

УДК 539.149

МЕТОД БОЗОННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФЕРМИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ТЕОРИИ ЯДРА

*Р. В. Джолос,
В. Рыбарска*

Лаборатория теоретической физики
ОИЯИ, Дубна

Описаны различные методы построения бозонных представлений фермионных операторов. Приведены примеры применения этих методов для определения различных характеристик ядер.

Different methods of construction of the boson representations of fermion operators are described. Examples of the applications of these methods for determining different characteristics of nuclei are given.

ВВЕДЕНИЕ

Описание такой сложной многочастичной системы, как атомное ядро, требует учета большого числа его взаимосвязанных степеней свободы. Однако было замечено, что во многих ядрах спектры низколежащих возбужденных состояний похожи на спектры возбуждения системы слабосвязанных квадрупольных бозонов. Были найдены большие значения (значительно превосходящие одночастичные оценки) вероятностей $E2$ -переходов между этими состояниями, что указывало на их коллективную природу*. Поэтому возникла идея использовать для приближенного описания низколежащих состояний таких ядер модель слабосвязанных квадрупольных бозонов. Сначала такие модели строились в рамках

* Напомним, что коллективными принято называть такие возбуждения, которые связаны с изменением состояния движения большого числа нуклонов. Каждой коллективной ветви возбуждения можно сопоставить некоторый характерный для нее оператор, матричные элементы которого, связывающие коллективные состояния, значительно превосходят по величине все другие матричные элементы этого оператора. Именно по большой величине матричных элементов для какого-то характерного перехода и определяют практически коллективные состояния.

феноменологического подхода [1], затем появились микроскопические реализации этой идеи (метод приближенного вторичного квантования) [2]. Простейшие варианты этих моделей описывали квадрупольные колебания ядер в гармоническом приближении. Из них вытекало, что первое возбужденное состояние с энергией ω_1 четного сферического ядра — это состояние 2^+ . Второе возбужденное состояние — это триплет (0^+ , 2^+ , 4^+), а его энергия $\omega_2 = 2\omega_1$. $E2$ -переход со второго 2^+ состояния на основное состояние строго запрещен, а приведенная вероятность перехода ($2_1^+ \rightarrow 0^+$) в два раза меньше вероятности перехода ($2_2^+ \rightarrow 2_1^+$). Свойства возбужденных состояний реальных ядер [3] заметно отклоняются от этих простых правил.

Возрастающее количество экспериментальных данных в области все более высоких по энергии возбуждений атомных ядер [4] указывает на заметное отклонение от предсказаний простой гармонической модели для многофононных состояний. Переходя от околомagicеских ядер к ядрам с большим числом нуклонов в незаполненной оболочке, получаем спектры возбуждений и отношения приведенных вероятностей, не имеющие ничего общего с предсказаниями гармонической модели (ротационные полосы и т. д.).

Отклонения могут быть вызваны как взаимодействием квадрупольных бозонов друг с другом, т. е. ангармоническими эффектами, так и влиянием других степеней свободы ядра. Но тот факт, что среди возбужденных состояний нет таких, для появления которых нужно было бы вводить новые степени свободы, и что можно грубо установить взаимно однозначное соответствие между уровнями гармонического вибратора и низколежащими состояниями реальных ядер, говорит о том, что отклонения от экспериментальных данных вызваны ангармоническими эффектами, а не влиянием других степеней свободы ядра. Это подтверждается еще и тем, что рост отклонений от предсказаний простой модели идет параллельно росту приведенных вероятностей $E2$ -переходов между коллективными состояниями. Учет ангармонических поправок в феноменологической модели связан с необходимостью введения большего числа численных параметров [5].

В последние годы широко развиваются всякого рода попытки учета ангармонических поправок в микроскопической модели ядра [6]. Они неразрывно связаны с представлением исходных фермионных операторов, а точнее их билинейных комбинаций, через некие идеальные бозе-операторы в виде конечных или бесконечных рядов. Математический аппарат, которым при этом пользуются, базируется на следующих фактах. Коммутационные соотношения между билинейными комбинациями фермионных операторов указывают на то, что они образуют алгебру, которая в частных случаях идентична алгебре компонент момента количества движения. Благодаря этому довольно давно было предложено

квазиспиновое представление для гамильтониана сверхтекучей модели ядра. Но и в общем случае гамильтониан микроскопической модели ядра, записанный в представлении обобщенных квазиспиновых операторов, напоминает гамильтониан гейзенберговского типа из микроскопической теории твердого тела с упорядоченной магнитной структурой. Для гамильтониана гейзенберговского типа строились бозонные модели и бозонные представления [7], так как существующие в квантовой теории многих тел приближенные методы (теорема Вика, суммирование диаграмм и т. п.) часто неприменимы непосредственно к системе взаимодействующих спинов.

В работах по теории ядра коэффициенты разложения билинейных комбинаций фермионных операторов в степенные ряды по идеальным бозонам определяются или из требования выполнения коммутационных соотношений, или установлением одно-однозначного соответствия между фермионными и физическими бозонными состояниями. Степенью учета (или нарушения) принципа Паули и разными способами улучшения сходимости этих бозонных рядов (в конкретных применениях всегда удается учесть только конечное число членов) различаются между собой разные варианты этого подхода.

Метод бозонного разложения не давал бы никаких преимуществ, если бы все введенные бозонные операторы были одинаково важны при рассмотрении низколежащих состояний ядер. Но, как было сказано выше, достаточно учитывать только лишь коллективные бозоны. В результате выделим из гамильтониана его коллективную часть, значительно сокращая тем самым число степеней свободы, которые должны будем принимать во внимание. В этом состоит основное преимущество метода бозонного разложения в теории ядра.

1. ОБОБЩЕННОЕ КВАЗИСПИНОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФЕРМИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Гамильтониан микроскопической модели ядра записывается в виде суммы одночастичного гамильтониана, описывающего движение нуклонов в среднем поле, и слагаемого, содержащего остаточное взаимодействие. В сферическом ядре с $j-j$ связью одночастичные состояния характеризуются квантовыми числами (n, l, j, m) . В дальнейшем будем обозначать $(n, l, j, m) \equiv \alpha$. Так как будем часто выделять m из этого набора, то удобно ввести дополнительное обозначение $(n_1, l_1, j_1) \equiv a_1 \equiv 1$.

Определим следующие операторы пар фермионов (частиц или квазичастиц) с полным угловым моментом J и его проек-

цией M :

$$\left. \begin{aligned} A_{JM}^\dagger(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m_a m_b} \langle j_a j_b m_a m_b | JM \rangle a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ = (A_{JM}(a, b))^+; \\ B_{JM}^\dagger(a, b) &= \sum_{m_a m_b} \langle j_a j_b m_a - m_b | JM \rangle s_{\beta} a_{\beta}^+ a_{\alpha} = \\ &= (-1)^m (B_{JM}(a, b))^+, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

где $s_{\beta} = (-1)^{j_b - m_b}$; $\langle j_i j_k m_i m_k | JM \rangle$ — коэффициенты Клебша — Гордана.

Через эти операторы можно выразить как исходный гамильтониан системы, так и операторы переходов между состояниями ядер. Коммутационные соотношения для операторов (1.1) имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} [A_1, A_2^+] &= \delta_{12}^{(+)} - 2 \sum_3 \left(\frac{1 + \hat{p}_1}{2} \cdot \frac{1 + \hat{p}_2}{2} Y(123) \right) B_3; \\ [B_3, A_1^+] &= 2 \sum_2 \left(\frac{1 + \hat{p}_1}{2} \cdot \frac{1 + \hat{p}_2}{2} Y(123) \right) A_2^+; \\ [B_1, B_3^+] &= \sum_2 ((1 - \hat{p}_1 \hat{p}_2 \hat{p}_3) Y(123) B_2, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

где для краткости обозначено $A_1 = A_{J_1 M_1}(a_1, b_1)$. Оператор перестановки \hat{p}_1 действует на произвольную функцию (оператор) по правилу:

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 f(1) &\equiv \hat{p}_1 f(a_1 b_1 J_1 M_1) \equiv -\vartheta(a_1 b_1 J_1) f(b_1 a_1 J_1 M_1); \\ \vartheta(a, c, J) &= (-1)^{j_a + j_c + J}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{12}^{(+)} &= (1 + \hat{p}_1) \delta_{12}/2 = \delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2} (\delta_{a_1 a_2} \delta_{b_1 b_2} - \vartheta(a_1 b_1 J_1) \delta_{a_1 b_2} \delta_{b_1 a_2})/2; \\ Y(123) &= \sum_{(m)} \langle j_{a_1}^{\pi} j_{b_1} m_{a_1} m_{b_1} | J_1 M_1 \rangle \langle j_{a_2} j_{b_2} m_{a_2} m_{b_2} | J_2 M_2 \rangle \times \\ &\quad \times \langle j_{a_3} j_{b_3} m_{a_3} m_{b_3} | J_3 M_3 \rangle s_{\alpha_2} \delta_{\beta_1 \beta_2} \delta_{\alpha_1 \alpha_3} \delta_{\alpha_2 \beta_3} = \\ &= \delta_{b_1 b_2} \delta_{a_1 a_3} \delta_{a_2 b_3} \sqrt{(2J_2 + 1)(2J_3 + 1)} \langle J_2 j_3 M_2 M_3 | J_1 M_1 \rangle \times \\ &\quad \times W(j_{a_3}^{\pi} j_{b_1} J_3 J_2; J_1 j_{a_2}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где W — коэффициент Рака.

Групповые свойства системы операторов (1.1) были исследованы для разных конкретных моделей в большом числе работ (см., например, работу [9] и библиографические данные в конце этой работы). В этих работах сделано много общих выводов о системе только на основании подробного анализа структуры этой группы. Коммутационные соотношения (1.2) внешне напоминают коммута-

ционные соотношения для компонент оператора спина. Отличие состоит в том, что операторы A, A^+, B характеризуются различными наборами квантовых чисел $(J_i M_i a_i b_i) \equiv i$. В частном случае, когда будем рассматривать только операторы с нулевым полным моментом ($J = M = 0$), коммутационные соотношения (1.2) упрощаются, и совпадение с коммутационными соотношениями для спиновых операторов становится точным:

$$\left. \begin{aligned} [A_1, A_1^+] &= 1 - \frac{2}{\sqrt{2j_1+1}} B_1; \\ [B_1, A_1^+] &= \frac{2}{\sqrt{2j_1+1}} A_1^+ \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

(индекс $1 \equiv n_1 l_1 j_1, n_1 l_1 j_1$), т. е. можно написать:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\sqrt{j_1+1/2}} S_1^+ = (S_1^x + i S_1^y) \frac{1}{\sqrt{j_1+1/2}}; \\ A_1^+ &= \frac{1}{\sqrt{j_1+1/2}} S_1^- = (S_1^x - i S_1^y) \frac{1}{\sqrt{j_1+1/2}}; \\ B_1 &= \sqrt{2j_1+1} [1/2 - S_1^z / (j_1+1/2)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Внешнее сходство коммутационных соотношений (1.2) с коммутационными соотношениями (1.4) поможет обобщить бозонные представления спиновых операторов на случай произвольных фермионных систем. В качестве примера напомним, как, основываясь на коммутационных соотношениях (1.2), построить гармоническое приближение. Основное предположение следующее: полное число рассматриваемых одночастичных состояний $\Omega \equiv \sum_{\alpha} (2j_{\alpha} + 1)$ велико по сравнению с числом квазичастиц в основном состоянии ядра $n \ll \Omega$. В этом приближении операторной частью правой стороны коммутатора $[A_1, A_1^+]$ можно пренебречь. Это легко показать, если $j_a \gg 1$, когда можно воспользоваться асимптотическим выражением для

$$\begin{aligned} Y(123) &\sim \delta_{b_1 b_2} \cdot \delta_{a_1 a_3} \delta \cdot \delta_{a_2 a_3} (2j+1)^{-1/2} \times \\ &\times \sqrt{(2J_2+1)(2J_3+1)/(2J_1+1)} \times \\ &+ \langle J_2 J_3 M_2 M_3 | J_1 M_1 \rangle \langle J_2 J_3 j_{a_2} - j_{b_1} j_{a_3} - j_{a_2} | J_1 j_{a_3} - j_{b_1} \rangle, \end{aligned}$$

где

$$(2j+1)^3 \equiv (2j_{a_3}+1)(2j_{a_2}+1)(2j_{b_1}+1).$$

Тогда в $Y(123)$ содержится малый параметр $(2j+1)^{-1/2} \sim \Omega^{-1/2}$. В этом же приближении операторы $B_{JM}(ab)$ можно полагать

равными нулю. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle B_{JM}(ab) \rangle_m &= \sum_{m_a m_b} \langle j_a j_b m_a - m_b | JM \rangle \langle a_\alpha^+ a_\beta \rangle_m \approx \\ &\approx \sum_{m_a m_b} \langle j_a j_b m_a - m_b | JM \rangle s_\beta \delta_{\alpha\beta} n_a \approx \\ &\approx \sum_{m_a m_b} \langle j_a j_b m_a - m_b | JM \rangle s_\beta \delta_{\alpha\beta} n \Omega^{-1} \approx n \Omega^{-1/2} \delta_{ab} \delta_{J0} \delta_{M0}, \end{aligned}$$

где $\langle \dots \rangle_m$ обозначает усреднение по точному основному состоянию. Другими словами, в этом приближении операторы $A_{JM}(ab)$ ведут себя как идеальные бозоны: $[A_1, A_2^+] = \delta_{12}^+$, $p_1 A_1 = A_1$, а операторы $B_{JM}(ab) \equiv 0$. Благодаря этому можем перейти от исходного гамильтониана к модельному, бозонному гамильтониану, действующему в гильбертовом пространстве состояний бозонной системы. Из вышесказанного вытекает, что в гармоническом приближении пренебрегаем: а) динамическими эффектами, т. е. частью взаимодействия фермионов; б) статистическими эффектами, нарушая принцип Паули для фермионов, из которых построены операторы (1.1).

2. МЕТОД ХОЛСТЕЙНА — ПРИМАКОВА И МЕТОД ДАЙСОНА В ТЕОРИИ СПИНОВЫХ ВОЛН

Введем в рассмотрение операторы a_l^+ и a_l , удовлетворяющие перестановочным соотношениям:

$$[a_l, a_{l'}^+] = \delta_{ll'}, \quad (2.1)$$

где l, l' — наборы квантовых чисел, определяющих однобозонные состояния. С их помощью выразим систему операторов момента количества движения следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} S_l^+ &= S_l^x + i S_l^y = \sqrt{2S} a_l^+ \sqrt{1 - a_l^+ a_l / 2S}; \\ S_l^- &= S_l^x - i S_l^y = \sqrt{2S} \sqrt{1 - a_l^+ a_l / 2S} a_l; \\ S_l^z &= -S + a_l^+ a_l. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Радикалы здесь понимаются формально, как бесконечные ряды по степеням a_l^+ / a_l . Легко убедиться, что построенные таким образом подстановки удовлетворяют перестановочным соотношениям для операторов S_l^+, S_l^-, S_l^z : $[S_l^+, S_{l'}^-] = 2S_l^z \delta_{ll'}$; $[S_l^z, S_{l'}^\pm] = \pm S_l^\pm \delta_{ll'}$. Однако S_l^+ и S_l^- должны быть эрмитово сопряженными, а оператор S_l^z — самосопряженным. Эти условия выполняются только в подпространстве собственных векторов оператора $a_l^+ a_l / 2S$,

которые принадлежат собственным значениям этого оператора, меньшим или равным единице.

Легко убедиться, что если с помощью операторов $a_l \equiv a$, $a^+ \equiv a^+$ построить операторы

$$\left. \begin{aligned} \tilde{S}_+ &= \sqrt{2S} a^+; \\ \tilde{S}_- &= \sqrt{2S} \left(a - \frac{1}{2S} a^+ a a \right); \\ \tilde{S}_z &= -S + a^+ a, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

то они будут удовлетворять тем же перестановочным соотношениям, что и операторы S_+ , S_- , S_z . Но \tilde{S} нельзя отождествить с S . Собственные значения \tilde{S}_z равны $-S, -S + 1, \dots$, не ограничены сверху в отличие от собственных значений S_z , которые равны $-S, -S + 1, \dots, S$. Однако матричные элементы операторов \tilde{S} могут быть связаны с матричными элементами S .

Введем в рассмотрение собственные векторы Φ_n оператора $a^+ a$:

$$a^+ a \Phi_n = n \Phi_n, \quad (2.4)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Состояние с $n = 0$ — состояние вакуума бозонов a :

$$a \Phi_0 = 0.$$

Любое состояние Φ_n можно построить с помощью Φ_0 , а именно

$$\Phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n \Phi_0. \quad (2.5)$$

До сих пор о бозонных операторах a, a^+ предполагалось только, что они удовлетворяют соотношениям (2.1). Предположим теперь, что они эрмитово сопряженные. Это приведет к определению метрики в пространстве Φ_n :

$$(\Phi_n, \Phi_n) = \delta_{nn}. \quad (2.6)$$

Легко видеть, что в этой метрике \tilde{S}_+, \tilde{S}_- не будут эрмитово сопряженными. Покажем, что можно определить метрику в пространстве Φ_n таким образом, чтобы \tilde{S}_+, \tilde{S}_- были в ней эрмитово сопряженными, а оператор \tilde{S}_z — самосопряженным. Определим скалярное произведение векторов Φ_n , которое будем обозначать $\langle \Phi_n | \Phi_n \rangle$, таким образом, чтобы выполнялись соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \langle \Phi_{n'}, \tilde{S}_\pm \Phi_n \rangle &= \langle \tilde{S}_\mp \Phi_{n'}, \Phi_n \rangle; \\ \langle \Phi_{n'}, \tilde{S}_z \Phi_n \rangle &= \langle S_z \Phi_{n'}, \Phi_n \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Будем предполагать, что скалярные произведения $(\Phi_{n'}, \Phi_n)$ и $\langle \Phi_{n'}, \Phi_n \rangle$ связаны между собой соотношением

$$(\Phi_{n'}, \Phi_n) = (\Phi_{n'}, F \Phi_n), \quad (2.8)$$

где F — метрический оператор. Так как скалярное произведение должно обладать свойством

$$\langle \Psi, \Phi \rangle^* = \langle \Phi, \Psi \rangle,$$

то F должен быть эрмитовым в метрике (2.6). Найдем его вид. Из (2.7) следуют, согласно (2.8), соотношения

$$\left. \begin{aligned} (\Psi, F\tilde{S}_{\pm}\Phi) &= (\Psi, \tilde{S}_{\mp}^{\pm}F\Phi); \\ (\Psi, F\tilde{S}_z\Phi) &= (\Psi, \tilde{S}_z^+F\Phi), \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

откуда

$$F\tilde{S}_{\pm} = \tilde{S}_{\mp}F; \quad F\tilde{S}_z = \tilde{S}_z^+F. \quad (2.10)$$

Подставляя в эти соотношения выражения для \tilde{S}_{\pm} , \tilde{S}_z , найдем:

$$a^+(1 - a^+a/2S)F = Fa^+; \quad a^+aF = Fa^+a. \quad (2.11)$$

Видно, что F приводится к диагональному виду вместе с $\hat{n} = a^+a$. Поэтому первая формула (2.11) дает

$$(1 - \hat{n}/2s)F_n a^+ \Phi_n = F_{n+1} a^+ \Phi_n, \quad (2.12)$$

где

$$F_n = (\Phi_n, F\Phi_n).$$

Таким образом,

$$F_{n+1} = (1 - n/2S)F_n,$$

откуда

$$F_n = 1 \cdot (1 - 1/2S) \dots (1 - (n-1)/2S). \quad (2.13)$$

Это выражение показывает, что $F_n = 0$ при $n \geq 2S + 1$. Возвращаясь к выражению (2.8), получим:

$$\langle \Phi_n, \Phi_{n^*} \rangle = F_n \delta_{nn^*}. \quad (2.14)$$

Из этой формулы видно, что метрика, задаваемая скалярным произведением $\langle \Psi, \Phi \rangle$, является индефинитной, так как $\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle$ при $n > 2S$ обращается в нуль, хотя $\Phi_n \neq 0$. С целью установления связи матричных элементов операторов S_z , S_{\pm} с матричными элементами операторов \tilde{S}_z , \tilde{S}_{\pm} введем собственные векторы оператора S_z :

$$S_z |n\rangle = (n - S) |n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2S. \quad (2.15)$$

Вектор $|n\rangle$ можно построить с помощью вектора состояния $||0\rangle$, определяемого уравнениями:

$$S_z |0\rangle = -S |0\rangle; \quad S_- |0\rangle = 0. \quad (2.16)$$

Действительно, согласно

$$S_z (S_+)^n = (S_+)^n (n + S_z), \quad (2.17)$$

$$|n\rangle = (2S)^{-n/2} (n!)^{-1/2} (S_+)^n |0\rangle. \quad (2.18)$$

Покажем, что $|n\rangle$ удовлетворяют

$$\langle n' | n \rangle = F_n \delta_{nn'}. \quad (2.19)$$

Векторы $|n\rangle$, как собственные векторы эрмитова оператора S_z , ортогональны:

$$\langle n' | n \rangle = A_n (2S)^{-n} (1/n!) \delta_{nn'}, \quad (2.20)$$

где

$$A_n = \langle 0 | S_-^n S_+^n | 0 \rangle. \quad (2.21)$$

Замечая, что $S(S+1) = S_z^2 + (S_+ S_- + S_- S_+)/2$, и используя соотношение $[S_+, S_-] = 2S_z$, получаем:

$$S_- S_+ = (S - S_z)(S + S_z + 1). \quad (2.22)$$

Формулы (2.17) и (2.22) позволяют представить оператор $S_-^n S_+^n$ в виде:

$$S_-^n S_+^n = S_-^{n-1} S_- S_+ S_+^{n-1} = S_-^{n-1} S_+^{n-1} (S - S_z - n + 1)(S + S_z + n). \quad (2.23)$$

Усредняя это равенство по состоянию $|0\rangle$, найдем

$$A_n = A_{n-1} (1 - (n-1)/2S) 2S_n, \quad (2.24)$$

а так как $A_0 = 1$, то

$$A_n = n! (2S)^n F_n. \quad (2.25)$$

Таким образом, векторы состояний $1/\sqrt{F_n} |n\rangle$ ортонормированы. Докажем теперь, что если $G(\mathbf{S})$ — произвольная функция операторов S_i , то справедливо следующее соотношение:

$$\langle n | G(\mathbf{S}) | n' \rangle = \langle \Phi_n | G(P\tilde{S}P) | \Phi_{n'} \rangle = (\Phi_n, FG(P\tilde{S}P)\Phi_{n'}), \quad (2.26)$$

где P — оператор проектирования на физическое подпространство:

$$P\Phi_n = \begin{cases} \Phi_n, & n \leq 2S; \\ 0, & n > 2S. \end{cases}$$

Предположим сначала, что (2.26) справедливо для $G(\mathbf{S}) = S_i$, и покажем, что она справедлива для $S_i S_k$. Замечая, что $F_n^{-1/2} |n\rangle$ ортонормированы, имеем

$$\langle n | S_i S_k | n' \rangle = \sum_{n''} \langle n | S_i | n'' \rangle \langle n'' | S_k | n' \rangle. \quad (2.27)$$

Согласно предположению

$$\langle n | S_i | n'' \rangle = (\Phi_n, F\tilde{S}_i \Phi_{n''}); \quad (2.28)$$

в этой формуле был опущен оператор P , так как состояния $\Phi_n, \Phi_{n''}$ являются физическими. Подставляя (2.28) в (2.27) и замечая, что

$$(\Phi_{n''}, F\tilde{S}_k \Phi_{n'}) = F_{n''} (\Phi_{n''}, \tilde{S}_k \Phi_{n'}), \quad (2.29)$$

получаем:

$$\langle n | S_i S_k | n' \rangle = \sum_{n''}^* (\Phi_n, F \tilde{S}_i \Phi_{n''}) (\Phi_{n''}, \tilde{S}_k \Phi_{n'}), \quad (2.30)$$

где суммирование производится только по системе физических векторов состояний. Эта формула совпадает с формулой (2.26) при $G(\mathbf{S}) = S_i S_k$. Поступая аналогичным образом, легко доказать, что формула (2.26) будет справедливой для $G(\mathbf{S})$, имеющих вид произведений любого числа операторов S_i , если только она справедлива для $G(\mathbf{S}) = S_i$.

Докажем справедливость формулы для этого случая:

$$(\Phi_n, F \tilde{S}_z \Phi_{n'}) = F_n (n - S) \delta_{nn'}, \quad (2.31)$$

к этому же результату приводит и левая часть равенства (2.26):

$$\langle n | S_z | n' \rangle = (n - S) \langle n | n' \rangle = (n - S) F_n \delta_{nn'}. \quad (2.32)$$

Если $G(\mathbf{S}) = S_+$, то из определения \tilde{S}_+ имеем

$$(\Phi_n, F \tilde{S}_+ \Phi_{n'}) = \sqrt{2S} F_n (\Phi_n, a^+ \Phi_{n'}) = \sqrt{2S} F_n \sqrt{n} \delta_{n, n'+1}. \quad (2.33)$$

С другой стороны, как известно,

$$F_n^{-1/2} F_{n'}^{-1/2} \langle n | S_+ | n' \rangle = \sqrt{(S+m)(S-m+1)} \delta_{m, m'+1}, \quad (2.34)$$

где $m = n - S$, $m' = n' - S$.

Следовательно, получим:

$$\langle n | S_+ | n' \rangle = \sqrt{n} \sqrt{F_n F_{n-1} (2S+1-n)} \delta_{n, n'+1} = \sqrt{2S} F_n \sqrt{n} \delta^{n, n'+1}. \quad (2.35)$$

Таким образом,

$$\langle n | S_+ | n' \rangle = (\Phi_n, F_n \tilde{S}_+ \Phi_{n'}). \quad (2.36)$$

Согласно (2.17) отсюда следует

$$\langle n | S_+ | n' \rangle = (\Phi_n, F \tilde{S}_+ \Phi_{n'}). \quad (2.37)$$

Переходя к комплексно сопряженным величинам и замечая, что

$$(\langle \Phi_n | \tilde{S}_+ | \Phi_{n'} \rangle)^* = \langle \tilde{S}_+ \Phi_{n'}, \Phi_n \rangle = \langle \Phi_{n'} \tilde{S}_- \Phi_n \rangle, \quad (2.38)$$

получаем

$$\langle n | S_- | n' \rangle = (\Phi_n, F \tilde{S}_- \Phi_{n'}). \quad (2.39)$$

Доказана справедливость формулы (2.26) для $G(\mathbf{S}) = S_i$. Таким образом, эта формула доказана в общем виде.

Теперь можем подвести итоги под различными реализациями операторов спина. Сначала построим с помощью бозевских операторов a , a^+ операторы

$$S^+ = \sqrt{2S} a^+ \sqrt{1 - a^+ a / 2S}; \quad S_- = \sqrt{2S} \sqrt{1 - a^+ a / 2S} a; \\ S_z = -S + a^+ a, \quad (2.40)$$

которые формально удовлетворяют перестановочным соотношениям для операторов спинов. С другой стороны, введем операторы

$$\tilde{S}_+ = \sqrt{2S} a^+; \quad \tilde{S}_- = \sqrt{2S} (1 - a^+a/2S) a; \quad \tilde{S}_z = -S + a^+a, \quad (2.41)$$

также удовлетворяющие перестановочным соотношениям для операторов спина.

Возникает вопрос, как связаны между собой обе эти системы операторов, о которых можно говорить как о различных реализациях операторов спина с помощью бозевских операторов a, a^+ . Воспользуемся для этого формулами (2.13), (2.4), (2.5), считая, что $n, n' \leq 2S$, получим:

$$\begin{aligned} (\Phi_n, F^{1/2} a^+ F^{-1/2} \Phi_{n'}) &= \sqrt{F_n/F_{n-1}} (\Phi_n, a^+ \Phi_{n'}) = \\ &= \sqrt{1 - (n-1)/2S} (\Phi_n, a^+ \Phi_{n'}); \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} (\Phi_n, F^{1/2} (a - a^+aa/2S) F^{-1/2} \Phi_{n'}) &= \\ = (1 - n/2S) \sqrt{F_n/F_{n-1}} (\Phi_n, a \Phi_{n'}) = \\ = \sqrt{1 - n/2S} (\Phi_n, a \Phi_{n'}). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Замечая далее, что

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - (n-1)/2S} (\Phi_n, a^+ \Phi_{n'}) &= (\Phi_n, a^+ \sqrt{1 - a^+a/2S} \Phi_{n'}); \\ \sqrt{1 - n/2S} (\Phi_n, a \Phi_{n'}) &= (\Phi_n, \sqrt{1 - a^+a/2S} \Phi_{n'}), \end{aligned} \quad (2.44)$$

перепишем (2.43) в виде:

$$\left. \begin{aligned} (\Phi_n, F^{1/2} a^+ F^{-1/2} \Phi_{n'}) &= (\Phi_n, a^+ \sqrt{1 - a^+a/2S} \Phi_{n'}); \\ (\Phi_n, F^{1/2} (a - a^+aa/2S) F^{-1/2} \Phi_{n'}) &= (\Phi_n, \sqrt{1 - a^+a/2S} a \Phi_{n'}). \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

Мы видим, что операторы $\tilde{S}_+, \tilde{S}_-, \tilde{S}_z$ связаны с операторами S_-, S_+, S_z соотношениями

$$S_{\pm} = F^{1/2} \tilde{S}_{\pm} F^{-1/2}; \quad S_z = \tilde{S}_z = F^{1/2} \tilde{S}_z F^{-1/2}. \quad (2.46)$$

Эти формулы справедливы в подпространстве физических векторов состояний, т. е. при $n \leq 2S$.

Выше была получена формула

$$\langle n | G(\mathbf{S}) | n' \rangle = (\Phi_n, FG(P\tilde{S}P)\Phi_{n'}). \quad (2.47)$$

Используя соотношения (2.46), выразим теперь $\langle n | G(\mathbf{S}) | n' \rangle$ через операторы \tilde{S} . Заметим для этого, что при $n, n' \leq 2S$

$$(\Phi_n, FG(P\tilde{S}P)\Phi_{n'}) = \sqrt{F_n F_{n'}} (\Phi_n, F^{1/2} G(P\tilde{S}P) F^{-1/2} \Phi_{n'}).$$

Так как оператор $\tilde{G} (P\tilde{S}P)$ действует в физическом подпространстве векторов состояния, то согласно (2.46)

$$F^{1/2}G (P\tilde{S}P) F^{-1/2} = G (PF^{1/2}\tilde{S}F^{-1/2}P) = G (P\tilde{S}P).$$

Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{F_n F_{n'}}} \langle n | G(S) | n' \rangle = (\Phi_n, G (P\tilde{S}P) \Phi_{n'}). \tag{2.48}$$

Эта формула показывает, что матричный элемент оператора $G(S)$ между нормированными состояниями $F_n^{-1/2} | n \rangle$, вообще говоря, не равен матричному элементу $(\Phi_n, G(\tilde{S}) \Phi_{n'})$ и только в пренебрежении промежуточными (нефизическими) состояниями указанные матричные элементы будут совпадать.

3. МЕТОД БОЗОННОГО РАЗЛОЖЕНИЯ БЕЛЯЕВА — ЗЕЛЕВИНСКОГО

Работа [6] начинает серию работ, посвященных разложению двухфермионных операторов типа (1.1) в бесконечные ряды по идеальным бозонам. Авторы этой работы постулируют, что

$$\begin{aligned} A_a^+ &= x^{10}(a) c_a^+ + \sum_{a_1 a_2 a_3} x^{31}(a_1 a_2 a_3; a) c_{a_1}^+ c_{a_2}^+ c_{a_3} + a \dots = \\ &= A_{a(I)}^+ + A_{a(II)}^+ + \dots; \\ B_a &= y_{(a)}^{00}(a) + \sum_{a_1 a_2} y^{21}(a_1 a_2; a) c_{a_1}^+ c_{a_2} + \\ &+ \sum_{a_1 \dots a_4} y^{42}(a_1 a_2 a_3 a_4; a) c_{a_1}^+ c_{a_2}^+ c_{a_3} c_{a_4} + \dots = \\ &= B_{a(0)} + B_{a(I)} + B_{a(II)} + \dots, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где обозначено для краткости:

$$c_{JM}(a, b) = c_a; (-1)^{J+M} c_{J-M}(a, b) = (c_a^+)^+;$$

c_a, c_a^+ удовлетворяют обыкновенным бозонным коммутационным соотношениям. Коэффициенты разложений (3.1) определяются итерационным путем из требования выполнения коммутационных соотношений (1.2) в каждом шаге приближения. Точнее говоря, если G — оператор, разложение которого символически представим как $G = G_0 + G_I + G_{II} + \dots$, а коммутационное соотношение имеет вид $[A, G] = C$, то итерационная процедура дает бесконечную цепь коммутационных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} [A_I, G_I] &= C_0; [A_I, G_{II}] + [A_{II}, G_I] = C_I; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ [A_I, G_n] + [A_{II}, G_{n-1}] + \dots + [A_n, G_I] &= C_{n-1}, \end{aligned} \right\} \tag{3.2}$$

причем C_0 — константа; C_1 — член линейный в бозе-операторах и т. д. С. Т. Беляев, В. Г. Зелевинский нашли малый параметр для этой итерационной процедуры, который зависит от $\xi \sim \sim (\sum_{\nu} (2j_{\nu} + 1))^{-1/2}$ и от степеней E/ω , где E — энергия двухквaziчастичного возбуждения; ω — энергия коллективного возбуждения. Видно, что предположение о хорошем выполнении условий адиабатичности $(\frac{\omega}{E} \ll 1)$ ухудшает сходимость бозонных разложений.

Решая последовательно уравнения (3.2), получаем:

$$\left. \begin{aligned}
 y^{00}(a) &= \delta_{j_0} \delta_{i_j} y^0(j) \sqrt{2j+1}; \quad x^{10} = (1 - y^0(i) - y^0(j))^{1/2}; \\
 y^{21}(a_1, a_2; a) &= 2Y(a_1 a_2 a); \\
 A_{a(\text{II})}^+ &= -(1 - 1/\sqrt{3}) [1 - y^0(i) - y^0(j)]^{-1/2} c_a^+ \sum_{a_2} c_{a_2}^+ c_{a_2} - \\
 &\quad - (2/\sqrt{3}) (1 - y^0(i) - y^0(j))^{-1/2} \sum_{a_2 - a_5} \left(\left(\frac{1 + p_a}{2} \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times Y(a a_2 a_5) Y(a_3 a_4 a_5) c_{a_2}^+ c_{a_3}^+ c_{a_4} \right); \\
 B_{a(\text{III})} &= \frac{4}{3} \sum_{a_2 a_3 a_4} Y(a_3 a_2 a) c_{a_2}^+ c_{a_3}^+ c_{a_4} c_{a_5}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

и так далее. Параметры $y^0(i)$ зависят от определения основного состояния.

Если предположить, что основное состояние системы (бозонный вакуум) является одновременно квазичастичным вакуумом, то все $y^0(i)$ примут нулевые значения. Принимая, что основное состояние характеризуется набором отличных от нуля чисел заполнения квазичастичных состояний, мы вводим в рассмотрение набор чисел $0 \leq y^0(i) \leq 1/2$. Метод [6] не дает способа их определения, но, задавая эти параметры отличными от нуля, можем поправить сходимость рядов (3.3).

4. БОЗОННОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МАРУМОРИ

Будем здесь также использовать операторы идеальных бозонов $c_{\alpha\beta}^+$, $c_{\alpha\beta}$, удовлетворяющих следующим коммутационным соотношениям:

$$\left. \begin{aligned}
 [c_{\alpha\beta}, c_{\gamma\delta}^+] &= \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}; \\
 [c_{\alpha\beta}, c_{\gamma\delta}] &= [c_{\alpha\beta}^+, c_{\gamma\delta}^+] = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Произвольное m -бозонное состояние запишется как

$$|m\rangle_B = (c_{\alpha_1 \beta_1}^+)^{n_1} (c_{\alpha_2 \beta_2}^+)^{n_2} \dots (c_{\alpha_m \beta_m}^+)^{n_m} |0\rangle, \quad (4.2)$$

где n_1, \dots, n_m — положительные целые числа; $|0\rangle$ — вакуум бозонов. Таких бозонных состояний значительно больше, чем фермионных состояний:

$$|m\rangle = a_{\alpha_1}^+ a_{\beta_1}^+ \dots a_{\alpha_m}^+ a_{\beta_m}^+ |0\rangle, \quad (4.3)$$

которые можно построить, используя тот же набор одночастичных состояний, что и при построении векторов (4.2). Фермионные состояния антисимметричны относительно перестановки индексов $\alpha_1 \beta_1, \dots, \alpha_m \beta_m$. Но не все бозонные состояния обладают этим свойством. Выделим среди бозонных состояний антисимметричные:

$$|m\rangle = N(m) \sum_P (-1)^P c_{\alpha_1 \beta_1}^+ \dots c_{\alpha_m \beta_m}^+ |0\rangle, \quad (4.4)$$

здесь $N(m)$ — нормировочная константа; P — оператор перестановки индексов. Бозонные векторы (4.4) формируют физическое подпространство полного бозонного пространства $|m\rangle_B$.

Для последующего изложения наряду с фермионным и бозонным пространствами удобно ввести в рассмотрение прямое произведение фермионного и бозонного пространств. Вакуумом в таком пространстве будет произведение фермионного и бозонного вакуумов $|0\rangle |0\rangle$. Чисто фермионные состояния будут иметь следующий вид:

$$|m\rangle |0\rangle = a_{\alpha_1}^+ a_{\beta_1}^+ \dots a_{\alpha_m}^+ a_{\beta_m}^+ |0\rangle |0\rangle, \quad (4.5)$$

а чисто бозонные, принадлежащие физическому подпространству, запишутся так:

$$|m\rangle |0\rangle = N(m) \sum_P (-1)^P P c_{\alpha_1 \beta_1}^+ \dots c_{\alpha_m \beta_m}^+ |0\rangle |0\rangle, \quad (4.6)$$

где нормированная константа $N(m) = 1/\sqrt{(2m-1)!!}$.

Введем оператор

$$U_M = |0\rangle \langle 0| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2n-1)!!}} \left(\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}^+ a_{\beta} a_{\alpha} \right)^n |0\rangle \langle 0|, \quad (4.7)$$

который переводит $|m\rangle$ в $|m\rangle$. Действительно,

$$U_M a_{\alpha_1}^+ a_{\beta_1}^+ \dots a_{\alpha_m}^+ a_{\beta_m}^+ |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2m-1)!!}} \sum_P (-1)^P P c_{\alpha_1 \beta_1}^+ \dots c_{\alpha_m \beta_m}^+ |0\rangle. \quad (4.8)$$

Легко видеть, что операторная единица в фермионном пространстве и оператор проектирования на физическое бозонное пространство просто связаны с U_M , U_M^\dagger . Так как

$$U_M |m\rangle = |m\rangle$$

и

$$(m | = \langle m | U_M^\dagger,$$

то

$$\langle m | U_M^\dagger U_M | m' \rangle = (m | m') = \delta_{mm'},$$

откуда следует, что $U_M^\dagger U_M$ является единицей в фермионном пространстве. Для оператора проектирования на физическое бозонное подпространство $\hat{P} \equiv \sum_m |m\rangle \langle m|$ справедливо

$$\hat{P} = U_M \sum_m |m\rangle \langle m| U_M^\dagger = U_M U_M^\dagger. \tag{4.9}$$

Произвольный оператор T , действующий в F -пространстве, имеет свое изображение в B :

$$\langle m | T | m' \rangle = (m | U_M T U_M^\dagger | m') = (m | \tau | m'). \tag{4.10}$$

Оператор

$$\tau = U_M T U_M^\dagger \tag{4.11}$$

есть образ T в бозонном пространстве. Легко проверить, что $U_M^\dagger \hat{P} = U_M^\dagger$; $\hat{P} U_M = U_M$; $\hat{P} = \hat{P}^+ = \hat{P}^2$, откуда вытекает

$$\tau = \hat{P} U_M T U_M^\dagger \hat{P} = \hat{P} \tau \hat{P},$$

т. е. τ имеет отличные от нуля только матричные элементы между физическими состояниями в B -пространстве.

В раскрытом виде

$$\begin{aligned} \tau = & \sum_{mm'} |m\rangle \langle m| T |m'\rangle \langle m'| = \langle 0 | T | 0 \rangle |0\rangle \langle 0| + \\ & + \sum_{m=1}^{N_0} \frac{1}{(2m)!} \sum_{(\alpha\beta)} \langle 0 | a_{\beta m} a_{\alpha m} \dots a_{\beta 1} a_{\alpha 1} T | 0 \rangle \times \\ & \times \frac{i!}{\sqrt{(2m-1)!}} \sum_P (-1)^P P c_{\alpha_1 \beta_1}^+ \dots c_{\alpha_m \beta_m}^+ |0\rangle \langle 0| + \\ & + \sum_{m=1}^{N_0} \frac{1}{(2m)!} \sum_{(\alpha\beta)} \langle 0 | T a_{\alpha_1}^+ a_{\beta_1}^+ \dots a_{\alpha_m}^+ a_{\beta_m}^+ | 0 \rangle \times \\ & \times |0\rangle \langle 0| \frac{1}{\sqrt{(2m-1)!}} \sum_P (-1)^P P c_{\alpha_m \beta_m} \dots c_{\alpha_1 \beta_1} + \\ & + \sum_{n, m} \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{1}{(2m)!} \sum_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} \langle 0 | a_{\beta n} a_{\alpha m} \dots a_{\beta 1} a_{\alpha 1} T a_{\gamma_1}^+ a_{\delta_1}^+ \dots a_{\gamma_m}^+ a_{\delta_m}^+ | 0 \rangle \times \\ & \times \frac{1}{\sqrt{(2n-1)!}} \sum_P (-1)^P P c_{\alpha_1 \beta_1}^+ \dots c_{\alpha_n \beta_n}^+ |0\rangle \langle 0| \frac{1}{\sqrt{(2m-1)!}} \times \\ & \times \sum_P (-1)^P P c_{\gamma_m \delta_m}^+ \dots c_{\gamma_1 \delta_1}^+. \tag{4.12} \end{aligned}$$

Для частного случая двухфермионных операторов это преобразование дает

$$U_M a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} U_M^{\dagger} = c_{\alpha\beta}^{\dagger} - \frac{1}{2} (1 - 1/\sqrt{3}) c_{\alpha\beta}^{\dagger} \sum_{\mu\nu}^{\dagger} c_{\mu\nu}^{\dagger} c_{\mu\nu} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{\mu\nu}^{\dagger} c_{\alpha\mu}^{\dagger} c_{\beta\nu}^{\dagger} c_{\mu\nu} + \dots; \quad (4.13)$$

$$U_M a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} U_M = 2 \sum_{\mu\nu} \left(\frac{1 + \hat{p}_{\mu}}{2} \cdot \frac{1 + \hat{p}_{\nu}}{2} Y(\mu\nu\alpha) \right) c_{\mu\alpha}^{\dagger} c_{\nu\beta}. \quad (4.14)$$

Как было показано в работе [8], эти ряды можно записать в компактном виде:

$$U_M a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} U_M^{\dagger} = \left(c_{\alpha\beta}^{\dagger} - \sum_{\gamma\delta} c_{\alpha\gamma}^{\dagger} c_{\beta\delta}^{\dagger} c_{\gamma\delta} \right) \frac{\hat{P}}{\sqrt{1 + \hat{N}}} = \hat{P} (c^{\dagger} \sqrt{1 - \hat{\rho}})_{\alpha\beta}; \quad (4.15)$$

$$U_M a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} U_M^{\dagger} = \sum_{\gamma} c_{\alpha\beta}^{\dagger} c_{\beta\gamma} \hat{P}, \quad (4.16)$$

где

$$\hat{\rho}_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} c_{\beta\gamma}^{\dagger} c_{\alpha\beta}; \quad \hat{N} = \sum_{\alpha} \hat{\rho}_{\alpha\alpha}. \quad (4.17)$$

Нетрудно заметить сходство формул (4.15), (4.16) с представлением Холстейна—Примакова [см. формулы (2.2)]. Для пар операторов, связанных на общий момент JM , это бозонное разложение принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} A_1^{\dagger} &= c_1^{\dagger} - (1 - 1/\sqrt{3}) c_1^{\dagger} \sum_2 c_2^{\dagger} c_2 - \\ &- (2/\sqrt{3}) \sum_{2, 3, 4, 5} \left(\left[\frac{(1 + \hat{P}_1)}{2} \right] Y(125) Y(345) \right) c_2^{\dagger} c_3^{\dagger} c_4 + \dots; \\ B_1 &= 2 \sum_{2, 3} Y(321) c_3^{\dagger} c_2 + (4/3) \sum_{2, 3, 4} Y(321) c_3^{\dagger} c_4^{\dagger} c_4 c_2 - \\ &- (2/3) \sum_{2-7} (Y(162) Y(746) Y(375) + \\ &+ \hat{p}_1 Y(614) Y(627) Y(375)) c_2^{\dagger} c_3^{\dagger} c_4 c_5 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Эти формулы совпадают с разложениями (3.3) в случае, если положить $y^0(i) = 0$. Можно получить методом Марумори разложения, включающие параметры $y^0(i)$, если бы вместо фермионного вакуума $|0\rangle$ использовали состояние с отличными от нуля числами заполнения однофермионных состояний.

5. СРАВНЕНИЕ БОЗОННЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ БЕЛЯЕВА — ЗЕЛЕВИНСКОГО И МАРУМОРИ

Многие авторы [6] считают, что бозонные разложения, которые получаются методами Беляева — Зелевинского и Марумори, существенно различаются:

а) разложение Беляева — Зелевинского сходится быстрее, чем разложение Марумори, и, кроме того, содержит дополнительные параметры $y^0(i)$, которые можно выбрать так, чтобы ускорить сходимость;

б) разложение Марумори лучше удовлетворяет принципу Паули, чем разложение Беляева — Зелевинского. Такие заключения делаются на следующих основаниях. В работах [6, а, б, в] вычисляются и сравниваются лишь первые два члена бозонного разложения. При сравнении этих разложений видно, что коэффициент при втором члене разложения, приведенный в работах С. Т. Беляева, В. Г. Зелевинского и Соренсена, является малой величиной по сравнению с единицей $[-1/\sqrt{2}s_4(1 + \hat{p}_1) \sum_5 Y(125)Y(3\bar{4}5)]$, тогда как коэффициент при втором члене разложения Марумори порядка единицы $[(-\sqrt{2} + \sqrt{2/3})\delta_{12}\delta_{34} - \sqrt{2/3}s_4(1 + p_1) \sum_5 Y(125)Y(3\bar{4}5)]$. Однако это утверждение неверно и основывается на неправильном вычислении интересующего нас коэффициента. Наиболее четко это видно в работе [6б]. В уравнении (2.23) этой работы был отброшен последний член, содержащий двойное суммирование, на том основании, что он пропорционален квадрату малого параметра. Можно показать, что двойное суммирование компенсирует малость этого члена. Учитывая этот член, можно получить выражение для коэффициента, точно совпадающее с результатом Марумори. А так как первые два члена разложения совпадают, то в этом приближении принцип Паули учитывается обоими методами с одинаковой точностью.

Идея, на которой основывается метод Беляева — Зелевинского, содержит произвол, поскольку коммутационные соотношения определяют операторы с точностью до унитарного преобразования. С. Т. Беляев, В. Г. Зелевинский устранили этот произвол, задавая конкретным видом операторной структуры рядов, а именно:

$$\left. \begin{aligned} a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n (c^+)^{n+1} (c)^n; \\ a_{\alpha}^+ a_{\beta} &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n (c^+)^n (c)^n. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

В принципе в эти ряды могли бы входить члены типа $(c^+)^n$ и т. д., но тогда коэффициенты разложения не определялись бы однозначно.

В методе Марумори также содержится произвол, связанный с тем, что существует бесконечное число операторов преобразования состояний $|m\rangle$ в состояния $|m\rangle$. Фиксируя вид оператора этого преобразования Марумори, однозначно определим бозонные разложения. Из того факта, что оператор $U_M^+ U_M$ является едини-

цей в фермионном пространстве, вытекает, что бозонные разложения Марумори удовлетворяют коммутационным соотношениям для операторов, которые они представляют. Можно показать, что оператор \hat{P} коммутирует с операторами

$$\left. \begin{aligned} (c_{\alpha\beta}^+ - \sum_{\gamma\delta} c_{\alpha\gamma}^+ c_{\beta\delta} c_{\gamma\delta}), \\ \hat{N} \text{ и } \hat{\rho}_{\alpha\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Благодаря этому операторы

$$\left. \begin{aligned} (c_{\alpha\beta}^+ - \sum_{\gamma\delta} c_{\alpha\gamma}^+ c_{\beta\delta}^+ c_{\gamma\delta}) / \sqrt{1 + \hat{N}} \\ \text{и} \\ \sum_{\gamma} c_{\alpha\gamma}^+ c_{\beta\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

будут удовлетворять тем же коммутационным соотношениям, что и $A_{\alpha\beta}^+$, $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$. Так как операторы (5.3) имеют ту же структуру, что и бозонные разложения Беляева — Зелевинского, то они совпадают с разложением Беляева — Зелевинского.

Разложение Дайсона, о котором речь будет идти ниже, можно получить или с помощью идеи Беляева — Зелевинского, или с помощью метода Марумори. Оба пути приводят к одному и тому же результату.

6. КОНЕЧНЫЕ БОЗОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

В п. 4 было построено обобщение представления Холстейна — Примакова для пар фермионных операторов. Здесь покажем, как построить обобщение представления Дайсона. Воспользуемся для этого методом Марумори. В качестве оператора, преобразующего вектора F пространства b в вектора физического подпространства B , будем использовать

$$U = |0\rangle \langle 0| \exp\left(1/2 \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}^+ a_{\beta} a_{\alpha}\right) |0\rangle \langle 0|, \quad (6.1)$$

введенный впервые в работе [10]. В отличие от оператора U_M , который переводит нормированные $|m\rangle$ в нормированные $|m\rangle$, оператор U не сохраняет норму:

$$\left. \begin{aligned} |m\rangle |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{(2m-1)!!}} U |m\rangle |0\rangle; \\ \langle 0| \langle m| &= \frac{1}{\sqrt{(2m-1)!!}} \langle 0| \langle m| U. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Поэтому для того, чтобы получить соотношения между матричными элементами фермионного оператора и его бозонного

образа, нужен еще один оператор \tilde{U} , обладающий следующими свойствами:

$$\left. \begin{aligned} \langle 0 | (m | &= \sqrt{(2m-1)!!} \langle 0 | \langle m | \tilde{U}; \\ | m \rangle | 0 \rangle &= \sqrt{(2m-1)!!} U | m \rangle | 0 \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Оператор \tilde{U} удобен тем, что операторная единица в фермионном пространстве и оператор проектирования на физическое бозонное пространство $\tilde{P} = \sum_m | m \rangle | 0 \rangle \langle 0 | \langle m |$ просто выражаются через U и \tilde{U} . Из соотношений (6.2) и (6.3) следует, что

$$\langle m | \tilde{U} U | m' \rangle = \langle m | m' \rangle = \delta_{mm'}, \quad (6.4)$$

т. е. оператор $\tilde{U} U$ является единицей в фермионном пространстве. Из тех же соотношений (6.2), (6.3) следует также:

$$\hat{P} = \sum_m | m \rangle | 0 \rangle \langle 0 | \langle m | = U \sum_m | m \rangle | 0 \rangle \langle 0 | \langle m | \tilde{U} = U \tilde{U}. \quad (6.5)$$

С помощью оператора U^+ нельзя было бы получить такие простые соотношения, так как он обладает свойствами преобразования

$$\left. \begin{aligned} \langle 0 | (m | &= \frac{1}{\sqrt{(2m-1)!!}} \langle 0 | \langle m | U^+; \\ | m \rangle | 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{(2m-1)!!}} U^+ | m \rangle | 0 \rangle, \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

не совпадающими со свойствами оператора U^+ . Но сравнивая соотношения (6.3) с (6.6), легко увидеть, как можно построить оператор \tilde{U} . Запишем оператор U^+ следующим образом:

$$U^+ = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m m!} \left(\sum_{(\alpha\beta)} a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ c_{\alpha\beta} \right)^m. \quad (6.7)$$

Мы видим, что для построения \tilde{U} необходимо m член ряда (6.7) разделить на $(2m-1)!!$:

$$\tilde{U} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m m! (2m-1)!!} \left(\sum_{(\alpha\beta)} a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ c_{\alpha\beta} \right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \left(\sum_{(\alpha\beta)} a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ c_{\alpha\beta} \right)^m. \quad (6.8)$$

Тот факт, что оператор $\tilde{U} U$ является единицей в фермионном пространстве, можно использовать для установления связи между матричными элементами фермионного оператора и его бозонного образа:

$$\langle m | T | m' \rangle = \langle m | \tilde{U} U T \tilde{U} U | m' \rangle = \langle \tilde{m} | U T \tilde{U} | \tilde{m}' \rangle = \langle \tilde{m} | \tau | \tilde{m}' \rangle, \quad (6.9)$$

где

$$|\bar{m}\rangle = \sqrt{(2m-1)!!} |m\rangle; \quad \langle \tilde{m}| = \frac{1}{\sqrt{(2m-1)!!}} \langle m|.$$

Для векторов $\langle \tilde{m}|$ и $|\bar{m}\rangle$ выполняются соотношения

$$\langle \tilde{m} | \bar{m} \rangle = \delta_{mm'}, \quad (6.10)$$

но векторы $\langle \tilde{m}|$ и $|\bar{m}\rangle$ в отличие от $\langle m|$ и $|m\rangle$ не связаны операцией эрмитова сопряжения. Оператор τ является бозонным образом фермионного оператора T . Так как $\tilde{U}^+ \neq U$, то даже если $T^+ = T$, $\tau^+ \neq \tau$. В этом состоит особенность данного преобразования. Покажем теперь, что оператор τ переводит векторы из физического пространства в векторы того же пространства, а действуя на нефизические векторы, дает нуль. Из того, что $\hat{P} = U\tilde{U}$, а $\tilde{U}U$ является единицей в фермионном пространстве, следует:

$$\left. \begin{aligned} \hat{P}\tau &= U\tilde{U}UT\tilde{U} = UTU\tilde{U} = \tau; \\ \tau\hat{P} &= UT\tilde{U}U\tilde{U} = UT\tilde{U} = \tau. \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Построим бозонные представления для операторов $a_\alpha^+ a_\beta^+$, $a_\beta a_\alpha$, $a_\alpha^+ a_\beta$. Для этого необходимо получить ряд вспомогательных соотношений. Первое из них следующее:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \exp \left(\frac{1}{2} \sum c_{\rho\rho'}^+ a_\rho a_{\rho'} \right) a_\alpha^+ &= \langle 0 | \exp \left(\frac{1}{2} \sum c_{\rho\rho'}^+ a_\rho a_{\rho'} \right) \times \\ &\times a_\alpha \exp \left(-\frac{1}{2} \sum c_{\rho\rho'}^+ a_\rho a_{\rho'} \right) \exp \left(\frac{1}{2} \sum c_{\rho\rho'}^+ a_\rho a_{\rho'} \right) = \\ &= \langle 0 | \left(a_\alpha^+ + \sum_\rho c_{\alpha\rho}^+ a_\rho \right) \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} c_{\sigma\sigma'}^+ a_\sigma a_{\sigma'} \right) = \\ &= \langle 0 | \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} c_{\sigma\sigma'}^+ a_\sigma a_{\sigma'} \right) \sum_\rho c_{\alpha\rho}^+ a_\rho. \end{aligned} \quad (6.12)$$

С помощью (6.12) можно показать, что

$$\begin{aligned} \langle 0 | \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{\rho\rho'} c_{\rho\rho'}^+ a_\rho a_{\rho'} \right) a_\alpha^+ a_\beta^+ &= \\ = \langle 0 | \left(c_{\alpha\beta}^+ - \sum_{\sigma\sigma'} c_{\beta\sigma'}^+ c_{\alpha\sigma}^+ a_\sigma a_{\sigma'} \right) \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{\rho\rho'} c_{\rho\rho'}^+ a_\rho a_{\rho'} \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Аналогично получим третье соотношение:

$$c_{\alpha\beta} \exp \left(\frac{1}{2} \sum c_{\rho\rho'}^+ a_\rho a_{\rho'} \right) |0\rangle = a_\beta a_\alpha \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{\rho\rho'} c_{\rho\rho'}^+ a_\rho a_{\rho'} \right) |0\rangle. \quad (6.14)$$

Используя (6.13) и (6.14), найдем

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{\rho\rho'} c_{\rho\rho'}^+ a_{\rho'} a_{\rho} \right) a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ | 0 \rangle = \\ & = \left(c_{\alpha\beta}^+ - \sum_{\rho\rho'} c_{\alpha\rho}^+ c_{\beta\rho'}^+ c_{\rho\rho'} \right) \langle 0 | \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} c_{\sigma\sigma'}^+ a_{\sigma'} a_{\sigma} \right) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Теперь с помощью формул (6.12) — (6.15) проводим преобразование:

$$\begin{aligned} U a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ \tilde{U} &= | 0 \rangle \langle 0 | \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{\rho\rho'} c_{\rho\rho'}^+ a_{\rho'} a_{\rho} \right) | 0 \rangle \langle 0 | a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ \times \\ & \times | 0 \rangle \langle 0 | \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\sum_{\rho\rho'} a_{\rho}^+ a_{\rho'}^+ c_{\rho\rho'} \right)^n | 0 \rangle \langle 0 | = \\ & = | 0 \rangle \langle 0 | \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{\rho\rho'} c_{\rho\rho'}^+ a_{\rho'} a_{\rho} \right) a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ | 0 \rangle \langle 0 | \times \\ & \times | 0 \rangle \langle 0 | \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \left(\sum_{\rho\rho'} a_{\rho}^+ a_{\rho'}^+ c_{\rho\rho'} \right)^m | 0 \rangle \langle 0 | = \\ & = \left(c_{\alpha\beta}^+ - \sum_{\rho\rho'} c_{\alpha\rho}^+ c_{\beta\rho'}^+ c_{\rho\rho'} \right) U \tilde{U} = \left(c_{\alpha\beta}^+ - \sum_{\rho\rho'} c_{\alpha\rho}^+ c_{\beta\rho'}^+ c_{\rho\rho'} \right) \hat{P}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Таким же образом можно показать, что

$$U a_{\beta} a_{\alpha} \tilde{U} = c_{\alpha\beta} \hat{P}^{\sim}; \quad (6.17)$$

$$U a_{\alpha}^+ a_{\beta} \tilde{U} = \sum_{\gamma} c_{\alpha\gamma}^+ c_{\beta\gamma} \hat{P}. \quad (6.18)$$

Запишем τ в виде $\tau = \tilde{T} \hat{P}$. Операторы \tilde{T} являются непосредственным обобщением представления Дайсона для спиновых операторов и удовлетворяют всем коммутационным соотношениям для бинарных фермионных операторов.

7. ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА БОЗОННЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Рассмотрим коллективные ветви возбуждения, связанные с парными корреляциями, в ядрах с приблизительно одинаковыми числами нейтронов и протонов. В таких ядрах нейтроны и протоны заполняют одни и те же одночастичные уровни, и поэтому необходимо учитывать не только нейтрон-нейтронные и протон-протонные, но и нейтрон-протонные парные корреляции.

Будем исходить из микроскопической модели ядра, учитывающей лишь парные остаточные силы. Так как в рассматриваемых

ядра изоспин T является удобным квантовым числом, то запишем гамильтониан в изотопинвариантном виде:

$$H = \sum_{j, m > 0} (\varepsilon_j - \lambda) N_{jm} - G \sum_{\substack{j, j'; m, m' > 0 \\ \tau=0, \pm 1}} A_{jm\tau}^{\dagger} A_{j'm'\tau}, \quad (7.1)$$

где

$$N_{jm} = \sum_{\tau=\pm 1/2} (a_{jm\tau}^{\dagger} a_{jm\tau} + a_{j-m\tau}^{\dagger} a_{j-m\tau});$$

$$A_{jm\tau}^{\dagger} = (-1)^{j-m} \sum_{\tau_1 \tau_2} C_{1/2 \tau_1 1/2 \tau_2}^{1 \tau} a_{jm\tau_1}^{\dagger} a_{j-m\tau_2}^{\dagger};$$

τ — проекция изотопического спина; $C_{1/2 \tau_1 1/2 \tau_2}^{1 \tau}$ — коэффициенты Клебша — Гордана. Поскольку нас будут интересовать состояния ядер, получающихся в результате добавления или удаления пар нуклонов от некоторого базисного ядра, то в качестве базисного удобно выбрать ядро с замкнутыми подболочками, а всю совокупность одночастичных уровней разбить на две: уровни j_+ , для которых $\varepsilon_j - \lambda > 0$, и уровни j_- , для которых $\varepsilon_j - \lambda < 0$. Введем новые обозначения:

$$A_{jm\tau}^{\dagger} = \begin{cases} A_{j_+m\tau}^{\dagger}, & j \in j_+ \\ (-1)^{1-\tau} A_{j_-m-\tau}, & j \in j_- \end{cases}; \quad N_{jm} = \begin{cases} N_{j_+m}, & j \in j_+ \\ 4 - N_{j_-m}, & j \in j_- \end{cases} \quad (7.2)$$

Для построения коллективного гамильтониана ядра воспользуемся обобщением бозонного представления Дайсона на случай произвольных фермионных операторов. В рассматриваемом случае это бозонное представление удобно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} A_{j_+m\tau}^{\dagger} &\Rightarrow c_{j_+m\tau}^{\dagger} \left(1 - \sum_{\tau'} c_{j_+m\tau'}^{\dagger} c_{j_+m\tau'} \right) + \\ &+ (-1)^{\tau/2} \sum_{\tau'} (-1)^{\tau'} c_{j_+m\tau'}^{\dagger} c_{j_+m-\tau-\tau'}^{\dagger} c_{j_+m-\tau}; \\ A_{j_+m\tau} &\Rightarrow c_{j_+m\tau}; \quad A_{j_-m\tau}^{\dagger} \Rightarrow c_{j_-m\tau}^{\dagger}; \\ A_{j_-m\tau} &\Rightarrow \left(1 - \sum_{\tau'} c_{j_-m\tau'}^{\dagger} c_{j_-m\tau'} \right) c_{j_-m\tau} + \\ &+ (-1)^{\tau/2} c_{j_-m-\tau}^{\dagger} \sum_{\tau'} (-1)^{\tau'} c_{j_-m\tau} c_{j_-m-\tau-\tau'}; \\ N_{j_{\pm}m} &\Rightarrow 2 \sum_{\tau} c_{j_{\pm}m\tau}^{\dagger} c_{j_{\pm}m\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

В таком представлении гамильтониан будет содержать только двух- и четырехбозонные члены, что очень удобно с чисто практической точки зрения.

Перейдем к выделению коллективных парных ветвей возбуждения. После приведения гамильтониана к нормальному виду его

двухбозонная часть оказывается неэрмитовым оператором. Поэтому нельзя при помощи линейного унитарного преобразования диагонализировать ее и тем самым определить операторы, описывающие коллективные ветви возбуждения. Однако с помощью линейного неунитарного, но канонического (т. е. сохраняющего все коммутационные соотношения) преобразования

$$\left. \begin{aligned} c_{j_{\pm}m}^{\pm} &= \sum_k u_{k_{\pm}, j_{\pm}, m} \beta_{k_{\pm}, \tau}^{\pm} - (-1)^{\tau} u_{k_{\mp}, j_{\pm}, m} \beta_{k_{\mp}, -\tau}; \\ c_{j_{\pm}m} &= \sum_k (\tilde{u}_{k_{\pm}, j_{\pm}, m} \beta_{k_{\pm}, \tau} - (-1)^{\tau} \tilde{u}_{k_{\mp}, j_{\pm}, m} \beta_{k_{\mp}, -\tau}^{\pm}) \end{aligned} \right\} (7.4)$$

можно диагонализировать гамильтониан и тем самым определить операторы, описывающие коллективные ветви возбуждения. В результате получаем следующие выражения для коэффициентов $u_{k, jm}, \tilde{u}_{k, jm}$:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_{k_{\pm}, j_{\pm}m} &= \frac{\tilde{X}_{k_{\pm}} (1 - 2\rho_{j_{\pm}m})}{D_{j_{\pm}m} \mp \omega_{k_{\pm}}}; \\ \tilde{u}_{k_{\pm}j_{\pm}m} &= \frac{X_{k_{\pm}}}{D_{j_{\pm}m} \pm \omega_{k_{\pm}}}; \\ u_{k_{\pm}, j_{\pm}m} &= \frac{X_{k_{\pm}}}{D_{j_{\pm}m} \mp \omega_{k_{\pm}}}; \quad u_{k_{\pm}j_{\pm}m} = \frac{\tilde{X}_{k_{\pm}} (1 - 2\rho_{j_{\pm}m})}{D_{j_{\pm}m} \pm \omega_{k_{\pm}}}, \end{aligned} \right\} (7.5)$$

здесь $\rho_{j_{\pm}m} (\rho_{j_{\pm}m})$ — средние числа пар частиц (дырок) на уровнях выше (ниже) поверхности Ферми в состоянии без бозонов; $1/2D_{j_{\pm}m}$ — модуль перенормированных одночастичных энергий, отсчитанных от поверхности Ферми. Перенормировка произошла в случае приведения гамильтониана, выраженного через операторы $\beta_{k\tau}^{\pm}$ и $\beta_{k\tau}$, к нормальному виду. Величины $\rho_{j_{\pm}m}$ и $1/2D_{j_{\pm}m}$ следующим образом выражаются через коэффициенты $u_{k, jm}, \tilde{u}_{k, jm}$:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{j_{\pm}m} &= 3 \sum_{k_{\mp}} u_{k_{\mp}, j_{\pm}m} \tilde{u}_{k_{\mp}, j_{\pm}m} / 2; \\ D_{j_{\pm}m} / 2 &= \left| \varepsilon_{j_{\pm}} \pm \frac{3}{2} \sum_{k_{\mp}} \tilde{X}_{k_{\mp}} u_{k_{\mp}, j_{\pm}m} - \lambda \right|. \end{aligned} \right\} (7.6)$$

Видно, что перенормировка приводит к увеличению расстояния от одночастичных уровней до поверхности Ферми. Уравнения

для частот $\omega_{k_{\pm}}$ и произведений $\tilde{X}_{k_{\pm}} X_{k_{\pm}}$ имеют вид:

$$1 = G \left(\sum_{j_{\pm m}} (1 - 2\rho_{j_{\pm m}})/(D_{j_{\pm m}} - \omega_{k_{\pm}}) + \sum_{j_{\mp m}} (1 - 2\rho_{j_{\mp m}})/(D_{j_{\mp m}} + \omega_{k_{\pm}}) \right); \quad (7.7)$$

$$1 = \tilde{X}_{k_{\pm}} X_{k_{\pm}} \left[\sum_{j_{\pm m}} (1 - 2\rho_{j_{\pm m}})/(D_{j_{\pm m}} - \omega_{k_{\pm}})^2 - \sum_{j_{\mp m}} (1 - 2\rho_{j_{\mp m}})/(D_{j_{\mp m}} + \omega_{k_{\pm}})^2 \right]. \quad (7.8)$$

Эти уравнения переходят в полученные в квазибозонном приближении [6б], если положить

$$\rho_{j_{\pm m}} = 0; \quad D_{j_{\pm m}}/2 = |\varepsilon_{j_{\pm}} - \lambda|.$$

В квазибозонном приближении существует такое критическое значение $G = G_{\text{крит}}$, что при $G > G_{\text{крит}}$ решения $\omega_{1\pm}$, соответствующие коллективным возбуждениям, становятся чисто мнимыми. Решения же уравнения (7.7), отвечающие коллективным ветвям, вещественны при любых G . Это происходит благодаря увеличению с ростом G величин $\rho_{j_{\pm m}}$ и $D_{j_{\pm m}}$. Характер зависимости $\omega_{1\pm}$ от G показан на рис. 1.

Численные оценки показывают, что взаимодействие коллективных бозонов друг с другом значительно превышает их связь с неколлективными бозонами. Последнюю можно учесть по теории

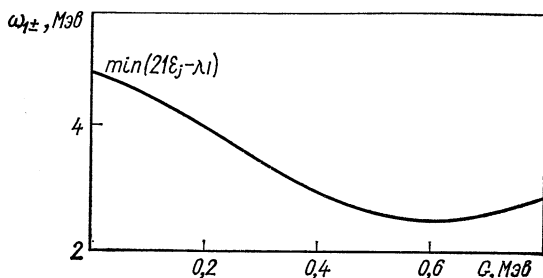


Рис. 1. Зависимость энергии коллективных бозонов $\omega_{1\pm}$ от константы парного взаимодействия G .

возмущений. Поэтому при анализе многих эффектов, связанных с парными корреляциями, достаточно рассматривать только коллективную часть полного гамильтониана.

В качестве примера использования полученного коллективного гамильтониана для расчетов энергий состояний на рис. 2 приведены результаты расчета энергий парного вибрационного состояния с $J^{\pi}T = 0^{+}0$ в ^{56}Ni при различных значениях G .

При малых значениях G результаты расчетов совпадают с обычными по методу приближенного вторичного квантования. В области минимума энергии результаты двух методов уже значительно расходятся. При больших значениях G в методе приближенного вторичного квантования решение отсутствует, тогда как решение

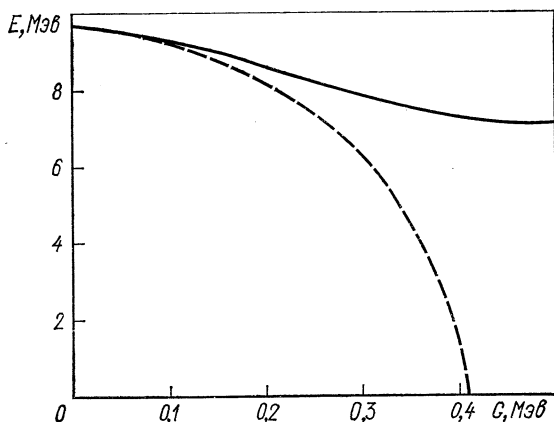


Рис. 2. Энергия $I^\pi = 0^\pm$, $T = 0$ состояния в ^{56}Ni при различных значениях константы парного взаимодействия G .

коллективного гамильтониана начинает расти с увеличением G , подобно тому как растет энергия парных вибрационных состояний в сверхтекучих ядрах. На этом примере видно, что использование метода бозонного представления позволило построить такой коллективный гамильтониан, который описывает как случаи слабых и сильных парных корреляций, так и переходную область.

Наиболее полные расчеты свойств низколежащих коллективных состояний квадрупольного типа в четно-четных ядрах были выполнены в работе [12], где бозонные представления фермионных операторов строились с помощью метода Беляева — Зелевинского, т. е. конструировались ряды, в которых сохранялось лишь несколько первых членов. При таком подходе возникают следующие вопросы:

- 1) насколько хорошо выделена коллективная ветвь возбуждения, т. е. какова ее связь с неколлективными возбуждениями?
- 2) как быстро сходятся ряды, построенные методом Беляева — Зелевинского? Не вносим ли мы существенных погрешностей, обрывая ряды на первых двух членах, как это делалось в работе [12].

Для выделения коллективных ветвей возбуждения ядер можно использовать различные методы. Простейший и наиболее изве-

стный из них — метод приближенного вторичного квантования. К сожалению, этот метод можно использовать только в тех случаях, когда константа квадрупольного взаимодействия κ меньше некоторого критического значения. Как показывают численные расчеты, многие ядра этому условию не удовлетворяют. Можно пойти по другому пути: находить коэффициенты линейного преобразования, с помощью которого определяются коллективные динамические переменные, из требования диагонализации полной двухбозонной части гамильтониана, включающей в отличие от *RPA* перенормировочные члены, возникшие при приведении к «нормальному» виду четырехбозонной части гамильтониана. С этим методом связаны довольно сложные расчеты, поэтому в работе [12] для определения коллективных переменных использовался метод Тамма — Данкова. Но, как показали предварительные расчеты, этот метод не обеспечивает достаточно хорошее отделение коллективных ветвей возбуждения от неколлективных.

Что касается второго вопроса, то единственная практическая попытка ответить на него была предпринята в работе [13]. Кубические по бозонам ангармонические члены могут входить как в кинетическую, так и в потенциальную энергию. В работе [13] анализировались ангармонические члены в потенциальной энергии. Предварительно в расчетах методом Хартри была найдена потенциальная энергия деформации. Затем в одном случае ее разлагали по степеням β , сохраняли только члены, пропорциональные β^2 и β^3 , и делали расчеты в этом приближении. Результаты расчета затем сравнивались с расчетами, аналогичными в работе [12]. Как и следовало ожидать, результаты практически совпадали. После этого потенциальная энергия аппроксимировалась полиномом $c_1\beta^2 + c_2\beta^3$. Тем самым эффективно учитывались высшие члены разложения по степеням β .

Расчеты квадрупольных моментов первых 2^+ состояний, выполненные с найденными при этом коэффициентами c_1 и c_2 , качественным образом отличались от предыдущих и практически совпадали с экспериментальными данными. Таким образом, с точки зрения перечисленных выше принципиальных моментов расчеты работы [12] не удовлетворены.

Перейдем теперь к результатам расчетов. Как пример рассмотрим изотопы ^{114}Cd , ^{116}Sn . В случае изотопа ^{116}Sn теоретические и экспериментальные значения энергии первого 2^+ состояния практически совпадают (1230 и 1150 *кэв* соответственно). В то же время в случае ^{114}Cd расхождение значительно более серьезное: 900 *кэв* — теоретическое и 560 *кэв* — экспериментальное значения. Так как число нейтронов в ядрах ^{114}Cd и ^{116}Sn одинаково, то расхождение обусловлено неправильным учетом вклада протонов.

Третье возбужденное 2^+ состояние в ^{114}Cd лежит при энергии приблизительно 2 *Мэв*. Судя по большой величине приведенной

вероятности $E2$ -перехода в двухфононные 2^+ и 0^+ состояния, это состояние — коллективное, т. е. предположительно трехфононное. Но в теоретических расчетах трехфононные состояния получаются при значительно более высоких энергиях (около $4 Mэв$).

Квадрупольный момент первого 2^+ состояния в ^{116}Sn имеет правильный положительный знак и величину того же порядка, что и «среднее» экспериментальное значение. Что касается квадрупольного момента первого 2^+ состояния в ^{114}Cd , то он имеет правильный отрицательный знак, но слишком мал по величине. Так как вклад нейтронной подсистемы вычисляется правильно, судя по данным о ^{116}Sn , то расхождение теоретических и экспериментальных значений связано с неправильным рассмотрением протонов. Результаты расчетов вероятностей $E2$ -переходов находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными.

Таким образом, результаты расчетов в случае ^{114}Cd , где квадрупольные возбуждения более коллективны, чем в ^{116}Sn , находятся в худшем согласии с экспериментальными данными, чем в ^{116}Sn .

Расчеты свойств коллективных состояний ядер, связанных с учетом ангармонических эффектов, могли бы служить хорошей проверкой для модели с парными и квадрупольными остаточными силами. К сожалению, недостатки расчетов, связанные с плохим отделением коллективных степеней свободы и с плохой сходимостью бозонных разложений, не позволяют связывать несовпадения между теоретическими и экспериментальными результатами только с плохим выбором остаточных сил.

Будем иметь в виду сферические и переходные, но не сильно-деформированные ядра. Для простоты ограничимся случаем аксиальной симметрии. Тогда гамильтониан во внутренней системе координат после $u - v$ -преобразования запишется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned}
 H &= H_0 - \kappa Q_{20} Q_{20}, \\
 H_0 &= \sum_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha}; \quad Q_{20} = Q_{20}^c + Q_{20}^s; \\
 Q_{20}^c &= \sum_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta} (a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} + a_{\beta} a_{\alpha}); \\
 Q_{20}^s &= \sum_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}.
 \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Здесь ϵ_{α} — энергия квазичастиц; a_{α}^{\dagger} , a_{α} — операторы рождения и уничтожения квазичастиц; коэффициенты $u_{\alpha\beta}$, $v_{\alpha\beta}$ выражаются через матричные элементы оператора квадрупольного момента и коэффициенты $u - v$ -преобразования.

Введем операторы:

$$\left. \begin{aligned} p_n &= i \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta}^n (a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ - a_{\beta} a_{\alpha}); \\ q_n &= \sum_{\alpha, \beta} w_{\alpha\beta}^n (a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ + a_{\beta} a_{\alpha}), \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

удовлетворяющие следующим коммутационным соотношениям:

$$[q_n, p_n] = i4 \sum_{\alpha, \beta} w_{\alpha\beta}^n g_{\alpha\beta}^{n'} + \sim a^+ a. \quad (7.11)$$

Потребуем, чтобы $4 \sum_{\alpha, \beta} w_{\alpha\beta}^n g_{\alpha\beta}^{n'} = \delta_{nn'}$, тогда

$$\left. \begin{aligned} i(a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ - a_{\beta} a_{\alpha}) &= 4 \sum_n w_{\alpha\beta}^n p_n; \\ (a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ + a_{\beta} a_{\alpha}) &= 4 \sum_n g_{\alpha\beta}^n q_n. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Соотношениями (7.12) можно воспользоваться для того, чтобы выразить операторы, входящие в гамильтониан, и их коммутаторы через q_n и p_n :

$$\left. \begin{aligned} Q_{20}^c &= 4 \sum_{\alpha, \beta, n} u_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^n q_n \equiv \sum_n V_n q_n; \\ [H_0, q_n] &= -4i \sum_{\alpha, \beta, n'} (\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta}) w_{\alpha\beta}^n w_{\alpha\beta}^{n'} p_{n'} \equiv -i \sum_{n'} G_{nn'} p_{n'}; \\ [H_0, p_n] &= 4i \sum_{\alpha, \beta, n'} (\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta}) g_{\alpha\beta}^n g_{\alpha\beta}^{n'} q_{n'} \equiv i \sum_{n'} F_{nn'} q_{n'}; \\ [Q_{20}^s, p_n] &= 8i \sum_{\alpha, \beta, n'} v_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^n g_{\alpha\beta}^{n'} q_{n'} \equiv i \sum_{n'} R_{nn'} q_{n'}; \\ [Q_{20}^s, q_n] &= -8i \sum_{\alpha, \beta, n'} v_{\alpha\beta} w_{\alpha\beta}^n w_{\alpha\beta}^{n'} p_{n'} \equiv -i \sum_{n'} S_{nn'} p_{n'}. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

В методе приближенного вторичного квантования пренебрегают вторым членом в правой части коммутатора (7.14) и операторами Q_{20}^s в гамильтониане. Тогда $[q_n, p_n] = i\delta_{nn'}$ и из соотношений (7.13) следует:

$$H_0 = 2 \sum_{\alpha, \beta, n, n'} (\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta}) w_{\alpha\beta}^n w_{\alpha\beta}^{n'} p_n p_{n'} + 2 \sum_{\alpha, \beta, n, n'} (\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta}) g_{\alpha\beta}^n g_{\alpha\beta}^{n'} q_n q_{n'}. \quad (7.14)$$

Операторы p_n играют роль импульсов, а операторы q_n — координат для различных ветвей колебаний. Полный гамильтониан оказывается квадратичной формой операторов q_n и p_n , которую можно диагонализировать надлежащим выбором коэффициентов $w_{\alpha\beta}^n$ и $g_{\alpha\beta}^n$. Тем самым определяются нормальные координаты, описывающие различные ветви квадрупольного возбуждения ядра. Наибольший интерес представляет нижайшая по энергии коллективная ветвь.

В тех случаях, когда нельзя пренебрегать ангармоническими эффектами, необходимо проанализировать коммутационные соотношения (7.11) более внимательно. Удобнее работать с двойными коммутаторами, поскольку они линейно выражаются через операторы p и q :

$$[[q_n, p_{n'}], p_{n''}] = 16 \sum (w_{\alpha\gamma}^n g_{\beta\gamma}^{n'} + w_{\beta\gamma}^n g_{\alpha\gamma}^{n'}) g_{\alpha\delta}^{n''} g_{\beta\delta}^{n'''} q_{n''''} \equiv \equiv \sum K_{nn'n''n'''} q_{n''''} \text{ и т. д.} \tag{7.15}$$

Можно показать, что коэффициенты $K_{nn'n''n'''}$ и другие аналогичные коэффициенты имеют малость порядка Ω^{-1} , где Ω — полное число рассматриваемых одночастичных состояний. В правой части коммутаторов (7.14) эти коэффициенты умножаются на операторы q_n, p_n . Порядок величин этих операторов можно оценить, заменив их амплитудами нулевых колебаний. Для неколлективных возбуждений эти амплитуды малы, но для коллективных возбуждений они могут компенсировать малость коэффициентов $K_{nn'n''n'''}$ и др. Поэтому в дальнейшем повсюду будем учитывать только коллективные переменные q_1 и p_1 , пренебрегая вкладом неколлективных. Будем, например, предполагать, что

$$[[q_1, p_1] p_1] = K q_1 \text{ и т. д.} \tag{7.16}$$

Бозонные представления операторов, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (7.16), даются рядами

$$p_1 = -i \frac{d}{d\alpha} + \sim -i\alpha^2 \frac{d}{d\alpha} + \dots, \\ q_1 = \alpha + \sim \alpha^3 + \dots,$$

где α — координата, сконструированная из идеальных бозе-операторов. В слабдеформированных ядрах потенциальная энергия деформации имеет неглубокий минимум и незначительно меняется вблизи точки равновесной деформации. Поэтому амплитуда нулевых колебаний коллективного квадрупольного импульса p_1 мала и для p_1 можно использовать результат гармонического приближения, т. е. в разложении для p_1 ограничиться первым членом, тогда $p_1 = -i \frac{d}{d\alpha}$ и все выписанные выше коммутационные соотношения (7.13), (7.16) становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями, из которых легко найти зависимость операторов от α . Например, вместо (7.16) можно написать:

$$-d^2 q_1 / d\alpha^2 = K q_1 \rightarrow q_1 = \sin \sqrt{K} \alpha / \sqrt{K}. \tag{7.17}$$

Аналогичным образом определяется зависимость от α остальных операторов и, в частности, гамильтониана и квадрупольного момента $Q_{20} = Q_{20}(\alpha)$. Разрешая соотношение для квадрупольного

момента относительно $\alpha = \alpha(Q_{20})$ и подставляя результат в гамильтониан, получим для H выражение через квадрупольный момент, т. е. найдем потенциальную энергию квадрупольной деформации. Результат следующий:

$$H = h(1 + rQ_{20} - \sqrt{1 + 2rQ_{20} - kQ_{20}^2}) - \kappa Q_{20}^2. \quad (7.18)$$

Коэффициенты h , r , k выражаются через коэффициенты в коммутационных соотношениях (7.13) и (7.16).

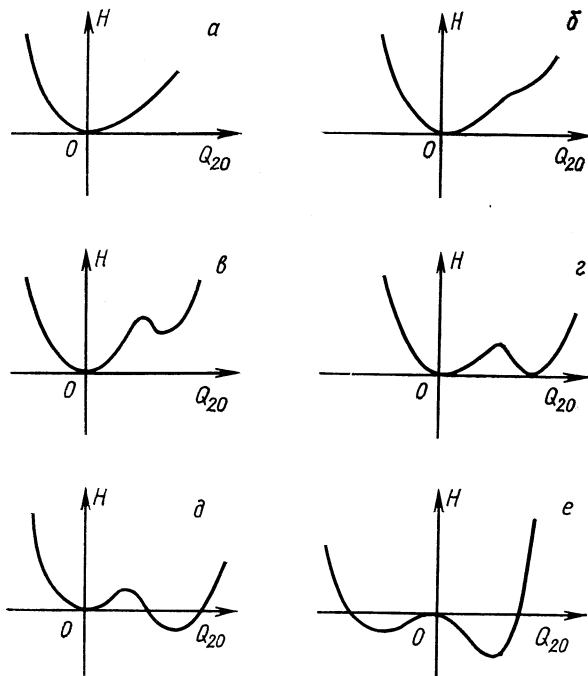


Рис. 3. Потенциальная энергия квадрупольной деформации.

Таким образом, потенциальная энергия деформации зависит от четырех параметров: h , r , k , κ . Два из них характеризуют масштаб измерения величин энергии и Q_{20} , два других определяют форму кривой потенциальной энергии (рис. 3, *a* — *е*).

Можно показать, что с ростом степени коллективизации квадрупольных состояний $H(Q_{20})$ переходит от кривой на рис. 3, *a* к кривой на рис. 3, *в*. На рис. 3, *в* видно, что у потенциальной энергии деформации кроме минимума, отвечающего сферически симметричной равновесной форме, появился второй менее глубо-

кий минимум при отличной от нуля деформации. В дальнейшем глубины двух минимумов сравниваются (см. рис. 3, *з*). Затем минимум при отличной от нуля деформации становится более глубоким, но минимум при нулевой деформации еще сохраняется (см. рис. 3, *д*), и, наконец, исчезает минимум при нулевой деформации (см. рис. 3, *е*). Качественно такая же картина возникновения деформации, но другим путем, была получена в работе [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бор О. ПСФ, 1965, № 9; Sharff-Goldhaber G., Weneser J. Phys. Rev., 1955, 98, 212.
2. Marumori T. Prog. Theor. Phys., 1960, 24, 331; Baranger M. Phys. Rev., 1960, 120, 957; Soloviev V. G. Nucl. Phys., 1965, 49, 544.
3. Wilets L., Jean M. Phys. Rev., 1956, 102, 788.
4. Sakai M. Nucl. Phys., 1967, A104, 301.
5. Raz J. B. Phys. Rev., 1959, 114, 1116; Sorensen B. Phys. Lett., 1966, 21, 683.
6. а) Беляев С. Т., Зелевинский В. Г. ЖЭТФ, 1962, 42, 1590.
 б) Marumori T., Yamamura M., Tokunaga A. Prog. Theor. Phys., 1964, 31, 1009.
 в) Sorensen B. Nucl. Phys., 1967, A97, 1; Nucl. Phys., 1968, A119, 65; Prog. Theor. Phys., 1968, 39, 1468.
 г) Da Providencia J. Nucl. Phys., 1968, A108, 589; Da Providencia J., Weneser J. Phys. Rev., 1970, C1, 825; Marshalek E. R. Nucl. Phys., 1971, A161, 401.
7. Holstein T., Primakoff H. Phys. Rev., 1940, 58, 1098; Dyson F. Phys. Rev., 1956, 102, 1217, 1230; Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. Спиновые волны. М., «Наука», 1967.
8. Janssen D. e. a. Nucl. Phys., 1971, A172, 145.
9. Bose A., Novon A. Phys. Rev., 1971, C3, 51.
10. Usui T. Prog. Theor. Phys., 1960, 23, 787.
11. Bieliaev S. T. Selected Topics in Nucl. Theory, Intern. Atomic Energy Agency, 1963, Vienna, p. 291.
12. Sorensen B. Nucl. Phys., 1970, A142, 411.
13. Bes D. R., Dussel G. G. Nucl. Phys., 1969, A135, 1.