ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
1973, ТОМ 4, ВЫП. 1

УДК 539.12.172

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ II

Ю. М. Широков
Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Для одновременных коммутаторов общего вида с произвольным конечным числом градиентных членов развит явно ковариантный формализм. В этом формализме построение релятивистски инвариантных систем одновременных коммутаторов сводится к стандартным манипуляциям с тензорными индексами.

Получены условия микроковариантности квантовой теории, отражающие факт псевдоевклидовости 4-пространства во всех точках. Показано, что эти условия являются более жесткими, чем обычное требование инвариантности относительно преобразований группы Пуанкаре.

На основе условий микроковариантности одновременных коммутаторов сформулирована система допущений для квантовой теории поля, в которой автоматически соблюдается локальная коммутативность.

The explicitly covariant formalism is developed for the general form of the equal time commutators containing arbitrary finite number of the gradient terms. In this formalism one can write out relativistically invariant systems of the equal time commutators in the framework of the standard operations with the 4-tensor indices.

General conditions of the microcovariance reflecting the pseudoeuclidean properties of the 4-spece at all points are obtained. These conditions are demonstrated to be more restrictive than usual requirements of the Poincaré invariance.

Based on the microcovariance conditions of the equal time commutators the set of assumptions is formulated for the quantum field theory. In the framework of these assumptions the local commutativity is hold automatically.

6. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА ДЛЯ ОДНОВРЕМЕННЫХ КОММУТАТОРОВ

1. Нетривиальным примером использования развитой в параграфе 2 (см. ЭЧАЯ, 1972, т. 3, вып. 3, с. 611, [1]) общей формулировки условий релятивистской инвариантности является задача о конструировании систем одновременных коммутаторов, замкнутых относительно преобразований группы Пуанкаре. Нашей целью

является общее решение этой задачи для одновременных коммутаторов, содержащих произвольное конечное число градиентных (или, что то же, швингеровских *) членов, при дополнительном независимом допущении о том, что все входящие в коммутаторы локальные величины преобразуются по конечномерным представлениям группы Лоренца.

2. Важность исследования релятивистских свойств одновременных коммутаторов прежде всего обусловлена бурным развитием алгебры токов (см., например, [5]). Релятивистская инвариантность очевидна для ставшей уже классической алгебры проинтегрированных сохраняющихся зарядов

$$[q_a, q_b] = \mathrm{i} G_{ab}^c q_c, \tag{1}$$

где a, b, c — индексы $SU(3)$-компонент

$$q_a = \int d^3x J_a^0(x); \tag{2}$$

$J_a^\alpha(x)$ — сохраняющийся ток

$$\partial J_a^\alpha(x)/\partial x^\alpha = 0. \tag{3}$$

Но уже для несохраняющихся токов вопрос о релятивизации (1) усложнен, поскольку при несоблюдении (3) величины q_a из (2) в общем случае преобразуются по бесконечномерным представлениям группы Лоренца.

Проблема релятивизации еще более осложняется при переходе к алгебре непроинтегрированных коммутаторов, содержащих градиентные члены. В общем случае такой коммутатор можно записать в форме

$$[A(\mathbf{x}, x^0), B(\mathbf{y}, x^0)] = \mathrm{i} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} F^{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{x}, x^0) \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \ldots \frac{\partial}{\partial y^{i_k}} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{4}$$

где $A(x)$, $B(y)$ — компоненты локальных величин (полей, токов, их производных конечных порядков), преобразующихся по конечномерным представлениям группы Лоренца. Поскольку коммутатор (4) не имеет явно ковариантного вида, то при его использовании есть опасность потерять релятивистскую инвариантность. Установление трансформационных свойств коммутатора (4) осложнено тем, что, как мы увидим в параграфе 8, величины $F^{i_1 \ldots i_k}(x)$ в общем случае преобразуются по бесконечномерным представлениям группы Лоренца, даже если представления для A и B конечномерны. Для решения задачи о «ковариантизации» (4) надо ука-

* Первое указание на необходимость введения этих членов было сделано в 1955 г. в работе Гото и Имамуры [2]. В 1959 г. аналогичный результат был получен Швингером [3]. Термин «градиентный член» предложен Челленом [4].

зать все способы инвариантного обрывания представлений для $F^{i_1\ldots i_k}$ до конечномерных.

Подчеркнем, что нас интересует активная, а не пассивная инвариантность (см. параграф 2, п. 1 [ЭЧАЯ, 1972, т. 3, вып. 3, с. 611]) т. е. фактическая, а не формальная ковариантизация (4). Пассивная инвариантность легко достигается введением единичного числового 4-вектора n^α ($n^\alpha n_\alpha = 1$), ориентированного произвольным, но фиксированным образом. С помощью n_α коммутатор (4) можно записать в форме

$$\delta\{n_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)\}[A(x), B(x)] =$$

$$= \mathrm{i}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\mathscr{F}^{\alpha_1\ldots\alpha_k}(x)\frac{\partial}{\partial y^{\alpha_1}}\ldots\frac{\partial}{\partial y^{\alpha_k}}\delta^4(x-y), \qquad (5)$$

где $\mathscr{F}^{\alpha_1\ldots\alpha_k}n_{\alpha_1} = 0$ и т. д. Введенная в работе [6] и используемая в некоторых дальнейших работах [7, 8] форма (5) не является шагом вперед в установлении ковариантных свойств одновременных коммутаторов и не содержит дополнительной информации по сравнению с исходным коммутатором (4).

3. Рассмотрим применявшиеся до последнего времени методы исследования ковариантных свойств соотношений типа (4).

Первые исследования ковариантных свойств алгебр токов и одновременных коммутаторов производились с помощью лагранжевых теорий или же просто по аналогии с коммутаторами токов, составленных из свободных полей. Результаты, полученные такими методами, являются не доказательствами, а лишь наводящими соображениями. Здесь эти методы не будут рассмотрены. Будем исследовать такие свойства одновременных коммутаторов, для вывода которых не требуется перемножать поля в одной точке.

В работе [9] без доказательства приводится утверждение о том, что трехмерная δ-функция $\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ якобы ведет себя как временная компонента 4-вектора. Понимаемое буквально это утверждение неправильно, а в применении к правым частям одновременных коммутаторов допускает правильное истолкование только в одном очень частном случае.

Для коммутатора (4) нетрудно получить преобразование Лоренца, но только не конечное, а инфинитезимальное (см. работы [6, 10] и некоторые более поздние). Чтобы получить эти преобразования, можно использовать два эквивалентных метода: коммутирование (4) с оператором M^{i0} и дифференцирование (5) по n^α. В первом методе изучаемая физическая система поворачивается относительно гиперповерхности $x^0 = \mathrm{const}$, во втором — эта гиперповерхность поворачивается относительно физической системы.

Коммутируя оператор $M^{\alpha\beta}$ с (4), получаем

$$[(\hat{L}^{\alpha\beta}+\hat{S}^{\alpha\beta})\,A(\mathbf{x},x^0),\,B(\mathbf{y},x^0)]+[A(\mathbf{x},x^0),\,(\hat{L}^{\alpha\beta}+\hat{S}^{\alpha\beta})\,B(\mathbf{y},x^0)]=$$
$$=\mathrm{i}\sum_{k=0}\frac{1}{k!}(\hat{L}^{\alpha\beta}+\hat{S}^{\alpha\beta})\,F^{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x},x^0)\frac{\partial}{\partial y^{i_1}}\ldots\frac{\partial}{\partial y^{i_k}}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \qquad (6)$$

Здесь, по определению:

$$\hat{L}^{\alpha\beta}A(x)=\mathrm{i}\,(x^{\alpha}\partial/\partial x_{\beta}-x^{\beta}\partial/\partial x_{\alpha})\,A(x) \text{ и т. д.}; \qquad (7)$$

$\hat{S}^{\alpha\beta}$ — матрица инфинитезимального преобразования Лоренца, действующая на спиновые переменные стоящей справа от нее локальной величины. При выводе (6) использованы тождество Якоби * и инфинитезимальная форма условия (29) [ЭЧАЯ, 1972, т. 3, вып. 3, с. 614]

$$[M^{\alpha\beta},\,A(x)]=(\hat{L}^{\alpha\beta}+\hat{S}^{\alpha\beta})\,(A(x). \qquad (8)$$

Орбитальные части из (6) можно частично исключить, воспользовавшись коммутатором P^{γ} с (4) и тем, что

$$[P^{\alpha},\,A(x)]=(1/\mathrm{i})\,(\partial A(x)/\partial x_{\alpha}). \qquad (9)$$

В результате для инфинитезимального преобразования Лоренца получим

$$[\hat{S}^{i0}A(\mathbf{x},x^0),\,B(\mathbf{y},x^0)]+$$
$$+[A(\mathbf{x},x^0),\,\hat{S}^{i0}B(\mathbf{y},x^0)]-\mathrm{i}\,(x^i-y^i)\left[A(\mathbf{x},x^0),\,\frac{\partial}{\partial x^0}B(\mathbf{y},x^0)\right]=$$
$$=\mathrm{i}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}S^{i0}F^{i_0\ldots i_k}(\mathbf{x},x^0)\frac{\partial}{\partial y^{i_1}}\ldots\frac{\partial}{\partial y^{i_k}}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \qquad (10)$$

В таком общем виде в несколько иной форме это преобразование было получено в работе [8].

Преобразование (10) позволяет получать новые коммутаторы из исходного (4), но лишь в том случае, когда известны четырехмерные трансформационные свойства как $A(x)$, $B(x)$, так и $F^{i_1\ldots i_k}(x)$. Если же известны только ковариантные свойства $A(x)$, $B(x)$, то соотношение (10) оказывается недоопределенным. Повторные коммутаторы (10) с M^{j0} приводят к новым (и все более громоздким) соотношениям, что и указывает на бесконечномерность представления для величин $F^{i_1\ldots i_k}$ в общем случае.

4. Чтобы продемонстрировать неэффективность соотношения (10) для решения поставленной в п. 1 задачи, рассмотрим

* Отметим, что указанное в работе [11] нарушение тождества Якоби относится к определенному выбору предельного перехода при получении одновременных коммутаторов в лагранжевой теории и тем самым не имеет отношения к развиваемому здесь аксиоматическому подходу.

простейший пример коммутатора двух 4-скаляров, не содержащего градиентных членов:

$$\left.\begin{aligned} &[A(\mathbf{x}, x^0), B(\mathbf{y}, x^0)] = \mathrm{i}F(\mathbf{x}, x^0)\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}); \\ &\hat{S}^{\alpha\beta}A(x) = \hat{S}^{\alpha\beta}B(x) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

В этом случае (10) принимает вид

$$-\mathrm{i}(x^i - y^i)[A(\mathbf{x}, x^0), \partial B(\mathbf{y}, x^0)/\partial x^0] = i\hat{S}^{i0}F(\mathbf{x}, x^0)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{12}$$

Посмотрим, что можно сказать о четырехмерной тензорной размерности $F(x)$, пользуясь (12). Казалось бы, можно объявить F 4-скаляром, если положить равным нулю коммутатор в (12). В параграфе 8 показано, что такое заключение ошибочно, там же получено, что одно из правильных решений—приравнивание $F(x)$ компоненте $C^0(x)$ 4-вектора $C^\alpha(x)$. В этом случае

$$\hat{S}^{i0}F(x) = \hat{S}^{i0}C^0(x) = -\mathrm{i}C^i(x),$$

и из (12) следует, что

$$[A(\mathbf{x}, x^0), \partial B(\mathbf{y}, x^0)/\partial x^0] = \mathrm{i}D(\mathbf{x}, x^0)\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \mathrm{i}C^j(x)\,\partial\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})/\partial y^j, \tag{13}$$

где $D(x)$ — некоторый новый локальный оператор, который, как оказывается, можно положить равным нулю, не впадая в противоречия

$$D(x) = 0.$$

Произведя теперь преобразование выражения (13), аналогичное переходу от (4) к (10), в результате получим

$$\begin{aligned} [A(\mathbf{x}, x^0), \partial B(\mathbf{y}, x^0)/\partial y_i] + (x^i - y^i)[A(\mathbf{x}, x^0), (\partial/\partial x^0)^2 B(\mathbf{y}, x^0)] = \\ = -\mathrm{i}C^0(\mathbf{x}, x^0)\,\partial\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})/\partial y_i. \end{aligned} \tag{14}$$

Из этого выражения все еще не видно, что систему коммутаторов можно замкнуть относительно преобразований Лоренца. И только зная ответ, можно понять, что во втором слагаемом правой части следует проделать преобразование

$$\begin{aligned} (x^i - y^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2 B(\mathbf{y}, x^0) = (x^i - y^i)\,\Box\, B(\mathbf{y}, x^0) - \\ - g^{jl}\frac{\partial}{\partial y^j}\cdot\frac{\partial}{\partial y^l}\{(x^i - y^i)B(\mathbf{y}, x^0)\} - 2\frac{\partial}{\partial y^i}B(\mathbf{y}, x^0), \end{aligned}$$

затем воспользоваться тем, что согласно (11)

$$(x^i - y^i)[A(\mathbf{x}, x^0), B(\mathbf{y}, x^0)] = 0$$

и, наконец, принять (а надо еще доказать, что это не ведет к противоречию):

$$(x^i - y^i)\,[A(\mathbf{x}, x^0), \Box B(\mathbf{y}, x^0)] = 0.$$

Лишь после этого получим, что (14) является следствием (11), так что коммутаторы (11) и (13) образуют систему, замкнутую относительно преобразований Лоренца.

7. ОДНОВРЕМЕННЫЕ КОММУТАТОРЫ В ФОРМАЛИЗМЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

1. Для исследования релятивистских и других свойств одновременных коммутаторов очень удобным оказался формализм универсальных алгебр [12, 13]. Именно в этом формализме удалось поставить и решить [14, 15] задачу о ковариантизации одновременных коммутаторов.

Для перехода к универсальной алгебре заменим коммутатор (4) на эквивалентную ему счетную систему соотношений

$$(1/\mathrm{i}) \int d^3y\,(x^{i_1} - y^{i_1}) \ldots (x^{i_k} - y^{i_k})\,[A(\mathbf{x}, x^0), B(\mathbf{y}, x^0)] = \\ = F^{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{x}, x^0); \tag{15}$$

где $k = 0, 1, 2 \ldots$ Очевидно, что правые части (15) равны нулю при $k > n$. Заметим, что умножение (4) на полином по $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ является математически законной операцией, поскольку носитель правой (а значит, и левой) части (4) по этой переменной сосредоточен в точке.

Попробуем теперь упростить запись соотношений (15) без потери содержащейся в них информации. Смысл каждого из этих соотношений состоит в том, что двум локальным величинам $A(x)$, $B(x)$ сопоставляется третья $F^{i_1 \ldots i_k}(x)$ с помощью стандартной операции, состоящей из взятия одновременного коммутатора, умножения на i^{-1} и на полином степени k по $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ с последующим интегрированием по d^3y. Обозначим эту операцию $\mu^{i_1 \ldots i_k}$.

Теперь заметим, что осуществляемая в (15) операция $\mu^{i_1 \ldots i_k}$ является локальной: все величины $A(x)$, $B(x)$, $F^{\cdots}(x)$ достаточно считать заданными в окрестности одной и той же 4-точки x. Другими словами, если одновременные коммутаторы существуют и имеют форму (4), то каждую из операций $\mu^{i_1 \ldots r_k}$ можно трактовать как некоторое корректно определенное неассоциативное перемножение полей в одной 4-точке. Поэтому можно без ущерба для ясности опускать аргументы у локальных величин, т. е. писать A вместо $A(x)$ и т. д. Наконец, условимся писать операции неассоциативных умножений $\mu^{\cdots}$ справа от перемножаемых величин, как это принято в универсальных алгебрах. В результате соотношения (15) примут компактную форму [14]:

$$AB\mu^{i_1 \cdots i_k} = F^{i_1 \cdots i_k}. \tag{16}$$

Любая универсальная алгебра состоит из множества элементов и множества операций над этими элементами. Все операции подразделяются на бинарные, унарные и другие, которые нам не понадобятся. В бинарной операции каждой упорядоченной паре элементов сопоставляется третий. В нашей алгебре бинарные операции состоят из обычного сложения и всех неассоциативных умножений $\mu^{i_1 \cdots i_k}$. Унарная операция, по определению, превращает каждый элемент алгебры в некоторый другой. В данной алгебре унарные операции — умножение элементов на комплексные числа и дифференцирование, которые будут обозначаться ∂_α и также записываться справа. Так, производной $\partial A(x)/\partial x^\alpha$ в универсальной алгебре соответствует элемент $A\partial_\alpha$. Формализованное и более подробное изложение перехода к универсальной алгебре читатель может найти в работе [14].

2. Удобство записи (16) состоит не только в ее компактности, но и в том, что с ее помощью коммутатор (15) расчленяется на составные объекты A, B, $\mu^{\cdots}$ и $F^{\cdots}$, которые можно изучать по отдельности. Так, в параграфе 8 будет показано, что задача о ковариантизации одновременных коммутаторов сводится к разложению операций $\mu^{\cdots}$ по компонентам неприводимых 4-тензоров.

Кроме бинарных операций $\mu^{\cdots}$ часто оказывается удобным введение величин типа $B\mu^{\cdots}$, являющихся унарными операциями. Действие таких унарных операций (конечно, справа) на элементы алгебры определяется соотношениями (4). В переводе на обычный язык унарную операцию $B\mu^i$ пришлось бы записать в форме

$$(1/i) \int d^3y\,(x^i - y^i)\,[\ldots(\mathbf{x}, x^0), B(\mathbf{y}, x^0)]. \tag{17}$$

Вместо (17) обычно вводят интегральные операторы $\int d^3y B(\mathbf{y}, x^0)$, $\int d^3y y^i B(\mathbf{y}, x^0)$ и рассматривают их коммутаторы с локальными величинами. Однако такие интегралы в некоторых случаях могут не существовать (см., например, работы [16, 17]), в то время как существование (17) имеет смысл. Тем самым записью $B\mu^{\cdots}$ указывается, что сначала необходимо брать одновременной коммутатор, а потом уже умножать его на полином и интегрировать по 3-объему. Отметим, что произведение произвольного числа унарных операций ассоциативно и является унарной операцией. Произведения унарной операции на бинарную, например $\partial^0\mu^{\cdots}$, $\mu^{\cdots}\partial^0$, — бинарные операции.

3. Для того чтобы иметь возможность работать с соотношениями (16), не обращаясь к их прообразам (15), необходимо

выразить в терминах универсальной алгебры свойства одновременных коммутаторов, не отраженные в (16). Этих свойств три.

Во-первых, любой коммутатор обладает свойством антисимметрии

$$[A(x), B(y)] = -[B(y), A(x)]. \tag{18}$$

Для коммутатора (4) это свойство выражается в универсальной алгебре системой формул [14]:

$$AB\mu^{i_1\ldots i_k} = (-1)^{k+1} BA\left(\mu^{i_1\ldots i_k} + \frac{1}{1!}\mu^{i_1\ldots i_k i_{k+1}}\partial_{i_{k+1}} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{1}{(n-k)!}\mu^{i_1\ldots i_n}\partial_{i_{k+1}}\ldots\partial_{i_n}\right) \quad \text{при } k\leqslant n \tag{19}$$

и

$$AB\mu^{i_1\ldots i_k} = BA\mu^{i_1\ldots i_k} = 0 \quad \text{при } k > n.$$

Во-вторых, коммутаторы удовлетворяют тождеству Якоби

$$[[C(z), A(x)], B(y)] - [[C(z), B(y)], A(x)] = [C(z), [A(x), B(y)]]. \tag{20}$$

Из (20) получается система соотношений для коммутаторов унарных операций [14]:

$$A\mu^{i_1\ldots i_k}B\mu - B\mu A\mu^{i_1\ldots i_k} = AB\mu\mu^{i_1\ldots i_k}; \tag{21}$$

$$A\mu^{i_1\ldots i_k}B\mu^j - B\mu^j\mu^{i_1\ldots i_k} = AB\mu^j\mu^{i_1\ldots i_k} + AB\mu\mu^{i_1\ldots i_k j}. \tag{22}$$

Третье свойство операции $\mu^{\cdots}$ получается дифференцированием коммутатора (4) по трехмерным переменным y^i и записывается в форме соотношения для бинарных операций [14]

$$\partial^i\mu = 0, \ \partial^i\mu^{i_1\ldots i_k} = g^{ii_1}\mu^{i_2\ldots i_k} + g^{ii_2}\mu^{i_1 i_3\ldots i_k} + \ldots + g^{ii_k}\mu^{i_1\ldots i_{k-1}}. \tag{23}$$

Наконец, для полноты отметим, что при эрмитовом сопряжении выражение (16) переходит в следующее:

$$A^+B^+\mu^{i_1\ldots i_k} = (F^+)^{i_1\ldots i_k}. \tag{24}$$

С учетом (19), (21)—(24) системы одновременных коммутаторов можно изучать в форме (16), не обращаясь к исходным коммутаторам (4). И хотя в следующем параграфе для вывода условий релятивистской инвариантности снова понадобятся коммутаторы (4), далее в параграфе 10 будет показано, что эти условия естественно формулируются в рамках развитого здесь формализма.

8. РЕАЛИЗАЦИЯ УСЛОВИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ ОДНОВРЕМЕННЫХ КОММУТАТОРОВ В РАМКАХ ВНЕШНЕГО АВТОМОРФИЗМА

1. На языке универсальной алгебры задача о ковариантизации системы одновременных коммутаторов сводится к нахождению и исследованию трансформационных свойств соотношений типа (16). Ограничимся сначала инфинитезимальными условиями релятивистской инвариантности. Согласно сказанному в параграфе 2, необходимо определить согласованное с (19)—(23) и с (91) [ЭЧАЯ, 1972, т. 3, вып. 3, с. 634] действие абстрактных генераторов * $M^{\alpha\beta}$, P^{γ} на элементы A, B, . . ., на унарные операции ∂^{α} и на бинарные операции $\mu^{\cdots}$.

В исходной квантовой теории поля абстрактные генераторы группы Пуанкаре действуют на векторы состояния и на операторы локальных величин. При действии на векторы состояния эти генераторы реализуются операторами $M^{\alpha\beta}$, P^{γ}. Действие абстрактных генераторов на оператор локальной величины $A(x)$ реализуется линейными операторами $\hat{L}^{\alpha\beta}+\hat{S}^{\alpha\beta}$, $\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x_{\gamma}}$, заданными в линейном пространстве, образуемом всеми компонентами $A(x)$ во всех 4-точках x^{α}. С этой точки зрения формулы (8), (9) представляют собой условия согласованности реализаций действия абстрактных генераторов на векторы состояния и на локальные величины.

Теперь уже нетрудно определить действие абстрактных генераторов $M^{\alpha\beta}$, P^{γ} на элементы A, B универсальной алгебры.

Генератору P^{γ} сопоставляется унарная операция $\mathrm{i}\,\partial^{\gamma}$, генератору

$$\tilde{S}^{\alpha\beta}=-x^{\alpha}P^{\beta}+x^{\beta}P^{\alpha}+M^{\alpha\beta} \tag{25}$$

сопоставляется новая унарная операция $S^{\alpha\beta}$, производящая, согласно (8), инфинитезимальное преобразование Лоренца элементов алгебры по тензорным индексам. Так, для 4-скаляра A, 4-вектора B^{γ} и 4-тензора $T^{\gamma\varepsilon}$ соответственно будет:

$$\left.\begin{aligned} &AS^{\alpha\beta}=0;\quad B^{\gamma}S^{\alpha\beta}=\mathrm{i}\,(B^{\beta}g^{\alpha\gamma}-B^{\alpha}g^{\beta\gamma});\\ &T^{\gamma\varepsilon}S^{\alpha\beta}=\mathrm{i}\,(T^{\beta\varepsilon}g^{\alpha\gamma}-T^{\alpha\varepsilon}g^{\beta\gamma}+T^{\gamma\beta}g^{\alpha\varepsilon}-T^{\gamma\alpha}g^{\beta\varepsilon}).\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Отметим, что унарная операция $S^{\alpha\beta}$ действует и на тензорные индексы, возникшие при дифференцировании исходного поля.

---

* Следует различать абстрактные генераторы $M^{\alpha\beta}$, P^{γ} от обозначаемых теми же буквами частных реализаций этих генераторов операторами, действующими на векторы состояния.

Так, для градиента 4-скаляра $A\partial^\gamma$ будет

$$A\partial^\gamma S^{\alpha\beta} = \mathrm{i}A\,(\partial^\beta g^{\alpha\gamma} - \partial^\alpha g^{\beta\gamma}).$$

Более общее выражение

$$[S^{\alpha\beta}\partial^\gamma] = \mathrm{i}\,(\partial^\alpha g^{\gamma\beta} - \partial^\beta g^{\alpha\gamma}). \tag{27}$$

Кроме того, по определению операции ∂^α:

$$[\partial^\alpha, \partial^\beta] = 0, \tag{28}$$

а согласно (25), (26):

$$[S^{\alpha\beta}, S^{\gamma\varepsilon}] = \mathrm{i}\,(g^{\alpha\varepsilon}S^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma}S^{\varepsilon\beta} - g^{\beta\varepsilon}S^{\gamma\alpha} - g^{\gamma\beta}S^{\alpha\varepsilon}), \tag{29}$$

так что для унарных операций $S^{\alpha\beta}$, $\mathrm{i}\partial^\gamma$, как и следовало ожидать, выполняются перестановочные соотношения, характеризующие алгебру Ли группы Пуанкаре.

Таким образом, мы определили действие абстрактных генераторов на элементы универсальной алгебры и на операции ∂_α, согласованное со структурой группы и с действием генераторов на векторы состояния в исходной теории поля.

2. Новым и непривычным свойством нашей универсальной алгебры является то, что в ней группа Пуанкаре действует нетривиальным образом не только на элементы, но и на операции $\mu^{\cdots}$ неассоциативных умножений.

Для того чтобы определить согласованное действие алгебры Ли группы Пуанкаре на операции $\mu^{\cdots}$, надо прокоммутировать операторы P^γ и $M^{\alpha\beta}$ с (15), а затем перевести полученные соотношения на язык универсальной алгебры. Коммутатор оператора P^α с (15) после использования тождества Якоби и перехода к универсальной алгебре дает [14]

$$A\partial^\alpha B\mu^{\cdots} + AB\partial^\alpha\mu^{\cdots} = AB\mu^{\cdots}\partial^\alpha, \tag{30}$$

т. е. обычное правило дифференцирования произведения.

Посмотрим, какие выводы следуют из (30) о действии генератора P^α на операции $\mu^{\cdots}$. Соотношение (16) под действием бесконечно малого преобразования группы Пуанкаре переходит в $(A + \delta A)(B + \delta B)(\mu^{\cdots} + \delta\mu^{\cdots}) = F^{\cdots} + \delta F^{\cdots}$. Инфинитезимальным условием релятивистской инвариантности является неизменность исходного уравнения с точностью до первого порядка

$$(\delta A)B\mu^{\cdots} + A(\delta B)\mu^{\cdots} + AB(\delta\mu^{\cdots}) = \delta F^{\cdots}. \tag{31}$$

Из сравнения (31) с (30) видно, что для 4- трансляций $\delta\mu^{\cdots} = 0$, так что все бинарные операции $\mu^{\cdots}$ трансляционно инвариантны. Коммутаторы операторов M^{i0} и M^{ij} с (15) после использования (30) и тождества Якоби приводят в универсальной алгебре к соотношениям [14, 15]:

$$AS^{i0}B\mu^{i_1\ldots i_k}+ABS^{i0}\mu^{i_1\ldots i_k}-\mathrm{i}AB\partial^0\mu^{i_1\ldots i_k i}=AB\mu^{i_1\ldots i_k}S^{i0};\quad (32)$$

$$AS^{ij}B\mu^{i_1\ldots i_k}+ABS^{ij}\mu^{i_1\ldots i_k}+\mathrm{i}AB\,(\partial^i\mu^{i_1\ldots i_k j}-\partial^j\mu^{i_1\ldots i_k i})=$$
$$=AB\mu^{i_1\ldots i_k}S^{ij}.\quad (33)$$

Дифференцирования в правой части (33) оставлены для сокращения записи. Их легко устранить, пользуясь выражением (23).

Очевидно, что совокупность соотношений (32) при различных k представляет собой не что иное, как инфинитезимальное преобразование Лоренца (10), переписанное в терминах универсальной алгебры. Но, пользуясь формой (32), можно продвинуться дальше. Именно, сравнив (32) с (31), мы видим, что если на величинах $\mu^{\ldots}$, как на базисных векторах, построить линейное пространство, то действие генератора $\hat{S}^{i0}$ из (25) на $\mu^{\ldots}$ можно реализовать оператором $\hat{K}^{i0}$ в этом пространстве

$$\hat{K}^{i0}\mu^{i_1\ldots i_k}=\mathrm{i}\partial^0\mu^{i_1\ldots i_k}.\quad (34)$$

Здесь отчетливо проявляется преимущество формализма универсальной алгебры. Компактное равенство (34) содержит всю информацию, даваемую громоздким соотношением (10).

Аналогично, сравнив (33) с (31), мы видим, что действие генератора $\widetilde{S}^{ij}$ на $\mu^{\ldots}$ реализуется оператором $\hat{K}^{ij}$, действующим в линейном пространстве, натянутом на операции $\mu^{\ldots}$:

$$\hat{K}^{ij}\mu^{i_1\ldots i_k}=\mathrm{i}\,(\partial^j\mu^{i_1\ldots i_k i}-\partial^i\mu^{i_1\ldots i_k j})=$$
$$=\mathrm{i}\,\{(g^{ji_1}\mu^{ii_2\ldots i_k}-g^{ii_1}\mu^{ji_2\ldots i_k})+\ldots$$
$$\ldots+(g^{ji_k}\mu^{i_1\ldots i_{k-1}i}-g^{ii_k}\mu^{i_1\ldots i_{k-1}j})\}.\quad (35)$$

3. Из (34) следует, что линейное пространство, порождаемое величинами $\mu^{\ldots}$, неинвариантно, т. е. не является замкнутым по отношению к преобразованиям Лоренца. Но это пространство можно, естественно, расширить до инвариантного. Соответствующим расширенным лоренц-инвариантным пространством будет обозначаемое далее через L линейное пространство с базисной системой векторов *: [15] $\Box^m\mu^{i_1\ldots i_k}$, $\Box^l\partial^0\mu^{i_1\ldots i_q}$, где $\Box\equiv\partial^\alpha\partial_\alpha$, m, k, l, q независимо пробегают все целые неотрицательные значения. Получение действия линейного оператора $\hat{K}^{\alpha\beta}$ на эти базисные векторы не представляет трудностей. Унарная операция $\Box$ инвариантна, так что ее можно считать множителем, коммутирующим с $\hat{K}^{\alpha\beta}$. Поэтому достаточно рассмотреть действие

* Следует отличать векторы пространства L и его подпространств от стандартных 3- и 4-векторов.

$\hat{K}^{\alpha\beta}$ на $\mu^{i_1\cdots i_k}$ и на $\partial^0\,\mu^{i_1\cdots i_k}$. Первое дается формулами (34) и (35). Чтобы получить действие $\hat{K}^{i0}$ на $\partial^0\mu^{\cdots}$, необходимо в (32) заменить B на $B\partial^0$ и воспользоваться (27). После этого надо провести преобразование

$$(\partial^0)^2=\partial_0\partial^0=\Box-\partial^i\partial_i,$$

а затем «поглотить» все оставшиеся пространственные дифференцирования ∂^i операциями $\mu^{\cdots}$ с помощью (23). Конечный результат таков [15]:

$$\begin{aligned}\hat{K}^{i0}\partial^0\mu^{i_1\cdots i_k}&=\mathrm{i}\,\Box\,\mu^{i_1\cdots i_k i}+\mathrm{i}\partial^i\mu^{i_1\cdots i_k}-\mathrm{i}\partial^j\partial_j\mu^{i_1\cdots i_k i}=\\&=\mathrm{i}\,\Box\,\mu^{i_1\cdots i_k i}-\mathrm{i}\,(g^{ii_1}\mu^{i_2\cdots i_k}+\ldots+g^{ii_k}\mu^{i_1\cdots i_{k-1}})-\\&\quad-2\mathrm{i}\,(g^{i_1i_2}\mu^{i_3\cdots i_k i}+\ldots+g^{i_ki_{k-1}}\mu^{i_1\cdots i_{k-2}i}).\end{aligned}\tag{36}$$

В частности,

$$\hat{K}^{i0}\partial^0\mu=\mathrm{i}\,\Box\,\mu^i.\tag{37}$$

Оператор $\hat{K}^{ij}$ действует на $\partial^0\mu^{\cdots}$ по формуле, аналогичной (35), поскольку операция ∂^0 инвариантна относительно 3-вращений.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что определенный, согласно (34)—(36), линейный оператор $\hat{K}^{\alpha\beta}$ удовлетворяет перестановочным соотношениям для генераторов группы Лоренца. Тем самым векторы бесконечномерного пространства преобразуются по некоторому представлению группы Лоренца. Поставленная в параграфе 6, пп. 1, 2, задача о ковариантизации коммутатора (4) теперь сводится к разложению полученного линейного представления группы Лоренца на неприводимые.

Таким образом, переход к универсальной алгебре позволил свести задачу о трансформационных свойствах одновременного коммутатора к соответствующим свойствам одной из составных частей этого коммутатора — бинарной операции $\mu^{\cdots}$.

4. Из (35)—(37) видно, что осуществляемое в пространстве L представление группы Лоренца бесконечномерно. С математической точки зрения разложение представления в пространстве L на неприводимые наталкивается на некоторые трудности принципиального характера, отмеченные в параграфе 5, п. 7, поскольку такое разложение для бесконечномерных неунитарных представлений в высшей степени неоднозначно.

Однако ситуация существенно упрощается, если принять, что в (4) не только величины $A\,(x)$, $B\,(x)$, но и все $F^{i_1\cdots i_k}\,(x)$ преобразуются по конечномерным представлениям группы Лоренца. Подчеркнем, что это допущение независимо от допущения о конечности числа слагаемых в правой части (4). На языке универсальной алгебры новое допущение означает, что для каждого конкретного произведения $AB\mu^{\cdots}$ представление для $\mu^{\cdots}$ должно быть инвариантным образом оборвано до конечномерного. Последовательное математическое рассмотрение с получением всех возможных обрываний и перечислением остающихся конечномерных представлений читатель может найти в работе [15]. Здесь мы ограничимся изложением математически нестрогим, но физически более наглядным.

5. Рассмотрим разновременной коммутатор общего вида, записанный в форме

$$[A(x),\ B(x-z)] = \mathrm{i}F(x,\ z). \tag{38}$$

Если для величин A, B и всех производных по времени существуют одновременные коммутаторы, то все они могут быть получены разложением (38) в ряд Тейлора по z^0. Проделаем это разложение в формализме универсальной алгебры. Чтобы перейти от (38) к универсальной алгебре, необходимо всюду опустить букву x и ввести бинарную операцию $\Lambda(z)$, осуществляющую умножение на $(-\mathrm{i})$, коммутирование и смещение аргумента у $B(x)$ на $(-z)$:

$$AB\Lambda(z) = F(z). \tag{39}$$

Из (38) следует, что

$$\partial\Lambda(z)/\partial z^{\alpha} = -\partial_{\alpha}\Lambda(z), \tag{40}$$

так что разложение Λ в ряд Тейлора по z^0 имеет вид

$$\Lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^0\partial_0)^n}{n!}\tilde{\mu}(z^i). \tag{41}$$

Здесь для каждого конкретного произведения $AB\tilde{\mu}(z^i)$ представляет собой полином по трехмерной δ-функции и ее производным. Это означает, что соответствующий фурье-образ

$$\mu(p_i) = \int d^3z \exp(\mathrm{i}p_iz^i)\,\tilde{\mu}(\mathbf{z})/(2\pi)^3 \tag{42}$$

для каждого произведения $AB\mu(\mathbf{p})$ является полиномом, коэффициенты которого равны $\mu^{i_1\ldots i_k}$

$$\mu(\mathbf{p}) = \sum_k \frac{i^k}{k!} p_{i_1}\ldots p_{i_k}\mu^{i_1\ldots i_k}. \tag{43}$$

Таким образом, операции $(\partial_0)^n\mu^{i_1\ldots i_k}$ при всевозможных неотрицательных n и k, которые также образуют базис пространства L, составляют множество коэффициентов ряда Тейлора для «частичного» фурье-образа $\tilde{\lambda}(z^0,\ p_i)$ операции $\Lambda(z)$:

$$\tilde{\lambda}(z^0,\ p_i) = \int d^3p \exp(\mathrm{i}p_iz^i)\,\Lambda(z)/(2\pi)^3. \tag{44}$$

Заметим, что из (40) для производных по пространственным компонентам следует (23). Это означает, что само пространство L может быть реализовано множеством функций $\Lambda(z)$, допускающих разложение (44). Генератор $\hat{K}^{\alpha\beta}$ в этой реализации имеет обычную форму

$$\hat{K}^{\alpha\beta} = \mathrm{i}\,(z^{\alpha}\partial/\partial z_{\beta} - z^{\beta}\partial/\partial z_{\alpha}). \tag{45}$$

Описываемое генератором (45) представление группы Лоренца для требуемого класса функций разлагается на неприводимые с помощью формулы (131) [ЭЧАЯ, 1972, т. 3, вып. 3, с. 646] (см. также работу [15])

$$\lambda(p) = [(2\pi)^3/\mathrm{i}] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} p_{\alpha_1} \ldots p_{\alpha_k} \int_0^{\infty} ds \rho^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(s) D_s(p_\alpha), \tag{46}$$

где $D_s(p_\alpha)$ — функция Паули

$$D_s(p_\alpha) = [\mathrm{i}/(2\pi)^3]\,\delta(p^{\alpha}p_{\alpha} - s)\,\mathrm{Sgn}\,p_0; \tag{47}$$

$\lambda(p)$ — фурье-образ $\Lambda(z)$

$$\lambda(p) = [1/(2\pi)^4] \int d^4z \exp(\mathrm{i}p_{\alpha}z^{\alpha})\,\Lambda(z). \tag{48}$$

Операции $\rho^{\cdots}(s)$ симметричны по всем индексам и имеют нулевые свертки по любой паре индексов

$$g_{\alpha_1\alpha_2}\rho^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}(s) = \ldots = 0. \tag{49}$$

Для существования разложений (41), (43) имеются моменты $\eta_{(n)}^{\cdots}$ всех степеней по s для $\rho^{\cdots}(s)$

$$\eta_{(n)}^{\alpha_1\ldots\alpha_k} = \mathrm{i} \int_0^{\infty} ds s^n \rho^{\alpha_1\ldots\alpha_k}(s). \tag{50}$$

Операции $\eta_{(n)}^{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ также симметричны по всем индексам и имеют нулевые свертки по любой паре индексов. Тем самым каждая из этих операций преобразуется по $(k+1)^2$-мерному неприводимому представлению группы Лоренца. Вопрос о полноте разложения представления в пространстве L по неприводимым представлениям $\eta_{(n)}^{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ рассмотрен в работе [15].

Умножение бинарных операций $\eta_{(n)}^{\cdots}$ справа на унарную операцию ∂^{α} получается из (40). При $k=0$

$$\partial^{\alpha}\eta_{(n)} = -\eta_{(n+1)}^{\alpha}/4, \tag{51}$$

а при $k>0$

$$\partial^{\alpha}\eta_{(n)}^{\alpha_1\ldots\alpha_k}=(g^{\alpha\alpha_1}\eta_{(n)}^{\alpha_2\ldots\alpha_k}+\ldots+g^{\alpha\alpha_k}\eta_{(n)}^{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}-$$

$$-\frac{1}{k}(g^{\alpha_1\alpha_2}\eta_{(n)}^{\alpha\alpha_3\ldots\alpha_k}+\ldots+g^{\alpha_{k-1}\alpha_k}\eta_{(n)}^{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{k-2}})-\frac{1}{2(k+2)}\eta_{(n+1)}^{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_k}. \quad (52)$$

Из (52), в частности, следует, что

$$\partial_{\alpha_k}\eta_{(n)}^{\alpha_1\ldots\alpha_k}=\frac{(k+1)^2}{k}\eta_{(n)}^{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}; \quad (53)$$

$$\Box\,\eta_{(n)}^{\alpha_1\ldots\alpha_k}=-\eta_{(n+1)}^{\alpha_1\ldots\alpha_k}. \quad (54)$$

6. Для бинарной операции $\Lambda(z)$ разновременного коммутирования имеются два разложения: по операциям $(\partial_0)^n\mu^{i_1\ldots i_k}$ одновременного коммутирования и по релятивистски ковариантным операциям $\eta_{(n)}^{\alpha_1\ldots\alpha_k}$. Очевидно, что для решения задачи о ковариантизации одновременных коммутаторов надо разложить операции $\Box^m\mu^{i_1\ldots i_k}$, $\Box^k\partial^0\mu^{i_1\ldots i_q}$ по $\eta_{(n)}^{\cdots}$. При этом, согласно (54), достаточно найти эти разложения для $\mu^{\cdots}$ и для $\partial^0\mu^{\cdots}$. Чтобы получить последние, необходимо взять моменты нулевого и первого порядка по переменной p_0 от (46), произвести в левой части разложение (43) и затем приравнять коэффициенты при одинаковых степенях p_i. Отсылая за деталями этих простых, но несколько громоздких выкладок к работе [15], приведем практически важные разложения для операций низших 3-тензорных размерностей:

$$\mu=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\eta_{(k)}^{\overbrace{0\ldots0}^{2k+1}}=\eta_{(0)}^{0}-\frac{1}{3!}\eta_{(1)}^{000}+\frac{1}{5!}\eta_{(2)}^{00000}-\ldots; \quad (55)$$

$$\mu^{i}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\eta_{(k)}^{\overbrace{0\ldots0}^{2k+1}i}=\eta_{(0)}^{0i}-\frac{1}{3!}\eta_{(1)}^{000i}+\frac{1}{5!}\eta_{(2)}^{00000i}-\ldots; \quad (56)$$

$$\mu^{ij}=\eta_{(0)}^{0ij}-\frac{1}{3}g^{ij}\eta_{(0)}^{000}-\frac{1}{6}\eta_{(1)}^{000ij}+\frac{1}{30}g^{ij}\eta_{(1)}^{00000}+\ldots; \quad (57)$$

$$\mu^{ijl}=\eta_{(0)}^{0ijl}-\frac{1}{3}(g^{ij}\eta_{(0)}^{000l}+\mathrm{sym})-\frac{1}{6}\eta_{(1)}^{000ijl}+\frac{1}{30}(g^{ij}\eta_{(1)}^{00000l}+\mathrm{sym})+\ldots; \quad (58)$$

$$\mu^{i_1i_2i_3i_4}=\eta_{(0)}^{0i_1i_2i_3i_4}-\frac{1}{3}(g^{i_1i_2}\eta_{(0)}^{000i_3i_4}+\mathrm{sym})+$$

$$+\frac{1}{15}(g^{i_1i_2}g^{i_3i_4}+\mathrm{sym})\eta_{(0)}^{00000}+\ldots; \quad (59)$$

$$\ldots\ldots,$$

$$\partial^0\mu=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\eta_{(k)}^{\overbrace{0\ldots0}^{2k}}=\eta_{(0)}-\frac{1}{2!}\eta_{(1)}^{00}+\frac{1}{4}\eta_{(2)}^{0000}-\ldots; \quad (60)$$

$$\partial^0\mu^i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \eta_{(k)}^{\overbrace{0\ldots0}^{2k}i} = \eta_{(0)}^{i} - \frac{1}{2!}\eta_{(1)}^{00i} + \frac{1}{4!}\eta_{(2)}^{0000i} - \ldots; \quad (61)$$

$$\partial^0\mu^{ij} = \eta_{(0)}^{ij} - g^{ij}\eta_{(0)}^{00} - \frac{1}{2}\eta_{(1)}^{00ij} + \frac{1}{6}g^{ij}\eta_{(1)}^{0000} + \ldots; \quad (62)$$

$$\partial^0\mu^{ijl} = \eta_{(0)}^{ijl} - (g^{ij}\eta_{(0)}^{00l} + \mathrm{sym}) - \frac{1}{2}\eta_{(1)}^{00ijl} + \frac{1}{6}(g^{ij}\eta_{(1)}^{0000l} + \mathrm{sym}) + \ldots; \quad (63)$$

$$\partial^0\mu^{i_1i_2i_3i_4} = \eta_{(0)}^{i_1i_2i_3i_4} - (g^{i_1i_2}\eta_{(0)}^{00i_3i_4} + \mathrm{sym}) + \frac{1}{3}(g^{i_1i_2}g^{i_3i_4} + \mathrm{sym})\,\eta_{(0)}^{0000} + \ldots; \quad (64)$$

. . . . .

Символы «$+\mathrm{sym}$» в круглых скобках означают добавление слагаемых, необходимых для симметризации выражения в скобках по всем трехмерным индексам с учетом того, что сами тензоры $g^{i_1i_2}$, $\eta_{(n)}^{i_1\ldots i_k}$ такой симметрией обладают. Например,

$$(g^{i_3i_4}\eta_{(0)}^{00i_1i_2} + \mathrm{sym}) = g^{i_3i_4}\eta^{00i_1i_2} + g^{i_3i_1}\eta_{(0)}^{00i_2i_4} + g^{i_3i_2}\eta_{(0)}^{00i_1i_4} + g^{i_1i_4}\eta_{(0)}^{00i_2i_3} + g^{i_2i_4}\eta_{(0)}^{00i_1i_3} + g^{i_1i_2}\eta_{(0)}^{00i_3i_4}.$$

Все ряды (55)—(64) бесконечны только формально, потому что в соответствии с принятым допущением о конечномерности представлений для A, B, $F^{\cdot\cdot\cdot}$ в (4) представление для $\mu^{\cdot\cdot\cdot}$ в (16) тоже должно быть конечномерным. Поэтому при подстановке соответствующего разложения $\mu^{\cdot\cdot\cdot}$ по $\mu_{(n)}^{\cdot\cdot\cdot}$ в (16) в правой части всегда должно оставаться конечное число членов.

7. Формулы (55)—(64) дают полное решение задачи о нахождении всех возможных вариантов ковариантизации соотношений (16), т. е. в конечном счете о всех возможных способах дополнения коммутатора (4) до системы одновременных коммутаторов, замкнутой относительно преобразований Лоренца.

Методика ковариантизации очень проста и сводится к следующему: во-первых, от исходного коммутатора (4) надо перейти к системе соотношений (16); во-вторых, в (16) операции $\mu^{i_1\ldots i_k}$ надо заменить на одно или на несколько (в принципе любых) слагаемых из соответствующих разложений (55)—(64); в-третьих, надо составить 4-тензорные равенства с минимальным числом компонент, переходящие в только что полученные при соответствующих значениях индексов. Полученные 4-тензорные соотношения и будут искомыми ковариантизациями, в которых можно обратно перейти к операциям $\mu^{\cdot\cdot\cdot}$, т. е. к одновременным коммутаторам.

Поясним эту методику на примере коммутатора (11), ковариантные свойства которого мы пробовали изучать в параграфе 6 средствами обычного формализма. В универсальной алгебре (11) переходит в систему

$$AB\mu = F; \quad AB\mu^{i_1 \dots i_k} = 0 \quad \text{при} \quad k > 0. \tag{65}$$

Теперь в соответствии с только что описанной процедурой необходимо в первом из равенств (65) заменить μ на один или несколько членов из правой части (55). Рассмотрим два варианта такой замены, чтобы продемонстрировать неоднозначность процедуры ковариантизации. Простейшим является вариант с оставлением в правой части (55) одного первого члена

$$AB\eta^0_{(0)} = F. \tag{66}$$

В (66) левая часть является нулевой компонентой 4-вектора. Значит, и справа величина F должна быть компонентой C^0 некоторого 4-вектора C^α: $F = C^0$. Соответствующее (66) 4-тензорное равенство, очевидно, имеет вид

$$AB\eta^\alpha_{(0)} = C^\alpha. \tag{67}$$

Пространственные компоненты (67) дают новое соотношение, которое, пользуясь (61), можно записать снова через μ-операцию

$$AB\partial^0\mu^i = C^i. \tag{68}$$

Пара соотношений (66), (68) представляет собой систему, замкнутую относительно преобразований Лоренца, если она эквивалентна (67), т. е. если в разложениях (55), (61) равны нулю все члены, кроме первых:

$$AB\eta^{\alpha\beta\gamma}_{(1)} = 0; \quad AB\eta^{\alpha_1 \dots \alpha_s}_{(2)} = 0 \dots \tag{69}$$

Из (69) как раз и следует законность отбрасывания ряда слагаемых, возникавших при последовательных инфинитезимальных лоренцовских преобразованиях в параграфе 6, п. 5. Из (55) сразу видно, что $F(x)$ в (11) не может быть 4-скаляром, поскольку в правой части (55) нет скалярной η-операции.

Вместо (68) можно написать одновременной коммутатор

$$[A(\mathbf{x}, x^0), \partial B(\mathbf{y}, x^0)/\partial x^0] = iC^i(x) \frac{\partial}{\partial y^i} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{70}$$

Однако точнее написать соответствующее соотношение (15) при $k = 1$, так как, согласно (60), в правой части (70) может присутствовать неградиентный член $iD(x)\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, где $D(x)$ является 4-скаляром.

Другим возможным вариантом ковариантизации (65) является замена μ на второе слагаемое в правой части (56). В этом случае, обозначив $\Box B(x) = -J(x)$ и воспользовавшись (54), первое из соотношений (65) можно переписать в форме

$$AJ\eta_{(0)}^{000}/6 = -F. \tag{71}$$

Поэтому F здесь надо считать компонентой симметричного 4-тензора $-6G^{\alpha\beta\gamma}$ с нулевыми свертками

$$F = -G^{000}/6. \tag{72}$$

Соответствующим 4-тензорным соотношением теперь будет

$$AJ\eta_{(0)}^{\alpha\beta\gamma} = G^{\alpha\beta\gamma}. \tag{73}$$

В этом случае получается иная система одновременных коммутаторов, также замкнутая относительно преобразований Лоренца. Один из коммутаторов этой системы получается при $\alpha = 0$, $\beta = i$, $\gamma = j$ и, согласно (57), определяется соотношением $AJ\mu^{ji} = G^{0ij}$, т. е. имеет вид

$$[A(\mathbf{x}, x^0),\ J(\mathbf{y}, x^0)] = \frac{\mathrm{i}}{2} G^{0ij}(x) \frac{\partial}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Из этого примера видно, что в формализме универсальной алгебры составление релятивистски инвариантных систем одновременных коммутаторов сводится к простым и привычным выкладкам 4-тензорной алгебры. Ниже в параграфе 10 мы увидим, что для одновременных коммутаторов, содержащих компоненты сохраняющихся токов, существуют дополнительные нетривиальные связи между μ-операциями и η-операциями.

8. Унарные операции $S^{\alpha\beta}$, ∂^γ в этом разделе введены извне, а не выражены через локальные величины и μ-операции или η-операции. Это означает, что действие группы Пуанкаре на универсальную алгебру реализовано внешним автоморфизмом.

В лагранжевой теории поля этот автоморфизм — внутренний. Существует мнение, что ограничение внутренними автоморфизмами не является обязательным для условий релятивистской инвариантности квантовой теории. В параграфе 9 будут приведены аргументы против этого мнения, а в параграфе 11 укажем, каким образом можно осуществить естественный переход к внутреннему автоморфизму в только что развитой ковариантной форме универсальной алгебры.

9. МИКРОВАРИАНТНОСТЬ И МИКРОПРИЧИННОСТЬ

1. За последнюю декаду заметно возрос интерес к свойствам тензора энергии-импульса $T^{\alpha\beta}(x)$ в квантовой теории поля. Здесь будет показано, что эта тенденция ни в коей мере не случайна, а порождена постепенным пониманием фундаментальности

этой физической величины для любой (а не только для лагранжевой) релятивистской квантовой теории.

С другой стороны, фундаментальность тензора энергии-импульса и тем самым необходимость ее введения в теорию до настоящего времени далеки от того, чтобы считаться общепризнанными. Широко распространено мнение о том, что этот тензор с неизбежностью существует лишь в лагранжевых теориях, и, следовательно, утверждение о необходимости его существования с точки зрения аксиоматической теории столь же не обосновано, как и другие следствия из полевой теории возмущения. Ситуация осложняется тем, что к настоящему времени имеется несколько различных определений $T^{\alpha\beta}(x)$, причем в большинстве работ четкие определения не приводятся. Нередко без особых оговорок используются различные определения в разных частях одной и той же работы. Поэтому начнем с перечисления и обсуждения различных определений.

2. Основными свойствами тензора энергии-импульса являются его сохранение

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}}=0 \tag{74}$$

и связь с операторами 4-импульса и 4-момента:

$$P^{\alpha}=\int T^{\alpha 0}(x)\,d^{3}(x); \tag{75}$$

$$M^{\alpha\beta}=\int \{x^{\alpha}T^{\beta 0}(x)-x^{\beta}T^{\alpha 0}(x)\}\,d^{3}(x). \tag{76}$$

В ряде работ соотношения (74) — (76) молчаливо принимаются за определение $T^{\alpha\beta}(x)$. При таком подходе существование $T^{\alpha\beta}$ выглядит совершенно необязательным.

В классической лагранжевой теории поля всегда существует канонический тензор $T^{\text{кан}}_{\alpha\beta}$ энергии-импульса, который формально остается и при переходе к соответствующей квантовой теории (см., например, монографии [18, 19]). Канонический тензор может оказаться несимметричным. Но он легко симметризуется с помощью добавки, не нарушающей (74), (75) и приводящей к соблюдению (76). Выбор этой добавки неоднозначен. Канонический тензор составлен из математически некорректных произведений полей в одной точке и, как правило, имеет очень плохие свойства даже для свободных полей (см., например, [20, 21]).

Кроме канонического в классической теории поля существует еще гравитационный лагранжев тензор энергии-импульса $T^{\text{гр. л}}_{\alpha\beta}(x)$, который получается следующим образом [22]: выражение для действия обобщается на случай наличия внешнего гравитационного поля, описываемого метрическим тензором $g^{\alpha\beta}(x)$.

Величина $T^{\text{гр. л}}_{\alpha\beta}(x)$ с точностью до множителя определяется как вариационная производная от действия $W[g]$ по метрическому тензору

$$T^{\text{гр. л}}_{\alpha\beta}(x) = \left(1/\sqrt{-g}\right)\left(\delta W[g]/\delta g^{\alpha\beta}(x)\right). \tag{77}$$

В конечном результате можно перейти обратно к евклидовой метрике. Тензор $T^{\text{гр. л}}_{\alpha\beta}(x)$ симметричен, однозначен и совпадает с каноническим при соответствующем выборе симметризующей добавки. Поэтому $T^{\text{гр. л}}_{\alpha\beta}(x)$ в квантовой теории имеет те же «плохие» математические свойства, что и $T^{\text{кан}}_{\alpha\beta}(x)$. Тем не менее тензор $T^{\text{гр. л}}_{\alpha\beta}(x)$ часто используется для получения различных, особенно коммутационных, свойств тензора энергии-импульса, начиная с пионерских работ Швингера [23].

Очевидно, что при отказе от лагранжевого подхода канонический и гравитационный тензоры энергии-импульса перестают быть обязательными для теории (подобно каноническим импульсам).

3. В 1963 г. автором было дано новое однозначное определение тензора энергии-импульса уже в рамках аксиоматической квантовой теории поля без использования лагранжевого формализма [24]. Это определение является естественным обобщением принадлежащего Н. Н. Боголюбову определения токов через вариационные производные S-матрицы по внешним полям [18, 25].

Примем физическое допущение о том, что S-матричное описание (на массовой оболочке) существует и в присутствии слабого внешнего гравитационного поля, достаточно быстро исчезающего на бесконечности во всех направлениях. Тогда S-матрица становится функционалом от метрического тензора $g^{\alpha\beta}(x)$:

$$S = S[g^{\alpha\beta}(x)]. \tag{78}$$

Бесконечно малому изменению метрики

$$g^{\alpha\beta}(x) = g^{\alpha\beta} + \delta g^{\alpha\beta}(x) \tag{79}$$

соответствует преобразование матрицы рассеяния

$$S = \left(1 - \int d^4x \delta g^{\alpha\beta}(x)\, \delta/\delta g^{\alpha\beta}(x)\right) S', \tag{80}$$

которое можно переписать в форме

$$S = S' \left(1 - \mathrm{i}/2 \int d^4(x) \sqrt{-g}\, \delta g^{\alpha\beta}(x)\, T_{\alpha\beta}(x)\right), \tag{81}$$

где

$$T_{\alpha\beta}(x) = \frac{2}{\mathrm{i}} S^{+} \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}}. \tag{82}$$

Вместо тензора $T_{\alpha\beta}(x)$ часто удобнее рассматривать соответствующую тензорную плотность $\tau_{\alpha\beta}(x)$

$$\tau_{\alpha\beta}(x)=\sqrt{-g}\,T_{\alpha\beta}(x). \tag{83}$$

В пределе плоского пространства, разумеется, $\sqrt{-g}=1$, так что $\tau_{\alpha\beta}=T_{\alpha\beta}$.

Как показано в работе [24], $T_{\alpha\beta}(x)$ обладает всеми свойствами тензора энергии-импульса. Во-первых, для $T_{\alpha\beta}(x)$ выполняется ковариантный закон сохранения

$$T^{\beta}_{\alpha;\,\beta}\equiv\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left(g^{\beta\gamma}T_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g^{\gamma\beta}}{\partial x^{\alpha}}T_{\beta\gamma}\sqrt{-g}=0, \tag{84}$$

переходящий в (74) для плоского 4-пространства. Во-вторых, в плоском пространстве соблюдаются равенства (75) и (76).

Таким образом, из существования квантовой теории в присутствии слабого внешнего гравитационного поля прямо следует необходимость существования тензора энергии-импульса, определяемого согласно (82). Ниже будем пользоваться только этим определением.

4. Введенный в предыдущем пункте тензор $T_{\alpha\beta}(x)$ также является гравитационным, но уже не лагранжевым, а аксиоматическим. Согласно принципу эквивалентности, тензор $T_{\alpha\beta}(x)$ определяет как гравитационные, так и инертные свойства материи. Гравитационные свойства здесь изучать не будем, считая их слабыми. Напротив, инертные свойства частиц существенно проявляются во всех процессах с участием элементарных частиц. Поэтому будем рассматривать функциональные производные по метрическому тензору только в пределе плоской метрики.

Грубо говоря, переходя к метрике, чуть-чуть отличной от плоской и различной в разных 4-точках, мы как бы помечаем все точки пространства без существенного нарушения изучаемых процессов.

Подробное обсуждение смысла такого рассмотрения проведено в работе [24] и резюмируется следующими выводами. Сформулированные в параграфе 2 [1] условия инвариантности физической теории относительно группы Пуанкаре отражают лишь свойство псевдоевклидовости пространства-времени на бесконечности, вдали от всех частиц *. Поэтому пуанкаре-инвариантность в работе [24] названа условием макроковариантности.

В противоположность этому выполнение условий существования тензора $T_{\alpha\beta}(x)$ из (82), подчиняющегося закону сохранения

* Более точно из выполнения этих условий следует лишь то, что вдали от частиц пространство является одним из однородных пространств, на которых эффективно и транзитивно действует группа Пуанкаре. Все такие пространства можно получить из 10-мерного пространства параметров группы $\mathcal{P}$ как фактор пространства по различным неинвариантным подгруппам.

(84), в плоском пределе обеспечивают псевдоевклидовость 4-пространства во всех точках и поэтому названы в работе [24] условиями микроковариантности пространства-времени. Очевидно, что условия микроковариантности являются более сильными, чем условия макроварианности, и включают последние как частный случай.

Сформулируем условия микроковариантности, не выходя за рамки плоской метрики. Первое условие микроковариантности получается непосредственным переходом к плоской метрике в (82) и (84): если пространство-время всюду псевдоевклидово, то существует локальный оператор $T_{\alpha\beta}(x)$, удовлетворяющий (74), (76).

Дальнейшие условия микроковариантности можно получить, дифференцируя (84) один или несколько раз по функциональной переменной $g^{\alpha\beta}(x)$ с последующим переходом к плоской метрике. Так, первое дифференцирование приводит к соотношению

$$2\frac{\partial}{\partial y^{\lambda}}\left\{g^{\lambda\varepsilon}(x)\frac{\delta\tau_{\alpha\beta}(x)}{\delta g^{\gamma\varepsilon}(y)}\right\}=\left\{\tau_{\alpha\gamma}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}+\tau_{\gamma\beta}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^{\gamma}}\right\}\delta^{4}(x-y), \tag{85}$$

которое в плоском 4-пространстве принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial y_{\varepsilon}}\left\{\frac{\delta\tau_{\alpha\beta}(x)}{\delta g^{\gamma\varepsilon}(y)}\right\}=\frac{1}{2}\left\{T_{\alpha\gamma}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}+T_{\beta\gamma}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial T_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^{\gamma}}\right\}\delta^{4}(x-y) \tag{86}$$

и называется вторым условием микроковариантности. Приведенный вывод условия (86) предложен в работе [26]. Впервые это условие было получено другим способом в работе [24].

Вариационную производную $\delta\tau_{\alpha\beta}(x)/\delta g^{\gamma\varepsilon}(y)$ естественно назвать локальной гравитационной поляризуемостью, поскольку эта величина описывает изменение распределения материи и натяжений в точке под действием внешнего гравитационного поля.

5. С помощью аксиоматического гравитационного тензора энергии-импульса естественно формулируется условие микропричинности, которое состоит в том, что любое возмущение, произведенное в некоторой 4-точке, влияет на распределение материи только в верхнем световом конусе этой точки. За такое возмущение естественно принять изменение метрики, поскольку оно влияет на движение всех видов материи. Поэтому наиболее общее условие микропричинности имеет вид

$$\frac{\delta\tau_{\alpha\beta}(x)}{\delta g^{\lambda\sigma}(y)}=\frac{\delta T_{\alpha\beta}(x)}{\delta g^{\lambda\sigma}(y)}=0 \tag{87}$$

в верхнем световом конусе точки y, т. е. при

$$y^{0}>x^{0},\quad (y-x)^{2}>0. \tag{88}$$

К условию (87) уместно сделать три замечания.

Во-первых, это условие имеет форму условия причинности Н. Н. Боголюбова [18, 25], но написано для гравитационного тока $T_{\alpha\beta}(x)$, что придает (87) универсальную применимость, поскольку инертными свойствами обладают все виды материи.

Во-вторых, в условии (87) существенно использование in-базиса для векторов состояния, поскольку в этом базисе развитие событий считается происходящим вперед во времени *.

В out-базисе определение (82) заменяется на

$$T^{\text{out}}_{\alpha\beta}(x) = ST_{\alpha\beta}(x)S^{+} = \frac{2}{\mathrm{i}}\cdot\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}(x)}S^{+}\frac{1}{\sqrt{-g}}, \tag{89}$$

а условие микропричинности принимает форму

$$\delta\tau^{\text{out}}_{\alpha\beta}(x)/\delta g^{\gamma\varepsilon}(y) = \delta T^{\text{out}}_{\alpha\beta}(x)/\delta g^{\gamma\varepsilon}(y) = 0 \tag{90}$$

в нижнем конусе точки y, т. е. при

$$y^0 < x^0, \quad (y-x)^2 = 0. \tag{91}$$

Заметим, что в лагранжевом гравитационном подходе базис не фиксируется и поэтому условие микропричинности сформулировать не удается. Из (77) следует (ср. формулу перед (12) в [21]):

$$\delta\tau^{\text{гр.л}}_{\alpha\beta}(x)/\delta g^{\gamma\varepsilon}(y) = \delta\tau^{\text{гр.л}}_{\gamma\varepsilon}(y)/\delta g^{\alpha\beta}(x), \tag{92}$$

что явно несовместимо с условием микропричинности типа (87).

В-третьих, поскольку, согласно (82) и (83),

$$2\{\delta\tau_{\alpha\beta}(x)/\delta g^{\lambda\sigma}(y) - \delta\tau_{\lambda\sigma}(y)/\delta g^{\alpha\beta}(x)\} = \mathrm{i}\,[\tau_{\alpha\beta}(x),\ \tau_{\gamma\varepsilon}(y)], \tag{93}$$

то из условия микропричинности следует более слабое условие локальной коммутативности

$$[T_{\alpha\beta}(x),\ T_{\gamma\varepsilon}(y)] = 0 \quad \text{при} \quad (x-y)^2 > 0. \tag{94}$$

При этом поляризуемости в левой части (92) содержат квазилокальные, т. е. пропорциональные четырехмерной δ-функции и ее производным, члены, которые в принципе могут сохраниться и в коммутаторе, что противоречит допущению о существовании одновременных коммутаторов. Условие компенсации квазилокальных членов в (93) налагает определенные ограничения на структуру поляризуемостей **. Обобщение при отсутствии этой компенсации обсуждается в параграфе 11, п. 3.

---

* Поясним это с виду неочевидное обстоятельство на примере задачи Коши в классической теории поля. Если начальные условия заданы в момент $x^0 = 0$, то решение будет описываться запаздывающими потенциалами при $x^0 > 0$ и опережающими при $x^0 < 0$. Поэтому поляризуемость (87) будет нулем при $x^0 > 0$, $y^0 > 0$ в верхнем конусе точки y, а при $x^0 < 0$, $y^0 < 0$ — в нижнем конусе этой точки. Если же $x^0 y^0 < 0$, то ответ зависит от того, влияет ли пробное возмущение на начальные условия.

** Этим замечанием обязан Ю. С. Бурханову.

Из определения (82) интуитивно ясно, что $T_{\alpha\beta}(x)$ — локальный тензор второго ранга. Покажем, что для доказательства этого утверждения требуется второе условие микроковариантности и условие микропричинности. Проинтегрируем (86) по d^4y по выпуклому 4-объему, содержащему точку x. Использовав (90) и (93), получим

$$\partial T_{\alpha\beta}(x)/\partial x^{\lambda} = \mathrm{i} \int [T_{\alpha\beta}(x),\ T_{\lambda\varepsilon}(y)]\, d\sigma^{\varepsilon};$$

где $d\sigma^{\varepsilon}$ — элемент 3-гиперповерхности, причем интеграл берется лишь по части гиперповерхности, лежащей внутри нижнего светового конуса точки x. Этот интеграл, разумеется, можно распространить на бесконечную пространственную гиперповерхность, что приводит к соотношению (9) для $T_{\alpha\beta}(x)$

$$[P^{\gamma},\ T^{\alpha\beta}(x)] = \frac{1}{\mathrm{i}} \cdot \frac{\partial T^{\alpha\beta}(x)}{\partial x_{\gamma}}. \tag{95}$$

Сходным образом можно получить для $T_{\alpha\beta}(x)$ перестановочные соотношения типа (8)

$$\begin{aligned}[M^{\alpha\beta} T^{\gamma\varepsilon}(x)] = \mathrm{i}\,(&-x^{\alpha}\partial T^{\gamma\varepsilon}/\partial x_{\beta} + x^{\beta}\partial T^{\gamma\varepsilon}/\partial x_{\alpha} - \\ &- g^{\alpha\gamma}T^{\beta\varepsilon} + g^{\beta\gamma}T^{\alpha\varepsilon} - g^{\alpha\varepsilon}T^{\gamma\beta} + g^{\beta\varepsilon}T^{\gamma\alpha}).\end{aligned} \tag{96}$$

6. Структура оператора $T_{\alpha\beta}(x)$ такова, что его среднее значение по вакууму может иметь ненулевое значение

$$\langle 0 \,|\, T_{\alpha\beta}(x) \,|\, 0 \rangle = a g_{\alpha\beta}, \tag{97}$$

где $a \geqslant 0$. Физически это означает, что вакуумные петли различных типов с определенной средней плотностью распределены в пространстве и приводят к наличию инвариантной энергии a в каждой единице 3-объема. В диаграммной технике вакуумная энергия создается диаграммами типа «головастиков» (tadpole), имеющих только одну и притом гравитационную внешнюю линию. Такие диаграммы не запрещены никакими законами сохранения, так что для отбрасывания постоянной a нет оснований.

Наличие этой постоянной приводит к тому, что полная энергия оказывается бесконечной для всех состояний. Поэтому при $a > 0$ тензор $T_{\alpha\beta}(x)$ разделяют на две части [21]:

$$T_{\alpha\beta}(x) = \overline{T}_{\alpha\beta}(x) + a g_{\alpha\beta}. \tag{98}$$

Очевидно, что вакуумное среднее для $\overline{T}_{\alpha\beta}(x)$ уже равно нулю. Замена $T_{\alpha\beta}$ на $\overline{T}_{\alpha\beta}$ не меняет левых частей любых коммутаторов, содержащих тензор энергии-импульса, но может приводить к появлению c-числовых членов в правых частях. Наличие (97) и (98) требует осторожности при использовании оператора $T_{\alpha\beta}(x)$, так как аксиоматическое определение (82) относится к $T_{\alpha\beta}(x)$, для которого расходятся соответствующие интегралы (75) и (76), определяющие генераторы P^γ и $M_{\alpha\beta}$. Поэтому при $a \neq 0$ в (75) и (76) следует заменить $T_{\alpha\beta}$ на $\overline{T}_{\alpha\beta}$. При такой замене потеряет силу упомянутый в п. 3 вывод [24] условий (91) из работы [1] макроковариантности из первого условия микроковариантности, но сохранятся более фундаментальные соотношения (95) и (96).

Как отмечено в работе [24], на тензор энергии-импульса естественно наложить условие положительности плотности энергии

$$\langle \phi \mid T_{00} \mid \phi \rangle \geqslant 0 \tag{99}$$

во всех точках и для всех состояний, в которых левая часть этого условия определена. Соотношение (99) можно назвать условием микроспектральности. При $a > 0$ условие микроспектральности приобретает вид

$$\langle \phi \mid \overline{T}_{00}(x) \mid \phi \rangle \geqslant -a, \tag{100}$$

так что плотность энергии «над вакуумом» в ограниченных пределах может оказываться и отрицательной.

7. Рассмотрим формулировки условий микроковариантности и микропричинности для локальных величин, т. е. для полей, токов и их производных различных порядков. Условия микроковариантности произвольной локальной величины $A(x)$ выражаются в инфинитезимальной форме условиями (8) и (9), которым в универсальной алгебре соответствует совокупность соотношений (25), (27)—(29). Отметим, что условия микроковариантности в универсальной алгебре являются более общими, поскольку для их выполнения не требуется существование операторов $M^{\alpha\beta}$, P^γ.

По своему физическому смыслу локальные величины описывают состояние физической системы в определенных точках пространства. Поэтому если для глобальных величин типа S-матрицы основное значение приобретает микроковариантность, то можно ожидать, что для локальной величины существенна микроковариантность, т. е. геометрические свойства пространства в окрестности той точки, в которой эта величина исследуется.

Получим условие микроковариантности для скалярного поля $A(x)$, следуя работе [27]. При наличии слабого гравитационного поля $A(x)$ будет функционалом $A[x, g^{\alpha\beta}(y)]$ от метрического тензора, который будем считать переходящим в псевдоевклидовый на бесконечности. Бесконечно малому координатному преобразованию

$$x^\alpha = x'^\alpha + \xi^\alpha(x') \tag{101}$$

соответствует преобразование метрического тензора (см., например, [22])

$$g^{\alpha\beta}(x) = g'^{\alpha\beta}(x) + g'^{\alpha\gamma}\partial\xi^\beta/\partial x^\gamma + g'^{\gamma\beta}\partial\xi^\alpha/\partial x^\gamma - \\ - (\partial g'^{\alpha\beta}/\partial x^\gamma)\,\xi^\gamma \equiv g'^{\alpha\beta} + \delta g^{\alpha\beta}. \tag{102}$$

Оператор $A(x)$ под действием (101) преобразуется как по координатам x^α, так и по функциональной переменной $g^{\alpha\beta}(y)$. Результирующее преобразование должно быть единичным, поскольку значение 4-скалярной величины в определенной точке не зависит от выбора системы координат

$$A[x, g^{\alpha\beta}(y)] = [1 + \xi^\alpha(x)\,\partial/\partial x^\alpha]\left[1 - \int d^4y\,\delta g^{\alpha\beta}(y)\,\delta/\delta g^{\alpha\beta}(y)\right] A[x, g]. \tag{103}$$

Условие микроковариантности $A(x)$ следует из произвольности $\xi^\alpha(x)$ и имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\cdot\frac{\delta A(x)}{\delta g^{\alpha\beta}(y)} = -\frac{1}{2}\delta^4(x-y)\frac{\partial A(x)}{\partial x^\alpha}. \tag{104}$$

При этом, согласно условию микропричинности Боголюбова [18, 25], в in-базисе

$$\delta A(x)/\delta g^{\alpha\beta}(y) = 0, \tag{105}$$

если x лежит вне верхнего светового конуса y (88), а

$$\delta/\delta g^{\alpha\beta}(y)\,\{SA(x)\,S^+\} = 0, \tag{106}$$

если x лежит вне нижнего светового конуса y (91).

В пределе плоского пространства из (104) следуют условия макроковариантности, но опять же с привлечением условий микропричинности (105), (106). Так, условие (9) трансляционной инвариантности

$$[P^\alpha, A(x)] = \frac{1}{i}\cdot\frac{\partial A(x)}{\partial x_\alpha} \tag{107}$$

получается интегрированием (104) по 4-объему, заключенному между гиперплоскостями $x^0 + \varepsilon = 0$ и $x^0 - \varepsilon = 0$ с использованием (105), (106), (82), (85).

Не представляет труда выписать условия микроковариантности для векторных и тензорных локальных операторов. Но при переходе к спинорным локальным величинам мы сталкиваемся с затруднением, связанным с тем, что спиноры имеют не аффинную, а метрическую природу, так что преобразование спинора к криволинейным координатам нельзя определить независимо от метрики.

Условие микроковариантности (104) — существенно более сильное, чем условия макроковариантности (8) и (9). Так, in- и out-поля макроковариантны, но не микроковариантны, т. е. не являются настоящими локальными величинами.

Различие между микро- и макроковариантностью локальных величин можно пояснить на следующем простом примере. Образуем из микроковариантной величины $A(x)$ новую $B(x)$

$$B(x)=\int d^4yF(x-y)\,A(y),$$

где F — некоторая инвариантная функция переменной $x-y$. Легко убедиться, что величина $B(x)$ будет удовлетворять (8) и выражениям (9), но не (104).

10. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА И СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ТОКИ В УНИВЕРСАЛЬНОЙ АЛГЕБРЕ

1. Исследование структуры одновременных коммутаторов компонент $T^{\alpha\beta}(x)$ друг с другом и с компонентами иных локальных величин началось десять лет назад. В 1962 г. Дирак [28] и Швингер [23] указали, что если операторы $M^{\alpha\beta}$, P^{γ} составлены из $T^{\alpha\beta}(x)$, согласно (75) и (76), то для соблюдения условий (95) и (96) ковариантности $T^{\alpha\beta}(x)$ на возможный вид одновременных коммутаторов $[T^{00}, T^{00}]$, $[T^{00}, T^{0i}]$ и некоторые другие накладываются довольно жесткие ограничения. Ими были выписаны одновременные коммутаторы с минимальным числом градиентных членов, удовлетворяющие этим ограничениям. Полная система одновременных коммутаторов между компонентами $T^{\alpha\beta}(x)$, следующая из (75) и (76), была выписана Бульваром и Дезером [21]. В этой работе обсуждался вопрос о возможных добавках к коммутаторам с минимальным числом градиентных членов. Из условия спектральности было получено, что в одновременных коммутаторах $[T^{00}, T^{0i}]$ и $[T^{0i}, T^{jl}]$ должны существовать ненулевые градиентные члены с третьей производной от трехмерной δ-функции. В остальном вид добавок остается произвольным. Из наличия этого произвола, а также из того, что полученная в работе [21] система не содержит коммутатора $[T^{ij}, T^{lk}]$, авторы этой работы сделали вывод о том, что полученная ими система (уравнения (7) работы [21]) «не образует алгебры». Ниже увидим, что этот вывод неправилен.

В работе [29] аналогичным образом были получены одновременные коммутаторы $[T^{0\alpha}, J^0]$, $[T^{00}, J^i]$, $[T^{00}, \partial_\alpha J^\alpha]$ между компонентами $T^{\alpha\beta}$ и тока J^{γ}.

Одновременные коммутаторы с участием $T^{\alpha\beta}$ строились и исследовались в некоторых других работах [8, 20, 30—42]. В них, как правило, привлекались дополнительные модельные или опирающиеся на лагранжеву теорию соображения. Для наших целей важно лишь отметить, что ни в одной из этих работ даже не ставилась задача о конструировании систем одновременных коммутаторов, содержащих $T^{\alpha\beta}$ и замкнутых относительно преобразований группы Пуанкаре. Эта задача была поставлена и решена в работе [15] с использованием развитого в параграфах 7 и 8 формализма универсальной алгебры.

2. Сформулируем на языке универсальной алгебры первое условие микроковариантности для одновременных коммутаторов.

Тензору $T^{\alpha\beta}(x)$ в универсальной алгебре * соответствует элемент $T^{\alpha\beta}$, а закон сохранения (74) принимает вид

$$T^{\alpha\beta}\partial_\beta = 0. \tag{108}$$

Подставив (75) в (9) и проделав переход от (15) к (16), получим

$$AT^{\alpha 0}\mu = A\partial^\alpha. \tag{109}$$

Из произвольности A следует равенство для унарных операций [14]

$$T^{\alpha 0}\mu = \partial^\alpha. \tag{110}$$

Аналогичным образом получаются выражения для компонент унарной операции $S^{\alpha\beta}$ через $T^{\gamma\varepsilon}$ [14]:

$$S^{i0} = -\mathrm{i}T^{00}\mu^i; \tag{111}$$

$$S^{ij} = \mathrm{i}(T^{i0}\mu^j - T^{j0}\mu^i). \tag{112}$$

Соотношения (108), (110), (112) совместно с вытекающим из второго условия микровариантности (96), третьим из соотношений (26)

$$T^{\gamma\varepsilon}S^{\alpha\beta} = \mathrm{i}\,(T^{\beta\varepsilon}g^{\alpha\gamma} - T^{\alpha\varepsilon}g^{\beta\gamma} + T^{\gamma\beta}g^{\alpha\varepsilon} - T^{\gamma\alpha}g^{\beta\varepsilon}) \tag{113}$$

образуют полную систему условий, налагаемую на тензор энергии-импульса одними только требованиями релятивистской инвариантности. Например, система коммутаторов (7) из работы [21] сводится к (113) и соотношению

$$T^{\beta\gamma}T^{\alpha 0}\mu = T^{\beta\gamma}\partial^\alpha,$$

получаемому умножением (110) на $T^{\beta\gamma}$ слева.

Коммутаторы (27) — (29) для унарных операций $S^{\alpha\beta}$, ∂^γ следуют из только что перечисленных соотношений, например

$$[S^{i0}, \partial^0] = -\mathrm{i}\,(T^{00}\mu^i T^{00}\mu - T^{00}\mu T^{00}\mu^i) = -\mathrm{i}T^{00}T^{00}\mu\mu^i = -\mathrm{i}T^{00}\partial^0\mu^i =$$
$$= \mathrm{i}T^{0j}\partial_j\mu^i = \mathrm{i}T^{0i}\mu = \mathrm{i}\partial^i. \tag{114}$$

При выводе (114) использованы тождество Якоби (21) и свойство (23) при $k = 1$.

* В этом параграфе будем пользоваться тензором $\overline{T}^{\alpha\beta}$ из (98), обозначая его для краткости просто $T^{\alpha\beta}$. Таким образом, или $\alpha = 0$, или в правых частях коммутаторов могут быть c-числовые члены.

Мы видим, что при введении $T^{\alpha\beta}$ в универсальной алгебре унарные операции $S^{\alpha\beta}$, ∂^{ν} уже не вводятся как независимые, а конструируются из элемента $T^{\alpha\beta}$ и неассоциативных умножений μ, μ^{i}. В такой постановке условия релятивистской инвариантности можно заменить совокупностью соотношений (108), (113) и определений (110), (111), (112).

3. В равенстве (110) правая часть является 4-вектором, в то время как левая при подстановке в нее разложения (55) для μ с виду оказывается величиной, преобразующейся по сложному представлению, размерность которого зависит от выбора инвариантного обрывания. Покажем, что при наличии закона сохранения (108) разложение унарной операции $T^{\alpha 0}\mu$ по лоренц-ковариантным унарным операциям $T^{\alpha\beta}\eta_{(k)}^{\cdot\cdot}$ допускает замкнутое суммирование правых частей. Это суммирование не связано со специфическими свойствами тензора энергии-импульса и возможно для любых сохраняющихся локальных величин, например для сохраняющегося тока $J_{\alpha}(x)$

$$J_{\alpha}\partial^{\alpha}=0. \tag{115}$$

В этом случае унарная операция

$$Q=J_{0}\mu \tag{116}$$

является инвариантом группы Пуанкаре, поскольку согласно (23), (30)

$$Q\partial^{\alpha}-\partial^{\alpha}Q=J_{0}\partial^{\alpha}\mu=J_{0}\partial^{0}\mu g^{\alpha 0}=-J_{i}\partial^{i}\mu g^{\alpha 0}=0,$$

а согласно (23), (25), (32) и (33) $QS^{\alpha\beta}-S^{\alpha\beta}Q=0$. Поэтому следует ожидать, что правую часть (116) можно записать в форме 4-скаляра. Для получения этой формы рассмотрим (75) при $k=2n+2$, $\alpha_1=\ldots=\alpha_{2n+2}=0$

$$\partial^{\alpha}\eta_{(n)}^{\overbrace{0\ldots 0}^{2n+2}}=(2n+2)\,g^{\alpha 0}\eta_{(n)}^{\overbrace{0\ldots 0}^{2n+1}}-\frac{2n+1}{2}\,\eta_{(n)}^{\alpha\overbrace{0\ldots 0}^{2n}}-\frac{1}{4}\,\eta_{(n+1)}^{\alpha\overbrace{0\ldots 0}^{2n+2}}. \tag{117}$$

Умножив (117) слева на $\frac{(-1)^{n}}{(2n+2)!}J_{\alpha}$ и просуммировав по n от нуля до бесконечности, получим, что левая часть равна нулю в силу (116), а суммирование правой части с учетом (55) приводит к искомому явно инвариантному результату

$$Q=J^{0}\mu=\frac{1}{4}J_{\alpha}\eta_{(0)}^{\alpha}, \tag{118}$$

который, очевидно, справедлив при любом инвариантном обрывании ряда (55).

Аналогичным образом соотношение (110) суммируется в явно ковариантную формулу

$$\partial^{\alpha}=\frac{1}{4}T_{\beta}^{\alpha}\eta_{(0)}^{\beta}, \tag{119}$$

а соотношения (111) и (112) — в единую ковариантную формулу

$$S^{\alpha\beta}=\frac{1}{6}\left(T^{\alpha}_{\gamma}\eta^{\gamma\beta}_{(0)}-T^{\beta}_{\gamma}\eta^{\gamma\alpha}_{(0)}\right). \qquad (120)$$

4. Из (119) и (120) следует, что система известных коммутаторов $T^{\alpha\beta}$ [21], получающихся подстановкой (111) и (112) в третье из соотношений (26):

$$T^{\gamma\varepsilon}\left(T^{\alpha 0}\mu^{i}\delta^{\beta}_{i}-T^{\beta 0}\mu^{i}\delta^{\alpha}_{i}\right)=\mathrm{i}\left(T^{\beta\varepsilon}g^{\alpha\gamma}-T^{\alpha\varepsilon}g^{\beta\gamma}+T^{\gamma\beta}g^{\alpha\varepsilon}-T^{\gamma\alpha}g^{\beta\varepsilon}\right), \qquad (121)$$

является замкнутой относительно преобразований Лоренца. В том же смысле замкнуты системы коммутаторов:

$$T^{\alpha\beta}T^{\gamma 0}\mu=T^{\alpha\beta}\partial^{\gamma}; \qquad (122)$$

$$T^{\alpha\beta}T^{0}_{\beta}\mu=0, \qquad (123)$$

получающиеся умножением (110) слева на $T^{\alpha\beta}$. Подчеркнем, что соотношения (121)—(123) отображают равенства типа (15), т. е. в отличие от работ [21, 23] и др. относятся не к одновременным коммутаторам в целом, а лишь к отдельным слагаемым в правых частях. В отношении других перестановочных свойств тензора $T^{\alpha\beta}(x)$, в частности о виде коммутаторов $[T^{ij}, T^{kl}]$ и о градиентных членах с третьими и более высокими производными от δ-функции, из одних только требований релятивистской инвариантности получаются лишь ограничивающие условия довольно общего вида.

5. На примере совокупности соотношений (121)—(123) мы видим, что суммирования (118)—(120) существенно расширяют возможности ковариантизации систем одновременных коммутаторов при наличии в них компонент сохраняющихся величин. Продемонстрируем эти возможности на примере получения простейшей ковариантизации алгебры токов (1). В универсальной алгебре автоматически переписываются более сильные, чем (1), коммутаторы, в которых проинтегрирована только одна компонента тока

$$\left[J^{0}_{a}(\mathbf{x}, x^{0}),\ \int d^{3}yJ^{0}_{b}(\mathbf{y}, x^{0})\right]=\mathrm{i}G^{c}_{ab}J^{0}_{c}(\mathbf{x}, x^{0}).$$

Такой коммутатор является частным случаем (15) и тем самым допускает переход к (16)

$$J^{0}_{a}J^{0}_{b}\mu=G^{c}_{ab}J^{0}_{c}. \qquad (124)$$

Произведем теперь ковариантизацию (124), не прибегая к модельным соображениям, в частности не апеллируя к токам, как билинейным комбинациям полей. Способ действия зависит от того, выполняются ли для токов законы сохранения.

Если сохранения нет, то минимальная по числу компонент и размерности 4-тензоров релятивизация (124) получается, согласно (55), заменой $\mu \to \eta^0_{(0)}$

$$J^0_a J^0_b \eta^0_{(0)} = G^c_{ab} J^0_c g^{00}$$

и приводит к ковариантным соотношениям

$$(J^\alpha_a J^\beta_b \eta^\gamma_{(0)} + \mathrm{sym}) = 3G^c_{ab}\,(J^a_c g^{\beta\gamma} + \mathrm{sym}), \tag{125}$$

где в каждой скобке стоит выражение, симметричное по α, β, γ. При фиксированных a, b равенство (125) имеет двадцать независимых компонент, из которых все, кроме одной, представляют собой дополнительные к (124) утверждения о виде одновременных коммутаторов компонент токов. Все эти новые соотношения можно получить заменой в (125) $\eta^0_{(0)} \to \mu$, $\eta^i_{(0)} \to \partial^0\mu^i$ с последующим переходом от (16) к (15).

Если же токи сохраняются

$$J^\alpha_a \partial_\alpha = 0 \text{ при всех } a, \tag{126}$$

то, согласно (118), унарная операция

$$Q_b = J^0_b \mu = \frac{1}{4} J_{b\alpha} \eta^\alpha_{(0)} \tag{127}$$

является 4-скаляром. Однако непосредственно в (124) мы не можем использовать аналогичные свойства компонент J^0_a, J^0_c. Но это можно сделать, умножив (124) справа на μ и применив к левой части тождество Якоби (21) при $k = 0$

$$J^0_a J^0_b \mu\mu = J^0_a \mu J^0_b \mu - J^0_b \mu J^0_a \mu. \tag{128}$$

В результате получается явно ковариантное соотношение

$$Q_a Q_b - Q_b Q_a = G^c_{ab} Q_c, \tag{129}$$

аналогичное (1), но написанное не для проинтегрированных зарядов, а для соответствующих им, согласно (17), унарных операций. Поэтому для справедливости (110) не требуется существования операторов зарядов, которое не всегда имеет место (см., например, [16, 17]).

Ковариантная запись (127) и (129) не приводит к появлению новых коммутаторов, дополнительных к исходному соотношению (124). Но эти новые коммутаторы появятся, как только мы фиксируем обрывание до конечного числа членов в разложении μ из (55). Так, при простейшем обрывании

$$J^0_b \mu \to J^0_b \eta^0_{(0)}, \tag{130}$$

из (127) получим *

$$J_b^0\eta_{(0)}^0=\frac{1}{4}J_{b\gamma}\eta_{(0)}^{\gamma}g^{00}$$

с очевидным ковариантным обобщением

$$J_\beta^\alpha\eta_{(0)}^\beta+J_b^\beta\eta_{(0)}^\alpha=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}J_{b\gamma}\eta_{(0)}^\gamma. \tag{131}$$

Равенство (131) уже приводит к новым коммутаторам, отличным от (124). Например, положив в (131) $\alpha=i$, $\beta=j$ и перейдя обратно от $\eta_{(0)}^{\cdot\cdot}$ к $\mu^{\cdot\cdot}$, получаем

$$J_b^i\partial^0\mu^j+J_b^j\partial^0\mu^i=2g^{ij}J_b^0\mu. \tag{132}$$

Умножим это равенство слева на J_a^0 и используем (124)

$$J_a^0J_b^i\partial^0\mu^j+J_a^0J_b^j\partial^0\mu^i=2g^{ij}G_{ab}^cJ_c^0. \tag{133}$$

Согласно (4), (15) и (16) смысл (133) состоит в том, что сумма коммутаторов $g^{jl}\left[J_a^0(\mathbf{x},x^0),\ \frac{\partial}{\partial x^0}J_b^i(\mathbf{y},x^0)\right]+g^{il}\left[J_a^0(\mathbf{x},x^0),\ \frac{\partial}{\partial x^0}J_b^j(\mathbf{y},x^0)\right]$ содержит градиентный член $2ig^{ij}G_{ab}^cJ_c^0(\mathbf{x},x^0)\times\times\frac{\partial}{\partial y_l}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. Из приведенного примера видно, что ковариантизация любой системы одновременных коммутаторов является чисто технической задачей, которая, однако, может оказаться довольно громоздкой.

11. ПЕРСПЕКТИВЫ И ВОЗМОЖНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ КОВАРИАНТНОГО ФОРМАЛИЗМА В УНИВЕРСАЛЬНОЙ АЛГЕБРЕ

1. Непосредственной и, если можно так выразиться, ближайшей областью применимости развитого в параграфах 8 и 10 метода ковариантизации одновременных коммутаторов является построение ковариантных алгебр токов с градиентными членами с последующим получением каких-либо экспериментально проверяемых соотношений типа правил сумм. Не отрицая важности этого направления, отметим, что с развиваемой здесь точки зрения оно является не единственной и быть может даже не главной областью использования аппарата, изложенного в настоящей работе.

Именно теория одновременных коммутаторов (и обсуждаемое ниже ее естественное обобщение) открывает новое направление

* Подчеркнем, что обрывание (130) произведено для унарной операции и поэтому является очень сильным и вряд ли реалистичным допущением. Скорее можно ожидать, что для различных локальных величин A обрывания произведений $AJ_b^0\mu$ окажутся различными.

в исследовании возможности построения корректных динамических уравнений для квантовых полей. Дашен и Шарп [43] отметили, что алгебра непроинтегрированных токов, если она будет построена, может сыграть роль динамической теории. Однако конкретное рассмотрение в работе [43] было ограничено простейшими (нерелятивистскими и лагранжевыми) моделями. Воплощением идеи Дашена и Шарпа явилась модель Сугавары [44], содержащая систему одновременных коммутаторов с участием SU (3)-токов и тензора энергии-импульса. Однако в модели Сугавары содержатся не только одновременные коммутаторы (т. е. неассоциативные умножения (16)), но и обычные, математически некорректные перемножения полей в точке. Последнее, естественно приводит к ряду трудностей, отмечаемых в работе [45].

Другая формулировка задачи о построении динамической теории на основе алгебры одновременных коммутаторов была предложена автором в работе [14]. Эта формулировка в несколько модифицированной форме состоит из следующих допущений.

Допущение I. Одновременные коммутаторы существуют для всех локальных величин и их производных конечных порядков.

Допущение II. Каждый одновременный коммутатор имеет форму (4), причем локальные величины A, B, $F^{\cdots}$ преобразуются по конечномерным представлениям группы Лоренца.

Допущение III. Существует сохраняющийся локальный оператор $T^{\alpha\beta}$, удовлетворяющий (110)—(113).

Допущение IV. Существует конечное множество операторов * A ($\mathbf{x}$, x^0), образующее полную систему при фиксированном x^0.

Допущение V. Любая локальная величина B ($\mathbf{x}$, x^0), не входящая в полную систему, при фиксированном x^0 получается из операторов полной системы применением конечного числа сложений, умножений на комплексные числа и неассоциативных локальных умножений (16).

Ставится задача получить нетривиальную систему одновременных коммутаторов, удовлетворяющую допущениям I—V (обозначаемым далее *Д*). Нетривиальная система коммутаторов, удовлетворяющая *Д*, может играть роль динамических уравнений теории.

2. Обсудим основные свойства системы *Д*. Прежде всего в этой системе нет места для перемножения (обычного) полей в 4-точке. Тем самым *Д* существенно отличается от лагранжевой теории и от моделей Дашена — Шарпа и Сугавары. Подчеркнем, что для отмежевания от лагранжевых теорий необходимо допущение V. Действительно, уравнения и перестановочные соотношения лагранжевой теории с полиномиальным взаимодействием можно заменить на эквивалентную систему одновременных ком-

* Эти операторы являются обобщенными функциями по пространственным координатам.

мутаторов. Так, для лагранжиана

$$L(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial A}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial A}{\partial x^\alpha}-gA^4$$

канонические перестановочные соотношения записываются в виде

$$AA\partial^0\mu=1;\quad AA\mu^{i_1\cdots i_k}=0;\quad A\partial^0\mu^{i_1\cdots i_k}=0;$$

а уравнение движения

$$\Box A(x)=4A^3(x) \tag{135}$$

в универсальной алгебре заменится на систему

$$A\Box=J;\quad JA\partial^0\mu=12j,\quad jA\partial^0\mu=24A. \tag{136}$$

Мы не выписываем очевидные нулевые неассоциативные произведения. Добавив к (134)—(136) соотношение (25) с $S^{\alpha\beta}$ из (111) и (112), получим систему соотношений универсальной алгебры, эквивалентную канонической схеме. Но допущением V эта возможность запрещается, поскольку, согласно (134), в каноническом формализме из исходных полей с помощью операций универсальной алгебры можно получать только c-числа и тем самым нельзя получить оператор $T^{\alpha\beta}$. Именно поэтому $T^{\alpha\beta}$ вынужден образовываться с помощью иных (и уже «плохих») операций и оказывается имеющим «плохие» сингулярные свойства.

Подчеркнем, что сказанное здесь относится и к свободным полям, которые также не удовлетворяют *Д*. Это обстоятельство может оказаться обескураживающим, поскольку свободное поле ценится как единственный, хотя и тривиальный пример, удовлетворяющий аксиомам квантовой теории поля. Но если принять аргументы, приведенные в параграфе 9, п. 3, то свободную теорию следует считать плохой, поскольку она приводит к тензору энергии-импульса с единичными форм-факторами, т. е. к точечной частице.

Допущением V требуется, чтобы тензор энергии-импульса получался из полей посредством законных операций универсальной алгебры. Это означает (см. параграф 2, [ЭЧАЯ, 1972, т.3, вып. 3] и конец параграфа 8), что релятивистская инвариантность должна трактоваться в рамках внутреннего автоморфизма теории.

Другое важное свойство системы *Д* заключается в том, что в ней автоматически выполняется условие локальной коммутативности. В этом смысле переход от обычных аксиом квантовой теории поля к *Д* содержит разрешение условия локальной коммутативности.

Трудность построения конкретных примеров универсальных алгебр, удовлетворяющих *Д*, связана с громоздкостью наложенных на нее условий транспонирования (19), выполнения тождеств Якоби (21) и (22) и др. и формул дифференцирования бинарных операций (23) [или в ковариантной форме (52)]. Крайне желательно разрешить в общем виде хотя бы часть этих условий.

3. Допущение о существовании одновременных коммутаторов для локальных величин и их производных всех порядков может оказаться чересчур сильным. Покажем, что развитый в параграфах 7 и 8 формализм допускает естественное обобщение на случай, когда одновременные коммутаторы уже могут не существовать, но локальная коммутативность сохраняется.

Именно вместо (46) можно постулировать

$$\lambda(p_\alpha) = \lambda_{\mathrm{adv}}(p) - \lambda_{\mathrm{ret}}(p) + \Pi(p), \tag{137}$$

где

$$\lambda_{\mathrm{adv}}(p) = \frac{(2\pi)^3}{\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} p_{\alpha_1} \ldots p_{\alpha_k} \int_0^\infty ds \rho_{\mathrm{adv}}^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(s) D_s^{\mathrm{adv}}(p); \tag{138}$$

$$\lambda_{\mathrm{ret}}(p) = \frac{(2\pi)^3}{\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} p_{\alpha_1} \ldots p_{\alpha_k} \int_0^\infty ds \rho_{\mathrm{ret}}^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(s) D_s^{\mathrm{ret}}(p); \tag{139}$$

$$D_s^{\mathrm{adv}}(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{p^\alpha p_\alpha - s - \mathrm{i}0 p_0}; \quad D_s^{\mathrm{ret}} = \frac{1}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{p^\alpha p_\alpha - s + \mathrm{i}0 p_0}; \tag{140}$$

$\Pi(p)$ — полином по p_α

$$\Pi = \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k}{k!} p_{\alpha_1} \ldots p_{\alpha_k} \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}, \tag{141}$$

коэффициенты которого являются тензорными бинарными операциями. Этот полином соответствует возможному наличию в коммутаторе (38) квазилокальных членов, пропорциональных четырехмерной δ-функции $\delta^4(z)$ и ее производным. Операции $\xi^{\cdots}$ симметричны по всем индексам, но их свертки по парам индексов в общем случае не нули. Подчеркнем, что если разложение (137) не сводится к (46), то даже при отсутствии $\Pi(p)$ в исходном коммутаторе (38) этот полином появится в коммутаторах для производных от полей $A(x)$, $B(y)$.

В случае общего разложения (137) вместо одновременных коммутаторов надо рассматривать их пределы сверху и снизу, т. е. при $z^0 \to \pm 0$. Соответственно полная система локальных бинарных операций будет содержать все операции вида $\square^m \mu_+^{i_1 \ldots i_k}$, $\square^m \mu_-^{i_1 \ldots i_k}$, $\square^m \partial^0 \mu_+^{i_1 \ldots i_k}$, $\square^m \partial^0 \mu_-^{i_1 \ldots i_k}$ и $\xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$. Соответственно полная система ковариантных бинарных операций будет состоять из $\eta_{(n)+}^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$, $\eta_{(n)-}^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$, $\xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$.

Разложение (137) является максимально общим, если потребовать, чтобы средние по вакууму от однократных или повторных коммутаторов в x-представлении не имели бы существенных особенностей при нулевых разностях координат.

4. Разложение типа (137) (с нулевым опережающим или запаздывающим слагаемым) можно использовать для получения системы конечномерных локальных величин из вариационных производных Боголюбова [18, 25] от аксиоматических токов $J_A(x)$

$$J_A(x) = \frac{1}{i} S^+ \frac{\delta S}{\delta A(x)} \tag{142}$$

по внешним полям. Например, по аналогии с (15) можно принять существование пределов типа

$$\lim_{x^0 - y^0 \to +0} \int \frac{\delta J_A(x)}{\delta B(y)} (x^{i_1} - y^{i_1}) \ldots (x^{i_k} - y^{i_k})\, d^3y = F_+^{i_1 \cdots i_k}(x). \tag{143}$$

Было бы очень интересно построить и исследовать соответствующее ковариантное разложение для электромагнитной поляризуемости $\delta j_\alpha(x)/\delta A^\beta(y)$, где $j_\alpha(x)$ — электромагнитный ток.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Широков Ю. М.** ЭЧАЯ, 1972, **3**, 606.
2. **Goto T., Imamura T.** Progr. Theor. Phys., 1955, **14**, 396.
3. **Schwinger J.** Phys. Rev. Lett., 1959, **3**, 296.
4. **Källen G.** Acta Physica Austraica (Suppl. V). Wien, 1968, p. 268—319.
5. **Адлер С., Дашен Т.** Алгебры токов. Перев с англ. М., «Мир», 1970.
6. **Tonin M.** Nuovo cimento, 1967, **47A**, 919.
7. **Sartori G.** Preprint JEPTH 6/70, Padova.
8. **Ciccarello S.** e. a. Ann. Phys., 1971, **65**, 265.
9. **Kuo T. K., Masao L., Sugavara H.** Phys. Rev., 1967, **163**, 1716.
10. **Brown S. G.** Phys. Rev., 1967, **158**, 1444; **Gross D. J., Jackiv R.** Phys. Rev., 1967, **163**, 1688.
11. **Johnson K., Low F. E.** Supp. Prog. Theor. Phys., 1966, **37/38**, 74.
12. **Мальцев А. И.** Алгебраические системы. М., «Наука», 1970.
13. **Кон П.** Универсальная алгебра. Перев. с англ. М., «Мир», 1968.
14. **Широков Ю. М.** ТМФ, 1971, **9**, 333.
15. **Широков Ю. М.** ТМФ (в печати).
16. **Stichel P.** Springer tracts in Modern Physics, 1969, **50**, 100.
17. **Völkel A. H.** Phys. Rev., 1970, **D1**, 2243.
18. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантовых полей. М., Гостехиздат, 1957.
19. **Швебер С.** Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
20. **Deser S., Trubach J., Trubach S.** Nuovo cimento, 1965, **39**, 1159.
21. **Boulware D. G., Deser S.** J. Math. Phys., 1967, **8**, 1468.
22. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория поля. М., «Наука», 1967.
23. **Schwinger J.** Phys. Rev., 1962, **127**, 324; 1963; **130**, 406, 800.
24. **Широков Ю. М.** ЖЭТФ, 1963, **44**, 203; Nucl. Phys., 1963, **46**, 617.
25. **Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К.** Вопросы теории дисперсионных соотношений. М, Физматгиз, 1958.

26. **Поляков Ю. И., Петухов Б. В.** «Вест. МГУ», 1965, серия III, с. 18.
27. **Широков Ю. М.** Лекции по основаниям релятивистской квантовой теории. Изд-во Новосибирского ун-та, 1964.
28. **Dirac P. A. M.** Rev. Mod. Phys., 1962, **34**, 1.
29. **Jackiv R.** Phys. Rev., 1968, **175**, 2058.
30. **Katzin J. C., Rolnik W. B.** Phys. Rev., 1969, **182**, 1403; 1970, **D2**, 1410; 1971, **D3**, 3240.
31. **Mahantapa.** Phys. Rev., 1969, **181**, 2087.
32. **Callan C. G., Coleman S., Jackiv R.** Ann. Phys., 1970, 59, 42.
33. **Boulware D. G., Deser S.** Comm. Math. Phys., 1970, **19**, 327.
34. **Genz H., Katz J.** Phys. Rev., 1970, **D2**, 2225; Nucl. Phys., 1971, **B34**, 429.
35. **Trubach J.** Nuovo cimento, 1970, **68**, 339.
36. **Bergström K. G.** J. Math. Phys., 1970, **11**, 2489, 2498.
37. **Rawls J. M.** Phys. Rev., 1971, **D3**, 2985.
38. **Bergström K., Yungström S.** J. Math. Phys., 1971, **72**, 1083.
39. **Deser S., Morrison L. K.** J. Math. Phys., 1971, **12**, 631.
40. **Levin D. N.** Phys. Rev., 1971, **D3**, 1320.
41. **Okubo S.** Phys. Rev., 1971, **D3**, 409.
42. **Gomberoff L.** Phys. Rev., 1971, **D4**, 3202.
43. **Dashen R. F., Sharp D. H.** Phys. Rev., 1968, **165**, 1857.
44. **Sugavara H.** Phys. Rev., 1968, **170**, 1659.
45. **Coleman S., Gross D., Jackiv R.** Phys. Rev., 1969, **180**, 1359.