. е. поле $A(x)$ было бы тривиальным. Это означает, что величина $A(x)|0\rangle$ не имеет смысла, и $A(x)$ не является оператором в настоящем смысле этой терминологии. Иначе говоря, нельзя говорить о поле в одной точке. Физический смысл имеет лишь усредненное поле, выражаемое сглаженными операторами вида

$$A(f) = \int A(x) f(x)\, dx, \tag{1.6}$$

где $f(x)$ — функции с некоторыми нужными свойствами. Величины

$$| \Phi_f \rangle = A(f) | 0 \rangle$$

являются теперь векторами в H, а $A(f)$ — операторами.

Таким образом, $A(x)$ — линейный функционал с операторными значениями: каждой функции $f(x)$ из некоторого подходящего класса он сопоставляет оператор $A(f)$. Его называем операторнозначной обобщенной функцией. Аналогично радиационные операторы $R_n(x_1, \ldots, x_n)$ также не являются настоящими операторами. По отношению к каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$ они представляют собой операторнозначные обобщенные функции. Отсюда следует, что функции Вайтмана $W_n(x_1, \ldots, x_n)$ и функции Боголюбова $B_n(x_1, \ldots, x_n)$ являются не обычными функциями, а обобщенными функциями по каждой из переменных.

Существуют различные классы обобщенных функций. Каким из них мы должны воспользоваться для построения нетривиальной локальной теории поля, включающей в себя как частный случай теорию свободных полей? Поскольку каждая обобщенная функция — линейный функционал, сопоставляющий заданной функции $f(x)$ определенное число

$$F(f) = \int F(x) f(x)\, dx, \tag{1.7}$$

то свойства обобщенных функций $F(x)$ полностью задаются свойствами класса так называемых основных функций $f(x)$, над которыми определены эти линейные функционалы. Следовательно, для идентификации класса обобщенных функций $F(x)$ достаточно указать класс основных функций $f(x)$. Мы хотели бы по возможности найти самый широкий класс обобщенных функций. Для этого необходимо максимально сузить класс основных функций.

На примере свободного поля видно, что искомый класс обобщенных функций должен быть достаточно широким, чтобы содержать в себе производные любого конечного порядка от δ-функции или, что эквивалентно, содержать функции вида

$$F(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n \delta^n (x - x_0). \tag{1.8}$$

Последняя обобщенная функция определяет следующий функционал:

$$F(f) = \int \sum_{n=0}^{N} c_n \delta^n (x - x_0) f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n c_n \frac{d^n f(x)}{dx^n}\bigg|_{x=x_0}.$$

Это выражение имеет смысл при любом N и x_0 только в том случае, когда функция f бесконечно дифференцируема. С другой стороны, обобщенные функции $F(x)$ могут расти полиномиально, например при $x \to \infty$. Для сходимости интеграла (1.7) основные функции $f(x)$ должны убывать достаточно быстро. Таким образом, естественно выбрать в качестве класса основных функций класс бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций. Введем теперь систему норм

$$\| f \|_{k,\, m} = \operatorname*{supp}_{\substack{x \\ n \leqslant m}} |(1 + |x|)^k D^n f(x)|, \tag{1.9}$$

где D^n — оператор дифференцирования n-го порядка, и превратим этот класс в топологическое пространство. Оно называется полным счетно-нормированным пространством или индуктивным пределом последовательности банаховых пространств и обозначается $\mathcal{J}$. Линейные функционалы над $\mathcal{J}$ образуют топологическое пространство $\mathcal{J}'$, каждый элемент которого имеет вид

$$F(x) = D^k \varphi(x) \tag{1.10}$$

для некоторого целого положительного k, где $\varphi(x)$ — непрерывная функция полиномиального роста. Пространство $\mathcal{J}'$ уже достаточно широко, чтобы можно было выбрать его в качестве класса обобщенных функций в локальной теории поля. Эти функции называются обобщенными функциями умеренного роста.

Только что введенный класс обобщенных функций обладает одним замечательным свойством, заключающимся в следующей теореме о ядре Шварца. Если $F(x_1, \ldots, x_n)$ является обобщенной функцией данного класса по каждой из переменных $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ в отдельности, т. е. если определен полилинейный функционал

$$F(f_1, \ldots, f_n) = \int F(x_1, \ldots, x_n) f_1(x_1) \ldots f_n(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

то она является обобщенной функцией этого же класса и по совокупности всех переменных, т. е. определен линейный функционал

$$F(f) = \int F(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1, \ldots, dx_n.$$

Все пространства обобщенных функций, для которых справедлива теорема о ядре Шварца, называются ядерными пространствами. Таким образом, пространство $\mathcal{J}'$ является ядерным. В силу этого свойства функции Вайтмана и функции Боголюбова — обобщенные функции по совокупности всех переменных, а радиационные операторы — операторнозначные обобщенные функции по совокупности всех переменных.

Для построения нетривиальной локальной теории поля пространство $\mathcal{J}'$ — уже достаточно широкое. Оно, однако, не самое широкое из пространств, пригодных для этой цели. В частности, это пространство не содержит в себе обобщенные функции вида

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \delta^{(n)}(x - x_0), \tag{1.11}$$

а последними при некотором ограничении на последовательности c_n можно воспользоваться также в качестве обобщенных функций в локальной теории, как это будет показано ниже.

Установим теперь ограничения на последовательности c_n. Для этой цели заметим прежде всего, что класс обобщенных функций нельзя выбрать произвольным образом, поскольку они должны быть пригодными для формулировки принципа микропричинности:

$$\frac{\delta}{\delta A_{in}(x)} \left[\frac{\delta S}{\delta A_{in}(y)} S^+ \right] = 0, \quad x \leqslant y \tag{1.12}$$

или принципа локальной коммутативности

$$[A(x), A(y)] = 0, \quad x \sim y. \tag{1.13}$$

Эти уравнения имеют лишь условный смысл, так как их левые части — операторнозначные обобщенные функции, а не обычные операторы, зависящие от x и y. Поэтому необходимо переформулировать точно условия (1.12) и (1.13). Пусть f и g — основные функции, такие, что их носители разделяются пространственно-подобным образом, или носитель функции g лежит полностью внутри будущего светового конуса относительно каждой точки носителя функции f:

$$\mathrm{supp}\, f \leqslant \mathrm{supp}\, g. \tag{1.14}$$

Тогда условие микропричинности гласит:

$$\frac{\delta}{\delta A_{in}(f)}\left[\frac{\delta S}{\delta A_{in}(g)} S^{+}\right] = 0. \tag{1.15}$$

Аналогично, если носители основных функций f и g разделяются пространственно-подобным образом:

$$\mathrm{supp}\, f \sim \mathrm{supp}\, g, \tag{1.16}$$

то

$$[A(f),\ A(g)] = 0. \tag{1.17}$$

Заметим, что каждая из пары функций f и g, удовлетворяющих условию (1.14) или условию (1.16), должна обращаться в нуль в некоторой области пространства Минковского. Так, в силу условия (1.16) функция g равна нулю внутри световых конусов с вершинами, лежащими на носителе функции f. Очевидно, что условия (1.15) и (1.17) имеют реальное содержание только в том случае, если такие основные функции существуют. Таким образом, для того чтобы придать условию микропричинности или условию локальной коммутативности в их математически строгой формулировке (1.15) или (1.17) реальное значение, необходимо используемый нами класс обобщенных функций выбрать таким, чтобы среди основных функций существовали те, которые равны нулю вне заданных областей пространства-времени. Это условие будем называть условием строгой локализуемости, а квантовые поля, функции Боголюбова или функции Вайтмана которых представляют собой обобщенные функции, удовлетворяющие последнему условию строгой локализуемости,— строго локализуемыми полями.

Пространство $\mathcal{J}'$ обобщенных функций умеренного роста вида (1.10), т. е. класс линейных функционалов на топологическом пространстве $\mathcal{J}$ с системой норм (1.9), удовлетворяет условию строгой локализуемости. Им вполне можно воспользоваться для построения локальной теории поля. С другой стороны, оно является достаточно широким, чтобы теория была нетривиальной и, в частности, содержала как частный случай теорию свободных полей, а также чтобы было возможно описать наблюдаемые процессы взаимодействия элементарных частиц. Именно эти обобщенные функции умеренного роста были применены для построения локальной теории взаимодействующих полей в основополагающих работах Боголюбова и Вайтмана и в последующих работах аксиоматического подхода. Однако класс $\mathcal{J}'$ не является самым широким из классов, удовлетворяющих условию строгой локализуемости, как это было показано в некоторых работах, выполненных в последнее время. Было бы весьма желательно найти наиболее широкий класс обобщенных функций, пригодных для построения теории строго локализуемых полей. Сделаем это сейчас, следуя недавней работе Джаффе.

Прежде всего отметим замечательное свойство пространства $\mathcal{J}$, заключающееся в его симметрии относительно преобразования Фурье. Пространство основных функций переменной x с системой норм (1.9) будем обозначать $\mathcal{J}_x$, а пространство их преобразований Фурье $\tilde{f}(p)$ — $\tilde{\mathcal{J}}_p$. Последнее является также пространством бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций с системой норм вида (1.9)

$$\|\tilde{f}\|_{m,k} = \sup_{\substack{p \\ n\leqslant k}} |(1+|p|)^m D^n\tilde{f}(p)|, \tag{1.18}$$

иначе говоря,

$$\tilde{\mathcal{J}}_p = \mathcal{J}_p.$$

Отсюда следует, что преобразования Фурье $\tilde{F}(p)$ обобщенных функций умеренного роста $F(x)$ представляют собой также обобщенные функции умеренного роста. Они полиномиально ограничены при $p \to \infty$:

$$|F(p)| \leqslant \text{const}\ |p|^n \tag{1.19}$$

при некотором положительном n, где $|p|$ — евклидов радиус в пространстве Минковского.

Обозначим $\mathfrak{B}'_x$ и $\tilde{\mathfrak{B}}'_p$ — искомое максимальное пространство обобщенных функций и пространство их преобразований Фурье, а соответствующие пространства основных функций — $\mathfrak{B}_x$ и $\tilde{\mathfrak{B}}_p$. Поскольку $\mathfrak{B}'_x$ шире, чем $\mathcal{J}'_x$, то пространство $\mathfrak{B}'_x$ должно содержать все обобщенные функции умеренного роста и, следовательно, все функции из $\mathfrak{B}_x$ и $\tilde{\mathfrak{B}}_p$ бесконечно дифференцируемы. Для введения топологии этих пространств удобно исходить из $\tilde{\mathfrak{B}}_p$. Вместо системы норм (1.18) будем пользоваться новой системой норм:

$$\|\tilde{f}\|_{A,k} = \sup_{\substack{p \\ n\leqslant k}} |g(A|p|)\, D^n\tilde{f}(p)|, \tag{1.20}$$

где $g(z)$ — некоторая целая функция. Если $g(z)$ является полиномом, то (1.20) сводится к (1.18). Поэтому пространство $\tilde{\mathfrak{B}}_p$

у́же пространства $\mathcal{J}_p$. Условие строгой локализуемости накладывает некоторые ограничения на функции $g(z)$ в определении нормы (1.20). Для строгой локализуемости полей, как показал Джаффе, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^\infty \frac{\ln|g(t)|}{(1+t)^2}\,dt<\infty. \tag{1.21}$$

Отсюда вытекает аналогичное ограничение на рост преобразований Фурье $\widetilde{F}(p)$ обобщенных функций в теории локализуемых полей:

$$|\widetilde{F}(p)|\leqslant\psi(|p|);\qquad \int_0^\infty \frac{\ln\psi(|p|)}{(1+|p|)^2}\,d|p|<\infty. \tag{1.22}$$

Это условие выполняется, если $\widetilde{F}(p)$ растет не быстрее экспоненты от $|p|(\ln|p|)^{-2}$:

$$|\widetilde{F}(p)|\leqslant \text{const}\exp[\text{const}\,|p|(\ln|p|)^{-2}]. \tag{1.23}$$

Функция $\widetilde{F}(p)$ с ростом

$$\widetilde{F}(p)\sim\exp[\text{const}\,|p|(\ln|p|)^{-1}]$$

нарушала бы условие (1.22). Условие строгой локализуемости (1.22) является, очевидно, более общим, чем условие полиномиальной ограниченности. Важно отметить, что пространство обобщенных функций $\mathfrak{D}'$ ядерное: для него справедлива теорема о ядре Шварца.

Для иллюстрации полученных результатов мы вернемся к рассмотренным раньше обобщенным функциям (1.8) и (1.11) в одномерном пространстве. Первая из них принадлежит классу $\mathcal{J}'$ и имеет полиномиально ограниченное преобразование Фурье:

$$\widetilde{F}(p)=\sum_{n=0}^{N} \mathrm{i}^n c_n p^n. \tag{1.24}$$

Что касается второй функции с бесконечной последовательностью c_n, то ее преобразование Фурье

$$\widetilde{F}(p)=\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}^n c_n p^n \tag{1.25}$$

не может быть полиномиально ограниченным. Однако в силу условия строгой локализуемости функции $\widetilde{F}(p)$ должна удовлетворять неравенству (1.22), что приводит к следующему ограничению на последовательности c_n:

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{n!\,|c_n|}=0. \tag{1.26}$$

Наконец, подведем итоги нашего обсуждения. Мы показали, что при помощи обобщенных функций умеренного роста можно охватить достаточно широкий класс нетривиальных локальных теорий квантованных взаимодействующих полей. Построили также самый широкий класс обобщенных функций, пригодных для описания строго локализуемых полей. В p-представлении эти обобщенные функции могут расти быстрее любого полинома. Однако они дожны удовлетворять условию (1.22) и, в частности, не могут расти как линейная экспонента от $|p|$.

В заключение отметим, что в рамках лагранжевого или гамильтонового формализма можно вычислить функции Боголюбова или Вайтмана по теории возмущений с применением процедуры перенормировки для так называемых ренормируемых теорий. В ренормируемых теориях функции Боголюбова и Вайтмана, вычисленные в любом порядке теории возмущений, принадлежат классу $\mathcal{J}'$. Часто предполагают, что в ренормируемых теориях мы имеем дело лишь с обобщенными функциями умеренного роста, а если же функции Боголюбова и Вайтмана не являются обобщенными функциями умеренного роста, то соответствующая теория неренормируема, хотя поля могут быть строго локализуемыми.

2. АКСИОМЫ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

Аксиомы локальной теории поля в обоих формализмах Боголюбова и Вайтмана были сформулированы точно во многих монографиях, и перечислять их здесь нецелесообразно. Поэтому мы ограничимся лишь изложением их содержания, а затем обсудим связь между двумя подходами. В обоих подходах аксиомы теории можно разделить на три группы: 1) аксиомы, определяющие основной динамический аппарат теории поля и локальные свойства полей; 2) аксиомы, относящиеся к гильбертову пространству векторов состояний, и 3) аксиомы, определяющие свойства симметрии физических систем и спектр масс элементарных частиц.

Первая группа. Динамические аппараты квантовой теории поля в формализмах Боголюбова и Вайтмана отличаются друг от друга. Основными величинами для описания взаимодействующих полей в подходе Боголюбова являются унитарная S-матрица, рассматриваемая как функционал от асимптотических полевых операторов, например $A_{in}(x)$:

$$S = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int K_n(x_1, \ldots, x_n){:}\; A_{in}(x_1) \ldots A_{in}(x_n){:}\; dx_1 \ldots dx_n, \tag{2.1}$$

и радиационные операторы

$$R_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\delta^n S}{\delta A_{in}(x_1) \ldots \delta A_{in}(x_n)} S^+. \tag{2.2}$$

Асимптотические полевые операторы $A_{in}(x_n)$ описывают не взаимодействующие между собой частицы, находящиеся друг от друга на бесконечно больших расстояниях, и удовлетворяют уравнению свободного поля с заданной массой. Локальные свойства полей формулируются в виде условия строгой локализуемости и принципа микропричинности, рассмотренных в предыдущем разделе. Величины $R_n(x_1, \ldots, x_n)$ являются операторнозначными обобщенными функциями над пространством $\mathfrak{B}$ основных функций, и при любых основных функциях f и g из $\mathfrak{B}$, для которых $\operatorname{supp} f \leqslant \operatorname{supp} g$, должно иметь место равенство

$$\frac{\delta}{\delta A_{in}(f)}\left[\frac{\delta S}{\delta A_{in}(g)} S^+\right] = 0. \tag{2.3}$$

В подходе Вайтмана существование асимптотических полей и S-матрицы не предполагается. Основной величиной в этом подходе является полевой оператор $A(x)$ — операторнозначная обобщенная функция над пространством $\mathfrak{B}$. При этом операторы $A(f)$ и $A(g)$ коммутируют или антикоммутируют:

$$[A(f), A(g)]_{\pm} = 0, \tag{2.4}$$

если носители основных функций f и g разделены пространственно-подобным интервалом:

$$\operatorname{supp} f \sim \operatorname{supp} g.$$

Вторая и третья группы. Невозможно сформулировать аксиомы каждой из этих групп отдельно. Рассмотрим их одновременно. В обоих подходах состояния физических систем характеризуются нормированными векторами (вернее, единичными лучами) в некотором гильбертовом пространстве H. Метрика такого пространства положительно определена, т. е. для любого его вектора Φ скалярное произведение $\langle\Phi \mid \Phi\rangle$ неотрицательно: $\langle\Phi \mid \Phi\rangle \geqslant 0$. Векторы состояния Φ преобразуются по унитарным представлениям неоднородной группы Лоренца, причем инфинитезимальные операторы трансляционной подгруппы — операторы энергии-импульса P_μ физических систем. Предполагается, что для всех состояний $\langle\Phi \mid P_0^2 - \mathbf{P}^2 \mid \Phi\rangle \geqslant 0$; $\langle\Phi \mid P_0 \mid \Phi\rangle \geqslant 0$. Кроме того, существует единственное состояние, называемое состоянием вакуума и обозначаемое $\mid 0\rangle$, которое инвариантно относительно всех преобразований неоднородной группы Лоренца, т. е. представляет собой одномерное представление этой группы и, следовательно, является состоянием с нулевыми значениями энергии и импульса: $P_\mu \mid 0\rangle = 0$.

С целью избежать трудности с инфракрасной катастрофой предположим также, что не существует частицы с нулевой массой. Что касается полевых операторов или асимптотических полевых операторов, то они преобразуются по спинорным представлениям однородной группы Лоренца. Для унитарной S-матрицы в подходе Боголюбова предполагается ее инвариантность относительно всех преобразований неоднородной группы Лоренца, и относительно этого оператора состояние вакуума $|0\rangle$ и одночастичные состояния $|1\rangle$ являются стабильными в следующем смысле: $S|0\rangle = |0\rangle$; $S|1\rangle = |1\rangle$. В подходе Вайтмана существование асимптотических полей и унитарной S-матрицы вытекает из выше изложенных аксиом.

Относительно гильбертова пространства векторов состояния в обоих подходах имеется еще один постулат, утверждающий полноту набора всех векторов состояния физических систем. Обозначим H_0 множество всех векторов вида

$$\sum_{n=0}^{N} c_n \int f(x_1, \ldots, x_n) A_{in}(x_1) \ldots A_{in}(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n |0\rangle.$$

Аксиома о полноте гласит, что H_0 плотно в H, т. е. каждый вектор Φ из H является пределом некоторой последовательности векторов из H_0. Это означает, грубо говоря, что векторы состояния физических систем исчерпывают все гильбертово пространство H.

Перейдем теперь к изучению вопроса о связи между двумя рассматриваемыми аксиоматическими подходами. Как было отмечено, в подходе Вайтмана задаются полевые операторы $A(x)$. На основе основных постулатов теории доказывается затем существование асимптотических полей $A_{in}(x)$, $A_{out}(x)$, унитарной S-матрицы и радиационных операторов $R_n(x_1, \ldots, x_n)$. С другой стороны, если заданы S-матрица как функционал от асимптотических полевых операторов и их вариационные производные, то можно определить полевые операторы:

$$A(x) = A_{in}(x) - \mathrm{i} \int \Delta_R(x-y) \frac{\delta S}{\delta A_{in}(y)} S^+ dy. \tag{2.5}$$

Здесь $\Delta_R(x)$ — запаздывающая функция Грина уравнения Клейна — Гордона свободного поля $A_{in}(x)$. Ролих и Стодарт показали, что если S-матрица удовлетворяет условию микропричинности Боголюбова, то для полевых операторов, определяемых согласно (2.5), выполняется условие локальной коммутативности. Обратно, если поле $A(x)$ удовлетворяет условию локальной коммутативности, то справедлив принцип микропричинности Боголюбова для S-матрицы. Эти результаты показывают, что системы аксиом двух рассматриваемых здесь подходов почти эквивалентны друг другу, хотя и различаются по виду.

Из изложенных выше основных постулатов релятивистской локальной квантовой теории поля вытекает ряд следствий, которые можно использовать для экспериментальной проверки справедливости самой основы теории. Перечислим эти следствия.

1. CPT-теорема. В рамках рассматриваемой нами теории в силу локальности полей функции Боголюбова и Вайтмана и матричные элементы всех процессов взаимодействия элементарных частиц должны быть инвариантными относительно преобразования CPT.

2. Связь между спином и статистикой. Для частиц с целым спином, полевые операторы которых преобразуются по однозначным спинорным представлениям однородной группы Лоренца, в условии локальной коммутативности необходимо взять коммутатор, т. е. $[A(f), A(g)] = 0$ при $\operatorname{supp} f \sim \operatorname{supp} g$, а для частиц с полуцелым спином, характеризующихся полевыми операторами, преобразующимися по двузначным представлениям группы Лоренца, в условии локальной коммутативности стоит антикоммутатор: $[A_{i_1 \ldots i_{2n+1}}(f), \quad A_{j_1 \ldots j_{2n+1}}(g)]_+ = 0$ при $\operatorname{supp} f \sim \operatorname{supp} g$. Это означает, что частицы с целым спином подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна, а частицы с полуцелым спином — статистике Ферми — Дирака.

3. Аналитические свойства амплитуд по двум переменным. Для ряда двухчастичных процессов, например упругого рассеяния π-мезона на π-мезоне, π-мезона на нуклоне, γ-кванта на нуклоне, фоторождения π-мезона на нуклоне и т. д. амплитуды $T(s, t)$ — голоморфные функции двух комплексных переменных s и t в области, являющейся топологическим произведением некоторого круга $|t| \leqslant t_0$ (t_0 от s не зависит) и плоскости s с полюсами и разрезами на вещественной оси, определяемыми посредством условия унитарности. Кроме того, при каждом фиксированном значении t в указанном круге амплитуды $T(s, t)$ не могут расти слишком быстро с ростом s: должны сходиться интегралы

$$\int_{\sqrt{s_0}}^{\infty} \frac{\ln |T(s, t)|}{1+s} \, d\sqrt{s} < \infty. \tag{2.6}$$

В частности, при $s \to \infty$ необходимо иметь

$$|T(s, t)| \ll \text{const} \exp [\text{const}\, s (\ln s)^{-1}]. \tag{2.7}$$

На основе этих строго доказанных аналитических свойств амплитуд по двум переменным и условия унитарности можно получить ряд экспериментально проверяемых следствий.

4. Ограничение на рост амплитуд в физической области. При всех значениях передачи импульса t, лежащих в физической области этой переменной, амплитуды должны удовлетворять неравенству

$$|T(s, t)| \ll \text{const}\, s^2 (\ln s)^{-2}, \quad s \to \infty. \tag{2.8}$$

В силу оптической теоремы получаем отсюда ограничение на рост полных сечений:

$$\sigma_{tot} \ll \text{const}\, s\, (\ln s)^{-2}, \quad s \to \infty. \tag{2.9}$$

5. Дисперсионные соотношения. Благодаря условию (2.8) справедливы дисперсионные соотношения по s с двумя вычитаниями для амплитуд $T(s, t)$ при всех физических значениях передачи импульса.

6. Асимптотические теоремы. Если полные сечения взаимодействия частицы и античастицы σ_{tot} и $\tilde{\sigma}_{tot}$ стремятся к конечным пределам $\sigma_{tot}(\infty)$ и $\tilde{\sigma}_{tot}(\infty)$ при $s \to \infty$, а дифференциальные сечения упругого рассеяния частицы и античастицы $d\sigma_{el}/dt$ и $d\tilde{\sigma}_{el}/dt$ при $t=0$ увеличиваются с ростом s медленнее $\ln^2 s$:

$$\sigma_{tot} \to \sigma_{tot}(\infty); \quad \tilde{\sigma}_{tot} \to \tilde{\sigma}_{tot}(\infty);$$

$$\frac{1}{\ln^2 s} \cdot \frac{d\sigma_{el}}{dt}\bigg|_{t=0} \to 0; \quad \frac{1}{\ln^2 s} \cdot \frac{d\tilde{\sigma}_{el}}{dt}\bigg|_{t\to 0} \to 0,$$

то справедливы следующие асимптотические соотношения:

$$\sigma_{tot}(\infty) = \tilde{\sigma}_{tot}(\infty); \tag{2.10}$$

$$\frac{d\sigma_{el}}{dt}\bigg|_{t=0} \Big/ \frac{d\tilde{\sigma}_{el}}{dt}\bigg|_{t=0} \to 1. \tag{2.11}$$

Изложенные выше результаты вытекают лишь из основных постулатов локальной теории поля. При этом мы не предполагали, что обобщенные функции локальной теории — обобщенные функции умеренного роста. Мы воспользовались самым широким из классов обобщенных функций, пригодных для описания строго локализуемых полей. Если предположим, что теория ренормируема, т. е. обобщенные функции нашей теории принадлежат классу $\mathcal{J}'$ функций умеренного роста, то вместо ограничения (2.9) имеем теорему Фруассара:

$$\sigma_{tot} \leqslant \text{const}\, \ln^2 s, \tag{2.12}$$

а наряду с теоремой Померанчука (2.10) и теоремой Ван Хова, А. А. Логунова и др. (2.11) справедливы еще и другие асимптотические соотношения.

ЛИТЕРАТУРА

Основания аксиоматического подхода

1. **Боголюбов Н. Н., Широков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. М., Гостехиздат, 1957.
2. **Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К.** Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., Физматгиз, 1958.

3. **Стритер Я., Вайтман А.** PCT, спин, статистика и все такое. М., «Наука», 1966.
4. **Йост Р.** Общая теория квантованных полей. Перев. с англ. М., «Мир», 1967.
5. **Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.** Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М., «Наука», 1969.

Обобщенные функции в теории строго локализуемых полей

1. **Мейман Н. Н.** ЖЭТФ, 1964, **47**, 1966.
2. **Nguyen Van Hieu.** Ann. Phys., 1965, **33**, 428.
3. **Guttinger W.** Forts. der Physik, 1966, **14**, 483.
4. **Jaffe A. M.** Phys Rev., 1967, **158**, 1454.

Асимптотические поля и s-матрица в подходе Вайтмана и полевые операторы в подходе Боголюбова

1. **Haag R.** Phys. Rev., 1958, **112**, 669.
2. **Ruelle D.** Helv. Phys. Acta, 1962, 35, 147.
3. **Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W.** Nuovo cimento, 1955, **1**, 205.
4. **Rohlich F., Stodart I. C.** J. Math. Phys., 1965, 6, 495.

Асимптотические теоремы

1. **Логунов А. А., Нгуен Ван Хьеу, Тодоров И. Т.** УФН, 1966, 98, 51.
2. **Логунов А. А., Нгуен Ван Хьеу.** Общие принципы квантовой теории поля и их экспериментальные следствия. Лекции на международной школе по физике элементарных частиц. Дубна, 1964.
3. **Nguyen Van Hieu.** Analytical properties of scattering amplitudes and asymptotic theorems. Rapporteur talk at the International Conference on High Energy Physics, Kiev, 1970.