

УДК 518:517.91/93

НЕПРЕРЫВНЫЙ АНАЛОГ МЕТОДА НЬЮТОНА В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ФИЗИКИ

***Е. П. Жидков, Г. И. Ма-
каренко, И. В. Пузынин***

Объединенный институт ядерных
исследований, г. Дубна

Работа посвящена изложению нового метода численного исследования нелинейных задач физики. Разработанный метод позволил исследовать широкий круг нелинейных физических задач: о выводе пучка из ускорителя, о физике плазмы, о восстановлении потенциала по предельной фазе в обратной задаче теории рассеяния, о вычислении частицеподобных решений уравнения, встречающегося в нелинейной теории поля.

The new method of numerical investigation of some nonlinear physical problems is described. The developed method allowed a large number of nonlinear physical problems to be studied: beam extraction from accelerator, plasma physics, the limiting phase potential reconstruction in the inverse problem of the scattering theory, calculation of particle-like solutions of equation being found in the nonlinear field theory.

ВВЕДЕНИЕ

Многие проблемы современной физики, например: анализ движения заряженных частиц и исследование поведения сгустков заряженных частиц в электромагнитных полях, проблемы плазмы, задачи теории рассеяния, дисперсионных соотношений, нелинейной теории поля и другие, — приводят к решению нелинейных уравнений.

При исследовании этих задач большое значение имеют как аналитические и качественные методы, так и создание эффективных алгоритмов численного решения с помощью электронных вычислительных машин (ЭВМ). Нередко численное решение — единственно возможное из-за сложности математической постановки задачи. При этом создание обоснованного и эффективного алгоритма численного решения поставленной задачи и его реализация в виде программы на ЭВМ эквивалентны в каком-то смысле ее полному решению.

Разработке методов численного решения нелинейных задач уделяется большое внимание в СССР и в других странах. Эта проблема стала особенно актуальной в ОИЯИ с развитием новых методов коллективного ускорения, а также с исследованием параметров систем вывода пучков на новых ускорителях заряженных частиц.

Настоящая работа представляет попытку дать систематическое изложение непрерывного аналога метода Ньютона, развитого для решения некоторых физических задач группой сотрудников отдела вычислительной математики Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ. Методы введения непрерывного параметра, к которым относится и названный метод, сводят исходную стационарную задачу к эволюционной. Во многих случаях реализация на ЭВМ методов решения эволюционных задач является более удобной. Наряду с математическим обоснованием и приложением его к решению конкретных математических задач рассмотрим здесь определенный круг физических задач, к численному решению которых данный метод был применен. Некоторые из рассмотренных в настоящем обзоре физических задач удалось решить впервые. В других задачах данный метод оказался намного эффективнее ранее применявшихся.

1. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

Многообразие математических постановок физических задач приводит к рассмотрению нелинейного абстрактного уравнения для создания единого подхода к решению этих задач. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\varphi(x) = 0, \quad (1)$$

где нелинейный оператор $y = \varphi(x)$ отображает пространство Банаха X с элементами x в банахово пространство Y ($y \in Y$). Решить уравнение (1) означает найти такие элементы $x^* \in X$, которые с помощью оператора φ переводятся в нулевой элемент пространства Y .

Прежде чем описывать непрерывный аналог метода Ньютона для решения поставленной задачи, проиллюстрируем идею метода на простом примере.

Рассмотрим уравнение

$$f(x) = 0, \quad (2)$$

где $y = f(x)$ — достаточно гладкая функция одной вещественной переменной (рис. 1). Классический метод Ньютона (метод касательных) дает приближенное значение корня x_n уравнения по фор-

муле

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Геометрически он сводится к последовательному нахождению точек пересечения x_n касательных к кривой $y = f(x)$, проведенных в точках $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ с осью Ox . Обычно, метод Ньютона применяют в тех случаях, когда начальное приближение x_0 искомого решения x^* выбрано таким образом, что в некоторой окрестности точки x^* , содержащей x_0 , $f'(x) \neq 0$ и $f''(x)$ сохраняют знак.

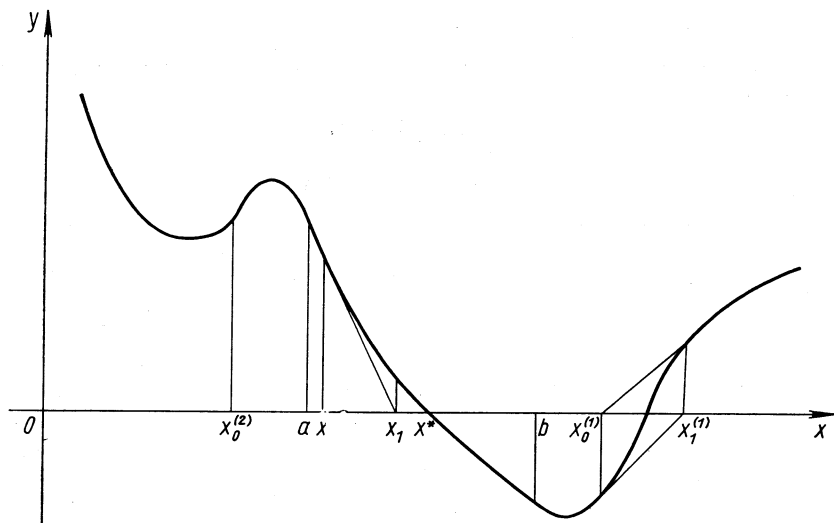


Рис. 1.

При этом последовательные приближения не должны выходить из рассматриваемой окрестности. При нарушении сформулированных условий процесс Ньютона может не сойтись. Например, если в качестве начального приближения взять $x_0^{(1)}$ (см. рис. 1), то последовательность Ньютона будет $x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots$. Таким образом, в этом случае процесс расходится из-за того, что $f''(x)$ на отрезке $[x_0^{(1)}, x_1^{(1)}]$ меняет знак. Если в качестве начального приближения взять $x_0^{(2)}$, то процесс Ньютона, очевидно, тоже расходится. В случае выбора начального приближения в окрестности (a, b) корня x^* будет иметь место сходимость. Непрерывный аналог метода Ньютона является обобщением описанного метода.

Будем предполагать, что x — функция от непрерывного параметра t ($0 \leq t < +\infty$): $x = x(t)$, причем эта зависимость такова, что для любых t выполнено

$$df[x(t)]/dt = -f[x(t)].$$

Допуская, что $f'(x) \neq 0$, перепишем последнее соотношение в виде:

$$dx(t)/dt = -f[x(t)]/f'[x(t)]. \quad (3)$$

Последнее соотношение представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $x = x(t)$. Если к этому дифференциальному уравнению присоединить начальное условие

$$x|_{t=0} = x_0 \quad (4)$$

(начальное приближение искомого решения), то, решая задачу Коши (3) и (4), получим функцию $x = x(t)$, причем можно ожидать, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*,$$

где x^* — искомое решение уравнения (2). Решение задачи Коши (3) — (4) вместо уравнения (2) и представляет собой непрерывный аналог метода Ньютона. Классический метод Ньютона получается из непрерывного аналога метода Ньютона, если задачу Коши (3) и (4) решать приближенно методом Эйлера с шагом интегрирования $\tau = 1$. Обобщение метода Ньютона на абстрактное уравнение (1) дается в работах Л. В. Канторовича [1]. В этом случае метод получил название метода Ньютона — Канторовича.

В работе М. К. Гавурина [2] дифференциальные уравнения, подобные (3), получены как непрерывные аналоги одношаговых итерационных процессов. В частности, процессу Ньютона — Канторовича ставится в соответствие дифференциальное уравнение в банаховом пространстве

$$dx/dt = -[\varphi'(x)]^{-1} \varphi(x) \quad (5)$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0. \quad (6)$$

Здесь $\varphi'(x)$ — производная Фреше [3] оператора $\varphi(x)$, представляющая собой линейный (при фиксированном x) оператор, переводящий банахово пространство X в банахово пространство Y .

Например, рассмотрим нелинейный интегральный оператор

$$\varphi[x(\xi)] = \int_a^b f[z, \xi, x(\xi)] d\xi,$$

где $f(z, \xi, x(\xi))$ — заданная, достаточно гладкая функция своих аргументов.

Оператор $\varphi(x)$ переводит непрерывные функции $x(\xi)$ ($a \leq \xi \leq b$) в непрерывные функции $y = y(z)$ ($c \leq z \leq d$); $y(z) =$

$= \varphi [x(\xi)]$. Дифференциал Фреше этого оператора при фиксированной функции $x = x(\xi)$ (в заданной точке) имеет вид:

$$w(z) = \varphi' [x(\xi)] v(z) = \int_a^b f'_x [z, \xi, x(\xi)] v(\xi) d\xi.$$

Здесь $\varphi' (x)^{-1}$ — обратный оператор к оператору $\varphi' (x)$. Если задан элемент w пространства Y , то операция $\varphi' (x)^{-1} w$ означает нахождение элемента $v \in X$ из уравнения $\varphi' (x) v = w$, т. е. $v = \varphi' (x)^{-1} w$. В рассматриваемом примере операция $\varphi' (x)^{-1}$ означает решение линейного интегрального уравнения $w(z) = \int_a^b f'_x [z, \xi, x(\xi)] v(\xi) d\xi$ относительно $v(\xi)$ при заданной функции $w(z)$ и заданном ядре $f' [z, \xi, x(\xi)]$.

В работе [2] изучается вопрос о сходимости непрерывного аналога метода Ньютона для нелинейного уравнения (1) к решению этого уравнения. М. К. Гавуриным доказана теорема, условия которой гарантируют существование решения исходного уравнения (1) и сходимость к нему при $t \rightarrow +\infty$ решения $x(t)$ задачи (5) — (6).

Т е о р е м а 1. Пусть в сфере

$$\|x - x_0\| < B \|\varphi(x_0)\| \quad (B > 0, \text{const}) \quad (7)$$

существуют производная Фреше $\varphi' (x)$ и линейная производная Гато $\varphi'' (x)$, причем линейный оператор $\varphi' (x)$ имеет обратный $\varphi' (x)^{-1}$, для которого выполнено неравенство

$$\|\varphi' (x)^{-1}\| \leq B, \quad (8)$$

а $\varphi'' (x)$ ограничена в окрестности каждой точки сферы (7).

Тогда, во-первых, уравнение (5) с начальным условием (6) имеет решение $x = x(t)$ для значений t в промежутке $0 \leq t < \infty$, причем его значения лежат в сфере (7); во-вторых, существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$, служащий корнем уравнения (1). В работе

[2] приведены также некоторые соображения относительно численного решения задач (5), (6).

Идеи работы [2] дальнейшее развитие получили в работе [4], где исследованы непрерывные аналоги многошаговых итерационных методов, а также способы их приближенного представления, однако только для линейных функциональных уравнений.

В работах Д. Ф. Давиденко [5] развит метод вариации параметра, итерационный метод вариации параметра и его модификации для решения функциональных уравнений. Были исследованы методы численного решения различных задач анализа, основанные на этих методах.

Анализируя существующие пути решения нелинейных функциональных уравнений, нетрудно заметить, что построение мно-

гих методов решения этих задач в той или иной степени связано с вопросом существования единственного решения рассматриваемой проблемы. Это обстоятельство предопределяет ограничения, зачастую существенные, на классы задач, к которым можно применить полученные результаты. Проблема существования и единственности решения нелинейной задачи носит самостоятельный характер и в большинстве случаев весьма сложна.

Изучая специфику многих задач современной физики, можно отметить, что часто имеется большая априорная информация относительно существования и качественного поведения решения рассматриваемой задачи. Эту информацию можно получить из аналитического и качественного исследования задачи, различных физических соображений, из рассмотрений упрощенных модельных задач, а также многими другими путями. Поэтому, разделив проблемы существования решения нелинейной задачи и приближенного ее решения, можно существенно расширить класс задач, решаемых с помощью развиваемых методов. С другой стороны, при решении физических задач с неединственным решением необходимо иметь достаточно гибкие вычислительные схемы, которые, в частности, можно построить на основе эволюционных уравнений (5). Особенно перспективными оказываются методы введения непрерывного параметра, при которых сходимость по этому параметру к искомому решению и, возможно, устойчивость обусловлены способом его введения.

Данные соображения позволяют рассматривать непрерывный аналог метода Ньютона как один из эффективных способов построения алгоритмов численного решения нелинейных физических задач. При этом естественно исследовать возможность применения этого метода для приближенного решения нелинейных задач при условии существования их решений.

В работах [6] на основе методики, развитой М. К. Гавуриным [2], доказывается теорема о сходимости непрерывного аналога метода Ньютона при условии существования изолированного решения нелинейного уравнения (4).

Т е о р е м а 2. Пусть уравнение (1) имеет единственное решение x^* в открытой области D B -пространства X . Предположим, что в области D существуют непрерывные производные Фреше $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$. Пусть, далее, в D существует обратный оператор $\varphi'(x)^{-1}$, для которого выполняется неравенство (8). Тогда имеется сфера $S : \|x - x^*\| \leq \varepsilon$, принадлежащая области D , такая, что для любого $x_0 \in S$ дифференциальное уравнение (5) с начальным условием (6) имеет решение $x(t)$ для $0 \leq t < \infty$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0$.

Для численной реализации непрерывного аналога метода Ньютона можно применять различные методы приближенного решения

дифференциальных уравнений. Сходимость одного из них — метода Эйлера — на конечном отрезке изменения параметра t , $0 \leq t \leq T$, рассмотрена и обоснована в работах [6]. В них рассмотрено уравнение

$$dx/dt = \psi(x) \quad (9)$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0. \quad (10)$$

Здесь x — элемент B -пространства X ; $\psi(x)$ — функция, переводящая X в себя. Предполагается, что в некоторой открытой области $D \subset X$

$$\|\psi(x)\| \leq M \quad (M > 0, \text{ const}) \quad (11)$$

и $\psi(x)$ в D удовлетворяет условию Липшица, т. е. для любых $x_1, x_2 \in D$:

$$\|\psi(x_1) - \psi(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \quad (L > 0, \text{ const}). \quad (12)$$

Данные условия обеспечивают существование единственного решения задачи (9) — (10), принадлежащего области D , на некотором отрезке изменения вещественного параметра t , $0 \leq t \leq T$; это следует из теоремы существования (см. [3], с. 422—423). Вычислительная схема метода Эйлера заключается в нахождении элементов \tilde{x}_k с помощью соотношений

$$\tilde{x}_0 = x_0; \quad \tilde{x}_k = \tilde{x}_{k-1} + \tau_{k-1} \psi(\tilde{x}_{k-1}), \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

при неравномерной сетке разбиения отрезка $0 \leq t \leq T$ узловыми точками t_k : $t_k = t_{k-1} + \tau_{k-1}$, $t_0 = 0$, $t_n = T$ и $\tau = \max \tau_k$. При сформулированных выше условиях сходимость приближенного решения (13) задачи (9) и (10) к точному доказана, если $\tau \rightarrow 0$ и если для любого n выполнено соотношение $\tau \leq K T n^{-1}$ ($K > 0$ — некоторая константа).

Как показано в работе [7], для уравнения (5) с начальным условием (6) при выполнении условий теоремы 2 выполнены также условия, обеспечивающие сходимость метода Эйлера. При такой дискретизации непрерывного аналога метода Ньютона на каждом шаге k необходимо решить линейную задачу

$$\varphi'(x_k) \Delta x_k = -\varphi(x_k) \quad (14)$$

относительно Δx_k и найти новое значение x_{k+1} с помощью соотношения

$$x_{k+1} = x_k + \tau_k \Delta x_k. \quad (15)$$

Приведенная здесь теорема 2 о сходимости решения задачи (5) — (6) к одному из решений уравнения (1) сформулирована при условии существования локализованного (в случае неединствен-

ности) искомого решения. Этим она отличается от теоремы 1. Предположение о существовании решения задачи устраняет связь между размером рассматриваемой области и оценкой в ней нормы оператора $\varphi'(x)^{-1}$, имеющейся в теореме 1. Выполнение этого условия в некоторых конкретных задачах практически нельзя установить. Как и известные теоремы о сходимости метода Ньютона [1], теорема 2 предполагает наличие хорошего начального приближения к решению исходной задачи. Однако в теореме 2 отсутствуют конкретные ограничения на нормы операторов φ' , φ'' и $(\varphi')^{-1}$ в окрестности искомого решения. Такие ограничения имеют место в теоремах о сходимости метода Ньютона [8], где также предполагается существование решения исходного функционального уравнения.

С помощью изложенного подхода были разработаны численные методы решения ряда математических и физических задач, описание которых дается ниже.

2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приведем здесь описание методов численного решения граничных задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. К приближенному решению этих задач приводит непосредственное рассмотрение отдельных физических явлений и некоторые математические проблемы, например метод прямых при решении граничных задач для уравнений в частных производных.

В качестве примеров физических задач можно указать задачи движения и вывода ускоряемых частиц [9], нелинейной теории поля [10], задачи исследования плазмы [11]. Здесь следует отметить, что на основании метода введения параметра для приближенного решения нелинейных задач развиты совершенно новые подходы к исследованию целого ряда уже традиционных физических задач.

Приближенному решению краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений посвящен обширный круг исследований. Большое число работ (см., например, [12], с. 395—406, а также [13—18]) объединены идеей сведения непрерывной краевой задачи к ее дискретному аналогу с помощью конечно-разностной аппроксимации.

Итерационный метод решения системы нелинейных разностных уравнений, получаемых при дискретизации граничной задачи:

$$y'' = f(x, y, y'); \quad (16)$$

$$y(a) = \beta_1; \quad y(b) = \beta_2, \quad (17)$$

применением к ней метода конечных разностей исследован в работе [12]. Сходимость итерационного процесса решения нели-

нейной алгебраической системы получена здесь при ограничениях на нелинейную часть уравнения, обеспечивающих применение принципа неподвижной точки. М. П. Сапаговас [13] использовал ту же методику при исследовании более сложного уравнения. А. Лясота [14] рассмотрел разностный метод решения краевой задачи (16) и (17) при условии:

$$(b-a)^2 L_1/\pi^2 + (b-a) L_2/4 < 1,$$

где L_1, L_2 — константы Липшица для $f(x, y, y')$ по переменным y, y' в области: $-\infty < y, y' < +\infty$. Эти условия обеспечивают, помимо сходимости метода, существование и единственность решения задачи (16) — (17). Т. С. Вашакмадзе [15] дискретизацию краевых задач осуществлял с помощью квадратурных формул, обеспечивающих более высокий порядок сходимости решения дискретной задачи к искомому решению. В некоторых работах, например [16—18], для решения нелинейной системы разностных уравнений применяется метод Ньютона или его модификация.

П. Хенричи ([16], с. 347—388) рассмотрел вопрос о приближении решений краевой задачи

$$\varphi(y) \equiv y'' + f(x, y) = 0; \quad (18)$$

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (19)$$

при условии, что f и f'_y непрерывны в полосе $S(x, y)$:

$$0 \leq x \leq 1, \quad -\infty < y < \infty \quad \text{и} \quad f'_y(x, y) \leq 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \in S.$$

Тем самым обеспечивается существование и единственность решения исследуемой граничной задачи. М. Лис [17], обобщая и развивая работу [16], на f'_y налагает требование

$$\sup_S f'_y = \eta < \pi^2. \quad (20)$$

Это условие используется при доказательстве существования решения разностной краевой задачи и обосновании применимости метода Ньютона для нахождения решения. Э. Э. Тамме [18] находит решение дискретной задачи с помощью обобщенного метода Ньютона. Полученные ограничения на f'_y , носящие интегральный характер, по существу близки к условиям (20).

Метод Ньютона, развитый Л. В. Канторовичем [1] для решения нелинейных функциональных уравнений, успешно применялся в некоторых работах (например, [19—23]) и при построении алгоритмов приближенного решения краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений. Обоснование этого подхода часто дается при условиях, которые, кроме сходимости метода, обеспечивают существование и единственность решения рассматриваемой задачи. Это приводит к ограничениям на нелинейности, аналогич-

ным уже рассмотренным выше. Например, Н. Н. Глинская, И. П. Мысовских [19] доказали сходимость метода Ньютона для приближенного решения краевой задачи (18) — (19) при ограничениях на f'_y , имеющих вид: $|f'_y| \leq M < 8$ и $f'_y \leq 0$. В. А. Винокуров, Ю. Н. Иванов [20] вводили в традиционную схему Ньютона приближенного решения краевой задачи (16) — (17) дискретный динамический параметр — параметр спуска. Они считают, что рациональный выбор этого параметра может ускорить процесс и, возможно, гарантировать его сходимость даже в случаях, когда классический метод ее не обеспечивает.

Р. Беллман и Р. Калаба [24] исследовали метод квазилинеаризации, который сводит решение нелинейной граничной задачи к решению бесконечной последовательности линейных задач и является развитием функционального метода Ньютона. Поэтому ограничения, свойственные методу Ньютона, в какой-то степени присущи и данному методу. Например, при обосновании метода приближенного решения задачи (16) — (17) используется свойство «выпуклости» функции f (см. [24], с. 36—37), что в конечном счете налагает ограничения на знаки первых и вторых частных производных функции f . Сходимость некоторых вариантов метода Ньютона для нелинейных краевых задач исследована также В. Е. Шаманским [21]. Н. С. Бахваловым [22] предложена модификация метода Ньютона, удобная при решении на ЭВМ граничных задач для систем с большим числом уравнений. Б. М. Будак и Н. Л. Гольдман [23] изучили некоторые модификации метода Ньютона, а также их разностные аналоги при предположении гладкости нелинейных частей рассматриваемых систем дифференциальных уравнений в окрестности искомого решения.

Наконец, остановимся на некоторых методах приближенного решения нелинейных краевых задач, общая идея построения которых заключается в сведении исходной стационарной задачи к эволюционному процессу введением определенным образом в задачу дополнительного непрерывного параметра. Сюда можно отнести, например, метод «стабилизации», основанный на сходимости решения задачи для параболического уравнения к решению краевой задачи для соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения.

Идея использования «сопутствующего» уравнения в построении и исследовании методов приближенного решения стационарных граничных задач содержится, например, в работе [24] (с. 61—63, 105—106). Условия, при которых исследована стабилизация решений нелинейных параболических уравнений, весьма существенны и ограничивают круг задач, решаемых с помощью этого метода. Например, А. Фридман [25] установил стабилизацию для нелинейности вида: $f(x, u) = c(x)u + k(x, u)$, где $c(x) \leq 0$, $|k(x, u)| \leq \varepsilon |u|$, а константа $\varepsilon > 0$ достаточно мала.

Отметим также метод вариации параметра, предложенный Д. Ф. Давиденко для решения нелинейных задач. Этот метод был применен Н. А. Шидловской [26] к решению краевой задачи (16) — (17). Кроме того, В. Е. Шаманский ([21], с. 94—106, 137—149) данный метод применил для построения алгоритмов численного решения нелинейных систем с нелинейными краевыми условиями.

Метод приближенного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, развитый на основе непрерывного аналога метода Ньютона для функциональных уравнений, в какой-то мере свободен от тех недостатков, которые были отмечены выше. Во-первых, наличие в дискретной по переменной t схеме параметра τ делает ее более гибкой по сравнению с традиционным методом Ньютона. Параметр τ , который приобретает значение шага при приближенном интегрировании дифференциального уравнения, описывающего непрерывный процесс Ньютона, можно с учетом определенных соображений выбирать оптимальным образом. Во-вторых, сходимость метода исследована при предположении существования и локализации в случае неединственности решения исходной краевой задачи. Эти предположения приводят к естественным требованиям гладкости нелинейной части f уравнения в окрестности искомого решения, но не накладывают никаких конкретных ограничений на величину и знаки ее и ее производных.

В работе [27] непрерывный аналог метода Ньютона обоснован для краевой задачи:

$$y^{(n)} + f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0; \quad (21)$$

$$y^{(i)}(a) = y^{(j)}(b) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k-1; \quad j = 0, 1, \dots, n-k-1. \quad (22)$$

Нелинейная задача (21) — (22) заменяется системой

$$\begin{aligned} v^{(n)} + f_y^{(n-1)}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})v^{(n-1)} + \dots + f_y'(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})v = \\ = -[y^{(n)} + f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})]; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\partial y(x, t)/\partial t = v(x, t), \quad (24)$$

которая решается в полуполосе $a \leq x \leq b$, $0 \leq t < \infty$ при условиях:

$$\left. \begin{aligned} v^{(i)}(a, t) = v^{(j)}(b, t) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k-1; \quad j = 0, 1, \dots, n-k-1; \\ y(x, 0) = y_0(x). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Здесь $y_0(x)$ — начальное приближение к искомому решению рассматриваемой задачи.

При некоторых предположениях о гладкости функции f , существовании решений задачи (21) — (22) и выборе функции $y_0(x)$

доказывается, что задача (23) — (25) разрешима для всех $0 \leq t < \infty$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} y(x, t) = y^*(x)$, где $y^*(x)$ — решение краевой задачи (21) — (22). Аналогичные результаты получены в работах [6] для некоторых частных видов краевой задачи (21) — (22), наиболее часто встречающихся в различных физических задачах.

В качестве примера рассмотрим условия сходимости непрерывного аналога метода Ньютона для краевой задачи (18) — (19).

Т е о р е м а 3. Пусть решение граничной задачи (18) — (19) существует и в случае неединственности может быть локализовано. Это означает: 1) можно построить дважды непрерывно дифференцируемые на отрезке $[0, 1]$ функции $u(x)$ и $U(x)$, которые удовлетворяют краевым условиям (19), не имеющим общих касательных в точках $x = 0$ и $x = 1$ и удовлетворяющим при $0 < x < 1$ неравенству $u(x) < U(x)$; 2) в замкнутой области плоскости $D [0 \leq x \leq 1, u(x) \leq y \leq U(x)]$ содержится только одно решение $y^*(x)$ краевой задачи (18) — (19), причем $y^*(x)$ не имеет в точках $x = 0, x = 1$ общих касательных с функциями $u(x)$ и $U(x)$ и при $0 < x < 1$ выполнено $u(x) < y^*(x) < U(x)$.

Предположим, что $f(x, y)$ имеет в области D непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Пусть, кроме того, 3) краевая задача $v'' + f'_y(x, y)v = 0$; $v(0) = v(1) = 0$ имеет только тривиальное решение для любой непрерывно дифференцируемой функции $y(x) \in D$; 4) $\|y''_0 + f(x, y_0)\| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, а $y_0(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция из области D , являющаяся начальным приближением к искомому решению $y^*(x)$.

Тогда система относительно функций $y(x, t)$ и $v(x, t)$

$$\begin{cases} v''_{xx} + f'_y(x, y)v = -[y''_{xx} + f(x, y)]; \\ y'_t = v \end{cases} \quad (26)$$

имеет в полуполосе $s (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t < \infty)$ единственное решение, удовлетворяющее условиям

$$v(0, t) = v(1, t) = 0; y(x, 0) = y_0(x), \quad (27)$$

$$\text{причем } \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^2 \max_{0 \leq x \leq 1} |y_{xk}^{(k)}(x, t) - y^{*(k)}(x)| = 0.$$

Доказательство этой теоремы состоит в проверке условий теоремы 2 для нелинейного оператора $\Phi(y)$ задачи (18) — (19). Заметим, что первое доказательство этой теоремы с использованием аналога ломаных Эйлера для задачи (26) — (27) приведено в работах [28].

Чтобы численно реализовать рассматриваемый метод, необходимо иметь его дискретное представление. Дискретизацию по параметру t можно осуществить на основании метода Эйлера (13) для

приближенного решения задачи Коши (9) — (10), где $\psi = -(\varphi')^{-1}\varphi$; $\varphi(y) = y'' + f(x, y)$. Полудискретную схему, полученную таким образом, можно интерпретировать как аналог метода прямых приближенного решения задачи (26) — (27). При этом полуполоса s ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t < \infty$) разбивается прямыми, параллельными оси $0x$: $t = t_i$, $(t_{i+1} - t_i = \tau_i)$, а второе уравнение системы (26) заменяется разностным аналогом

$$\tilde{y}(x, t_{i+1}) = \tilde{y}(x, t_i) + \tau_i \tilde{v}(x, t_i). \quad (28)$$

Введем обозначения $\tilde{y}_i(x) = \tilde{y}(x, t_i)$, $\tilde{v}_i(x) = \tilde{v}(x, t_i)$. Ход вычислений можно описать следующим образом. Предположим, что на слое $t = t_i$ функция $\tilde{y}_i(x)$ уже известна. Тогда функция $\tilde{v}_i(x)$ определяется как решение краевой задачи для линейного уравнения:

$$\tilde{v}_i'' + f_y(x, \tilde{y}_i(x)) \tilde{v}_i = -[f(x, \tilde{y}_i(x)) + \tilde{y}_i''(x)]; \quad (29)$$

$$\tilde{v}_i(0) = \tilde{v}_i(1) = 0. \quad (30)$$

Далее, по формуле (28) можно вычислить значение $y_{i+1}(x)$ на следующем слое. Данный метод сходится при $\tau \rightarrow 0$, если решение задачи (29) — (30) осуществляется точно на каждом слое.

Для полной дискретизации метода, необходимой при численном решении краевой задачи (18) — (19) на ЭВМ, решение линейной граничной задачи (29) — (30) при фиксированном $t = t_i$ также следует находить численно. При этом можно использовать метод конечных разностей. Полная дискретная схема будет тогда включать в себя решение при фиксированном параметре t дискретной линейной граничной задачи, аппроксимирующей соответствующую непрерывную и продвижение к следующему значению t с помощью разностного соотношения (28). Обоснование этой схемы в случае трехточечной разностной аппроксимации второго порядка точности дано в работе [29]. Вычислительные схемы приближенного решения краевых задач, полученные на основе непрерывного аналога метода Ньютона, легко можно реализовать в виде программ для ЭВМ.

Весьма удобный алгоритм численного решения линейных разностных краевых задач — известный метод прогонки (см. [30], с. 176—186). Шаг интегрирования τ можно выбирать, руководствуясь некоторыми соображениями оптимальности. Например, анализируя величину невязки приближений на каждом шаге [31], можно увеличивать или уменьшать шаг интегрирования τ в зависимости от изменения невязки. Тем самым существенно ускорится процесс сходимости приближений к решению разностной задачи, аппроксимирующей исходную.

3. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Этот параграф посвящен изложению приближенного метода решения задачи Дирихле: найти функцию $z(x, y)$, удовлетворяющую уравнению

$$\partial^2 z / \partial x^2 + \partial^2 z / \partial y^2 = f(x, y, z) \text{ в области } G$$

и $z = \varphi(s)$ на границе Γ области G , где $\varphi(s)$ и $f(x, y, z)$ — заданные функции, а область G плоскости XOY ограничена замкнутой гладкой кривой Γ . Подобные задачи возникают в различных разделах физики, например: в теории упругости и пластичности [32], при изучении пространственных околосвуковых движений газа [33], в магнитной гидродинамике [24, 34], в стационарной теории теплового взрыва [35] и пр. Наряду с аналитическими и качественными исследованиями краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений большое значение имеет разработка методов численного решения этих задач.

Некоторые работы посвящены исследованию сходимости метода конечных разностей. Так, С. Партер [36] рассматривает условия сходимости конечноразностной задачи, аппроксимирующей задачу Дирихле. На функцию $f(x, y, z)$ накладываются ограничения типа условия Гельдера (по переменным x, y) и типа условия Липшица по переменной z . При дополнительных условиях «слабой нелинейности» на функцию f исходная задача Дирихле сводится к упрощенной, и для нее, используя принцип максимума, доказывает сходимость разностного метода.

М. П. Сапагovas [37] для решения некоторых нелинейных задач теории упругости и пластичности, описываемых квазилинейными эллиптическими уравнениями с дивергентной правой частью, развил итерационный метод. Отметим, что задача Дирихле для квазиэллиптического уравнения второго порядка изучалась в работе [38]. Для приближенного решения этой задачи был применен метод прямых. Доказаны разрешимость и сходимость метода. Имеется большое количество работ, посвященных применению обобщенного метода Ньютона, разработанного Л. В. Канторовичем [4]. С помощью этого метода удалось доказать разрешимость задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения при «малой» нелинейности в коэффициентах и для некоторых нелинейных уравнений специального вида.

И. П. Мысовских [39] исследует задачу Дирихле для уравнения

$$\Delta z = k(x, y) z^2.$$

Доказывается существование решения этой задачи и сходимость к нему метода Ньютона.

При построении методов приближенного решения задачи Дирихле удобно использовать эволюционные процессы с введением в задачу непрерывного дополнительного параметра. Например, Н. А. Шидловская [26] указала возможность применения метода вариации параметра для решения следующей краевой задачи:

$$\Delta z + f(x, y, z, z_x, z_y) = 0;$$

$$z|_{\Gamma} = \varphi(s).$$

Непрерывный аналог метода Ньютона является одним из возможных методов введения непрерывного параметра. При его дискретной интерпретации на основе метода Эйлера (п. 4) нелинейная задача сводится к решению последовательности линейных эллиптических краевых задач. Это позволяет воспользоваться широко развитыми методами численного решения краевых задач для линейных эллиптических уравнений. Здесь прежде всего следует отметить результаты А. П. Тихонова и А. А. Самарского [40], Н. Н. Яненко [41], В. Вазова и Дж. Форсайта [42]. Новейшей работой в этой области является монография А. А. Самарского [43]. Ниже на основании работ [44, 45] показывается, как метод стабилизации по параметру применяется к решению сформулированной задачи.

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение

$$\Delta z(x, y) + f(x, y, z) = 0, \tag{31}$$

где Δ — оператор Лапласа; $f(x, y, z)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Ищем решение уравнения (31), заданного в ограниченной области G , удовлетворяющее на границе Γ условию

$$z(x, y)|_{\Gamma} = 0. \tag{32}$$

Предполагаем, что граница Γ области G достаточно гладкая.

Рассмотрим полное линейное нормированное пространство $X(G, H)$ дважды непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $\bar{G} = G + \Gamma$ функций $z(x, y)$, обращающихся в нуль на границе, и таких, что вторые производные от $z(x, y)$ удовлетворяют в \bar{G} условию Гельдера с показателями λ ($0 < \lambda < 1$). Норма $z(x, y)$ в пространстве $X(G, H)$ определена так:

$$\|z(x, y)\|_X = \sum_{l=0}^2 \sum_{m=0}^l \max_{\bar{G}} \left| \frac{\partial^l z(x, y)}{\partial x^m \partial y^{l-m}} \right| + H_{z_{x^2}}'' + H_{z_{xy}}'' + H_{z_{y^2}}'', \tag{33}$$

где $H_{z_{x^2}}''$, $H_{z_{xy}}''$, $H_{z_{y^2}}''$ — нижние грани констант Гельдера с показателем λ соответственно для функций $\partial^2 z / \partial x^2$, $\partial^2 z / \partial x \partial y$, $\partial^2 z / \partial y^2$ в области \bar{G} . Введем банахово пространство $Y(G, H)$ непрерыв-

ных в \bar{G} функций $w(x, y)$, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем λ . Норму в $Y(G, H)$ определим соотношением

$$\|w(x, y)\|_Y = \max_{\bar{G}} |w(x, y)| + H_w, \quad (34)$$

где H_w — нижняя грань констант Гельдера для функции $w(x, y)$ в области \bar{G} .

Теорема 4. Пусть в области D

$$\|z - z^*\|_X < M \quad (35)$$

пространства $X(G, H)$ краевая задача (31) — (32) имеет, и притом единственное, решение $z^*(x, y)$. Пусть, далее, $f(x, y, z)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Предположим, что для любого $z(x, y) \in D$ и любого $w(x, y) \in Y(G, H)$ краевая задача относительно функции $v(x, y)$:

$$\begin{cases} \Delta v(x, y) + f'_z(x, y, z)v(x, y) = w(x, y); & (36) \\ v(x, y)|_{\Gamma} = 0 & (37) \end{cases}$$

имеет единственное решение $v(x, y) \in X(G, H)$. Тогда существует сфера S :

$$\|z - z^*\|_X \leq \varepsilon \quad (\varepsilon < M), \quad (38)$$

такая, что для любого $z_0(x, y) \in S$ в цилиндре

$$\Omega = G \times [0 \leq t < \infty)$$

существует единственное решение системы уравнений

$$\begin{cases} \Delta v(x, y, t) + f'_z(x, y, z)v(x, y, t) = -[\Delta z + f(x, y, z)]; \\ \partial z(x, y, t)/\partial t = v(x, y, t), \end{cases} \quad (39)$$

удовлетворяющее условиям:

$$\begin{cases} v(x, y, t)|_B = 0; \\ z(x, y, t)|_{t=0} = z_0(x, y); z_0(x, y)|_{\Gamma} = 0, \end{cases} \quad (40)$$

причем B — боковая поверхность цилиндра Ω , и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(x, y, t) - z^*(x, y)\|_X = 0. \quad (41)$$

Заметим, что $z_0(x, y)$ — начальное приближение искомого решения задачи Дирихле. Чем точнее выбрано $z_0(x, y)$, тем быстрее «во времени t » будет получено решение с требуемой точностью.

Подробное доказательство теоремы дается в работе [44]. Здесь же лишь отметим, что для ее доказательства надо проверить, что все условия теоремы 2, сформулированной для банахова пространства, выполняются. При этом существенно используется теорема об ограниченности обратного оператора (см., напри-

мер, работу [3], с. 157), а также теоремы о непрерывности по Гельдеру решения эллиптического уравнения и равномерности оценки величины H_{ν} для решения задачи Дирихле (36) — (37) [46, 47].

Схема численного решения задачи (39) — (40)

Выберем шаг движения по параметру t , обозначим его τ . Разобьем область $\Omega_T = G \times [0 \leq t \leq T]$ на n частей плоскостями, параллельными плоскости XOY : $t_0 = 0$; $t_1 = \tau$; $t_2 = 2\tau$, . . . , . . . , $t_n = n\tau = T$. Заменим второе уравнение системы (39) разностным соотношением

$$[z_{k+1}(x, y) - z_k(x, y)]/\tau = v_k(x, y),$$

где $z_k(x, y)$, $v_k(x, y)$ — приближенные значения в точке $t = t_k$ функций $z(x, y, t_k)$, $v(x, y, t_k)$ соответственно.

Если функция $z_k(x, y)$ известна на слое $t = t_k$, то функция $v_k(x, y)$ на этом слое определяется решением линейной краевой задачи относительно $v_k(x, y)$ как функции x, y :

$$\Delta v_k(x, y) + f'_z(x, y, z_k(x, y))v_k(x, y) = -[\Delta z_k(x, y) + f(x, y, z_k(x, y))]; \quad (42)$$

$$v_k(x, y)|_{\Sigma} = 0. \quad (43)$$

Найдя отсюда $v_k(x, y)$ любым известным методом, например методом сеток [12], определим функцию $z_{k+1}(x, y)$ на следующем слое $t = t_{k+1}$:

$$z_{k+1}(x, y) = z_k(x, y) + \tau v_k(x, y).$$

Поскольку на слое $t = t_0$ функция $z(x, y, 0) = z_0(x, y)$ задана, то процесс вычисления функций $z_k(x, y)$ и $v_k(x, y)$ полностью определен. Если допустить, что решение краевой задачи (42) — (43) осуществляется точно, то при $\tau \rightarrow 0$ получим сходимость приближенного решения к точному [6]. Полную дискретную схему численного решения исходной задачи можно получить методом, аналогичным описанному в п. 2.

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этом параграфе рассмотрим применение непрерывного аналога метода Ньютона к численному решению нелинейных интегральных уравнений. В физике элементарных частиц решение некоторых проблем сводится к нелинейным интегральным уравнениям и системам. Сюда относятся задачи прохождения света через вещество, частотная зависимость диэлектрической проницаемости, рассеяние элементарных частиц типа $a + b \rightarrow a + b$ [48], определения форм-факторов элементарных частиц [49]. Важными направ-

лениями в исследовании этих задач являются доказательство их разрешимости с помощью аналитических методов [50, 51] и отбор решений, имеющих физический смысл. Необходимость решения нелинейных интегральных уравнений возникает также в физике плазмы [52], нелинейной механике [53] и других разделах физики.

Изучением нелинейных сингулярных интегральных уравнений и применением этих уравнений к граничным задачам теории аналитических функций занимались А. И. Гусейнов [54] и его ученики.

Отметим работы, посвященные численному решению нелинейных интегральных уравнений. Д. Ю. Панов [55] применял метод Чаплыгина; В. П. Ветчинкин [56] комбинировал метод Ньютона с методом последовательных приближений; Д. М. Загадский [57] использовал модификацию метода Ньютона. Б. И. Гехт [58] доказал теоремы о сходимости метода последовательных приближений. Ю. Д. Соколов [59] вводит метод усреднения функциональных поправок и применяет его для решения нелинейных интегральных уравнений и их систем. Н. С. Курпель [60] рассматривает обобщенный алгоритм метода Соколова и приводит новые достаточные условия сходимости последовательных приближений и соответствующие оценки погрешности. Используя теорему Л. В. Канторовича [1] о сходимости метода Ньютона, И. П. Мысовских [61] выводит оценку погрешности, возникающей при решении нелинейного интегрального уравнения методом механических квадратур. А. М. Мамедов [62] переносит теоретико-числовые методы Коробова, разработанные для приближенного решения линейных уравнений, на нелинейный случай. Б. А. Бельтюков и Г. С. Шилько [63] предложили метод приближенного решения уравнения Гаммерштейна

$$\varphi(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s, t, \varphi(t)) dt \quad (b > 0)$$

в виде ряда по степеням μ :

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{n+1} \varphi^{(1, n)}(t).$$

Неопределенный положительный параметр μ вводится в уравнение в качестве верхнего предела интеграла.

Д. Ф. Давиденко [5] применяет предложенный им ранее метод вариации параметра; он приводит итерационные формулы повышенной точности для определения (уточнения) численных решений нелинейных интегральных уравнений вида

$$\varphi(x) = \int_a^b F(x, t, \varphi(t)) dt + f(x).$$

Итерационные формулы строятся на основании произвольной квадратурной формулы.

В дальнейшем излагается применение метода введения непрерывного параметра по работам [7, 64]. Здесь дается разностная схема, аналогичная разностной схеме из работы Д. Ф. Давиденко [5]. В теоремах 5 и 6 будет выяснен вопрос о разрешимости разностных уравнений и о сходимости решения разностного уравнения к решению исходного уравнения.

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$u(x) = \int_a^b f[x, \xi, u(\xi)] d\xi, \quad a \leq x \leq b, \quad (44)$$

где $f(x, \xi, u)$ — заданная дважды, непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов; $u(x)$ — искомая функция.

Решение ищем в пространстве функций $C_{[a,b]}^L$, в котором норма функции определяется так

$$\|u\| = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)| + L_u, \quad (45)$$

где L_u — нижняя грань констант Липшица функции $u(x)$ на $[a, b]$. Считаем, что уравнение (44) в $C_{[a,b]}^L$ имеет по крайней мере одно решение; если имеется несколько решений, то они предполагаются изолированными. Можно показать, что нелинейный оператор

$$\Phi[u(x)] \equiv u(x) - \int_a^b f[x, \xi, u(\xi)] d\xi \quad (46)$$

переводит элементы пространства $C_{[a,b]}^L$ в элементы этого же пространства.

Первая и вторая производные Фреше оператора $\Phi[u]$ определяются формулами:

$$\begin{aligned} \Phi'[u]v &= v(x) - \int_a^b f'_u[x, \xi, u(\xi)] v(\xi) d\xi; \\ \Phi''[u]vw &= - \int_a^b f''_{u^2}[x, \xi, u(\xi)] v(\xi) w(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где $u, v, w \in C_{[a,b]}^L$. В силу предположения о непрерывности вторых производных функции $f(x, \xi, u)$ получаем непрерывность $\Phi'[u]$ и $\Phi''[u]$ в каждой точке $u \in C_{[a,b]}^L$. Пользуясь оператором Φ , задачу о решении уравнения (44) сформулируем так: найти решение уравнения $\Phi[u(x)] = 0$ в пространстве функций $C_{[a,b]}^L$ в предположении, что такие решения (одно или несколько) существуют. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 5. Пусть $f(x, \xi, u)$ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Пусть далее в открытой ограниченной области G пространства $C_{[a,b]}^L$ существует единственное решение $u^*(x)$ уравнения (44). Предположим, что для любой фиксированной функции $\bar{u}(x) \in G$ линейное уравнение

$$[v(x) - \int_a^b f_u[x, \xi, \bar{u}(\xi)] v(\xi) d\xi = 0 \quad (47)$$

имеет только тривиальное решение $v(x) \equiv 0$? Тогда существует сфера $S: \|u - u^*\| \leq R$, принадлежащая области G , и такая, что для любой функции $u_0(x) \in S$ в полуполосе $\Omega = [a, b] \times [0 \leq t < \infty)$ существует единственное решение системы уравнений

$$\begin{cases} v(x, t) - \int_a^b f_u[x, \xi, u(\xi, t)] v(\xi, t) d\xi = \\ = \int_a^b f[x, \xi, u(\xi, t)] d\xi - u(x, t); \\ \partial u(x, t) / \partial t = v(x, t) \end{cases} \quad (48)$$

$$\partial u(x, t) / \partial t = v(x, t) \quad (49)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (50)$$

причем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u^*(x). \quad (51)$$

Сходимость в этом соотношении понимается в смысле метрики (45) пространства $C_{[a,b]}^L$. Здесь $u_0(x)$ — начальное приближение к искомому решению уравнения (44).

Доказательство теоремы 5 сводится к проверке выполнения условий теоремы 2, сформулированной для банахова пространства.

В основе разностной схемы лежит непрерывный аналог метода Ньютона, т. е. разностная схема строится для задачи (48) — (50). Решение этой задачи методом Эйлера проводится в два этапа:

1) приближенное решение линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода (48) относительно неизвестной функции $v(x, t)$ при фиксированном t . При заданном t функция $u(x, t)$, входящая в (48), считается известной;

2) выполнение одного шага интегрирования по переменной t по формуле

$$u(x, t + \tau) = u(x, t) + \tau v(x, t).$$

Далее предполагается, что все условия теоремы 5 выполняются. Разобьем $[a, b]$ на N равных частей с помощью точек деления:

$$a = x_0; x_1 = x_0 + h; x_2 = x_1 + h, \dots; x_N = x_{N-1} + h = b; \\ h = (b - a)/N. \tag{52}$$

Каждой функции $u(x)$ из $C^L_{[a,b]}$ сопоставим $N + 1$ число: $u(x_0), u(x_1), \dots, u(x_N)$ — координаты вектора $u_h = (u_0, u_1, \dots, u_N)$, где $u_i = u(x_i)$, $0 \leq i \leq N$, который назовем сеточным образом функции $u(x)$. В свою очередь, сеточному образу u_h поставим в соответствие полигон $u_h(x)$, построенный по узловым точкам. Функция $u_h(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица. Под нормой вектора u_h будем понимать норму функции $u_h(x)$ в метрике $C^L_{[a,b]}$. Пользуясь какой-нибудь квадратурной формулой, например формулой трапеций или Симпсона, заменим интеграл в (44) суммой, соответствующей точкам деления (52). Получим систему нелинейных уравнений относительно u_0, u_1, \dots, u_N :

$$u_i = \sum_{k=0}^N A_k^{(N)} f[x_i, \xi_k, u_k], \quad i = 0, 1, \dots, N. \tag{53}$$

Если взять N достаточно большим, т. е. h достаточно малым, а в качестве начального значения взять $u_0 = (u_0^*, u_1^*, \dots, u_N^*)$ — сеточный образ функции $u^*(x)$, являющейся решением уравнения (44), и применить к системе (53) непрерывный аналог метода Ньютона и теорему 1 из работы [2], то можно доказать, что эта система разрешима. Рассмотрим оператор

$$\varphi(u) \equiv u_i - \sum_{k=0}^N A_k^{(N)} f[x_i, \xi_k, u_k] = z_i, \quad i = 0, 1, \dots, N. \tag{54}$$

В работе [7] доказано, что $\varphi(u)$ имеет непрерывную производную Фреше $\varphi'(u)$ и что оператор $\varphi'(u)$ имеет ограниченный обратный, т. е. $\|[\varphi'(u)]^{-1}\| \leq B$, если N достаточно велико и если в качестве начального значения взять сеточный образ функции $u(x)$ из сферы $S: \|u - u^*\| \leq R, S \subset G$. Из гладкости функции $f(x, \xi, u)$ вытекает существование ограниченной второй производной Фреше $\varphi''(u)$. Рассмотрим сферу S_1 :

$$\|u - u^*\| \leq B \|\varphi(u^*)\|. \tag{55}$$

Ясно, что $\|\varphi(u^*)\| \leq Mh^p$, где $M = \text{const} > 0, p > 1$. Сфера (55) при достаточно малом h будет принадлежать S . Значит, теорема 1 применима к системе (53). Эта система однозначно разрешима в сфере (55), и ее решение можно получить как решение задачи Коши:

$$\begin{cases} du/dt = -[\varphi'(u)]^{-1} \varphi(u); \\ u(x, 0) = u^*(x). \end{cases}$$

Зная, что решение системы (53) существует и единственно, а также используя результаты работы [7], можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 6. Рассмотрим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} w_{ij} - \sum_{k=0}^N A_k^{(N)} f'_u [x_i, \xi_k, u_{kj}] w_{kj} = \\ = \sum_{k=0}^N A_k^{(N)} f [x_i, \xi_k, u_{kj}] - u_{ij}; \\ u_{i, j+1} - u_{ij} = w_{ij} \tau; \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad j = 0, 1, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

где τ — достаточно мало, N — достаточно велико, с заданным начальным условием:

$$u_0 = (u_{00}, u_{10}, \dots, u_{N0}). \quad (57)$$

Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что если $\|u_0 - u^{**}\| \leq \varepsilon$, где u^{**} — решение системы (53), то система (56) с начальным условием (57) однозначно разрешима для всех $i = 0, 1, 2, \dots, N$ и $j = 0, 1, 2, \dots$. Решение $w_j = (u_{0j}, u_{1j}, \dots, u_{Nj})$ задачи (56) — (57) обладает тем свойством, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |u_j - u^{**}| = 0.$$

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В некоторых задачах, возникающих в нелинейной теории поля и статистической теории ядра, рассматриваются следующие крайние задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

1. Найти решения $y = y(x)$ уравнения

$$y'' + 2y'/x - y + y^n = 0, \quad n > 1, \quad x \geq 0, \quad (58)$$

удовлетворяющие условиям

$$y(0) = y_0 < \infty, \quad y'(0) = 0; \quad y(\infty) = 0, \quad (59)$$

где y_0 — неизвестный положительный параметр.

2. Найти решения $\eta = \eta(x)$ уравнения

$$\eta'' = \eta - \eta^n / x^{n-1}, \quad n > 1, \quad x \geq 0, \quad (60)$$

удовлетворяющие условиям

$$\eta(0) = 0, \quad \eta'(0) = \alpha < \infty, \quad \eta(\infty) = 0, \quad (61)$$

где α — неизвестный положительный параметр.

Решение поставленных задач носит название, частицеподобных [10]. Уравнение (60) получается из уравнения (58) заменой $\eta(x) = xy(x)$. Решения уравнения (58) с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0 \quad (62)$$

соответствуют решениям уравнения (60) с начальными условиями:

$$\eta(0) = 0; \quad \eta'(0) = \alpha = y_0. \quad (63)$$

Задачи (58) — (59) и (60) — (61) при $n = 2$ и 3 возникают в нелинейной теории поля при изучении взаимодействия элементарных частиц. При $n = 3/2$ уравнение (58) представляет собой уравнение типа Томаса — Ферми, и соответствующая задача (58) — (59) возникает в статистической теории ядра. Там же встречается более сложная задача:

$$\eta_i'' = m_i \eta_i - k_i \frac{(\eta_2 - \eta_1)^n}{x^{n-1}}, \quad n > 1, \quad x \geq 0 \quad (i = 1, 2);$$

$$\eta_i(0) = 0, \quad \eta_i'(0) = \alpha_i > 0, \quad \eta_i(\infty) = 0.$$

Задача (60) — (61) для $n = 2$ и 3 рассматривалась некоторыми авторами, например [10, 65—68]. В этих работах высказываются некоторые соображения, относительно существования и свойств решений данной краевой задачи и приведены результаты машинного счета. В работе [10] численным методом найдено пять значенй начальной производной α , соответствующих пяти различным решениям задачи.

В работе [69] задача (60) — (61) сведена к краевой для линейного уравнения

$$y'' = y - \varepsilon^{n-1} y / x^{n-1}, \quad \varepsilon > 0$$

некоторым методом линеаризации нелинейных уравнений. Однако используемый метод линеаризации обоснован не полностью.

В работах [70—72] установлено существование решения задачи (58) — (59) для n , удовлетворяющих условию $1 < n \leq 4$. В работах [70] доказывается существование решения при $1 < n \leq 3$. Одновременно здесь приводится качественное исследование поведения решений, позволяющее краевую задачу на полупрямой приближенно заменить краевой задачей для конечного промежутка. Последнее обстоятельство используется при численном нахождении решений.

В работе [71] существование решений краевой задачи устанавливается исследованием минимума некоторого функционала. Такой метод оказывается эффективным при исследовании существования решений, но не позволяет исследовать качественное поведение решений, что важно при выборе начальных приближений при численном решении. В работе [73] доказывается, что при $n \geq 5$ решения краевой задачи отсутствуют. Таким образом, задача (58) — (59) не имеет решений при $0 < n \leq 1$ и $n \geq 5$. При $1 < n \leq 4$ поло-

жительные решения существуют. При $4 < n < 5$ вопрос о существовании решений краевой задачи не исследован.

Сформулированные здесь задачи, помимо самостоятельного физического значения, представляют большой математический интерес. В данных задачах вопросы численного нахождения решений тесно переплетаются с исследованиями качественного характера. Именно на их основе можно наиболее эффективно применить численный метод, разработанный на базе непрерывного процесса Ньютона. При численном решении этих задач особенно четко выделяются основные аспекты данного численного метода: необходимость тщательного предварительного анализа задачи для построения эффективных начальных приближений и широкие возможности метода, позволяющие решать задачи, обладающие счетным множеством решений.

Приведем вначале основные результаты качественного анализа задач, выполненного в работах [70, 73, 74]. Они в основном относятся к краевой задаче (60) — (61), но, как уже отмечалось, переносятся и на задачу (58) — (59).

Поскольку решения задач (58) — (59) и (60) — (61) принадлежат множеству решений задачи Коши: (58), (62) и (60), (63) соответственно, — был установлен ряд фактов, относящихся к решениям последних. В работе [73] показано, что решения задач (58), (62) и (60), (63) существуют, единственны и продолжаемы для всех $x \geq 0$ и рациональных n (при $n = (2p + 1)/2q$ считаем $\eta'' = 0$ для $\eta < 0$). Решения вместе со своими первыми производными непрерывно зависят от изменения начальных значений y_0 и α . Здесь же, а также в работе [74] доказано, что в окрестности сингулярной точки $x = 0$ решение задачи Коши, а, следовательно, и краевой задачи можно представить сходящимся степенным рядом. Последнее обстоятельство существенно при построении алгоритмов численного решения рассматриваемых задач. Методика доказательства изложенных утверждений позволяет установить ряд дополнительных полезных фактов относительно поведения решений задачи (60), (63). Сюда относятся оценки первого максимума решения в зависимости от начальной производной α , а также характер дальнейшего поведения решения. Более подробно эти факты изложены в работе [70].

Относительно решения краевых задач (58) — (59) и (60) — (61) имеет место следующая теорема существования [75].

Теорема 7. Для любого целого $i \geq 0$ и любого $n = (2p + 1)/(2q + 1)$, p и q — натуральные числа, $1 < n < 4$ существуют решения задач (58) — (59) и (60) — (61), имеющие в точности i нулей на интервале $0 < x < \infty$.

Показано, что любое такое решение неустойчиво по Ляпунову. Заметим, что при $n \neq (2p + 1)/(2q + 1)$ задачи (58) — (59) и (60) — (61) обладают только положительными решениями.

При численном нахождении частицеподобных решений краевую задачу на полуоси можно на основании результатов работы [70] приближенно заменить задачей на конечном отрезке $[0, b]$, где $b > 0$ выбрано достаточно большим.

В случае $n = 3$ численное исследование уравнения (60) с помощью непрерывного аналога метода Ньютона проведено в работе [31]. Были вычислены частицеподобные решения, а также проведены исследования зависимости вычислительного процесса от выбора начальных условий и шага интегрирования τ_k в схеме Эйлера. При построении начальных приближений использовались оценки, приведенные в [70], для экстремумов решений. Из опыта вычислений оптимальным алгоритмом выбора τ_k , обеспечивающим сходимость процесса в случае вычисления частицеподобных решений с несколькими нулями, следует, что изменение шага пропорционально изменению невязок разностных уравнений на предыдущих шагах.

Представляет интерес изучение процесса сходимости решений краевых задач на конечном отрезке $[0, b]$, $y(0) = y(b) = 0$ ($b \rightarrow \infty$) к частицеподобному решению. С помощью разработанного алгоритма была решена последовательность краевых задач для уравнения (60) ($n = 3$) при $b = 2, 4, 6, 8, 10, 12$. Вычислялись положительные решения. На отрезке $[0, 2]$ в качестве начального приближения бралась функция $\eta_0(x) = 1,3 \sin \pi x/2$. На каждом последующем отрезке начальная функция строилась из полученного решения краевой задачи на предыдущем отрезке с продолжением, тождественным нулю на оставшейся части отрезка. Результаты численного эксперимента приведены в табл. 1 [31]. Совпадающие знаки выделены.

Таблица 1

x	$b = 2$	$b = 4$	$b = 8$	$b = 10$	$b = 12$
0,3	1,083713	1,025938	1,024517	1,024516	1,024516
0,6	1,156584	1,207219	1,208096	1,208096	1,208096
0,9	0,887350	1,018838	1,021596	1,021597	1,021597
1,2	0,602958	0,786233	0,790178	0,790179	0,790179
1,5	0,355318	0,589509	0,594513	0,594515	0,594515
1,8	0,137357	0,436771	0,443066	0,443068	0,443068
2,1	0,0	0,320983	0,329033	0,329035	0,329035
2,4	0,0	0,233528	0,244007	0,244011	0,244011
2,7	0,0	0,167019	0,180849	0,180853	0,180853
3,0	0,0	0,115862	0,134004	0,134010	0,134010
3,3	0,0	0,074614	0,099281	0,099289	0,099289

Из этой таблицы видно, что при вычислении положительных частицеподобных решений полуось $0 \leq x < \infty$ с достаточной точностью можно заменить конечным отрезком $[0, 10]$.

6. ВЫВОД ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ИЗ УСКОРИТЕЛЯ

Важной проблемой при создании ускорителя является подбор его параметров таким образом, чтобы обеспечить требуемые свойства выведенного из ускорителя пучка.

В работах [76—84] метод расчета вывода пучка обычно сводится к решению задачи Коши для некоторого дифференциального уравнения, описывающего движение частицы в магнитном поле ускорителя. Задаются несколько параметров отклоняющих магнитов и рассчитывается траектория частиц, соответствующая выбранным значениям параметров. Если получаемые траектории не удовлетворяют налагаемым на них требованиям, то задаются другие параметры отклоняющих магнитов и вновь решается задача Коши. Процесс подбора параметров продолжается до тех пор, пока траектории частицы не будут удовлетворять поставленным требованиям. Ясно, что такой (интуитивный) подбор параметров требует расчета очень большого числа траекторий и, следовательно, большой затраты времени на ЭВМ. К тому же и точность искомых параметров оказывается невысокой.

Интересная математическая постановка задачи оптимизации параметров фокусирующих систем заряженных частиц содержится в работе [85]. Здесь развивается алгоритм выбора параметров магнитной системы, обеспечивающих в определенном смысле оптимальные условия фокусировки заряженных частиц. Задача решается в одночастичном приближении. В основе алгоритма лежит построение некоторого вариационного функционала, экстремальные значения которого определяются численными методами. Здесь рассмотрим новый численный метод решения задачи вывода пучка заряженных частиц из ускорителя. Впервые математическая постановка задачи вывода пучка из ускорителя сводится к решению краевых задач для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. С помощью этого метода, опирающегося на непрерывный аналог метода Ньютона, нужные значения параметров находятся автоматически, исключая вмешательство человека. В сочетании с быстродействующей программой для ЭВМ это дает большую экономию времени при расчетах и высокую точность конечных результатов.

Дадим упрощенную постановку нашей задачи. Подробная постановка этой задачи и результаты численных расчетов приводятся в работах [9]. Движение заряженной частицы в медианной плоскости ускорителя описывается уравнением

$$\rho'' = 2\rho'^2 / (R_s + \rho) + R_s + \rho - (R_s + \rho)^2 F(\rho) / R_1 = -f(\varphi, \rho, \rho'). \quad (64)$$

Здесь $\rho = \rho(\varphi)$ — искомая функция; φ — аргумент; $R = R_s$ — равновесная орбита; $\rho = \rho(\varphi)$ — отклонение частицы от равно-

весной орбиты; R_1 — заданная константа; $F = F(\rho)$ — заданная функция, описывающая магнитное поле ускорителя.

Требуется найти решение уравнения (64), удовлетворяющее краевым условиям:

$$\rho(\varphi_1) = \rho_1; \quad \rho(\varphi_2) = \rho_2, \tag{65}$$

где ρ_1 и ρ_2 — заданные константы. Решение ищем в промежутке $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$. Краевые условия (65) означают, что требуется частицу из заданной точки (φ_1, ρ_1) ускорителя переместить в другую заданную точку (φ_2, ρ_2) . Этого можно достичь с помощью начального наклона $\rho' |_{\varphi=\varphi_1} = \rho'_0$ кривой. Требуемый наклон ρ'_0 при $\varphi = \varphi_1$ можно обеспечить за счет установки отклоняющего магнита в области $\varphi < \varphi_1$. После решения задачи (64) — (65) находим $d\rho/d\varphi$ в точке $\varphi = \varphi_1$. Это и позволит определить параметры отклоняющего магнита, устанавливаемого в области $\varphi < \varphi_1$.

Задача (64) — (65) в соответствии с описанным методом Ньютона для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (см. п. 2) сводится к следующему.

Надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} v''_{\varphi^2} + \mathcal{P}v'_{\varphi} + Qv = R; \end{cases} \tag{66}$$

$$\begin{cases} \rho'_i = v, \end{cases} \tag{67}$$

где $v = v(\varphi, t)$ и $\rho = \rho(\varphi, t)$ — искомые функции от φ и t , причем $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $0 \leq t < +\infty$; $\mathcal{P} = f''_{\rho}$; $Q = f'_{\rho}$; $R = -[\rho''_{\varphi^2} + f(\varphi, \rho, \rho')]$ — известные функции от φ, ρ, ρ' .

Система (66) — (67) решается при начальном условии

$$\rho(\varphi, 0) = \rho_0(\varphi), \quad \rho_0(\varphi)_1 = \rho_1, \quad \rho_0(\varphi_2) = \rho_2 \tag{68}$$

и краевых условиях

$$v(\varphi_1, t) = v(\varphi_2, t) = 0. \tag{69}$$

Численное решение поставленной задачи легко реализуется на ЭВМ.

7. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим уравнение Шредингера для радиальной волновой функции (случай $l=0$)

$$u'' + [k^2 - v(x)]u = 0 \quad (k^2 - \text{параметр}) \tag{70}$$

с начальными условиями

$$u(0, k) = 0, \quad u'(0, k) = k. \tag{71}$$

Вещественная функция $v(x)$ ($0 < x < \infty$), называемая потенциалом, предполагается достаточно гладкой и удовлетворяющей условию

$$\int_0^{\infty} x |v(x)| dx < \infty. \tag{72}$$

Решение $u(x, k)$ задачи (70)–(71) при выполнении условия (72) для больших значений x имеет асимптотику

$$u(x, k) = A(k) \sin[kx + \delta(k)] + O(1), \quad (73)$$

где $A(k)$ и $\delta(k)$ — непрерывные функции параметра k ; $A(k)$ называется предельной амплитудой, $\delta(k)$ — предельной фазой.

Обратная задача теории рассеяния состоит в нахождении потенциала $v(x)$ по заданной предельной фазе $\delta(k)$ ($0 \leq k < \infty$). Первые важные результаты в исследовании обратной задачи принадлежат Н. Левинсону [86]. В дальнейшем наряду с этой постановкой обратной задачи будем пользоваться еще и следующей. Вместо уравнения (70) рассмотрим фазовое уравнение

$$y'(x, k) = -v(x) \sin^2[kx + y(x, k)]/k \quad (k \text{ — параметр}), \quad (74)$$

которое впервые получил Г. Ф. Друкарев [87]. Получение уравнения (74) из уравнения (70) можно найти также в работе [88].

Начальные условия (71) при этом переходят в начальное условие

$$y(0, k) = 0 \quad (75)$$

для уравнения (74).

При выполнении условия (72) решение задачи (75)–(76) обладает свойством:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x, k) = \delta(k), \quad (76)$$

где $\delta(k)$ — предельная фаза. Теперь обратная задача ставится так: по заданной функции $\delta(k)$ ($0 \leq k < \infty$) найти функцию $v(x)$ ($0 < x < \infty$), такую, чтобы решение $y(x, k)$ задачи Коши (74)–(75) с потенциалом $v(x)$ давало бы, в силу соотношения (76), заданную предельную фазу $\delta(k)$.

Рассмотрим вопросы разрешимости и количества решений обратной задачи теории рассеяния. Вопросу о восстановлении потенциала $v(x)$ в уравнении Шредингера (70) по тем или иным асимптотическим свойствам его решений (например, по предельной фазе или по спектральной функции) к настоящему времени посвящено большое количество работ. Отметим прежде всего известные работы Н. Левинсона [86], И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [89], М. Г. Крейна [90], В. А. Марченко [91]. Подробный обзор результатов по обратной задаче теории рассеяния можно найти в монографии З. С. Аграновича, В. А. Марченко [92], в статье Л. Д. Фаддеева [93], а также в книгах В. де Альфаро, Т. Редже [94], Т. Ю. Ву, Т. Омуре [95], Р. Ньютона [96], Ф. Калоджеро [97].

Например, В. А. Марченко [91] приводит основное интегральное уравнение обратной задачи теории рассеяния, формулирует известные условия о существовании и единственности решения этого уравнения и дает способ восстановления потенциала по изве-

ственным данным рассеяния. Не будем здесь подробно излагать известные результаты, относящиеся к обратной задаче теории рассеяния, а лишь отметим, что на основании этих результатов можно сформулировать условия однозначной разрешимости обратной задачи теории рассеяния.

Для этого требуется, чтобы заданная на промежутке $[0, \infty)$ функция $\delta(k)$ была достаточно гладкой и удовлетворяла условию

$$\delta(0) = \delta(\infty) = 0. \quad (77)$$

Тогда можно однозначно восстановить потенциал в уравнении (74). Итак, чтобы восстановить потенциал, предельная фаза $\delta(k)$ должна быть известна для всех положительных значений k .

Практически же $\delta(k)$ можно определить только на конечном промежутке $[k_1, k_2]$, так как рассеяние всегда наблюдается на конечном интервале энергий. Кроме того, при достаточно больших значениях энергии процесс рассеяния не описывается уравнением Шредингера.

Возникает вопрос: можно ли найти потенциал $v(x)$ приближенно, если предельная фаза $\delta(k)$ задана лишь на конечном промежутке энергий $[k_1, k_2]$. Исследованию этого вопроса посвящены работы В. К. Мельникова [98], В. А. Марченко [91] и Д. Ш. Лундиной, В. А. Марченко [99].

В работах В. А. Марченко, в частности, доказана принципиальная возможность восстановления потенциала (с определенной точностью), если предельная фаза $\delta(k)$ задана на конечном промежутке $[k_1, k_2]$. Вопросами рассеяния в случае комплексного потенциала занимался В. Э. Лянце [100]. Ряд результатов о рассеянии на высокосингулярных потенциалах установили Н. Лимич [101], Ф. С. Рофе-Бекетов, Е. Х. Христов [102].

Рассмотрим приближенный метод решения обратной задачи теории рассеяния и результаты численных расчетов на ЭВМ.

Среди приближенных методов, применявшихся для восстановления потенциала по предельной фазе, отметим методы, основанные на использовании интегрального уравнения Марченко (см., например, работу [103]) или интегрального преобразования Гельфанда — Левитана (см., например, работу [104]). Имеются работы (например, [105]), в которых задавался аналитический вид потенциала, в частности потенциал Юкавы:

$$v(x) = \sum_{k=1}^m A_k \exp(-kx)/x. \quad (78)$$

В этом случае по заданной экспериментальной фазе находят коэффициенты A_k .

Остановимся более подробно на приближенном решении обратной задачи путем введения непрерывного параметра [106]. Урав-

нение (74) с начальным условием (75) и соотношение (76) задают некоторое преобразование P такое, что каждому потенциалу из определенного класса становится в соответствие предельная фаза $\delta(k) = P[v(x)]$.

Наша задача — найти такой потенциал $v^*(x)$, который бы оператором P переводился в заданную экспериментальную фазу $\delta_0(k)$ ($0 \leq k < \infty$), такую, что $\delta_0(0) = \delta_0(\infty) = 0$. Другими словами, необходимо решить операторное нелинейное уравнение

$$\Phi(v) \equiv P(v) - \delta_0(k) = 0 \quad (79)$$

относительно $v(x)$ ($0 < x < \infty$).

Для решения уравнения (79) применим метод введения непрерывного параметра. Рассмотрим уравнение

$$d\Phi[v(x, t)]/dt = -\Phi[v(x, t)] \quad (80)$$

при начальном условии $v(x, 0) = v_0(x)$, где $v_0(x)$ — начальное значение потенциала.

Считая, что потенциалу $v(x, t)$ соответствует расчетная предельная фаза $\delta_p(k, t) = P[v(x, t)]$, и используя (79) и (80), получаем

$$d\delta_p(k, t)/dt = -[\delta_p(k, t) - \delta_0(k)]. \quad (81)$$

Найдем выражение для левой части уравнения (81). Для этого продифференцируем по t обе части уравнения (74) в предположении, что y и v зависят от x и от t . Обозначая $y'_t(x, t) = w(x, t)$ и $v'_t(x, t) = z(x, t)$, находим

$$\begin{aligned} w'_x(x, t) = & -z(x, t) \sin^2[kx + y(x, t)]/k - \\ & -v(x, t) \sin 2[kx + y(x, t)] w(x, t)/k. \end{aligned} \quad (82)$$

Решая это линейное дифференциальное уравнение относительно $w(x, t)$ при очевидном краевом условии $w(0, t) = y'_t(0, t) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} w(x, t) = & (-1/k) \int_0^x z(s, t) \sin^2[ks + y(s, t)] \times \\ & \times \exp \left\{ -(1/k) \int_s^\infty v(\xi, t) \sin 2[k\xi + y(\xi, t)] d\xi \right\} ds, \end{aligned} \quad (83)$$

откуда, переходя к пределу при $x \rightarrow \infty$, будем иметь

$$\begin{aligned} w(\infty, t) = & -(1/k) \int_0^\infty z(s, t) \sin^2[ks + y(s, t)] \times \\ & \times \exp \left\{ -(1/k) \int_s^\infty v(\xi, t) \sin 2[k\xi + y(\xi, t)] d\xi \right\} ds. \end{aligned} \quad (84)$$

Учитывая (76) и то, что $w(x, k, t) = y'_t(x, k, t)$, а также считая возможной перестановку операций предельного перехода (по x) и взятие производной (по t), находим

$$w(\infty, k, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} y'_t(x, k, t) = d\delta(k, t)/dt,$$

т. е. (81) приобретает вид

$$\int_0^{\infty} z(x, t) \sin^2 [kx + y(x, t)] \times \\ \times \exp \left\{ -(1/k) \int_x^{\infty} v(\xi, t) \sin 2 [k\xi + y(\xi, t)] d\xi \right\} dx = \\ = k [\delta_p(k, t) - \delta_a(k)], \tag{85}$$

где

$$z(x, t) = dv(x, t)/dt. \tag{86}$$

Система (85) — (86) решается при начальном условии

$$v(x, 0) = v_0(x). \tag{87}$$

При надлежащем выборе $v_0(x)$ получаем решение уравнения (79) как предел $v(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = v^*(x). \tag{88}$$

Приведем схему численного решения задачи (85) — (86) — (87). Подставляя начальное значение потенциала $v_0(x)$ в уравнение (74) и решая задачу (74) — (75), получаем $y(x, k, 0)$ и $\delta_p(k, 0)$. Затем $v_0(x)$ и найденные функции $y(x, k, 0)$, $\delta_p(k, 0)$ подставляем в уравнение Фредгольма первого рода (85), из которого определяем неизвестную функцию $z(x, 0)$.

Как известно, эта задача является некорректной. Для ее решения можно применить известный метод регуляризации, разработанный А. Н. Тихоновым [107]. Заменим уравнение (86) при $t = 0$ приближенным разностным соотношением

$$[v(x, \tau) - v(x, 0)]/\tau = z(x, 0),$$

откуда

$$v(x, \tau) = v(x, 0) + \tau z(x, 0), \tag{89}$$

где τ — шаг по переменной t .

Описанный цикл вычислений повторяем, используя $v(x, \tau)$, полученное по формуле (89) в качестве нового начального значения потенциала. Процесс вычислений повторяется до тех пор, пока

расчетный потенциал не стабилизируется. Критерием стабилизации можно взять, например, следующее условие:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^m [\delta_p(k_i) - \delta_o(k_i)]^2 / m} \leq \sigma_o,$$

где

$$\sigma_o = C \sqrt{\sum_{i=1}^m (\Delta\sigma_i)^2 / m};$$

$\Delta\sigma_i$ — погрешность фазы $\delta_o(k)$ в точке $k = k_i$; $C \geq 1$. Величина C зависит от промежутка $[k_1, k_2]$, на котором задана предельная

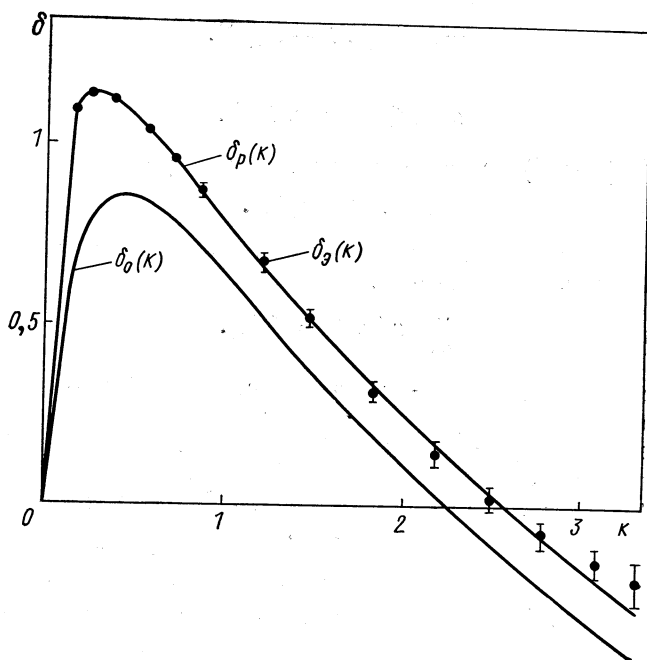


Рис. 2.

фаза, и некоторых других факторов. Приводим результаты численных расчетов на ЭВМ. На рис. 2 приводятся: зависимость экспериментальной фазы $\delta_p(k)$ [108], фазы $\delta_o(k)$, соответствующей начальному значению потенциала $v_0(x)$ и расчетной предельной фазы $\delta_p(k)$, вычисленной по восстановленному потенциалу $v(x)$. Зависимости начального значения потенциала $v_0(x)$, восстановленного

потенциала $v(x)$ приведены на рис. 3. Более подробное описание численных расчетов (таблицы результатов, точность вычислений и пр.) можно найти в работах [7, 106].

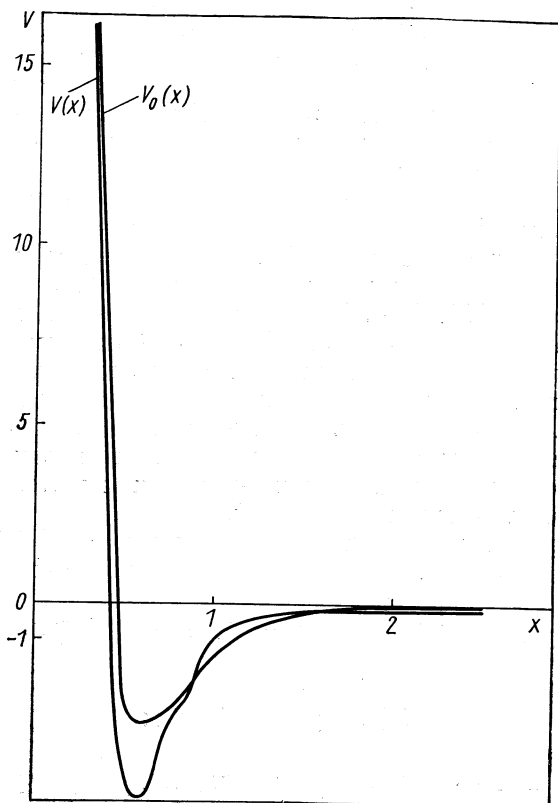


Рис. 3.

8. РАСЧЕТ СПЕКТРА СТАЦИОНАРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПЛАЗМЫ

В настоящее время нелинейная теория взаимодействия турбулентных пульсаций плазмы хорошо разработана [52]. Это позволяет ставить и решать важные для практических приложений вопросы динамики нелинейного развития неустойчивости, изменения во времени спектра турбулентных пульсаций. Согласно современным воззрениям нелинейные эффекты приобретают важное значение в проблемах магнитного удержания плазмы, аномального сопротивления, аномальной теплопроводности и т. п.

[109], т. е. определяют наиболее важные макроскопические характеристики неустойчивой плазмы. К сожалению, чаще всего при попытке приложения теории к объяснению наблюдений приходится ограничиваться грубыми оценками порядков величин для этих характеристик, так как точное аналитическое решение нелинейных интегральных уравнений часто является затруднительным.

Одной из важных проблем теории является расчет спектров стационарной турбулентности плазмы. В работах [110, 111] такой спектр для ленгмюровских пульсаций удалось рассчитать аналитически в асимптотической области.

Для получения полного спектра турбулентности (для всех чисел пульсаций k) использование аналитических методов оказывается практически невозможным. Здесь описывается метод вычислений и приводятся результаты расчетов на ЭВМ полного спектра турбулентности [112, 113]. Исследование проводится с помощью непрерывного аналога метода Ньютона. Основные уравнения, использованные для расчета спектров, те же, что и в работе [110]. Спектр предполагается трехмерным, изотропным и, следовательно, зависящим лишь от модуля k . Учитываются эффекты четырехплазмонного взаимодействия (рассеяние плазмонов на плазмонах), индуцированного рассеяния плазмонов на ионах и поглощения плазмонов из-за кулоновских соударений.

Задача, решение которой было выполнено на ЭВМ, ставится следующим образом. Требуется решить интегральное уравнение:

$$\begin{aligned}
 y(x) = & a(x) \int_0^{\infty} K(\xi) U[y(x), y(x\sqrt{\xi})] d\xi + \\
 & + b \left\{ \int_0^1 d\eta \int_0^{\eta} d\xi L(\xi, \eta) \times \right. \\
 \times & V[\xi, \eta, y(x), y(x\sqrt{\xi}), y(x\sqrt{\eta}), y(x\sqrt{1+\xi-\eta})] + \\
 & + \int_1^{\infty} d\eta \int_{\eta}^{\infty} d\xi M(\xi, \eta) \times \\
 \times & V[\xi, \eta, y(x), y(x\sqrt{\xi}), y(x\sqrt{\eta}), y(x\sqrt{1+\xi-\eta})] + \\
 & + 2 \int_1^{\infty} d\eta \int_0^1 d\xi N(\xi, \eta) \times \\
 \times & W[\xi, \eta, y(x), y(x\sqrt{\xi}), y(\sqrt{\eta}), y(x\sqrt{\xi+\eta-1})], \quad (90)
 \end{aligned}$$

где

$$a(x) = (25,455 (x/x_0)^2); \quad b = 2545,5; \quad x_0 = 0,6;$$

$$K(\xi) = \begin{cases} K_1(\xi) & \text{при } \xi \in [1, \infty); \\ K_2(\xi) & \text{при } \xi \in (0, 1]. \end{cases}$$

Функции $K_1(\xi)$, $K_2(\xi)$, U , V , W , L , M , N задавались формулами (см. работы [110, 112]).

Уравнение (90) имеет кроме тривиального и другие решения. Выделение конкретного решения можно осуществить подходящим выбором начального приближения $y_0(x)$.

Для решения задачи (90) применялся непрерывный аналог метода Ньютона. При этом бесконечный верхний предел в интегралах уравнения (90) заменялся конечным числом R , достаточно большим для того, чтобы на отрезке $[0, R]$ характер поведения искомого решения $y(x)$ хорошо описывался.

Согласно примененному методу уравнение (90) заменяется системой уравнений:

$$\begin{aligned}
 & a(x) \int_0^R K(\xi) [U'_{y(x)} U_1(x, t) + U'_{y(x\sqrt{\xi})} U_1(x\sqrt{\xi}, t)] d\xi + \\
 & + b \left\{ \int_0^1 d\eta \int_0^\eta L(\xi, \eta) [V'_{y(x)} U_1(x, t) + V'_{y(x\sqrt{\xi})} U_1(x\sqrt{\xi}, t) + \right. \\
 & + V'_{y(x\sqrt{\eta})} U_1(x\sqrt{\eta}, t) + V'_{y(x\sqrt{1+\xi-\eta})} U_1(x\sqrt{1+\xi-\eta}, t)] d\xi + \\
 & + \int_1^R d\eta \int_\eta^R M(\xi, \eta) [V'_{y(x)} U_1(x, t) + V'_{y(x\sqrt{\xi})} U_1(x\sqrt{\xi}, t) + \\
 & + V'_{y(x\sqrt{\eta})} U_1(x\sqrt{\eta}, t) + V'_{y(x\sqrt{1+\xi-\eta})} U_1(x\sqrt{1+\xi-\eta}, t)] d\xi + \\
 & + 2 \int_1^R d\eta \int_0^1 N(\xi, \eta) [W'_{y(x)} U_1(x, t) + \\
 & + W'_{y(x\sqrt{\xi})} U_1(x\sqrt{\xi}, t) + W'_{y(x\sqrt{\eta})} U_1(x\sqrt{\eta}, t) + \\
 & + W'_{y(x\sqrt{\xi+\eta-1})} U_1(x\sqrt{\xi+\eta-1}, t)] d\xi \left. \right\} - U(x, t) = \\
 & = a(x) \int_0^R K(\xi) U d\xi + b \left\{ \int_0^1 d\eta \int_0^\eta d\xi LV + \right. \\
 & + \int_1^R d\eta \int_\eta^R d\xi MV + 2 \int_1^R d\eta \int_0^1 d\xi NW \left. \right\}; \\
 & \partial y(x, t) / \partial t = U_1(x, t).
 \end{aligned} \tag{91}$$

Интегро-дифференциальная система (91) решалась с начальным условием

$$y(x, 0) = f(x), \tag{92}$$

$$\text{где } f(x) = \begin{cases} (x^2/x_0^2) \exp(1-x^2/x_0^2), & 0 \leq x \leq x_0; \\ (x_0/x)^3, & x_0 \leq x \leq 4. \end{cases} \quad (93)$$

Здесь $x_0 = 0,6$.

В первое уравнение системы (91) подставляется всюду вместо $y(x, t)$ ее значение при $t = 0$, т. е. $y(x, 0) = f(x)$. Уравнение относительно $V_1(x, 0)$ становится линейным, интегральным. Если входящие в него интегралы заменить при $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) приближенными суммами, то получим линейную алгебраическую систему относительно u_{i1} ($i = 1, 2, \dots, n$), где u_{i1} — приближенное значение $U_1(x_i, 0)$. Найдя из этой системы u_{i1} , подставляем их во второе уравнение системы (91). Заменяем производную $y'_i(x, t)$ при $t = 0$ приближенным выражением $[y(x, \tau) - y(x, 0)]/\tau = y'_i(x, 0)$ и совершим один шаг интегрирования по переменной t . В результате найдем $y_i(\tau)$. После этого весь цикл вычислений повторяется сначала с функцией $y_i(\tau)$ вместо $y_i(0)$.

При $n \rightarrow +\infty$ $y_i(n, \tau)$ сходится к y_i — приближенному решению задачи (90). Практически достаточно было выполнить два шага интегрирования по t , чтобы максимальная разность между результатами первой и второй итераций не превышала 10^{-5} при $\tau = 1$, и счет был прекращен. Малое число шагов по t объясняется хорошим выбором начального приближения, задаваемого формулой (93).

Следует отметить, что ядра интегралов, входящие в систему (90), имеют особенности (обращаются в бесконечность) на некоторых кусках границы области интегрирования. Однако легко убедиться в том, что эти особенности интегрируемы, если $y(x, t) = 0$ (x^2) вблизи точки $x = 0$.

В результате проведенных расчетов было получено приближенное решение уравнения (90), которое приведено в табл. 2.

Полученное решение на промежутке $1,2 \leq x \leq 4$ было приближено методом наименьших квадратов функцией $f(x) = (x_0/x)^v$. В результате v оказалось равным 3,89.

Таблица 2

x	$y(x)$	x	$y(x)$	x	$y(x)$
0,0	0,000	1,0	0,248	2,8	0,010
0,2	0,272	1,2	0,142	3,2	0,007
0,4	0,773	1,4	0,095	3,6	0,005
0,6	0,877	2,4	0,020	4,0	0,003
0,8	0,479				

Сравнение решения уравнения (90), найденного на ЭВМ, с аналитическим решением в асимптотической области позволяет определить границу асимптотической области [112]. В области $x > 4x_0$, где $x_0 = 0,6$, имеет место хорошее совпадение аналитического и численного решений. При $x < 4x_0$ аналитическое решение не дает хорошего приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В. «Успехи мат. наук», 1948, 3, 6, 89; «Успехи мат. наук», 1956, II, 6, 99; Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
2. Гавурин М. К. «Изв. вузов. Серия математика», 1958, 5(6), 18.
3. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.
4. Bittner L. Num. Math., 1954, 6, 161.
5. Давиденко Д. Ф. «Докл. АН СССР», 1953, 88, 601; УМЖ, 1953, 5, 2, 196; УМЖ, 1955, 7, 1, 18; препринты: ИАЭ-2048, 1970, ИАЭ-2081; 1971, ИАЭ-2082, 1971; ИАЭ-2083, 1971; ИАЭ-2099, 1971; «Докл АН СССР», 1965, 162, 499.
6. Жидков Е. П., Пузынин И. В. ЖВМиМФ, 1967, 7, 1086; Препринт ОИЯИ 5-3368, 1967; «Докл. АН СССР», 1968, 180, 18.
7. Жидков Е. П. Некоторые нелинейные задачи современной физики и математические методы их решения. Докторская диссертация, ОИЯИ, Дубна, 1970.
8. Мысовских И. П. «Вестн. Ленинградского ун-та. Сер. мат., физ., хим.», 1953, 11, 25.
9. Жидков Е. П., Рыльцева Т. В., Феоктистов Б. В. Препринт ОИЯИ 5-4821, 1969; ЖВМиМФ, 1970, 10, 1199.
10. Гласко В. Б. и др. ЖЭТФ, 1958, 35, 452.
11. Алиханов С. Г., Сагдеев Р. З., Чеботаев П. З. ЖЭТФ, 1969, 57, 1565; Чеботаев П. З. «Инф. бюл. СО АН СССР», 1970, I, 6, 84.
12. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. т. II, М., Физматгиз, 1959.
13. Сапаговас М. П. В сб. «Вычислительная математика». Вып. I, Киев, 1965, с. 124.
14. Lasota A. Ann. polon. math., 1968, 20, 2, 183.
15. Вашакмадзе Т. С. ЖВМиМФ, 1964, 4, 623.
16. Henciri P. Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations. New York — London, J. Wiley and Sons., Inc., 1962.
17. Lees M. Num. Sol. of Partial. Diff. Eq. 59. Acad. Press. New York — London, 1966.
18. Тамме Э. Э. ЖВМиМФ, 1968, 8, 988.
19. Глинская Н. Н., Мысовских И. П. «Вестн. Ленинградского ун-та. Сер. мат., физ., хим.», 1954, 8, 49.
20. Винокуров В. А., Иванов Ю. Н. «Космические исследования», 1965, 3, 4, 534.
21. Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Т. II. Киев, «Наукова думка», 1966.
22. Бахвалов Н. С. В сб. «Вычислительные методы и программирование». Т. 5, М., Изд-во МГУ, 1966, с. 9.
23. Будак Б. М., Гольдман Н. Л. В сб. «Вычислительные методы и программирование». Т. 6, М., Изд-во МГУ, 1967, с. 19.
24. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. Пер. с англ. М., «Мир», 1968.

25. Friedman A. J. *Math. And Mech.*, 1959, 8, 1, 57.
26. Шидловская Н. А. «Докл. АН СССР», 1956, 107, 213.
27. Жидков Е. П., Чой Зай Хен. Препринт ОИЯИ 11-3427, 1967.
28. Жидков Е. П., Пузынин И. В. Препринт ОИЯИ 5-2959, 1966; В сб. «Материалы совещания по математическим методам решений задач ядерной физики. Дубна, 21—25 июня 1966 г.»; препринт ОИЯИ 5-3263, 16, 1967; «Докл. АН СССР», 1967, 174, 271.
29. Жидков Е. П., Пузынин И. В. ЖВМиМФ, 1969, 9, 442; Препринт ОИЯИ, 5-3963, 1968.
30. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.
31. Пузынин И. В. Приближенное решение краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом введения непрерывного параметра. Канд. дис. ОИЯИ, Дубна, 1969.
32. Кошелев А. И. «Докл. АН СССР», 1953, 91, 1263; «Докл. АН СССР», 1954, 99, 357.
33. Похожаев С. И. а) «Докл. АН СССР», 1960, 134, 769; б) «Докл. АН СССР», 1961, 138, 305.
34. Collatz L. *Numerical solutions of nonlinear differential equations*. John Wiley and Sons, Inc. New York — London — Sydney, 1966, p. 65.
35. Худяев С. И. а) «Докл. АН СССР», 1963, 148, 44; б) «Докл. АН СССР», 1964, 154, 787.
36. Parter S. V. *Numerical solution of partial differential equations*. Academic Press, New York — London, 1966, p. 73.
37. Сапагovas М. «Мат. сб.» 1966, 6, 4, 626.
38. Ляшко А. Д., Карчевский М. М. ЖВМиМФ, 1967, 7, № 3, 677.
39. Мысовских И. П. «Докл. АН СССР», 1954, 94, 995.
40. Тихонов А. Н., Самарский А. А. ЖВМиМФ, 1961, 1, 5.
41. Яненко Н. Н. а) Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1966; б) Введение в разностные методы математической физики. Новосибирск, 1968.
42. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
43. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.
44. Жидков Е. П., Макаренко Г. И. Препринт ОИЯИ Р5-4128, 1968.
45. Жидков Е. П., Макаренко Г. И. «Докл. АН СССР», 1969, 187, 723.
46. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
47. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. Пер. с англ. М., «Мир», 1966.
48. Ширков Д. В., Серебряков В. В., Мещеряков В. А. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. М., «Наука», 1967.
49. Исаев П. С. ЭЧАЯ, 1971, 2, вып. 1, 67.
50. Castillejo L., Dalits R. H., Dyson F. J. *Phys. Rev.*, 1956, 101, 1.
51. Денчев Р. Препринт ОИЯИ Р-901, 1962.
52. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. М., «Наука», 1967.
53. а) Боголюбов Н. Н., Крылов Н. М. Новые методы нелинейной механики. М., Гостехиздат, 1934. б) Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
54. Гусейнов А. И. а) «Мат. сб.», 1947, 20 (62), 239; б) «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1948, 12, 193; в) «Труды Ин-та физ. и мат. АН АзССР», 1948, III; г) «Мат. сб.», 1950, 26 (68), 237.
55. Панов Д. Ю. «Изв. АН СССР», ОМЕН, 1934, № 6, 843.
56. Ветчинкин В. П. «Тр. ЦАГИ». Вып. 192, 1934.
57. Загадский Д. М. «Докл. АН СССР», 1948, 59, 1041.

58. Гехт Б. И. «Тр. Политехнического ин-та». Новочеркасск, 1955, 26, 436.
59. Соколов Ю. Д. УМЖ, 1957, 9, 4, 394; 1963, 15, 1, 58.
60. Курпель Н. С. В сб. «Приближенные методы решения дифференциальных уравнений». Киев, Изд-во АН УССР, 1963, с. 47.
61. Мысовских И. П. а) «Вест. Ленинградского ун-та, Сер. мат., мех. и астр.», 1962, Вып. 2, № 7, 78; б) «Докл. АН СССР», 1963, 153, 30.
62. Мамедов А. М. «Изд. АН АзССР. Сер. физ.-тех. и мат. наук», 1965, № 3, 41.
63. Бельтюков Б. А., Шилько Г. С. Сб. «Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов». Вып. 3. Киев, «Наукова думка», 1969, с. 17.
64. Жидков Е. П., Ососков Г. А. а) «Докл. АН СССР», 1968, 180, 1279; б) Препринт ОИЯИ P5-4338, 1969.
65. Finkelstein R. J., Lelevier R., Ruderman M. Phys. Rev., 1951, 83, 2, 326.
66. Rosen N., Rosenstock N. B. Phys. Rev., 1952, 85, 2, 257.
67. Finkelstein R. J., Fronsdal C., Kaus P. Phys. Rev., 1965, 103, 5, 1571.
68. Singe J. L. Proc. Roy. Arish Acad., 1961, 62, 3, 17.
69. Шушурин С. Ф. Исследование частицеподобных решений нелинейных уравнений поля. Кандидатская диссертация, Москва, 1961.
70. Жидков Е. П., Широков В. П. а) Препринт ОИЯИ P-1319, 1963; б) ЖВМиМФ, 1964, 4, 804.
71. N e h a r i F. Proc. Roy. Arish Acad., 1963, 62, 9, 118.
72. Широков В. П. Препринт ОИЯИ 2006, 1965.
73. Жидков Е. П., Широков В. П., Пузынин И. В. В сб. «Материалы совещания по математическим методам решения задач ядерной физики. Дубна, 17—20 ноября 1964 г.». Препринт ОИЯИ 2005, 1965, с. 13.
74. Пузынин И. В. Препринт ОИЯИ P-1549, 1964.
75. Широков В. П. Препринт ОИЯИ P-1682, 1964.
76. Котов В. И., Миллер В. В. Фокусировка и разделение по массам частиц высоких энергий. М., Атомиздат, 1969.
77. Штеффан К. Оптика пучков высоких энергий. Пер. с англ. М., «Мир», 1969.
78. Василишин Б. В. и др. Препринт ОИЯИ 9-4223, 1968.
79. Данилов В. И., Мухина В. Б., Полферов Э. А. Препринт ОИЯИ P-4102, 1968.
80. Тарасов Е. К., Владимирский В. В., Кошкарева Д. Г. Препринт ИТЭФ, 232, М., 1964.
81. Кочанова В. В., Сапунов Ю. М., Фролов А. М. Препринт ИФВЭ ОП 67-59, 1967.
82. Мызников К. П., Татаренко В. М. Препринт ИФВЭ СКУ 68-16, 1968.
83. Бенфорд А. Транспортировка пучков заряженных частиц. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1969.
84. Гридасов В. И. и др. Препринт ОИЯИ Б2-9-4648, 1968.
85. Гласко В. Б., Свешников А. Г., Семашко Н. Н. ЖТФ, 1970, 40, 2, 270.
86. Levinson N. Kgl. danske vid. selskab., Mat.-fys. medd., 1949, 25, N. 9.
87. Друкарев Г. Ф. ЖЭТФ, 1949, 19, 247.
88. Бабиков В. В. Метод фазовых функций в квантовой механике. М., «Наука», 1968.
89. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. а) «Иzv. АН СССР», 1951, 15, 309; б) «Докл. АН СССР», 1951, 77, 557.
90. Крейн М. Г. «Докл. АН СССР», 1953, 94, 987; 1954, 97, 21; 1955, 105, 433; 1957, 113, 970.
91. Марченко В. А. а) «Докл. АН СССР», 1950, 72, 457; б) «Тр. Московск. математическ. об-ва», 1952, 1, 327; в) «Докл. АН СССР», 1955, 104, 695; г) «Мат. сб.», 1968, 77 (119), 139.
92. Агранович З. С., Марченко В. А. Обратная задача теории рассеяния. Харьков, Изд-во Харьк. ун-та, 1960.

93. Фаддеев Л. Д. УМН, 1959, 14, вып. 4 (88), 57.
94. де Альфаро В., Редже Т. Потенциальное рассеяния. Пер. с англ. М., «Мир», 1966.
95. Ву Т. Ю., Омура Т. Квантовая теория рассеяния. Пер. с англ. М., «Наука», 1969.
96. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. Пер. с англ. М., «Мир», 1969.
97. Калоджеро Ф. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. М., «Мир», 1972.
98. Мельников В. К. а) Препринт ОИЯИ Р-265, 1958; б) УМН, 1959, 14, вып. 4 (88), 121.
99. Лундина Д. Ш., Марченко В. А. «Мат. сб.», 1969, 78 (120), 475.
100. Лянце В. Э. «Мат. сб.», 1967, 72, 537.
101. Limic N. Nuovo cimento, 1962, 26, 581; 1963; 28, 1066.
102. Рофе-Бекетов Ф. С., Христов Е. Х. «Докл. АН СССР», 1966, 168, 1265; 1969, 185, 748; б) «Математическая физика и функциональный анализ», 1971, вып. II, 122.
103. Benn J., Scharf G. Nucl. Phys., 1969, 134, 481.
104. Чудов Л. А. Препринт ОИЯИ Р-175, 1958.
105. а) Bystricky' I., Lehar F., Ulehla I. Preprint JINR E-2440, 1965; б) Swan P., Pearce W. A. Nucl. Phys., 1966, 79, 77.
106. а) Визнер Я., Жидков Е. П., Лелек В. Препринт ОИЯИ Р5-3895, 1968; б) Жидков Е. П. и др. Препринт ОИЯИ Р1-5306, 1970.
107. Тихонов А. Н. «Докл. АН СССР», 1963, 151, 501; 1963; 153, 49; 1964, 156, 1296; 1965, 163, 591.
108. MacGregor M. H., Arndt R. A., Wright R. M. Preprint UCRL-70075 (Part X), 39, 1968.
109. Кадомцев Б. Б. В сб. «Вопросы теории плазмы». Вып. 4. М., Атомиздат, 1964, с. 188. (English translation «Plasma turbulence» in V. Progress in Plasma Physics. New York).
110. Пикельнер С. Б., Пытович В. Н. ЖЭТФ, 1968, 55, 977.
111. Захаров В. М. ЖЭТФ, 1966, 51, 689.
112. Жидков Е. П. и др. а) Препринт ОИЯИ Р9-4464, 1969; б) Plasma Phys., 1970, 12, 191.
113. Jidcov E. P. e.a. Phenomena in ionized gases 1969. Contributed papers. Bucharest, Romania, September 1—6, 1969, p. 525.