ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА, 1973, ТОМ 4, ВЫП. 1

УДК 539.126

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ МОНОПОЛЯ ДИРАКА

В. И. Стражев,
Л. М. Томильчик
Институт физики АН БССР
г. Минск

Дан обзор современного состояния проблемы магнитного заряда. Обсуждены трудности теории монополя Дирака. Проанализированы возможные варианты объяснения отрицательных результатов экспериментального поиска монополей. Подробно обсуждена дуальная симметрия электродинамики, а также различные варианты вывода условия зарядового квантования. Рассмотрены приложения теории магнитного заряда, в частности, дионные модели адронов.

The review of the modern status the problem of magnetic charge is presented. The difficulties of the theory of Dirac monopole are discussed. The possible explanations of the negative results of experimental search of magnetic monopoles is analysed. The dual symmetry of the electrodynamics and different derivations of the charge quantization condition are discussed. The application of the theory of magnetic charge is considered, in particular the dyonium model of the hadrons.

ВВЕДЕНИЕ

Высказанная Дираком гипотеза о существовании изолированного магнитного заряда — монополя стимулировала как заметное число теоретических исследований, так и многочисленные попытки его экспериментального обнаружения, причем общий интерес к проблеме в последние годы заметно возрос.

Как известно, основным побудительным мотивом для введения магнитного заряда явилось стремление распространить на случай наличия источников ту симметрию электродинамики относительно электрических и магнитных величин, которая выражается в инвариантности полевых уравнений Максвелла *

$$\left.\begin{aligned} &\partial^{\nu} F_{\mu\nu} = 0; \quad \partial^{\nu} \widetilde{F}_{\mu\nu} = 0; \\ &F_{\mu\nu} = 1/2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}; \quad \widetilde{F}_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}; \quad \varepsilon_{0123} = -1 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

* Используем здесь метрику $g^{\mu\nu} = \{-1, 1, 1, 1\}$, систему единиц Хевисайда и всюду, где это не связано с потерей наглядности, полагаем $\hbar = c = 1$.

относительно, дискретных преобразований дуальности или преобразований Лармора

$$F_{\mu\nu} \to \pm \widetilde{F}_{\mu\nu}; \quad \widetilde{F}_{\mu\nu} \to \mp F_{\mu\nu}. \tag{2}$$

С другой стороны, существование монополя Дирака приводит на квантовомеханическом уровне к квантованию величины электрического заряда в соответствии с соотношением:

$$eg = n\hbar c; \; n = \begin{cases} 0, \; \pm 1/2, \; \pm 1 \ldots & \text{(по Дираку)} \\ 0, \; \pm 1, \; \pm 2 \ldots & \text{(по Швингеру),} \end{cases} \tag{3}$$

где e — электрический заряд; g — магнитный заряд. Последнее обстоятельство обычно рассматривается в качестве наиболее сильного аргумента в пользу идеи монополя, поскольку при этом получает теоретическое обоснование наблюдаемый дискретный характер электрического заряда.

Введение магнитного заряда в электродинамику наталкивается на значительные трудности. Для лагранжевой формулировки теории необходимы потенциалы, сохранение которых в качестве динамических переменных поля при наличии магнитных источников можно достигнуть лишь введением линии сингулярности (Dirac string, «нить Дирака»). При этом возникает ряд критических моментов, удовлетворительное решение которых достигается лишь использованием условия зарядового квантования. В то же время это условие приводит к большой численной величине «магнитной» константы связи ($g^2/\hbar c \sim 34{,}25$, по Дираку), что затрудняет расчет процессов с участием магнитных зарядов.

Монополь Дирака пока не найден на опыте. Можно предложить некоторые достаточные правдоподобные аргументы, объясняющие причины отрицательного результата всех предпринятых попыток его экспериментального обнаружения. Тем не менее необходим тщательный анализ посылок, лежащих в основе введения магнитного заряда в электродинамику.

Оказывается, что введение магнитных источников в уравнения электродинамики из соображений дуальной симметрии не требует существования нового типа частиц (монополей). Предположение о том, что все известные заряженные частицы можно рассматривать как дуально заряженные, т. е. обладающие одновременно электрическим (e) и магнитным (g) зарядом, оказывается полностью непротиворечивым. Если предположить, что отношение g/e одинаково для всех известных частиц, тогда в эксперименте наблюдается эффективный заряд $q = (e^2 + g^2)^{1/2}$.

Рассмотрение дуально заряженных частиц в общем случае приводит к обобщению условия Дирака — Швингера:

$$e_i g_j - e_j g_i = n_{ij}\hbar c; \quad n_{ij} = \begin{cases} 0, \; \pm 1/2, \; \pm 1, \; \ldots, \\ 0, \; \pm 1, \; \pm 2, \; \ldots, \end{cases} \tag{4}$$

где индексы i, j относятся к различным типам частиц. При этом ситуация с зарядовым квантованием существенно изменяется, в частности, появляется возможность введения наряду с целочисленными также и дробных значений электрических зарядов.

Условие зарядового квантования можно получить по крайней мере тремя логически независимыми способами: из требования однозначности фазовых преобразований; как следствие квантования магнитного потока; из условия инвариантности теории относительно группы пространственных вращений. Хотя ни один из способов не свободен от трудностей, в целом это условие выглядит достаточно надежно установленным и необходимым для внутренне непротиворечивой теории магнитного заряда. Фактически в случае отказа от условия Дирака — Швингера вообще не остается никаких «чисто электродинамических» оснований для введения монополя.

Рассмотрение дуально заряженных частиц при учете условия (4) представляет собой новейшее развитие проблемы монополя Дирака и открывает нетривиальные возможности для использования модели магнитного заряда в физике адронов. Однако, независимо от дальнейших успехов этого направления, вопрос о монополе нельзя свести только к проблеме наличия или отсутствия в природе некоторой новой частицы. Вопрос о возможности существования магнитного заряда — прежде всего часть проблемы обоснования современной формы электродинамики.

1. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ МОНОПОЛЯ ДИРАКА

Линия сингулярности и условие зарядового квантования. Как отмечено у Дирака [2], чтобы получить теорию, допускающую квантовомеханическое обобщение, необходима лагранжева формулировка, которая, как известно, требует введения электромагнитных потенциалов.

Обычное определение векторного потенциала

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{5}$$

находится в противоречии с уравнением $\nabla\mathbf{H} = g\delta(\mathbf{r})$, если требовать выполнения интегральной теоремы Гаусса. Поэтому определение (5) должно быть изменено следующим образом [2,12]*:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{H} + \mathbf{H}^{(f)}, \tag{6}$$

где $\mathbf{H} = g\mathbf{r}/r^3$; $\mathbf{H}^{(f)} = f(\mathbf{r})\,\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})$; $\nabla\mathbf{H}^{(f)} = -g\delta(\mathbf{r})$; $f(\mathbf{r})$ — функция, равная нулю везде, за исключением кривой L, и имеющая на ней дельтаобразную сингулярность; $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})$ — касательный вектор к кривой L. Таким образом, для устранения указанного противоречия

* Релятивистски-ковариантное обобщение (6) см. в работах [2, 34].

достаточно, чтобы (5) не выполнялось хотя бы на некоторой линии L, уходящей от магнитного заряда на бесконечность.

Дадим вывод условия зарядового квантования для случая движения электрона в поле неподвижного монополя. В такой модели полностью сохраняются все специфические черты дираковского подхода [1, 2]. В кулоновской калибровке потенциал $\mathbf{A}$ можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{A} = -g \int_L d\mathbf{a} \times \nabla\,(1/(r-a)) = -\int_L d\mathbf{a} \times \mathbf{H}\,(\mathbf{r}-\mathbf{a}). \tag{7}$$

Переход от данной линии L к некоторой другой L' порождает изменение потенциала $\mathbf{A}$, пропорциональное градиенту телесного угла Ω, опирающегося на контур LL' (подробнее см. ниже). Поэтому волновая функция электрона должна подвергаться следующему калибровочному преобразованию:

$$\psi \to \psi \exp(-\mathrm{i}eg\Omega/4\pi). \tag{8}$$

Если линия L описывает в пространстве замкнутую поверхность и возвращается в исходное положение, происходит изменение фазы функции ψ, соответствующее полному телесному углу 4π, т. е.

$$\psi \to \psi \exp(-ieg). \tag{9}$$

Требование однозначности ψ приводит к условию зарядового квантования Дирака: $eg = 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Линия L — линия сингулярности для электромагнитного потенциала и представляет собой Dirac string — нить Дирака.

На основе использования сингулярных потенциалов удается построить интеграл действия, из которого следуют уравнения Максвелла и уравнения движения. Но при этом необходимо вводить дополнительное условие («вето Дирака»), согласно которому электрически заряженные частицы никогда не пересекают линию сингулярности, связанную с магнитным зарядом [2, 12, 21, 34].

Линия (или линии) сингулярности может быть произвольной кривой. Если выбрать ее для простоты в виде прямой линии, то потенциал точечного монополя в теории Дирака имеет вид:

$$\mathbf{A} = (g/r)\,[\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}/(r - \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r})], \tag{10}$$

что соответствует полубесконечной линии сингулярности.

Швингер [8a] использует следующий потенциал:

$$\mathbf{A} = \frac{g}{2r}\left(\frac{\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{r}}{r-\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}} - \frac{\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{r}}{r+\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}}\right). \tag{11}$$

Линия сингулярности для такого потенциала бесконечна.

Квантово-полевой подход Швингера. При построении квантовой теории магнитного заряда можно избежать использования вето Дирака, если принять во внимание следующие соображения. Известно, что явное задание скалярной функции Лагранжа $\mathcal{L}$ обеспечивает релятивистскую инвариантность квантовой теории. Однако требование скалярности $\mathcal{L}$ не является необходимым, и его можно заменить более общими предположениями, совместными с принципом действия. Система, инвариантная относительно трехмерных вращений, будет лоренц-инвариантна, если плотность тензора энергии и импульса удовлетворяет одновременному коммутационному соотношению [Д1]:

$$-\mathrm{i}\,[T^{00}(x),\ T^{00}(x')] = -(T^{0k}(x) + T^{0k}(x'))\,\partial_k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{12}$$

Это условие является достаточным.

В теории магнитного заряда соответствующий оператор плотности энергии будет иметь вид [8,9]:

$$\left.\begin{aligned} T^{00} = (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)/2 + \bar{\psi}_e\boldsymbol{\gamma}\,(-\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla} - eA^T - eA_g)\,\psi_e + m_e\bar{\psi}_e\psi_e +& \\ + \bar{\psi}_g\boldsymbol{\gamma}\,(-\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla} - g\mathbf{B}^T - g\mathbf{B}_e)\,\psi_g + m_g\bar{\psi}_g\psi_g;& \\ \mathbf{A}_g(x) = \int d\mathbf{x}'\mathbf{a}\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,j_e^0(x');& \\ \mathbf{B}_e(x) = -\int d\mathbf{x}'\mathbf{a}\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,j_{(g)}^0(x').& \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Здесь $\mathbf{a}(x)$ — векторная функция, удовлетворяющая соотношениям:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x});\quad \nabla\cdot\mathbf{a}(\mathbf{x}) = 0;\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{h}(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x});$$

и для описания свободного поля используются два поперечных потенциала $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{B}^T$:

$$\mathbf{H}^T = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}^T,\quad \mathbf{E}^T = -\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}^T, \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{E}^T - \nabla\phi_e,\quad \phi_e = \int (d\mathbf{x}')\,D(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,j_e^0(x');& \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}^T - \nabla\phi_g,\quad \phi_g = \int (d\mathbf{x}')\,D(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,j_g^0(x);& \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где $D(\mathbf{x}) = 1/4\pi\,|\mathbf{x}|$. При этом предполагается выполнение следующих канонических перестановочных соотношений:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{i}\,[A_i^T(x),\ B_j^T(x')] = \varepsilon_{ijk}\partial_k D(\mathbf{x}-\mathbf{x}');& \\ \mathrm{i}\,[E_i^T(x),\ H_j^T(x')] = \varepsilon_{ijk}\partial_k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}');& \\ \mathrm{i}\,[A_i^T(x),\ E_j^T(x')] = \mathrm{i}\,[B_i^T(x),\ H_j^T(x')] =& \\ = \delta_{ij}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - \partial_i\partial_j D(\mathbf{x}-\mathbf{x}').& \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Из требования однозначности калибровочных преобразований, соответствующих для векторных потенциалов переходу от одной линии сингулярности к другой, следует условие зарядового квантования.

Лагранжева формулировка квантово-полевой теории Швингера дана Цванцигером [21]. В рамках швингеровского подхода Раблу [18] удалось построить лоренц-инвариантную S-матрицу, причем пропагатор для фотонного обмена между электрическими и магнитными зарядами имеет вид [см. также [203]]:

$$D_{\mu\nu}(k) = (k^2 + i\varepsilon)^{-1} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho n^\sigma / nk. \tag{17}$$

Этот пропагатор ковариантен, но зависит от линии сингулярности (в системе квантования $\hat{n} = (0, \hat{\mathbf{n}})$, где $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор в направлении линии сингулярности). Чтобы устранить зависимость от направления $\hat{n}$ в полном разложении, необходимо произвести соответствующее усреднение.

Трудности теории монополя Дирака. Итак, введение нити Дирака позволяет построить как квантовую [2, 8, 9, 11, 16, 18, 21], так и классическую [2, 21, 34] теорию магнитного заряда. При этом условие зарядового квантования обеспечивает непротиворечивость теории на квантовом уровне. В то же время использование линии сингулярности вызывает ряд возражений. Основными являются следующие:

а) сингулярному характеру потенциала A_μ не соответствуют какие-либо физические особенности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ [3];

б) вето Дирака не вытекает из вариационного принципа, а является дополнительным требованием [33];

в) теория Дирака описывает не точечный магнитный заряд, а полубесконечный тонкий соленоид [28, 36];

г) оператор, генерирующий калибровочные преобразования для заряженных полей, связанные с изменением линии сингулярности, не унитарен [Д2]; неградиентный характер преобразований, соответствующих изменению положения линии сингулярности, нарушает самосогласованность теории [208];

д) введение магнитного заряда нарушает лоренц-инвариантность теории [5—7];

е) условие зарядового квантования обусловлено именно использованием линии сингулярности и, следовательно, не является обязательным для теории магнитного заряда [36, 40].

Если пп. а, б относятся скорее к техническим проблемам теории, то справедливость любого из последующих (фактически они весьма тесно связаны друг с другом) означает, что непротиворечивой теории магнитного заряда в настоящее время не существует. Рассмотрим кратко эти возражения. Первые два можно обсудить, оставаясь в рамках классической теории.

а) Можно искать решение уравнений Максвелла, вводя два независимых потенциала A_μ, B_μ [3] (см. также работы [139, 204]):

$$\left.\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\rho B^\sigma; \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\rho A^\sigma. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Однако интеграл действия, из которого одновременно следовали бы как уравнения поля, так и уравнения движения, при этом построить не удается [27, 31, 33, 43]. Чтобы достичь такой цели, необходимо или ограничиться случаем «чисто кинематической» теории, в которой отсутствует взаимодействие между электрическими и магнитными зарядами [7, 27, 135], или изменить уравнения движения для монополя [38, 42]. Но в последнем случае исчезают какие бы ни было причины для введения магнитного заряда из соображений дуальной симметрии, поскольку последняя предполагает помимо симметрии уравнений Максвелла, также взаимно симметричное поведение электрического и магнитного зарядов в электрических и магнитных полях.

Как отмечено в работе [34], источником трудностей с построением интеграла действия в классической теории является то, что использование двух потенциалов увеличивает число степеней свободы электромагнитного поля и делает все шесть компонент $F_{\mu\nu}$ независимыми динамическими переменными [см. также [43, Д3]].

В квантовой теории для такой системы нарушается требование положительной определенности энергии [Д1], и вполне возможно, что подобная ситуация имеет место и на классическом уровне. Таким образом, полевые схемы в теории магнитного заряда, не связанные с использованием сингулярных потенциалов, в силу ряда специфических трудностей (появление дополнительных степеней свободы поля, невозможность построения интеграла действия и т. п.) едва ли способны в настоящее время конкурировать с подходом Дирака — Швингера.

б) Хотя вето Дирака выступает как дополнительное условие, которое в ряде случаев может оказаться чрезмерно сильным (см., например, [33]), тем не менее оно представляется физически приемлемым. Так, на классическом уровне, когда пути движения заряженных частиц в принципе допускают точное определение, положение линии сингулярности в каждой конкретной задаче можно выбрать таким образом, чтобы вето Дирака было следствием уравнений движения. Это несправедливо лишь в случае, когда электрический заряд движется вдоль магнитной силовой линии (лобовые столкновения), но подобные начальные условия исключительны.

Яном [34] было показано, что, определяя нелокальный интеграл действия посредством предельных процедур, удается устранить выделенное местоположение линии сингулярности и восстановить эквивалентность всех точек пространства — времени без исключения. Однако необходимым условием самосогласованности такого подхода является выполнение классического условия квантования: $eg = 2\pi nkc$, где k — константа с размерностью действия; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

в) Чтобы яснее представить себе макроскопический аналог системы, описываемой потенциалом (10), заметим, что этот потенциал удовлетворяет соотношениям: $\nabla \times \mathbf{A} = g\mathbf{r}/r^3$ для $\mathbf{r} \nparallel \hat{\mathbf{n}}$, и $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = -g$, где C — малый контур вокруг линии $\mathbf{r} \parallel \hat{\mathbf{n}}$. Следовательно, потенциал $\mathbf{A}$ описывает поле, создаваемое не изолированным магнитным зарядом, а линией магнитного потока, распространяющегося из точки 0 в бесконечность вдоль направления $\mathbf{r} \parallel \hat{\mathbf{n}}$. Поэтому в электродинамике с электрическими зарядами наиболее естественной физической моделью магнитного заряда является полубесконечный тонкий соленоид [29, 30, 32, 41].

Трактовка монополя Дирака в качестве точечной частицы возможна при выполнении требования, чтобы магнитный поток вдоль $\hat{n}$ не приводил к наблюдаемым эффектам. Последнее обеспечивается с помощью вето Дирака. На квантовомеханическом уровне аналогичную роль выполняет условие зарядового квантования, обеспечивающее цикличность фазы ψ-функции и сужение области определения операторов Гамильтона и момента количества движения (см., например, [21, 146, 149]).

г) Рассмотрим преобразование потенциала, обусловленное переходом между двумя различными линиями сингулярности. Используя известные формулы векторного анализа, находим:

$$\mathbf{A}(L_1)-\mathbf{A}(L_2)=\Big(\int\limits_{L_1}-\int\limits_{L_2}\Big)\,d\mathbf{a}\times\mathbf{H}(\mathbf{r}-\mathbf{a})=\oint d\mathbf{a}\times\mathbf{H}(\mathbf{r}-\mathbf{a})=$$
$$=\int\limits_{\sigma}(d\boldsymbol{\sigma}\times\nabla)\times\mathbf{H}(\mathbf{r}-\mathbf{a})=\int\limits_{\sigma}\nabla(\mathbf{H}(\mathbf{r}-\mathbf{a})\,d\boldsymbol{\sigma})-$$
$$-\int\limits_{\sigma}(\nabla\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r}-\mathbf{a}))\,d\boldsymbol{\sigma}=\nabla\Lambda-g\int\limits_{\sigma}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{a})\,d\boldsymbol{\sigma}, \tag{19}$$

где σ — поверхность, имеющая в качестве границы линию $L_1 - L_2$ (плюс линия на бесконечность, если L_1 и L_2 идут к бесконечности по различным направлениям) и

$$\Lambda(r)=\int\limits_{\sigma}\mathbf{H}(\mathbf{r}-\mathbf{a})\,d\boldsymbol{\sigma}=-g\nabla\int d\sigma/(r-a). \tag{20}$$

Присутствие в (19), наряду с градиентным членом, сингулярной добавки показывает, что определение величин типа T^{00}, T^{0k} должно быть уточнено, так как потенциалы сингулярны вдоль нити Дирака, а полевые операторы ψ, $\bar{\psi}$ имеют на ней неопределенную фазу. С этой целью необходимо учесть, что произведения локальных операторов поля следует понимать как предел произведений, определенных для несовпадающих точек [Д4] *. Например, можно потребовать, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$-\bar{\psi}(x)\,\boldsymbol{\gamma}\,(\nabla - ie\mathbf{A}(x))\,\psi(x) = \lim/|\varepsilon|\to 0\,\times$$
$$\times\left[\psi(x+\varepsilon/2)\,(3\boldsymbol{\gamma}\varepsilon/\varepsilon^2)\,\psi(x-\varepsilon/2)\exp\left\{ie\int\limits_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2} d\mathbf{x}'\mathbf{A}(x')\right\}\right], \qquad (21)$$

где путь интегрирования является прямой линией, соединяющей две одновременные точки, а усреднение по всем направлениям ε следует произвести до перехода к пределу $|\varepsilon|\to 0$.

Вследствие условия зарядового квантования экспонента в (21) определена однозначно, так как, если путь интегрирования пересекает линию сингулярности, экспонента изменится на $2\pi n$ и экспоненциал останется неизменным. Поэтому оператор U, генерирующий калибровочные преобразования для заряженных полей,

$$U\psi_e U^{-1} = \exp\left\{ie\int\limits_{\infty}^{x} d\mathbf{x}'\,(\mathbf{A}_g'(x') - \mathbf{A}_g(x'))\right\}\psi_e(x);$$

$$U\psi_g U^{-1} = \exp\left\{ig\int\limits_{\infty}^{x} d\mathbf{x}'\,(\mathbf{B}_e'(x') - \mathbf{B}_e(x'))\right\}\psi_g(x)$$

оставляет инвариантными соответствующим образом доопределенные выражения для T^{00}, T^{0k}, не меняет перестановочные соотношения для полей и, следовательно, является унитарным оператором.

Проведенный анализ показывает, что разность $\mathbf{A}(L_1) - \mathbf{A}(L_2)$, как и следовало ожидать, нельзя представить во всех точках в виде градиента. Но соответствующее доопределение произведений полевых операторов и использование условия зарядового квантования позволяет обойти эту трудность.

д) Содержащееся в работах [5—7] исследование вопроса о лоренц-инвариантности теории при наличии магнитных зарядов не относится к теории монополя Дирака, поскольку не учитывает условия зарядового квантования (см. также [8, 16]). По-видимому, результаты этих работ свидетельствуют о том, что построение релятивистски-ковариантной теории с произвольными значениями e и g в рамках существующих концепций не представляется возможным (см. также [8б]).

---

* В работе [203] показано, каким образом это обстоятельство должно учитываться в теории монополя Дирака.

е) Вопрос о корректности дираковского подхода так или иначе связан с обоснованностью условия зарядового квантования. В то же время на это условие опираются почти все попытки экспериментального обнаружения магнитного заряда. В п. 4 подробно обсудим, насколько оно необходимо для последовательной теории монополя.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ ПОИСК МОНОПОЛЯ ДИРАКА

Свойства монополя Дирака. Из теории магнитного заряда следует два основных свойства монополя:

1. Величина магнитного заряда может принимать следующие значения:

$$g \approx 68{,}5en; \quad g^2/\hbar c \approx 34{,}25 \quad (n=1) \quad \text{(по Дираку)} \quad [1,\ 2];$$

$$g \approx 137en, \quad g^2/\hbar c \approx 137 \quad (n=1) \quad \text{(по Швингеру)} \quad [8а].$$

2. Поведение монополей аналогично поведению электрически заряженных частиц (при соответствующей замене $e \to g$, $\mathbf{E} \to \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \to -\mathbf{E}$).

Теория Дирака — Швингера не дает никаких строгих предсказаний относительно массы монополя. Часто используется «каноническая» масса $m_g = g^2/r_e c^2$, равная 2,4 m_p по Дираку и 9,6 m_p по Швингеру ($r_e = e^2/m_e c^2$), которая получается из предположения о равенстве классических радиусов электрона и монополя.

Ионизирующее действие монополя должно быть приблизительтельно эквивалентно ионизации тяжелыми ядрами (при релятивистском рассмотрении) с электрическим зарядом 137/4 e [65—68, 71, 81] [потери в веществе на ионизацию $\sim$8 *Гэв*/(*г*·*см*^{2})]. Специфическая особенность ионизационных потерь монополя заключается в их независимости от скорости монополя *.

Для экспериментального обнаружения монополей можно использовать как излучение Вавилова — Черенкова ** [70, 73, 78], так и достаточно интенсивное переходное излучение при движении монополей через границу раздела двух сред [72, 80].

Теоретическая оценка сечения рождения монополь-антимонопольных пар крайне затруднена вследствие двух причин: во-первых, большая величина константы связи монополя делает проблематичной разумность использования методов теории возмущений; во-вторых, не вполне ясным представляется механизм электро-

* Поведение монополя в веществе подробно рассмотрено в работах [68, 90, 204].

** Его поляризация отличается от поляризации излучения Вавилова — Черенкова электрически заряженной частицы ($\mathbf{E} \to \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \to -\mathbf{E}$ [75, 76]), а интенсивность примерно в 4700 больше, чем у электрона, летящего с той же скоростью.

магнитного взаимодействия между электрически и магнитнозаряженными частицами (см., например, [83]). Тем не менее Кабиббо и Феррари произвели прикидочные оценки [204]. Для процесса $p + p \to p' + p' + g^+ + g^-$ расчет проводился для диаграммы, описывающей рождение пары монополей, вызванное чисто кулоновским взаимодействием сталкивающихся протонов. Было найдено, что для массы монополя $m_g \approx 2{,}5 m_p$ сечение составляет величину порядка $\sigma \sim 10^{-34}$ *см²/нуклон*.

Отметим, что при планировании и постановке экспериментов по поиску монополей Дирака ориентируются исключительно на их электромагнитные взаимодействия.

Эксперимент *. Экспериментальные поиски магнитных монополей подразделяются на две группы.

1. Поиски на ускорителях через реакцию типа

$$p + N \to p + N + g^+ + g^- + \text{anything} \quad [87-90,\ 104].$$

2. Поиски монополей в естественных условиях:

а) непосредственное детектирование монополей в космическом излучении [84, 86, 94, 101, 103, 105, 108];

б) поиски магнитных зарядов в веществе на Земле [85, 92, 96—99, 109], в метеоритах [91, 93, 110], в лунной породе [106, 107, 110], где они могли быть рождены в результате взаимодействия космических лучей ** с веществом или же непосредственно захвачены веществом.

Все предпринятые попытки экспериментального обнаружения магнитного заряда дали отрицательный результат, причем общая тенденция состоит в прогрессивном уменьшении верхнего предела сечения рождения для все более массивных монополей ***. Так, если первый эксперимент на беватроне в Беркли (1959 г.) привел к оценке сечения $\sigma \leqslant 10^{-35}$ *см²/нуклон* для однократно заряженных монополей с массой порядка протона, то в Серпухове (1970 г.) получен следующий верхний предел сечения рождения монополь-антимонопольных пар: $\sigma \leqslant 10^{-43}$ *см²/нуклон* для $m_g \leqslant 5m_p$. Примерно так же обстоит дело и с экспериментами второго типа. В пионерской работе Малкуса [84] был получен результат для сечения $\sigma \leqslant 3 \cdot 10^{-35}$ *см²/нуклон*. В одном из последних экспериментов Альвареца и др. [106] по поиску монополей в лунном веществе получен верхний предел сечения $\sigma \leqslant 10^{-41}$ *см²/нуклон* для $m_g \leqslant 5m_p$ и $\sigma \leqslant 10^{-35}$ *см²/нуклон* для $m_g \leqslant 1000\ m_p$.

* В работах [206, 207] дан подробный обзор экспериментальных работ, посвященных поиску монополя (см. также [104, 109, 110, 202, 204]).

** В работе [194] дана оценка верхней границы сечения образования монополей космическими нейтрино.

*** В работе [102] содержатся результаты поиска частиц с величиной магнитного заряда $g = (1 \div 7)\ e$.

В последних экспериментах [97—99, 105, 108] установлен следующий верхний предел на величину потока космических монополей, пронизывающего земную поверхность: $N \leqslant 8{,}4 \cdot 10^{-18}$ *см*$^{-2}\cdot$*сек*$^{-1}$. Это означает, что за всю историю Земли ($4{,}6 \cdot 10^9$ лет) через каждую площадку в 2 *см*^{2} прошло не более одного монополя.

Обсуждение. При отсутствии достаточно надежной оценки массы и сечения рождения монополя трудно судить, насколько полученные результаты можно истолковать как свидетельство против его существования. В принципе, для того чтобы объяснить отсутствие зарегистрированных монополей в проведенных экспериментах, можно выдвинуть целый ряд соображений. Обсудим некоторые из них.

1. Наиболее простым (и одновременно наименее содержательным) является предположение о том, что масса магнитнозаряженных частиц очень велика и необходимое для их рождения пороговое значение энергии пока не достигнуто.

Поскольку теория магнитного заряда, как уже отмечалось, не содержит обоснованных предсказаний относительно возможных значений массы монополя, ее нижний предел можно в принципе отодвинуть сколь угодно далеко *.

2. Привлекательной является идея отыскания общего принципа запрета, исключающего возможность рождения и экспериментальной регистрации монополей.

Простейший способ формулировки такого запрета может состоять в том, чтобы приписать монополю некоторое свойство, приводящее к нарушению какого-либо из хорошо установленных законов сохранения. Так, если предположить, что единственным вкладом магнитного тока является псевдовекторная добавка к лагранжиану взаимодействия, то фактически наблюдаемая степень сохранения четности в электромагнитных взаимодействиях может сильно подавить все процессы с участием монополя и тем самым легко объяснить отрицательный результат проведенных экспериментов [155]. К сожалению, при этом приходится делать предположение о векторном характере магнитного тока, которое не является обязательным. Подобная неоднозначность, по-видимому, будет неизбежным спутником запретов такого рода. Гипотетическому объекту так или иначе приписывается некоторое специальное свойство, которое, в свою очередь, нуждается в дополнительном обосновании.

3. Вполне вероятно, что оценки Каббибо и Феррари для сечения рождения монополь-антимонопольных пар ($\sigma \geqslant 10^{-35}$ *см*^{2}/*нуклон* для массы $\sim 2{,}5$ *Гэв*) сильно завышены из-за недостаточно

---

* Масса магнитнозаряженных частиц, согласно различным оценкам, колеблется от 6 *Гэв* [166] до 10 [177], 17 [168], 25 *Гэв* [83] и выше [83, 178, 191].

последовательного учета большой величины константы g — g-взаимодействия.

Так, в работе [177] указано, что вследствие весьма сильного магнитного кулоновского притяжения энергия, необходимая для рождения несвязанной g^+g^--пары, должна значительно превышать порог рождения. Это взаимодействие может приводить к быстрой рекомбинации пары монополь-антимонополь (и аннигиляции) после того, как она рождена, но до того, как эти частицы покинут область взаимодействия. Такой механизм сильно подавляет вероятность рождения монополей в свободном состоянии. В работе [82] рассматривается введение в модели рождения частиц такого сверхсильного взаимодействия в конечном состоянии. При этом оказывается возможной реинтерпретация экспериментальных данных, полученных на Серпуховском ускорителе. Верхний предел установленного сечения рождения $\sigma \leqslant 10^{-43}$ *см²/нуклон* может относиться тогда к значениям масс монополей, приблизительно в два раза меньшим.

Интерпретация результатов экспериментов, основанных на поиске свободных монополей, рожденных при взаимодействии первичного космического излучения с атмосферой, также существенно меняется, если описанный выше механизм рождения g^+ — g^--пар действительно имеет место. Кроме того, для детектирования изолированных высокоэнергетических монополей в первичном космическом излучении необходимы длительные экспозиции.

4. При оценке результатов экспериментов, в которых предполагается экстрагировать монополи, предварительно связанные с веществом, следует учесть, что, возможно, некоторые особенности процессов захвата монополя и его поведения в веществе понимаются еще недостаточно полно *.

Обычно считается, что монополи можно термализовать в веществе, и они способны мигрировать и магнитостатически связываться в ферро-и парамагнетиках. В то же время монополи не должны быть связаны с атомами или ядрами в неферромагнитных материалах. Предполагается также, что монополи могут извлекаться из вещества сильными магнитными полями.

В большинстве проведенных экспериментов ориентируются именно на такую картину взаимодействия монополей с веществом. Так, широко используются результаты Малкуса [84], из которых следует, что связь монополя в веществе не превышает нескольких электрон-вольт. Однако, как показано в работе [79], принципиально возможно существование сильной связи монополей со свободными ядрами, имеющими магнитный дипольный момент (энер-

* В работе [110] дана классификация экспериментальных работ в зависимости от предполагаемых свойств монополя.

гия связи может достигать 1 *Мэв*). Если это так, то экспериментальные поиски магнитных зарядов, например, в геологических материалах, являющихся потенциальными коллекторами монополей, могут и не обнаружить их присутствие. Следует отметить, что интерпретация экспериментов, при постановке которых предполагалось только существование двух основных признаков монополей [93, 106, 110], также имеет критический пункт: допущение о том, что в исследуемом веществе (метеоритном или лунном) содержатся преимущественно монополи одного знака.

5. Наконец, можно высказать более радикальное предположение о том, что существующие теоретические представления о монополе Дирака не являются адекватными истинным свойствам магнитного заряда. Это означает следующее: или квантовая теория магнитного заряда в ее современной форме некорректна, и тем самым условие Дирака — Швингера незаконно [36, 40]; или ожидаемые классические свойства монополя не могут быть согласованы с картиной точечного магнитного статического источника [38, 42, 59, 60]; или и то и другое имеет место одновременно.

Таким образом, экспериментальная ситуация побуждает к проведению критического анализа двух узловых пунктов современной теории магнитного заряда: дуальной симметрии электродинамики и условия зарядового квантования.

3. ДУАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ В ТЕОРИИ МАГНИТНОГО ЗАРЯДА

Свободное поле. Преобразование Лармора $\mathbf{E} \to \pm\mathbf{H}$, $\mathbf{H} \to \mp\mathbf{E}$ являются частным случаем более общих преобразований (дуальных поворотов) [111—114]:

$$\left.\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\to F_{\mu\nu}\cos\theta + \widetilde{F}_{\mu\nu}\sin\theta; \\ \widetilde{F}_{\mu\nu} &\to -F_{\mu\nu}\sin\theta + \widetilde{F}_{\mu\nu}\cos\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

оставляющих инвариантными уравнения Максвелла для свободного поля.

Дуальной симметрии свободных уравнений Максвелла может быть сопоставлена следующая сохраняющаяся псевдовекторная величина («дуальный ток») [117, 119, 126]:

$$\Pi_\mu = F_{\mu\nu}B^\nu - \widetilde{F}_{\mu\nu}A^\nu, \qquad (23)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$; $\widetilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$.

Нетрудно показать, что в импульсном представлении компоненты дуального тока Π_μ пропорциональны разности между числом право- и левополяризованных фотонов *. Четвертая ком-

* Связь между дуальной симметрией уравнений Максвелла и сохранением разности между числом лево- и правополяризованных фотонов, по-видимому, впервые отмечена в работе [115].

понента Π_μ

$$\Pi_4 = i\Pi_0 = \int d^3x\,(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{H}^T - \mathbf{E}^T \cdot \mathbf{B}^T) \tag{24}$$

является генератором дуальных преобразований. Дуальные преобразования (22) генерируются следующим унитарным оператором:

$$U(\theta) = \exp\left\{ i\theta/2 \int (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{H}^T - \mathbf{E}^T \cdot \mathbf{B}^T)\, d^3x \right\}. \tag{25}$$

В работах [116, 117] показано, что для совместной формулировки релятивистской и дуальной инвариантности необходимо классифицировать полевые величины по неприводимым представлениям расширенной 11-параметрической группы, включающей, наряду с преобразованиями Лоренца и сдвигами, дуальные преобразования.

В квантовой теории существование дуальной группы приводит к невозможности экспериментального определения абсолютной плоскости поляризации линейно поляризованного света или, следовательно, к невозможности определения относительной фазы лево- и правополяризованного света.

Классическое поле с источниками. Уравнения Максвелла в присутствии двух типов источников

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = J_\mu^{(e)}; \quad \partial^\nu \widetilde{F}_{\mu\nu} = J_\mu^{(g)} \tag{26}$$

инвариантны не только относительно расширенных преобразований Лармора ($F_{\mu\nu} \to \pm \widetilde{F}_{\mu\nu}$, $\widetilde{F}_{\mu\nu} \to \mp F_{\mu\nu}$, $J_\mu^{(e)} \to \pm J_\mu^{(g)}$, $J_\mu^{(g)} \to \mp J_\mu^{(e)}$, но и относительно преобразований (22) и соответствующих преобразований для токов:

$$\left.\begin{aligned} J_\mu^{(e)} &\to J_\mu^{(e)} \cos\theta + J_\mu^{(g)} \sin\theta; \\ J_\mu^{(g)} &\to - J_\mu^{(e)} \sin\theta + J_\mu^{(g)} \cos\theta; \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

где $J_\mu^{(e)} = eJ_\mu$; $J_\mu^{(g)} = gJ_\mu$; J_μ — плотность частиц. Введем представление о дуальнозаряженных частицах, т. е. частицах, которые могут одновременно нести электрический e и магнитный g заряды. В этом случае плотность силы Лоренца можно определить в следующей форме:

$$f^\nu = J_\mu^{(e)} F^{\mu\nu} + J_\mu^{(g)} \widetilde{F}^{\mu\nu}. \tag{28}$$

В результате достигается согласование симметрии полевых уравнений (26) с симметрией уравнений движения.

Преобразования (22) и (27) оставляют инвариантными уравнения (26), а также выражения для силы Лоренца (28) и тензора энергии — импульса электромагнитного поля. Поэтому вопрос об определении параметра θ и фиксации его значения есть вопрос соглашения, а не экспериментального выбора. Если теперь рассмотреть совокупность дуальнозаряженных частиц и ввести предположение, что для каждой из них отношение g/e имеет одно и то же произвольное значение, то параметр θ можно связать с этим отношением, определив его, например, следующим образом:

$$\theta = \operatorname{arctg}(g/e). \tag{29}$$

Тогда дуальным поворотом

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu} &= (eF_{\mu\nu} + g\tilde{F}_{\mu\nu})/q = F_{\mu\nu}\cos\theta + \tilde{F}_{\mu\nu}\sin\theta; \\ \tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu} &= (e\tilde{F}_{\mu\nu} - gF_{\mu\nu})/q = -F_{\mu\nu}\sin\theta + \tilde{F}_{\mu\nu}\cos\theta, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

где $q = (e^2 + g^2)^{1/2}$, приходим к уравнениям Максвелла с одним типом источников

$$\partial^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} = qJ_\mu, \quad \partial^\nu \tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu} = 0 \tag{31}$$

и к обычной силе Лоренца, действующей на пробный заряд q:

$$f^\nu = qJ_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu}. \tag{32}$$

Таким образом, от электродинамики дуальнозаряженных частиц с универсальным отношением g/e всегда можно с помощью линейного преобразования полевых компонент перейти к обычной максвелловской форме с одним эффективным зарядом q, т. е. обе эти формы по существу эквивалентны *. Формальная возможность такого перехода имеет глубокие физические основания **.

Поскольку наличие поля может быть установлено лишь воздействием на заряженное тело, а заряд любой частицы, в свою очередь, может быть определен (идентифицирован) только с помощью поля, то непосредственно наблюдаемыми (измеримыми) являются только эффекты взаимодействия зарядов и полей, но не заряды и поля по отдельности. Поэтому принципиально невозможно установить экспериментальное различие между результатами расчета этих эффектов, проводимого на основе уравнений (26), (28) и (31), (32), если отождествить эффективный заряд $q = (e^2 + g^2)^{1/2}$ с наблюдаемым электрическим зарядом.

Важно подчеркнуть, что дуальный поворот вида (30) приводит к однозарядовой электродинамике для всех без исключения источников одновременно только тогда, когда отношение g/e одинаково для всех частиц. В противном случае переход к системе с эффективным зарядом можно осуществить лишь для частиц одного типа

---

* Этот подход позволяет разрешить известную проблему несоответствия между числом независимых компонент тензора энергии-импульса (пять) и полевого тензора (шесть) [111, 112, 122, 127, 136].

** Вопрос о наблюдаемых в классической электродинамике впервые с достаточной полнотой был проанализирован в работе [121].

$[q_1 = (e_1^2 + g_1^2)^{1/2}]$. Частицы с другим отношением g/e ($g_2/e_2 \neq g_1/e_1$) в этой системе будут обладать как электрическим e', так и магнитным g' зарядами следующей величины (см. работу [121]):

$$e' = q_2 \cos(\theta_2 - \theta_1);$$
$$g' = q_2 \sin(\theta_2 - \theta_1),$$

где $q_2 = (e_2^2 + g_2^2)^{1/2}$, $\theta_i = \mathrm{arctg}\,(g_i/e_i)$ $(i = 1,\ 2)$. Отсюда видно, что универсальность отношения g/e приобретает в электродинамике дуальнозаряженных частиц критическое значение: если это отношение одинаково для всех без исключения частиц, наблюдаемый магнитный заряд отсутствует.

Таким образом, последовательное использование соображений дуальной симметрии уравнений электродинамики приводит к следующей постановке проблемы.

Каждой частице (a priori) приписывается одновременно электрический и магнитный заряды. Как только достигнуто соглашение, что одна из частиц («базисная») имеет, например, только электрический (эффективный!) заряд, вопрос о существовании магнитнозаряженных частиц должен формулироваться так: какими электрическими и магнитными зарядами обладает каждая новая частица по отношению к базисной.

Если рассматривать все известные частицы как дуальнозаряженные, то вопрос о том, обладают ли они относительным магнитным зарядом, т. е. насколько различна у них величина отношения g/e, доступен прямой экспериментальной проверке *. Пусть, например, электрон, протон и нейтрон являются дуальнозаряженными частицами с различным отношением g/e. Пусть, далее, наблюдаемый заряд электрона есть чисто электрический эффективный. Тогда протон и нейтрон будут обладать магнитным зарядом. С такой точки зрения любая электронейтральная система, содержащая электроны, протоны и нейтроны, оказывается магнитнозаряженной, что должно приводить к наблюдаемым эффектам в макроскопических масштабах, в частности, к появлению радиальной составляющей напряженности магнитного поля Земли и Солнца. Поскольку эта составляющая не превышает 1 *гс*, то верхний предел величины магнитного заряда протона и нейтрона можно установить с большой точностью. Соответствующие оценки таковы [121, 129, 205]: $g_p,\ g_n < 10^{-35}$ CGSM, или в единицах электрического заряда: $g_p,\ g_n < 2 \cdot 10^{-26}\ e$.

В работе [96] с помощью чувствительного сверхпроводящего квантового интерферометра была произведена непосредственная

* Заметим, что для проверки универсальности отношения g/e для всех известных частиц достаточно измерить электрический и магнитный заряды протона, нейтрона и мюона относительно электрона [205].

оценка величины зарядов g_p и g_n, которая дала следующие результаты: $g_p, g_n < 10^{-24}e$.

Приведем также предварительные данные по оценке величины магнитного заряда мюона [96]: $g_\mu < 10^{-5}e$.

Таким образом, имеющуюся совокупность опытных данных можно истолковать как свидетельство выполнения условия $g/e =$ $=$ univ для всех известных частиц. Следовательно, допустимость перехода от электродинамики дуальнозаряженных частиц к электродинамике с одним эффективным зарядом можно считать достаточно надежно обоснованной экспериментально.

Квантовая теория дуальнозаряженных частиц. Швингером [15] и Цванцигером [16, 21] была построена квантовая теория дуальнозаряженных частиц, в которой возникает следующее обобщенное условие зарядового квантования *:

$$e_i g_j - e_j g_i = n_{ij}\hbar c, \quad n_{ij} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{33}$$

где индексы i и j относятся к различным типам дуальнозаряженных частиц. Нетрудно видеть, что условие зарядового квантования для дуальнозаряженных частиц существенно меняется. Прежде всего, для фиксированного значения отношения g_i/e_i условие (33) не налагает ограничений на произведение $e_i g_i$. Здесь n_{ij} может равняться теперь нулю не только при $g_i = g_j = 0$, но и при условии универсальности отношения g/e, т. е. когда $g_i \neq g_j \neq 0$. Наконец, обобщенное условие зарядового квантования допускает для атомарного электрического заряда значения, отличные от заряда электрона **.

Для правильной физической интерпретации дуальносимметричной электродинамики существенной является независимость физических следствий теории от угла поворота в зарядовой плоскости (e, g). В классической теории это можно сформулировать как принцип, согласно которому наблюдаемыми в электродинамике являются только дуальноинвариантные величины [126]. На квантовом уровне аналогичную роль выполняет утверждение об унитарной эквивалентности двух гамильтонианов, один из которых описывает систему дуальнозаряженных частиц с зарядами e_i, g_i, а второй — систему частиц с зарядами $e'_i = e_i \cos\theta -$ $- g_i \sin\theta$, $g'_i = e_i \sin\theta + g_i \cos\theta$ (теорема Цванцигера о «киральной» эквивалентности [16]).

Лоренц-инвариантную квантовую теорию и S-матрицу, описывающие дуальнозаряженные частицы при условии $g/e =$ univ ***,

---

* В рамках подхода Кабиббо и Феррари [3] можно получить обобщение условия зарядового квантования Дирака [20, 138].

** Последние два обстоятельства существенно используются в дионных моделях Швингера [15, 166] и Барута [167] (см. п. 5).

*** Интересно отметить, что при построении S-матрицы условие $g/e =$ $=$ univ заранее не предполагается, а следует из требования лоренц-инвариантности теории (при условии выполнения явной 0 (3)-инвариантности).

можно построить и без использования нити Дирака [136, 138] (см. также работы [10, 124]). Гамильтониан, описывающий взаимодействие дуальнозаряженных частиц с зарядами e, g, и гамильтониан, соответствующий частицам с одним эффективным зарядом $q = (e^2 + g^2)^{1/2}$, связаны между собой унитарным дуальным преобразованием (25) при $\theta = \operatorname{arctg}(g/e)$ *.

Теория, рассматривающая совместно «чисто электрически» и «чисто магнитнозаряженные» частицы, предстает частным случаем теории дуальнозаряженных частиц двух типов и соответствует следующему выбору: $g_i/e_i = -e_j/g_j$.

Таким образом, введение магнитного заряда в электродинамику из соображений дуальной симметрии не только оправданно, но и необходимо. В этом случае достигается взаимное согласование симметрии уравнений Максвелла с источниками и свободных уравнений Максвелла. Существенная особенность заключается, однако, в том, что симметрию уравнений электродинамики можно достигнуть без введения нового типа частиц. Рассмотрение известных частиц как дуальнозаряженных оказывается полностью непротиворечивым и согласуется с экспериментальными данными, если трактовать последние как свидетельство о совпадении отношения электрического и магнитного зарядов у всех частиц. Традиционная однозарядовая формулировка электродинамики соответствует с такой точки зрения определенному выбору «дуальной калибровки».

Следовательно, аргументация в пользу представления о магнитном монополе должна в первую очередь основываться не на соображениях симметрии уравнений Максвелла, а на возможности теоретического объяснения квантованности электрического заряда. При отказе от условия зарядового квантования не остается никаких «чисто электродинамических» причин для введения частиц с иным значением отношения g/e, чем у известных частиц.

4. УСЛОВИЕ ЗАРЯДОВОГО КВАНТОВАНИЯ

Исключительно важно выяснить, в какой мере условие зарядового квантования является независимым от специфики формального аппарата теории магнитного заряда. Для этого следует проанализировать возможные варианты его вывода.

Полевая теория. Особый интерес представляют такие модификации подхода Дирака — Швингера в теории магнитного заряда, которые не связаны с использованием линии сингулярности.

---

* В работах [35, 39] вопрос об эквивалентности двух формулировок электродинамики рассматривался в рамках лагранжева подхода на классическом уровне (см. также работы [43, 132, 133, 137]).

Впервые такая теория была построена Кабиббо и Феррари [3] (см. также работы [4, 10, 12, 18, 20, 165, 204]) на основе беспотенциальной формулировки квантовой электродинамики Мандельстама [Д5], где основными калибровочно-инвариантными динамическими переменными являются полевой тензор $F_{\mu\nu}(x)$ и полевые операторы $\Phi(x, P)$, зависящие, однако, не только от пространственно-временной точки x, но и от пространственноподобного пути P. Соотношение Дирака — Швингера возникает здесь как условие самосогласованности теории. Беспотенциальный формализм допускает обобщение и на случай дуальнозаряженных частиц [20, 138] *.

В подходе Кабиббо и Феррари возникает, однако, специфическая трудность: производные от полевых операторов не удовлетворяют тождеству Якоби **. Для того чтобы избежать этого противоречия, приходится налагать на выбор пространственноподобных путей определенные ограничения, весьма близкие по смыслу к вето Дирака.

Швингер произвел реконструкцию теории магнитного заряда на основе феноменологического и неоператорного приближения теории источников [15]. По его мнению, это обеспечивает независимое от характера предельных процедур обоснование идеи магнитного заряда и дает дополнительное доказательство условия зарядового квантования.

В работе [22] рассмотрен вариант теории магнитного заряда, основывающийся на гидродинамической формулировке квантовой механики, без использования потенциала. Требование внутренней непротиворечивости теории вновь приводит к условию зарядового квантования.

Теоретико-групповой подход. Первый теоретико-групповой вывод условия квантования Дирака принадлежит Фирцу [140], который показал, что собственные функции гамильтониана электрически заряженной частицы в поле неподвижного монополя (см. п. 5.2) образуют пространство представления группы $O(3)$ в том, и только в том случае, если параметр $\mu = eg/4\pi$ — целое или полуцелое число. Возникновение условия зарядового квантования в качестве необходимого следствия вращательной инвариантности было подтверждено обстоятельным исследованием Харста [146] (см. также работы [21, 58]). Здесь существенно следующее. Компоненты оператора углового момента J образуют алгебру $O(3)$ и коммутируют с гамильтонианом во всех точках пространства, за исключением нити Дирака. Необходимо сужение области определений H и J, которая ограничена функциями, убывающими

* В работе [10] этот формализм был использован для случая $g/e =$ $=$ univ.

** В дальнейшем увидим, что нарушение тождества Якоби характерно для квантовой теории с двумя типами источников.

достаточно быстро на нити Дирака. При этом H и J могут являться самосопряженными операторами, удовлетворяющими перестановочным соотношениям $[H, J] = 0$, $[J_k, J_l] = i\varepsilon_{k,ln}J_n$. Это справедливо для любых значений μ. Однако, если далее требовать, чтобы J_k генерировали не только алгебру Ли группы 0 (3), но и приводили к конечным представлениям группы вращений, необходимо, чтобы μ принимало только квантованные значения: $\mu = 0, \pm 1/2, \pm 1, \ldots$

Поскольку подход Фирца и Харста связан с явным использованием вектор-потенциала, независимость полученных результатов от наличия линии сингулярности может вызывать сомнение. Поэтому представляет интерес анализ проблемы e — g-взаимодействия в рамках чисто алгебраического подхода на основе представления Гейзенберга, когда достаточно определить оператор временного сдвига и перестановочные соотношения для операторов координат и кинетических импульсов [59, 147, 149].

Пусть точечный электрический заряд массы m движется в поле неподвижного монополя. Зададим оператор энергии в следующем виде:

$$H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{\pi}^2,$$

где кинетический импульс $\boldsymbol{\pi}$ связан со скоростью обычным определением: $\boldsymbol{\pi} = m\, d\mathbf{r}/dt$. Коммутационные соотношения для $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\pi}$ выберем в следующей форме:

$$[x_k, x_l] = 0;$$

$$[x_k, \pi_l] = i\delta_{kl};$$

$$[\pi_k, \pi_l] = -ie\varepsilon_{kln}H_n,$$

где $\mathbf{H} = g\mathbf{r}/r^3$ — центрально-симметричное магнитное поле. Такой выбор оператора энергии и перестановочных соотношений обеспечивает правильное выражение для силы Лоренца в уравнениях *:

$$d\boldsymbol{\pi}/dt = i\,[H, \boldsymbol{\pi}] = (-e/2m)\,(\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{H} - \mathbf{H}\times\boldsymbol{\pi}),$$

а также позволяет построить сохраняющийся угловой момент:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r}\times\boldsymbol{\pi} - eg\hat{\mathbf{r}}/4\pi, \qquad (34)$$

компоненты которого удовлетворяют перестановочным соотношениям для генераторов группы 0 (3):

$$[J_k, J_l] = i\varepsilon_{kln}J_n. \qquad (35)$$

---

* Заметим, что формально те же перестановочные соотношения получаются, если исходить из канонического импульса $\mathbf{p} = \boldsymbol{\pi} + e\mathbf{A}$, включающего потенциал.

Из (34) находим следующее соотношение:

$$J\hat{\mathbf{r}} = eg/4\pi. \tag{36}$$

Перестановочные соотношения (35) совместно с соотношениями коммутации

$$[\hat{x}_k,\ \hat{x}_l] = 0;$$

$$[J_k,\ \hat{x}_l] = \mathrm{i}\varepsilon_{kln}\hat{x}_n$$

($\hat{x}_k = x_k/r$ — генераторы единичных сдвигов в импульсном пространстве) образуют алгебру трехмерных евклидовой группы E (3), а оператор $J\hat{r}$ представляет собой один из операторов Казимира этой алгебры. Поскольку численные значения j_0 такого оператора могут быть только целыми и полуцелыми $|j_0| = 0, 1/2, 1, \ldots$), из выражения (36) сразу получаем условие квантования Дирака.

Полуклассическое рассмотрение. Саха [143] и Вильсон [141] предложили простой и эффектный вывод соотношения Дирака, основанный на квантовании проекции углового момента электромагнитного поля, создаваемого статической парой электрический заряд — монополь.

Для проекции углового момента поля на линию, соединяющую заряд, получается следующая величина *:

$$\mathbf{s} = \int \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H})\, dV = eg\hat{\mathbf{n}}/4\pi, \tag{37}$$

где $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{r}/r$ — единичный вектор, направленный вдоль линии, соединяющей заряды. В соответствии с правилами квантования момента импульса эта величина может принимать только целые и полуцелые значения, что сразу же приводит к условию зарядового квантования. Аналогичным путем можно получить обобщенное условие Дирака — Швингера, рассматривая две дуальнозаряженные частицы (см., например, [166]). Используя обычные ньютоновы уравнения движения с дуальносимметричной силой Лоренца, нетрудно убедиться, что в роли сохраняющегося углового момента при этом выступает следующая величина:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} - [(e_1g_2 - e_2g_1)/4\pi r]\,\mathbf{r}, \tag{38}$$

где $\mathbf{r}$ — вектор относительного расстояния между частицами. Проецируя $\mathbf{J}$ на $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$, находим: $\mathbf{J}\hat{\mathbf{r}} = (e_1g_2 - e_2g_1)/4\pi$, откуда, полагая $\mathbf{J}\hat{\mathbf{r}} = n\hbar$ (n — целое или полуцелое число), получаем условие (33).

Процедуры такого рода все же не могут рассматриваться как строгий вывод условия квантования заряда. Квантование углового момента с необходимостью предполагает, что его проекции являют-

* Это выражение впервые было получено Томсоном [45].

ся генераторами группы вращений (или ее представлений). Между тем, если считать **r** и **p** соответственно операторами канонических координат и импульсов, компоненты вектора (37) коммутируют между собой, а компоненты вектора (38) хотя и некоммутативны, но не образуют алгебры 0 (3).

В некоторых работах [150—152] за основу для вывода условия Дирака — Швингера берется квантование магнитного потока. Здесь прежде всего нужно выделить работу [152], где условие Дирака получено как следствие требования ненаблюдаемости линии сингулярности в интерференционном эксперименте Ааронова — Бома [Д6]. Более формальный и по существу полуклассический характер носит вывод условия зарядового квантования из анализа движения электрического заряда в поле бесконечной магнитнозаряженной плоскости и движения монополя в поле плоского конденсатора [150, 151].

Различие между условиями квантования Дирака и Швингера. Согласно Дираку, условие зарядового квантования может содержать как целые, так и полуцелые числа, в то время как у Швингера полуцелые значения исключены. В полевой теории формальной причиной этого различия является разный выбор линии сингулярности. Было бы желательно отыскать дополнительные аргуменменты в пользу одной из этих возможностей. Такие попытки на полуклассическом уровне предпринимались в некоторых работах, но все они носят нестрогий характер. Более обоснованным выглядит направление, пытающееся связать это различие с требонием вращательной инвариантности теории [147, 166]. В то же время анализ, приведенный в работах [146, 149], показывает, что соображения 0 (3)-инвариантности с необходимостью выделяют лишь наборы целых и полуцелых чисел для величины $\mu = eg/4\pi$ без какой-либо дискриминации одного из этих наборов.

В принципе условие Швингера можно получить и при использовании полубесконечной линии сингулярности [8], проводя анализ предельных значений криволинейных интегралов типа $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$, когда контур интегрирования проходит через линию сингулярности. Но, как отметил Зумино [203], величина интегралов в таких исключительных ситуациях плохо определена.

Цванцигер [16, 21] в рамках дуальносимметричной теории приходит к целочисленному зарядовому квантованию. Хотя автор и склонен считать этот результат следствием дуальной симметрии, он, по-видимому, обусловлен использованием швингеровского формализма.

В пользу условия Дирака, как минимального, можно привести следующие физические соображения [148]. Теория монополя непротиворечива, если отсутствуют физические эффекты, вызванные сингулярным полем, связанным с нитью Дирака. Но сечение рассеяния электронной волны полубесконечным тонким длинным соленоидом, имитирующим магнитный заряд с нитью, исчезает, когда магнитный поток вдоль нити удовлетворяет условию $e\Phi = 1/2n\hbar c$ (см. также [Д7]), которое соответствует условию зарядового квантования Дирака. Это означает, что условие Швингера не является необходимым для обеспечения физической непротиворечивости теории.

Обсуждение. К условию зарядового квантования можно прийти по меньшей мере тремя различными путями: 1) из требования однозначности фазовых преобразований; 2) используя условие инвариантности относительно группы пространственных вращений; 3) исходя из условия квантования магнитного потока. Хотя в каждом из этих подходов обоснованность процедуры вывода может вызывать сомнения, однако сам факт существования нескольких логически независимых способов получения соотношения Дирака — Швингера является сильным аргументом в пользу того, что это соотношение выступает в качестве существенного элемента теории магнитного заряда.

Сравнение различных способов вывода условия зарядового квантования позволяет выявить характерную тенденцию: чем последовательнее процедура вывода, с тем большей необходимостью появляются в теории математические аномалии. В формализме Дирака — Швингера такой аномалией является линия сингулярности. В альтернативном подходе, не связанном с явным использованием линии сингулярности, приходится сталкиваться с нарушением тождества Якоби для кинетических импульсов заряженных частиц. В самом деле, если исходить из стандартных перестановочных соотношений для канонических координат и импульсов, то правила коммутации для кинетических импульсов заряженных частиц в присутствии электромагнитного поля имеют следующий вид:

$$[p_\mu,\ p_\nu] = -\mathrm{i}eF_{\mu\nu}, \tag{39}$$

отсюда получаем

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}[p_\beta,\ [p_\mu,\ p_\nu]] = -e\partial_\beta\widetilde{F}^{\alpha\beta}. \tag{40}$$

Левая часть этого выражения всегда равна нулю в силу тождества Якоби. Обращение же в нуль правой части зависит от характера используемых полевых уравнений. В обычной однозарядовой электродинамике ($\partial_\beta\widetilde{F}^{\alpha\beta} = 0$) тождество Якоби удовлетворяется автоматически. Наличие магнитных источников ($\partial_\beta F^{\alpha\beta} = J_g^\alpha$) при использовании перестановочных соотношений (39) всегда будет приводить к нарушению тождества Якоби. В то же время, чтобы получить правильное выражение для силы Лоренца, необходимы соотношения (39).

Приведенные соображения отчетливо показывают, что появление «патологических» черт в электродинамике с двумя типами источников неизбежно, если остается фиксированной структура уравнений движения для заряженных частиц. Характерно, что и устранение влияния линии сингулярности на физические следствия теории, и ликвидация противоречия с тождеством Якоби осуществляются при использовании условия зарядового квантования [59, 149].

Отсюда, на наш взгляд, следует, что внутренне непротиворечивая электродинамика с двумя типами источников, если она вообще возможна, должна содержать в себе соотношение Дирака — Швингера.

5. ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ МАГНИТНОГО ЗАРЯДА

Дискретные симметрии в теории магнитного заряда. Если считать, что векторы **E** и **H** в присутствии магнитных источников сохраняют поведение относительно P-, T-отражений, то из уравнений Максвелла следует, что магнитный заряд должен вести себя как псевдоскаляр, а плотность магнитного тока — как аксиальный вектор по отношению к пространственным и временным отражениям.

Считая магнитный ток полярным вектором, мы сталкиваемся с нарушением P-, T-четности в электромагнитных процессах с участием монополя. Требование сохранения четности в электромагнитных взаимодействиях, например, могло бы послужить принципом запрета для существования монополей или же существенно понизить возможную величину магнитного заряда [155].

Рассмотрение магнитного тока в квантовой теории как аксиального вектора предполагает его следующее определение [160, 161]:

$$J_\mu^{(g)} = g\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi. \tag{41}$$

Однако поле ψ в этом случае соответствует безмассовой частице, а также отсутствует классический предел для теории магнитного заряда, что представляется неудовлетворительным.

Запись магнитного тока в виде (41) использовалась в работах [160, 161] для рассмотрения возможности нарушения зарядового сопряжения в электромагнитных взаимодействиях.

Для случая чисто электрически и чисто магнитнозаряженных частиц можно определить сохраняющиеся операторы P- и T-отражения, не предполагая псевдоскалярности магнитного заряда. Как впервые отметил Рамсей [154], в присутствии магнитных зарядов CPT-теорему можно обобщить введением операции магнитного зарядового сопряжения M ($CPTM$-теорема).

Используя представление Майорана запишем:

$$C'\colon \mathbf{E},\ \mathbf{H},\ \psi_e,\ \psi_g \to -\mathbf{E},\ -\mathbf{H},\ \psi_e^+,\ \psi_g^+;$$

$$P'\colon \mathbf{E}(\mathbf{x}),\ \mathbf{H}(\mathbf{x}),\ \psi_e(\mathbf{x}),\ \psi_g(\mathbf{x}) \to$$

$$\to -\mathbf{E}(-\mathbf{x}),\ \mathbf{H}(\mathbf{x}),\ \gamma^0\psi_e(-\mathbf{x}),\ \gamma^0\psi_g^+(-\mathbf{x});$$

$$T'\colon \mathbf{E}(t),\ \mathbf{H}(t),\ \psi_e(t),\ \psi_g(t) \to$$

$$\to \mathbf{E}(-t),\ -\mathbf{H}(-t),\ \gamma^0\gamma^5\psi_e(-t),\ \gamma^e\gamma^5(\psi_g(-t).$$

Относительно $C'P'T'$ — Θ-преобразования имеем

$$\Theta\colon \mathbf{E}(t,\ \mathbf{x}),\ \mathbf{H}(t,\ \mathbf{x}),\ \psi_e(t,\ \mathbf{x}),\ \psi_g(t,\ \mathbf{x}) \to$$

$$\to \mathbf{E}(-t,\ -\mathbf{x}),\ \mathbf{H}(-t,\ -\mathbf{x}),\ \gamma^5\psi_e^+(-t,\ -\mathbf{x}),\ \gamma^5\psi_g(-t,\ \mathbf{x}).$$

Это рассмотрение соответствует использованию в теории, включающей магнитные заряды, обобщенных операций C', P', T', а именно [16, 154, 204] $C' = CM$; $P' = PM$, $T' = TM$.

В теории с электрически и магнитнозаряженными частицами не существует сохраняющихся операторов P- и T-инверсии. Степень нарушения P- и T-четности можно охарактеризовать при этом следующей дуальноинвариантной величиной $\xi \sim (e_ie_j + g_ig_j) \times \times (e_ig_j - e_jg_i)$.

Динамика дуальнозаряженных частиц. Нерелятивистский квантовомеханический гамильтониан относительного движения в x-представлении, описывающий взаимодействие двух дуальнозаряженных частиц с зарядами e_1, g_1; e_2, g_2 при использовании потенциалов (11), имеет следующий вид:

$$H = (\mathbf{p} - \mu\mathbf{D})^2/2m - \alpha/r, \tag{42}$$

где $\mathbf{r}$ — относительное расстояние; $\mathbf{p} = -i\partial/\partial\mathbf{r}$; $\mathbf{D} = (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}) \times \times \mathbf{r}\hat{\mathbf{n}}/r\{r^2 - (\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2\}$; $\alpha = -(e_1e_2 + g_1g_2)/4\pi$, $\mu = (g_1e_2 - g_2e_1)/4\pi$ — электрический и магнитный параметры взаимодействия соответственно.

Сохраняющийся оператор углового момента имеет вид: $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times (\mathbf{p} - \mu\mathbf{D}) - \mu\hat{\mathbf{r}}$.

В работе [62] показано, что состояние дискретного спектра гамильтониана реализуют так называемые осцилляторные представления алгебры O (42) с $\mu = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ Энергетические уровни имеют следующую форму:

$$E = (-mc^2\alpha^2/2)\{s + [(j + 1/2)^2 - \mu^2]^{1/2}\}^{-2}, \quad s = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$$

Там же установлено, что группа O (4,2) является группой динамической симметрии и для релятивистского случая. С помощью оператора радиального сдвига $\pi_r = (\hat{\mathbf{r}}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi}\hat{\mathbf{r}})/2$ гамильтониан (42) перепишется в следующем виде:

$$H = \pi_r^2//2m + (\mathbf{J}^2 - \mu^2)/2mr^2 - \alpha/r, \text{ где } \boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - \mu\mathbf{D}. \tag{43}$$

Если, следуя [59, 61], добавить к (43) центробежный потенциал $V = \mu^2/2mr^2$, можно полностью восстановить симметрию, характерную для чисто кулоновского взаимодействия. Связанные состояния будут соответствовать тогда представлениям четырехмерной группы вращений, а состояния рассеяния — представлениям группы Лоренца.

Интересной особенностью состояний дискретного спектра является то, что в случае, когда μ пробегает все дозволенные значения, реализуются все неприводимые представления $D\,(n_1,\ n_2)$ группы O (4), а не только диагональные представления $(n_1 = n_2)$, как в обычной задаче Кеплера $(n_1 + n_2 = |\mu|,\ |\mu| + 1,\ |\mu| + 2,\ \ldots;\ n_1 - n_2 = \mu)$.

Задача о взаимодействии двух дуальнозаряженных частиц допускает точное решение и в релятивистском варианте [60, 62] *. В частности, для собственных значений дираковского гамильтониана получается следующее выражение [60]:

$$E_{nj} = mc^2 \{1 + \alpha^2 [n + \{(j + 1/2)^2 - \mu^2 - \alpha^2\}^{1/2}]^{-2}\}^{-1/2}. \tag{44}$$

Интересно сравнить (44) с выражением для энергетического спектра обычной кулоновской задачи: $E_{nj} = mc^2 \{1 + (\alpha_0 z)^2 [n + \{(j + {}^1/_2)^2 - (\alpha_0 z)^2\}^{1/2}]^{-2}\}^{-1/2}$, где $\alpha_0 = 1/137$, z — заряд ядра. Поскольку параметр γ, определяющий поведение радиальных функций в нуле, в рассматриваемом случае находится из соотношения $\gamma^2 = (j + {}^1/_2)^2 - \mu^2 - \alpha^2$, то в случае, когда кулоновский центр содержит помимо электрического еще и магнитный заряд, при выполнении условия зарядового квантования сингулярное поведение решений уравнения Дирака будет иметь место не при $z \sim 137$, а при любых значениях z, начиная с единицы.

Для нерелятивистской картины рассеяния двух дуальнозаряженных частиц Цванцигером [59] было построено в замкнутом виде выражение для S-матрицы. Специфической особенностью этой задачи является то, что при вращениях амплитуда для бесспиновых частиц ведет себя как «хелисити — флип» амплитуда, а $|\,\mathrm{in}\rangle$- и $|\,\mathrm{out}\rangle$- состояния при этом не преобразуются как произведение состояний свободных частиц.

Такое положение возникает из-за того, что величина μ выступает во всех соотношениях в качестве проекции некоторого дополнительного углового момента, который, однако, не может быть приписан ни одной из частиц, а отличен от нуля даже при бесконечно большом расстоянии между частицами [45] **.

---

* Случай, рассмотренный в работе [60], соответствует движению «чистого» электрического заряда $-e$ в поле электрически заряженного монополя $e_1 = (ze,\ g)$.

** Последнее следует из того, что угловой момент поля (37), образуемого статической $e - g$-парой, не зависит от расстояния между зарядами.

В более ранних работах, посвященных нерелятивистскому [1, 53, 54, 56, 140] и релятивистскому [56—58] рассмотрению проблемы e — g-взаимодействия, фактически речь шла об исследовании состояний непрерывного спектра, поскольку в системе чистый электрический заряд — монополь связанные состояния не возникают ни при каких комбинациях знаков e и g.

Нецентральный характер e — g-взаимодействия приводит к появлению своеобразных черт в нерелятивистской картине рассеяния.

Для малых углов рассеяния амплитуда имеет квазирезерфордовский вид (см., например, [58]):

$$f(\theta,\ \varphi) = i(-1)(eg/4\pi)\exp\{(2ieg/4\pi)\varphi\} \times (eg/(2mvc\cdot\sin^2\theta/2).$$

При больших углах рассеяния поведение амплитуды резко нерегулярно, причем характер особенностей легче всего продемонстрировать, записав классическое выражение для сечения [47, 58]:

$$d\sigma/d\Omega = (eg/mvc)^2 \sin\psi/\cos^4\psi\,|\,2\sin\psi\,\{1-\cos(\pi/\sin\psi)\} - \\ -\pi\sin(\pi/\sin\psi)\,|^{-1}, \qquad (45)$$

где $\psi = \operatorname{arcctg}(eg/mvcb)$; b — прицельный параметр; $L = vb$ — абсолютная величина орбитального углового момента, а угол рассеяния определяется соотношением

$$\cos\theta = \sin\psi\sin(\pi/2\sin\psi).$$

Легко видеть, что сечение (45) быстро осциллирует при $\theta \to \pi$ и имеет интегрируемую особенность при $\theta = \pi$, причем рассеянию назад отвечает бесчисленное множество значений прицельного параметра, удовлетворяющих условию $\psi_k = \arcsin(^1/_2 k)$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Причина такого необычного поведения сечения станет понятней, если вспомнить, что классическая траектория электрического заряда в поле монополя не является плоской, а расположена на поверхности кругового конуса с половинным углом раствора ψ и осью, направленной вдоль вектора $\mathbf{J} = \mathbf{L} - eg\hat{\mathbf{r}}/c$. При каждом заданном L (кроме $L = 0$) существует минимальное расстояние, на которое заряд может приблизиться к плоскости, перпендикулярной J и проходящей через центр (эффект «магнитного зеркала» [48]).

Магнитный заряд и составные модели адронов. Согласно подходу, предложенному в недавних работах Швингера [15, 166] и Барута [167], адроны следует рассматривать как магнитнонейтральные образования, состоящие из дуальнозаряженных частиц — дионов *.

* В связи с этим уместно процитировать высказывание Дирака из его работы 1948 г.: «Мы можем предположить, что элементарные частицы с полюсами образуют важную составную часть протонов».

Как уже отмечалось, в основе этих подходов лежит обобщенное условие зарядового квантования, допускающее существование новой единицы электрического заряда e', отличной от известной единицы e ($e^2/\hbar c \approx 1/137$). Проще всего в этом убедиться, рассматривая электрические и магнитные заряды частицы как компоненты вектора $q = (e, g)$ в действительном двумерном линейном векторном пространстве. Условию зарядового квантования подчиняется векторное произведение двух таких векторов: $q_1 \times q_2 = e_1g_2 - e_2g_1 = n\hbar c$. Существует только два линейно независимых вектора, удовлетворяющих соотношению $q_1 \times q_2 = \hbar c$, и нетрудно показать [16], что любой вектор может быть записан в виде $q_n = Z_{n1}q_1 + Z_{n2}q_2$, $Z_{ni} = 0, \pm1, \pm2 \ldots$. Выбирая q_1 в качестве чистого электрического эффективного заряда, т. е. полагая $q_1 = (e, 0)$ ($e^2/\hbar c \approx 1/137$), видим, что $q_2 = (e_2, e^{-1})$, где e_2 — второй квант электрического заряда. Аналогично, наряду с магнитным зарядом $g = 137e$, должен существовать второй квант магнитного заряда.

Если дионы подчиняются статистике Ферми — Дирака, то для построения барионов необходимо, чтобы для них были возможны по меньшей мере два значения магнитного заряда. В противном случае магнитнонейтральные образования удается строить единственным способом, комбинируя дионы и антидионы, т. е. в такой схеме будут только мезоны.

По Швингеру, дионы несут магнитные заряды $2g_0$, $-g_0$, $-g_0$ и обладают каким-либо из трех значений электрического заряда: $2e_0$, $-e_0$, $-e_0$. Здесь $e_0 = e/3$ ($e^2/\hbar c \approx 1/137$) — новая единица электрического заряда; $g_0 = g/3$ ($g^2/\hbar c \approx 36 \cdot 137$) — вторая единица магнитного заряда.

Используя нерелятивистский гамильтониан (42), можно дать грубую оценку массы диона M_D [166], которая, однако, приводит к вполне разумной величине ($M_D \sim 6$ *Гэв*). Ханом и Биденхарном [168] показана возможность интерпретации этого подхода в рамках $SU(3) \otimes SU(3)$-симметрии для сильных взаимодействий *.

Модель обладает рядом привлекательных особенностей: отсутствие трудностей со статистикой Ферми — Дирака, объяснение дробных значений электрических зарядов. Для мезонов модель ведет естественным образом к 0^--, 1^--мультиплетам, предсказывает величину электромагнитного расщепления масс K-мезонов, в принципе дает возможность качественного объяснения CP-нарушения.

Последнее обстоятельство является в то же время и критичным для модели. Если рассчитывать электрический дипольный

* Антибарион (магнитные заряды у дионов: $-2g_0$, g_0, g_0) являются здесь существенно отличной от бариона частицей (магнитные заряды у дионов: $2g_0$, $-g_0$, $-g_0$), что, как полагает Швингер, можно в принципе использовать для интерпретации эмпирических свойств барионного заряда.

момент нуклонов аналогично тому, как это делается при расчете магнитных моментов в кварковой модели, то имеем $(E1)$ нуклон $\sim g\hbar/mc = 10^{-12} e \cdot$*см* [168]. Это находится в противоречии с установленными экспериментальными оценками: $(E1)$ нейтрон $< 10^{-22}\ e \cdot$*см*. Кроме того, знак электромагнитного массового расщепления не согласуется с экспериментальными данными. По мнению Швингера [166], это несоответствие можно устранить введением обменного механизма, осуществляемого промежуточным магнитным бозоном, который должен быть связан с обычным нейтринным полем и распадаться на магнитный лептон и нейтрино. В работах [168—170] анализируется подход Швингера, в работах [171, 172] предложены модификации этого подхода.

В работах Барута [167] за основу берется система двух бесспиновых дионов. Однако вследствие использования условия Дирака зарядового квантования минимальное ненулевое значение проекции углового момента $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\pi} - \mu\check{\mathbf{r}}$ в системе двух бесспиновых дионов в основном состоянии оказывается равным 1/2, т. е. приводит к полуцелому значению спина для составной частицы. Дионы рассматриваются с зарядами e_0, g_0 и e_0, $-g_0$, так что $e_0 = e/2$, $(e^2/\hbar c \approx 1/137)$ $g_0 \approx 68{,}5e$. Набор состояний рассмотренной водородоподобной системы (диониум) образует представление группы O (4,2) [62]. При этом удается объяснить дипольный магнитный форм-фактор протона, получить спектр масс, соответствующий линейно растущим траекториям Редже [167], и вырождение по четности для барионных траекторий. В пользу дионной модели говорит возможность ее довольно широкого согласования с другими направлениями в физике адронов (модель кварков, полюса Редже, высшие симметрии).

Но сейчас еще трудно говорить о подходе Швингера и Барута, как о сложившемся направлении в области составных моделей адронов, поскольку многие из используемых соображений носят весьма нестрогий и полуинтуитивный характер. Проблема заключается к тому же в отсутствии надежных методов расчета наблюдаемых эффектов в рамках модели, в которой используются магнитные заряды с величиной, вытекающей из условия зарядового квантования.

Магнитный заряд и другие проблемы. В 1960 г. Портером [173] была выдвинута гипотеза, согласно которой космические лучи, начиная с энергии 10^{17} *эв*, состоят преимущественно из монополей, ускоряющихся до очень больших энергий галактическими магнитными полями (см. также работу [174]). Из результатов работ [97, 101, 105, 108] следует, что для энергий ниже 10^{19} *эв* космические лучи не содержат монополей в сколько-нибудь заметном количестве (см. также работу [180]).

Рудерман и Цванцигер [177] предложили механизм образования фотонных ливней большой энергии, в основе которого лежит аннигиляция монополей, рожденных в результате взаимодействия высокоэнергетических космических лучей с атмосферой.

Паркером [179] проведен анализ различных гипотез возникновения галактических магнитных полей с точки зрения их совместимости с предположением о существовании монополей. Г. В. Домогацкий и И. М. Железных [178] произвели оценку допустимых значений массы монополя и сечения его рождения в рамках модели горячей Вселенной.

В работах [175, 176] рассмотрены следствия возможного наличия магнитного заряда у нейтрино. Предпринимались попытки построения аналогов магнитного заряда в геометродинамике ([185, 189], а также [112]); обсуждалась возможность связи между монополем и заряженными тахионами [190]; предложена модель элементарных частиц, в основе которой лежит идея квантования магнитного потока [192]. В работах [195—200] рассматриваются модификации макроскопической электродинамики при наличии магнитного заряда.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дальнейший прогресс в изучении проблемы магнитного заряда, и в первую очередь перспективы его экспериментального поиска, требует выяснения того, насколько корректны существующие теоретические представления о монополе Дирака. Хотя по этому поводу нет единого мнения, по-видимому, можно все же утверждать, что «первое неисчезающее приближение» к теории магнитного заряда уже найдено, а имеющиеся трудности связаны с неадекватностью используемого формализма.

Сразу возникает вопрос, можно ли обойтись в теории магнитного заряда без введения аномальных элементов типа нитей Дирака. Пока положение таково, что за отказ от явного использования сингулярных потенциалов всякий раз приходится расплачиваться нарушением тождества Якоби для операторов кинетических импульсов заряженных частиц, т. е. фактически и в беспотенциальном подходе возникают эквивалентные математические аномалии. Создается впечатление, что, оставаясь в рамках лагранжева или гамильтонова формализма, избежать появления таких особенностей невозможно. Было бы чрезвычайно интересно или отыскать формулировки теории, свободные от подобных аномалий, или доказать в общем виде, что этого сделать нельзя.

Некоторые «врожденные» трудности электродинамики с магнитными источниками (устранение влияния линии сингулярности на физические следствия теории, нарушение тождества Якоби, отсутствие O (3)- и лоренц-инвариантности и т. п.) удается разрешить с помощью условия зарядового квантования. Поэтому данное условие выглядит как необходимый элемент физически приемлемой теории магнитного заряда. Как справедливо отметил Голдхабер [58], обнаружение монополей, не удовлетворяющих соотношению Дирака — Швингера, поставило бы под сомнение даже обычные постулаты квантовой механики.

Тем не менее требуется как дальнейший анализ соответствующих вариантов вывода этого соотношения и возможной связи между ними, так и поиски иных способов его установления. К тому же фактически имеется два условия зарядового квантования, в одном из которых отсутствуют полуцелые числа *. В чем истинный смысл такого ограничения? Если верить в возможность экспериментальной регистрации монополя Дирака, то этот вопрос носит далеко не академический характер, поскольку такая процедура может при прочих равных условиях поднять порог его рождения в четыре раза.

Хотя с условием Дирака — Швингера удается сформулировать внутренне непротиворечивую квантово-полевую теорию и построить лоренц-инвариантную S-матрицу, тем не менее здесь пока отсутствует сколько-нибудь удовлетворительная расчетная схема. Причем дело не только в необходимости создания методов расчета, пригодных для большой константы связи **. Не менее важно то, что не вполне ясным представляется механизм электромагнитного взаимодействия между электрическим и магнитным зарядом. Во всяком случае, такой механизм отличается от обычной картины фотонного обмена в однозарядовой квантовой электродинамике. В феноменологической теории e — g-рассеяния это проявляется в наличии дополнительного углового момента (см. п. 5), что, по-видимому, должно приводить к принципиальным затруднениям при построении релятивистской теории S-матрицы (трудности с описанием свободных двухчастичных состояний [58, 59], нарушение кроссинг-симметрии [58] и пр.). Все эти трудности сохраняются и в теории дуальнозаряженных частиц.

Требование дуальной симметрии электродинамики не является, как это ни парадоксально, основным аргументом в пользу монополя Дирака. Если бы, например, удалось доказать, что условие универсальности отношения g/e для дуальнозаряженных частиц является обязательным, то дуальная симметрия в электродинамике была бы сохранена и при наличии источников. Но тем не менее полностью отсутствовали бы какие-либо формальные основания для введения монополей.

Отметим также, что потребность в атомарном магнитном заряде отпала бы и в том случае, если удалось отыскать независимое от идеи монополя теоретическое обоснование квантованности

* Для дуальнозаряженных частиц, согласно Швингеру, допустимы лишь четные числа [8, 166].

** Определенный шаг в этом направлении сделан Барутом [167].

электрического заряда *. Круг приложений идеи магнитного заряда достаточно широк, хотя попытки такого рода пока весьма проблематичны. Наиболее многообещающая из них — дионная модель адронов — носит сугубо предварительный характер.

Несомненно, монополь представляет собой «экзотическую» частицу. Но проблема магнитного заряда едва ли является экзотической, поскольку затрагивает один из элементов фундамента современной теоретической физики — уравнения электродинамики. Анализ возможных способов модификации существующей формы электродинамики позволяет глубже понять ее структуру, стимулирует поиск новых математических формулировок теории и возможных путей ее обобщения.

ЛИТЕРАТУРА**

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

1*. **Dirac P. A. M.** Proc. Roy. Soc., 1931, **A133**, 60.
2*. **Dirac P. A. M.** Phys. Rev., 1949, **74**, 817.
3. **Cabibbo N., Ferrari E.** Nuovo cimento, 1962, **23**, 1147.
4. **Finkelstein R. J.** Rev. Mod. Phys., 1964, **36**, 632.
5. **Zwanziger D.** Phys. Rev., 1965, **B137**, 647.
6. **Weinberg S.** Phys. Rev., 1965, **B138**, 988.
7. **Hagen C. R.** Phys. Rev., 1965, **B140**, 804.
8*. **Schwinger J.** a) Phys. Rev., 1966, **144**, 1087. b) УФН 1967, **91**, 49.
9. **Schwinger J.** Phys. Rev., 1966, **151**, 1048; 1966, **151**, 1055.
10. **Тевикян Р. В.** ЖЭТФ, 1966, **50**, 911.
11. **Jan T. M.** Phys. Rev., 1966, **150**, 1349.
12*. **Wentzel G.** Progr. Theor. Phys. Suppl., 1966, **37—38**, 163.
13. **Peres A.** Phys. Rev. Lett., 1967, **18**, 50.
14. **Тевикян Р. В.** Nucl. Phys., 1967, **B1**, 79.
15. **Schwinger J.** Phys. Rev., 1968, **173**, 1536.
16. **Zwanziger D.** Phys. Rev., 1968, **176**, 1489.
17. **Coombes C. A.** Can. J. Phys., 1968, **46**, 929.
18. **Rabl A.** Phys. Rev., 1969, **179**, 1363.
19. **Ross D. K.** Phys. Rev., 1969, **181**, 2055.
20. **Стражев В. И.** Материалы I Республиканской конференции молодых ученых. Минск, Ин-т физики АН БССР, 1970.
21. **Zwanziger D.** Phys. Rev., 1971, **D3**, 880.
22. **Bialynicki-Birula J., Bialynicki-Birula Z.** Phys. Rev., 1971, **D3**, 2410.
23. **Murai N.** Progr. Theor. Phys., 1972, **47**, 678.
24. **Bakry H., Kubar-Andre J.** Galilean invariance and magnetic monopoles, preprint C.N.R.S., Marseile, France, 1971 (см. также [37, 58, 59, 82, 83, 136, 146, 161, 203]).

* Любопытна в этом отношении попытка Дирака [183] объяснить квантованность электрического заряда в рамках однозарядовой электродинамики (см., однако, [186]). Этой же проблеме посвящена работа Янга [193].

** Звездочкой (*) отмечены статьи, русский перевод которых имеется в сб. «Монополь Дирака». Перев. с англ. М., «Мир», 1970.

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

25. **Durand E.** Compt. rend., 1956, **242**, 1862.
26. **Gautier P.** Compt. rend., 1957, **245**, 45.
27. **Томильчик Л. М.** «Докл. АН БССР», 1964, **8**, 379.
28. **Fierz M.** Helv. Phys. Acta, 1964, **37**, 663.
29. **Ferrell R. A., Hopfield J.** J. Physics, 1964, **1**, 4.
30. **Chen H. S. C.** Amer. J. Phys., 1965, **33**, 563.
31. **Rohrlich F.** Phys. Rev., 1966, **150**, 1104.
32. **Дорман Л. И., Окулов Ю. И.** «Изв. АН СССР», 1966, **30**, 1590.
33. **Rosenbaum D.** Phys. Rev., 1966, **140**, B804.
34. **Jan T. M.** Phys. Rev., 1967, **160**, 1182.
35. **Epstein K. J.** Phys. Rev. Lett., 1967, **18**, 255.
36. **Усачев Ю. Д.** Доклад на Всесоюзной межвузовской конференции в Ужгороде, октябрь 1968.
37. **Потупа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М.** «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат.», 1969, № 1, 89.
38. **Gamblin R. L.** J. Math. and Phys., 1969, **10**, 46.
39. **Маврычев Ю. С.** «Изв. вузов. Серия физика», 1969, **11**, 136.
40. **Kerner E. H.** J. Math. and Phys., 1970, **11**, 39.
41. **Потупа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М.** «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат.», 1970, № 2, 96.
42. **Miller D. T.** Proc. Cambr. Phil. Soc., 1971, **69**, 449.
43. **Стражев В. И.** «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат.», 1971, № 1, 106 (см. также [2, 21, 121, 135, 136, 139, 208).]

Взаимодействие электрического и магнитного зарядов

1. Классическое описание

44. **Poinkare H.** Compt. rend., 1896, **123**, 930.
45. **Thomson J. J.** Elements of the Mathematical. Theory of Electricity and Magnetism, 1900.
46. **Nadeau G.** Amer. J. Phys., 1960, **28**, 566.
47. **Lapidus J. R., Pietenpol J. L.** Amer. J. Phys., 1960, **28**, 17.
48. **Ленерт Б.** Динамика заряженных частиц. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1967, с. 42—44.
49. **Alsena F.** Acta cient. venezolana, 1964, **15**, 105.
50. **Mitchell T. P., Burns J. A.** J. Math. and Phys., 1968, **9**, 2016.
51. **Jette A. D.** Amer. Math. Monthly, 1969, **76**, 164.
52. **Bailey P. B., Norwood R. J.** J. Appl. Phys., 1970, **41**, 4890 (см. также [58, 66, 67]).

2. Квантовомеханическое рассмотрение

53. **Tamm I. E.** Z. Phys., 1931, **71**, 141.
54. **Grönblom B. O.** Z. Phys., 1935, **98**, 283.
55. **Jordan P.** Ann. Phys., 1938, **32**, 66.
56. **Banderet P. P.** Helv. phys. acta, 1946, **19**, 503.
57. **Harish-Chandra.** Phys. Rev., 1948, **74**, 883.
58*. **Goldhaber A. S.** Phys. Rev., 1965, **B140**, 1407.
59. **Zwanziger D.** Phys. Rev., 1968, **176**, 1480.
60. **Berrondo M., McIntosh H. V.** J. Math. and Phys., 1970, **11**, 125.
61. **McIntosch H. V., Cisneros A.** J. Math. and Phys., 1970, **11**, 896.
62. **Barut A. O., Bornzin G.** J. Math. and Phys., 1971, **12**, 841.
63. **Bialynicki-Birula J.** Phys. Rev., 1971, **D3**, 2413.
64. **Малкин И. А., Манько В. И.** Препринт ФИАН СССР, № 1, 1971 (см. также [1, 12, 79, 84]).

Взаимодействие монополий с веществом

65. **Ford K. W., Wheeler A.** Phys. Rev., 1951, **A81**, 656.
66. **Cole H. J. D.** Proc. Cambridge Philos. Soc., 1951, **47**, 196.
67. **Bauer E.** Proc. Cambridge Philos. Soc., 1951, **47**, 777.
68. **Katz R., Parnell E.** Phys. Rev., 1959, **116**, 236.
69. **Eluser C. J., Roy S. K.** Proc. Cambridge Philos. Soc., 1962, 58, 401.
70. **Коломенский А. А.** «Вестн. МГУ. Серия физика, астрономия», 1962, № 6, 56.
71. **Болотовский Б. М., Воронин В. С.** «Изв. вузов СССР. Серия радиофизика», 1962, 5, № 5, 1033.
72. **Мергелян О. С.** «Докл. АН АрмССР», 1963, **36**, 17.
73. **Tompkins D. R.** Phys. Rev., 1965, **B138**, 248; 1965, **140**, 443.
74. **Веселаго В. Г.** ЖЭТФ, 1967, 52, 1027.
75. **Куканов А. Б.** «Оптика и спектроскопия», 1968, **24**, 614.
76. **Мухтаров А. И., Ниязова Э. Н.** «Оптика и спектроскопия», 1969, **26**, 379.
77. **Куканов А. Б., Давыдов В. Н.** «Изв. вузов СССР. Серия физика», 1970, № 6, 114.
78. **Majumdar S. D., Pal R.** Proc. Roy. Soc. London, 1970, **A136**, 525.
79. **Sivers D.** Phys. Rev., 1970, **D2**, 2048.
80. **Dooher J.** Phys. Rev., 1971, **D3**, 2652.
81. **Давыдов В. Н., Куканов А. Б., Усачев Ю. Д.** «Вест. МГУ. Серия физика, астрономия», 1971, № 3, 310.
82. **Newmeyer J. L., Treffil J. S.** Phys. Rev. Lett., 1971, **26**, 1509.
83. **Goebel C. J.** In: Quanta Essays in Theoretical Physics Dedicated to Gregor Wentzel. Chicago — London, The Univ. of Chicago Press, 1970.

Эксперимент

84*. **Malkus W. V. R.** Phys. Rev., 1951, **83**, 899.
85. **Goto E.** J. Phys. Soc. Japan., 1958, **10**, 1413.
86**. **Fitz H. C.** e. a. Phys. Rev., 1958, **111**, 1406.
87. **Bradner H., Isbell W. H.** Phys. Rev., 1959, **114**, 603.
88. **Fidecaro M., Finocchiaro G., Giacomelli G.** Nuovo cimento, 1959, **22**, 657.
89. a) **Amaldy E.** e. a. Conf. Intern. Acxen. Provence sur. patric. elementar. 1961, Vol. 1, 1962, p. 155; Notas de Fiseka, 1961, 8, **15**, 251; b) **Amaldi E.** e. a. Nuovo cimento, 1963, **28**, 773.
90*. **Purcell E. M.** e. a. Phys. Rev., 1963, **129**, 2326.
91. **Петухов В. А., Якименко Е. М.** Nucl. Phys., 1963, 49, 87.
92. **Goto E., Kolm H. H., Ford K. W.** Phys. Rev., 1963, **132**, 387.
93. **Alvarez L. W., Watt R. W.** (unpublished). Described by Alvarez L. W. in Lawrence Rad. Lab. Phys. Notes, Memo, 479, 1963.
94. **Caruthers W. C., Stetanski R., Adair R. K.** Phys. Rev., 1966, **149**, 1070.
95. **Kolm H. H.** Phys. Today, 1967, **20**, 69; Scient. J., 1968, **4**, 60.
96. **Vant-Hull L.** Phys. Rev., 1968, **173**, 1412.
97. **Fleisher R. L.** e. a. Phys. Rev., 1969, **177**, 2029.
98. **Fleisher R. L.** e. a. Phys. Rev., 1969, **184**, 1393.
99. **Fleisher R. L.** e. a. Phys. Rev., 1969, **184**, 1398.
100. **Ерлыкин А. Д., Яковлев В. И.** ЖЭТФ, 1969, **56**, 1849.
101. **Бурчуладзе А. А.** и др. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 1969, **11**, 1817.
102. **Мурашева В. А., Петухов В. А.** и др. Препринт ФИАН СССР, № 56, 1969.
103. **Дадыкин В. Л.** Препринт ФИАН СССР, № 117, 1969.
104. **Гуревич И. И.** и др. Phys. Lett., 1970, **B31**, 394; 1972, **B38**, 524; ЖЭТФ, 1971, **61**, 1721.

105. **Fleisher R. L.** e. a. Radiat Eff., 1970, 3, 137.
106. **Alvarez L. W.** e. a. Science, 1970, **166**, 701.
107. **Schatten K. H.** Phys. Rev., 1970, **D1**, 2245.
108. **Fleisher R. L.** e. a. Phys. Rev., 1971, **D4**, 25.
109. **Kolm H. H., Villa E. Obidian A.** Phys. Rev., 1971, **D4**, 1285.
110. **Eberhard P. H.** e. a. Phys. Rev., 1971, **D4**, 3260.

Дуальная симметрия

1. Свободное поле

111. **Rainich G. Y.** Trans. Amer. Math. Soc., 1925, **27**, 106.
112. **Misner C., Wheeler J. A.** Ann. Phys., 1957, **2**, 523; **Уилер Дж.** Геометродинамика. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
113. **Takabayasi T.** Compt. rend., 1959, **248**, 70.
114. **Penney R.** J. Math. and Phys., 1964, **5**, 1431.
115. **Calcin M. G.** Amer. J. Phys., 1965, **33**, 958.
116. **Румер Ю. Б., Фет А. И.** ЖЭТФ, 1968, **55**, 1390.
117. **Потупа А. С., Стражев В. И.** Материалы I Республиканской конференции молодых ученых. Минск, 1970. Ин-т физики АН БССР, 1970.
118. **Levman G. M.** Canad. J. Phys., 1970, **48**, 2423.
119. **Стражев В. И.** «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат.», 1971, № 5, 72. См. также [16, 125, 126, 138].

2. Поле с источниками

120. **Page L., Adams N.** Electrodynamics, Van Norstrad, 1940.
121. **Harrisson H.** e. a. Amer. J. Phys., 1963, **31**, 249.
122. **Katz E.** Amer. J. Phys., 1965, **33**, 306.
123. **Fröhlich H.** Progr. Theoret. Phys., 1966, **36**, 636.
124. **Тевикян Р. В.** ЖЭТФ, 1966, **51**, 791.
125. **Потупа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М.** Дуальная инвариантность в электродинамике. Препринт Института физики АН БССР. Минск, 1967.
126. **Стражев В. И., Томильчик Л. М.** «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат.», 1968, № 2, 102.
127. **Потупа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М.** «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат.», 1968, № 3, 124.
128. **Потупа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М.** «Докл. АН БССР», 1968, 12, 690.
129. **Palmer R. F., Taylor J. G.** Nature, 1968, **219**, 1033.
130. **Зайцев Г. А., Солунин А. М.** «Изв. вузов СССР. Серия физика», 1969, № 11, 53.
131. **Зайцев Г. А.** «Изв. вузов СССР. Серия физика», 1969, № 12, 19.
132. **Rajput B. S.** Ind. J. Pure Appl. Phys., 1970, **8**, 297.
133. **Rajput B. S., Singh R. N.** Ind. J. Pure. Appl. Phys., 1970, **8**, 439.
134. **Маврычев Ю. С.** «Изв. вузов СССР. Серия физика», 1970, № 9, 129.
135. **Leiter D.** Canad. J. Phys., 1970, **48**, 279.
136. **Стражев В. И.** Магнитный заряд в электродинамике. Препринт Института физики АН БССР. Минск, 1970.
137. **Стражев В. И.** «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат.», 1970, № 6, 122.
138. **Стражев В. И.** Канд. дис. Минск, 1970.
139. **Han M. Y., Biedenharn L. C.** Nuovo cimento, 1970, **2A**, 544 (см. также [10, 14, 15, 16, 20, 22, 35, 37, 39, 41, 43, 59, 64, 70, 80, 96, 145, 163, 166, 167, 198, 205, 206, 211]).

Условие зарядового квантования

140. **Fierz M.** Helv. Phys. Acta, 1944, **17**, 27.
141. **Wilson H. A.** Phys. Rev., 1949, **75**, 309.
142. **Eldridge J. A.** Phys. Rev., 1949, **75**, 1614.
143. **Saha M. N.** Ind. J. Phys., 1936, **10**, 145; Phys. Rev., 1949, **75**, 1968.
144. **Schwinger J.** In: Proc. Third Coral Gables. Conf. Miami 1966, ed. by A. Perlmutter et al. 1966.
145. **Calcin M. G.** Phys. Lett., 1968, **28A**, 45.
146. **Hurst C. A.** Ann. Phys. 1968, **50**, 51.
147*. **Peres A.** Phys. Rev., 1968, **167**, 1443.
148. **Zumino B.** In: Theory and phenomenology in particle physics, ed. by A. Zichichi, 1969, p. 773.
149. **Lipkin H. J., Weisberger W. I., Peskin M.** Ann. Phys., 1969, **53**, 203.
150. **Efinger H.** Amer. J. Phys., 1969, **37**, 840.
151. **Efinger H.** Physica, 1969, **44**, 621; **Lettere al.** Nuovo cimento, 1970, **4**, 277; **O'Connel Lettere al.** Nuovo cimento, 1969, **2**, 221.
152. **Lubkin E.** Phys. Rev., 1970, **D2**, 2510, 1970; Amer. J. Phys., 1971, **39**, 94.
153. **Стражев В. И.** «Докл. АН БССР», 1971, **15**, 885 (см. также [40, 58, 59, 208]).

Дискретные симметрии в теории магнитного заряда

154. **Ramsey N. F.** Phys. Rev., 1958, **109**, 225.
155. **Томильчик Л. М.** ЖЭТФ, 1963, **44**, 160.
156. **Pintacuda N.** Nuovo cimento, 1963, **29**, 216.
157. **Schiff L. J.** Amer. J. Phys., 1964, **32**, 812; УФН, 1965, **86**, 756.
158. **Strax N.** Amer. J. Phys., 1964, **32**, 615; 1965, **33**, 102.
159. **Mirman** Amer. J. Phys., 1966, **34**, 70.
160. **Salam A.** Phys. Lett., 1966, **22**, 683.
161. **Taylor J. G.** Phys. Rev. Lett., 1967, **18**, 713; In: Lectures in Theor. high energy physics, ed. by H. H. Aly, N.Y., 1968.
162. **Coombes C. A.** Canad. J. Phys., 1969, **47**, 71.
163. **Barut A. O.** Phys. Lett., 1972, **B38**, 97. см. также [6, 16, 94, 166, 168, 201, 204].

Кварки и магнитные заряды

164. **Carrigan R. A.** Nuovo cimento, 1963, **39**, 638.
165. **Schiff L. J.** Phys. Rev. Lett., 1967, **17**, 714; Phys. Rev., 1967, **160**, 1257.
166. **Schwinger J.** Science, 1969, **165**, 757; **166**, 690; УФН, 1971, **103**, 355.
167. **Barut A. O.** Phys. Rev., 1971, **D3**, 1747; In: Proc. Second Coral Gables Conf. on Fundam Inter. ed. by H. Odabasi and W. E. Brittin, N.Y., 1970, p. 199—220 In: Topics in Modern Physics-Atribute to E. U. Condon, Boulder, 1971.
168. **Han M. Y., Biedenharn L. C.** Phys. Rev. Lett., 1970, **24**, 118.
169. **Rosen G.** Phys. Rev., 1970, **D1**, 2880.
170. **Westenholz C.** Ann. Phys., 1970, **25**, 337.
171. **Bakesigaki A., Inomate A.** Lett. al Nuovo cimento, 1971, **2**, 697.
172. **Chen Kun Chang.** Phys. Rev., 1972, **D5**, 950.

Монополь и другие проблемы

173. **Porter N. A.** Nuovo cimento, 1960, **16**, 958.
174. **Goto E.** Progr. Theor. Phys., 1963, **30**, 700.
175. **Окулов Ю. И.** «Геомагн. и аэрономия», 1964, **4**, 1002; 1964, **4**, 1111.

176. **Дорман Л. И., Окулов Ю. И.** «Геомагн. и аэрономия», 1967, 7, 173; **Дорман Л. И., Окулов Ю. И.** В сб. «Космические лучи». № 7. М., «Наука», 1965 и № 8, 1967.
177. **Ruderman M., Zwanziger D.** Phys. Rev., Lett., 1969, **22**, 146.
178. **Домогацкий Г. В., Железных И. М.** «Ядерная физика», 1969, **10**, 1238.
179. **Parker E. N.** Astrophys. J., 1970, **160**, 383.
180. **Osborne W. Z.** Phys. Rev. Lett., 1970, **24**, 1441.
181. **Julier.** Onde electr., 1960, **40**, 260.
182. **Snupp P.** Proc. IRE, 1962, **50**, 2026.
183. **Dirac P. A. M.** Scient. Amer., 1963, **208**, 45.
184. **Левашев А. Е., Воронцов В. И.** «Докл. АН БССР», 1963, 7, № 2.
185. **Lubkin E.** Ann. Phys., 1963, **23**, 2333.
186. **Cavalleri G.** Nuovo cimento, 1965, **35**, 1236.
187. **Томильчик Л. М.** «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат.», 1965, № 4.
188. **Tassie L. J.** Nuovo cimento, 1965, **38**, 1935.
189. **Linson L., Pagel H.** Ann. Phys., 1966, **38**, 363.
190. **Parker L.** Phys. Rev., 1969, **188**, 2287.
191. **Brand R. A.** Vinciarelli, Lett. al. Nuovo Cimento, 1972, 3, 254.
192. **Jehle H.** Phys. Rev., 1971, **D3**, 306.
193. **Yang C. N.** Phys. Rev., 1970, **D1**, 2360.
194. **Carrigan R. A.** Jr., **Nezrick F. A.** Phys. Rev., 1971, **D3**, 56.
195. **Hoffman H.** Acta Phys. Austriaca, 1957, **11**, 241.
196. **Volz H.** Phys. BI, 1961, **47**, 79.
197. **Katz R.** Amer. J. Phys. 1962, **30**, 41.
198. **Carstoiu J.** Compt. rend., 1967, **265**, 833.
199. **Carstoiu J.** Compt. rend., 1969, **269**, B860.
200. **Левашов А. Е., Воронцов В. И.** «Докл. АН БССР», 1963, 23, 655; «Изв. вузов. Серия физика», 1965, 6, № 1.

ОБЗОРЫ И ПОПУЛЯРНЫЕ СТАТЬИ

201. **Ферми Э.** Лекции по атомной физике. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
202. **Devons S.** Sci. Progr., 1963, **51**, 601; УФН, 1965, 85, 755.
203. **Zumino B.** In Strong and Weak Inter. Present Probl. ed. by A. Zichichi., N.Y., 1967.
204. **Амальди Е.** и др. Поиски монополей Дирака. В сб. «Монополь Дирака». Пер. с англ. М., «Мир», 1970.
205. **Sandars P. G. H.** Contemp. Phys., 1966, **7**, 419.
206. **Amaldi E.** In: Old and New Problems in Elem. Parcticles. Ed. by G. Puppi, N. Y., 1968.
207. **Fleischer R. L.** et al. J. Appl. Phys., 1970, **41**, 958.
208. **Болотовский Б. М., Усачев Ю. Д.** Вступительные статьи в сб. «Монополь Дирака». Пер. с англ. М., «Мир», 1970.
209. **Ford R. W.** Scient. Amer. 1963, **203**, 6.
210. **Taylor J. G.** Zenith., 1969, **6**, 14.
211. **Томильчик Л. М.** Проблема магнитного заряда. Лекция на Международной школе молодых ученых по физике высоких энергий. Гомель, 1971.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Д 1. **Schwinger J.** Phys. Rev., 1963, **130**, 406, 800; Nuovo cimento, 1963, **30**, 278.
Д 2. **Hagen C. R.** Math Revs., 1967, **33**, 616.
Д 3. **Janis A. J.** Amer. J. Phys., 1970, **38**, 202.
Д 4. **Schwinger J.** Phys. Rev. Lett., 1959, **3**, 296.
Д 5. **Mandelstam S.** Ann. Phys., 1962, **19**, 1; Phys. Rev., 1969, **175**, 1580.
Д 6. **Aharonov Y., Bohm D.** Phys. Rev., 1959, **115**, 485, 1961, **123**, 1077; 1962, 125, 2192.
Д 7. **Фейнберг Е. Л.** УФН, 1962, 78, 53.