

УДК 539.171.5

# СИЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ПРАКТИЧЕСКОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

*О. В. Думбрайс*

Объединенный институт ядерных  
исследований, Дубна

В данном обзоре рассматривается вопрос о том, как оптимально использовать известные аналитические свойства физических величин для наилучшего их представления в области измерения, а также для проведения экстраполяции за ее пределы. Обсуждается математическая сторона проблемы. Разбираются некоторые конкретные физические примеры оптимального использования аналитичности в сильных взаимодействиях.

The present review article deals with the problem how to make an optimal use of the known analytic properties of physical quantities for the best presentation of them in the range of measurements and for the extrapolation outside it. The mathematical aspect of the question is discussed. A number of concrete physical examples are considered of the optimal use of analyticity in strong interactions.

## ВВЕДЕНИЕ

Известно, что в настоящее время не существует общей теории сильных взаимодействий. Все, что мы имеем, это несколько общих принципов: лоренц-инвариантность, унитарность, аналитичность, различные симметрии. Кроме этого существуют многие частные теории и модели, которые способны более или менее хорошо описывать экспериментальные данные в разных ограниченных областях энергии и передач импульса. В таком случае возможны два подхода к анализу данных по сильным взаимодействиям:

1) выбирается одна из существующих параметрических динамических моделей (например, модель Редже) или придумываются новые модели и подгоняются их параметры к имеющимся экспериментальным данным, а потом пытаются на основе этих моделей предсказать явления в других областях энергии и переданного импульса;

2) состоит в максимальном использовании общих принципов для предсказаний явлений в других областях исключительно на основе имеющихся измерений, без привлечения различных моделей в качестве промежуточного звена. Этот путь назовем модельно-независимым подходом. Он имеет принципиальное преимущество перед первым в том смысле, что модели приходят и уходят, а общие принципы остаются. В данном обзоре обращается основное внимание на оптимальное использование аналитичности.

Гипотеза об аналитичности физических величин, по-видимому, является очень глубокой. Чу, говоря об аналитичности как фундаментальном физическом принципе [1], вспоминает высказывание Ферми: «Сомневаешься — разлагай в ряд». Эти слова отражают нашу веру в то, что законы природы зависят от физических параметров, которые могут меняться непрерывным образом. В этой же связи Чу вспоминает еще одну историю. Вскоре после создания квантовой механики фон Неймана спросили, не является ли странным то обстоятельство, что созданный формализм не требует аналитичности. И он ответил, что аналитические функции составляют ограниченный и специальный класс функций, и поэтому нет никакого основания считать, что только они допустимы в физике. Тем не менее фон Нейман потратил 35 лет для того, чтобы показать, что в глубоком смысле физика основана на аналитических функциях!

Рассматривая аналитичность в физике сильных взаимодействий следует отметить три момента:

- 1) установление аналитических свойств физических величин;
- 2) доказательство на основе этих свойств различных соотношений и ограничений на физические величины;
- 3) использование известных аналитических свойств физической величины для оптимального представления экспериментальных данных в области ее измерения и предсказания на основе этой информации ее поведения в других областях. (Это и составляет предмет данного обзора.)

Аналитичность математически можно сформулировать разными эквивалентными способами, например, амплитуду рассеяния можно разложить в ряд по различным полиномам и разным переменным. Если бы существовала теория сильных взаимодействий или если бы эксперимент давал нам значение функции и ее производных с бесконечной точностью в нескольких точках, то все различные математические формулировки аналитичности давали бы идентичные результаты. Выбор между ними был бы делом вкуса и в конечном итоге определялся требованием максимальной простоты и удобства.

На самом же деле все, что имеем в качестве исходной информации, это экспериментальные данные с погрешностями в ряде дискретных точек («экспериментальная область»). В такой ситуации

эквивалентность различных формулировок аналитичности коренным образом нарушается и, для того чтобы на основе этой информации делать какие-либо предсказания в других областях — аналитически продолжать, задачей первостепенной важности становится отыскание оптимальной формулировки аналитичности, т.е. такой, которая позволила бы использовать наиболее полно и экономично исходную информацию.

Подобное представление вещей есть то, что математики называют некорректно поставленной проблемой. Дело в том, что в принципе малые изменения  $\varepsilon$  (погрешности) в исходных данных могут привести к сколь угодно большим изменениям всяких предсказаний. Другими словами, всякое аналитическое продолжение, в строгом математическом смысле этого слова, невозможно, если исходная информация задается с погрешностями, так как оно в принципе требует абсолютной точности в исходных данных. В то же время не может быть такого, чтобы при  $\varepsilon = 0$  можно сделать все, а при  $\varepsilon \neq 0$ , пусть и малом, сделать нельзя ничего.

## 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРАКТИЧЕСКОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

### Классификация аналитических продолжений

Граница области аналитичности во многих отношениях отличается от ее «внутренности». Поэтому представляется естественным классифицировать аналитические продолжения по типам согласно следующей схеме [2].

1. Экстраполяция  $I \rightarrow I$ . В этом случае аналитическое продолжение производится из некоторого сегмента внутри области аналитичности к точке внутри нее\*.

Пусть функция  $f(x)$  голоморфна и ограничена в некоторой области  $D$ :

$$|f(x)| \leq M. \quad (1)$$

Пусть измерительная погрешность функции на некотором сегменте внутри  $D$  порядка  $\varepsilon$ . Тогда согласно принципу Неванлинна\*\* погрешность значения функции  $f(x)$ , экстраполированной к точке  $x_0$ , задается выражением:

$$\Delta f(x_0) \leq \varepsilon^{1-\omega(x_0)} M^{\omega(x_0)}, \quad (2)$$

где  $\omega(x)$  — гармоническая мера, определенная так, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \omega(x) &= 0 \text{ в экспериментальной области;} \\ \omega(x) &= 1 \text{ на границе области аналитичности.} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

\* Здесь и далее, если специально не оговорено, имеется в виду односвязная область.

\*\* См., например, работу [3].

Из уравнений (2) и (3) следует, что экстраполяция типа  $I \rightarrow I$  стабильна, т. е.  $\Delta f(x_0) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Однако, чтобы оценить погрешности экстраполяции, необходима информация или гипотеза об ограничении функции  $f(x)$  во всей области аналитичности (1).

**2. Экстраполяция  $I \rightarrow B$ .** Аналитическое продолжение производится из некоторого сегмента внутри области аналитичности к ее границе. На основе (2) и (3) сразу можно заключить, что этот тип экстраполяции нестабилен по существу, поскольку  $\Delta f(x_0) \rightarrow M$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Поэтому экстраполяция к границе области аналитичности является более деликатной проблемой. Оказывается, что все же и в этом случае аналитическое продолжение можно сделать стабильным, если, во-первых, потребовать выполнения некоторых дополнительных кроме (1) ограничений на поведение функции на границе или, во-вторых, экстраполировать не к точке на границе, а к некоторой дуге (экстраполяция в среднем).

**3. Экстраполяция  $B \rightarrow I$ .** В этом случае аналитическое продолжение производится от границы области аналитичности к точке внутри нее. Экстраполяция стабильна, если ее производить к некоторой дуге на границе.

**4. Экстраполяция  $B \rightarrow B$ .** Аналитическое продолжение производится от одной части границы к другой. Проблема стабильности экстраполяции похожа на ту, что и в случаях  $I \rightarrow B$  и  $B \rightarrow I$ .

Для того чтобы произвести любой из перечисленных типов экстраполяции, надо в первую очередь аналитическую функцию как-то представить в области ее измерения на основе экспериментальных данных. Это позволяет классифицировать экстраполяции также и по методам. В зависимости от способа представления функции в экспериментальной области можно говорить о полиномиальном аналитическом продолжении, об интегральном и т. п. Начнем с рассмотрения самого простого метода.

### Аналитическое продолжение полиномом

Пусть функция  $f(x)$  аналитична в двухсвязной области комплексной  $x$ -плоскости с разрезами  $(-\infty, -a)$  и  $(a, \infty)$  при  $a > 1$  вдоль реальной оси (рис. 1). Предположим, что  $f(x)$  можно измерить в ряде точек на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$  (физическая область). Что можно сказать про функцию  $f(x)$  в остальной части комплексной  $x$ -плоскости, исключая разрезы.

Решение этой задачи (продолжение типа  $I \rightarrow I$ ) дано в работе [4].

Надо конформно отобразить  $x$ -плоскость во внутренность эллипса с фокусами  $z = \pm 1$  в  $z$ -плоскости так, чтобы экспери-

ментальная область отобразилась бы в интервал  $-1 \leq z \leq 1$ , а разрезы разместились бы на эллипсе\*.

Далее, экспериментальные данные аппроксимируются некоторым полиномом, который вычисляется затем в интересующей нас точке. Метод основан на следующих рассуждениях. Обозначим большую полуось эллипса  $1/2(\rho + \rho^{-1})$ ,  $\rho > 1$ . Функция  $f(z) = f[z(x)]$  аналитична в этом эллипсе. Согласно теории полиномиальных аппроксимаций аналитических функций [5] существует такая последовательность полиномов  $\{p_n(z)\}$  ( $n$  — степень полинома), при которой для каждой точки внутри эллипса и на эллипсе

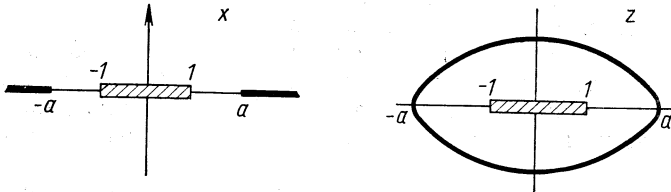


Рис. 1.  $x$ -Плоскость с экспериментальной областью  $[-1, 1]$ , разрезами  $(-\infty, -a)$ ,  $(a, \infty)$  и ее отображение в эллипс в  $z$ -плоскости.

с фокусами в точках  $z = \pm 1$  и большой полуосью  $1/2(R + R^{-1})$ ,  $1 < R < \rho$ , равномерно выполняется неравенство

$$|f(z) - p_n(z)| < M [R/(\rho - \delta)]^n, \quad (4)$$

где  $M$  — константа, зависящая от  $R$ ;  $\delta$  — произвольно малое положительное число. Согласно той же теории [5] не существует другой последовательности  $\{\tilde{p}_n(z)\}$ , которая удовлетворяла бы неравенству (4) при  $\tilde{\rho} > \rho$ . Последовательность полиномов  $\{p_n(z)\}$ , удовлетворяющая (4), называется максимально сходящейся.

В работе [4] доказано, что рассмотренное конформное отображение оптимально в смысле неравенства (4) и означает увеличение отношения  $R/\rho$  для всякого другого отображения. Другими словами, последовательность  $\{p_n(z)\}$  максимально быстро сходится в физической области. Это очень важно, поскольку в работе [6] доказано, что погрешность в интерполяции и экстраполяции тем меньше, чем быстрее сходится последовательность полиномов.

Перед тем, как перейти к оценке погрешностей экстраполированных значений функции, сделаем три замечания.

1. Функция  $f(x)$  может быть как физической величиной (например, амплитуда, форм-фактор), так и некой функцией,

\* Практическое осуществление такого отображения, а также и более общего случая с несимметрично расположенными разрезами, см. в приложении 1.

построенной из этих величин и обладающей хорошими аналитическими свойствами. В качестве такой функции очень часто в приложениях используют так называемую функцию расхождения (см., например, работу [7]). Поясним ее конструкцию на примере.

Предположим, что  $f(x)$  известна из эксперимента на части левого разреза  $x_m < x < -a$ . Как найти значения этой функции в остальной части плоскости? Надо отобразить  $x$ -плоскость в  $z$ -плоскость так, чтобы интервал  $x_m + b < x < -a$ , где  $b > 0$ , разместился бы на  $-1 \leq z \leq 1$ . Однако дальше продолжать рассмотренные выше рассуждения уже нельзя, поскольку часть левого разреза (от  $z_m$  до  $+1$ ) останется внутри эллипса и функция  $f(z)$  не будет там аналитической. Чтобы обойти эту трудность, определяется функция расхождения:

$$\Delta(z) = f(z) - \frac{1}{\pi} P \int_{z_m}^{-a} \frac{\operatorname{Im} f(z')}{z' - z} dz', \quad (5)$$

которую можно вычислить на основе экспериментальных данных на отрезке  $(z_m, -a)$  и которая аналитична во всем эллипсе. Теперь можно действовать так, как описано выше: понимая под  $f(z)$  функцию  $\Delta(z)$ .

В итоге можно сказать, что функция расхождения известна из эксперимента в области, где она голоморфна, и поэтому с ее помощью экстраполяция с границы области аналитичности заменяется экстраполяцией с области голоморфности.

2. Рассмотренные выше отображение не является единственным с оптимальными свойствами. Например, в работе [3] показано, что подобными свойствами обладает конформное отображение, при котором физическая область и разрезы размещаются на концентрических окружностях, а разрезанная  $x$ -плоскость находится между ними. Общее правило [5] гласит: физическая область и разрезы должны находиться на эквипотенциальных кривых.

3. Оптимальное отображение можно сделать еще более оптимальным, т. е. сходимостью последовательности полиномов еще больше усилить, если отобразить во внутренность эллипса также и часть второго листа Римана  $x$ -плоскости [8]. Для этого, однако, надо знать точное расположение всех сингулярностей второго листа, что практически никогда не известно.

Как оценить погрешность экстраполированного значения функции?

В обычном  $\chi^2$ -методе часто возникают трудности в установлении, где оборвать ряд, представляющий аналитическую функцию, и какова при этом возникает погрешность. Очевидно, что подобная проблема остается и в случае представления экспериментальных данных оптимальным, наиболее быстро сходящимся полино-

мом. Однако здесь можно продвинуться вперед в решении этой проблемы [9].

Выше было показано, что аналитичность функции, которую необходимо аппроксимировать, накладывает условие теоретической степени сходимости для интерполирующих полиномов (4). Оказывается, эту информацию можно использовать для оценки погрешностей, возникающих при обрывании ряда. В обычном анализе с помощью  $\chi^2$ -метода, когда используется больше параметров, чем этого требуют экспериментальные данные, начинается подгонка шума. Поскольку ожидается, что шум не обладает аналитическими свойствами аппроксимируемой функции, то полином, определенный с помощью обычного  $\chi^2$ -метода, не будет сходиться с ожидаемой скоростью. Эти соображения дают надежду на возможность введения некоторого дополнительного критерия. Вопрос сводится к тому, как сконструировать некую меру качества сходимости, чтобы ее можно было скомбинировать с функцией  $\chi^2$ , которая является мерой качества подгонки. Поскольку значение функции в физической области связано с ее значением на границе разрезанной плоскости (теорема Коши), то идея модели оценки погрешностей, предложенной в работе [9], состоит в том, чтобы проверять свойство сходимости приближения исследуем его поведения на разрезе. Мы не располагаем никакой информацией об истинных значениях функции на разрезе, поэтому в работе [9] предполагается вероятностное распределение значений аппроксимированной функции в любой точке границы. Основываясь на этом предположении, можно построить меру сходимости в форме вероятностной функции коэффициентов аппроксимирующего ряда.

Изложим более подробно идею работы [9], следуя работам [10, 11], где она в несколько модифицированном виде применялась на практике. Пусть в  $z$ -плоскости в интервале  $-1 \leq z \leq +1$  имеется  $M$  экспериментальных точек  $f(z_1), \dots, f(z_M)$  с погрешностью  $\varepsilon(z_1), \dots, \varepsilon(z_M)$ , распределенными по Гауссу. Тогда существует  $M$  полиномов  $P_k(z)$ , ортонормированных по отношению к этим погрешностям в смысле наименьших квадратов, т. е. таких, когда

$$\sum_{j=1}^M \frac{P_k(z_j) P_l(z_j)}{\varepsilon^2(z_j)} = \delta_{kl}. \quad (6)$$

Если определить  $\chi^2$  как обычно:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^M \left[ \frac{f(z_j) - \Phi(z_j)}{\varepsilon(z_j)} \right]^2, \quad (7)$$

где

$$\Phi(z_j) = C_1 P_1(z_j) + C_2 P_2(z_j) + \dots + C_M P_M(z_j), \quad (8)$$

то минимизация  $\chi^2$  дает те значения коэффициентов  $C_k$ , которые наиболее хорошо описывают данные. Эти коэффициенты обозначим  $d_k$ . В результате нормировки (6) стандартное отклонение коэффициентов  $d_k$  равно единице.

При подгонке по методу наименьших квадратов можно наблюдать, что после какого-то числа членов  $M_f$  коэффициенты  $d_k$  начинают флуктуировать между  $-1$  и  $+1$ , указывая на то, что достигнут уровень шумов. Ряд (8) обрывают при  $M_f$  членах и используют его для проведения экстраполяции. Погрешность экстраполированной величины определяют как обычно. Эту процедуру можно улучшить, если имеется модель, согласно которой можно определить, сколько из высших коэффициентов  $d$  действительно нужны для описания данных, а сколько возникают из-за шумов.

В работе [10] вводится понятие априорной плотности вероятности коэффициентов  $C_k$  в (8). Это понятие основано на теоретической степени сходимости коэффициентов  $C_k$ . Хорошо известно (см., например, работу [4]), что для достаточно больших  $k$

$$|C_k| = 0(1/\sqrt{R_k}), \quad (9)$$

где  $R_k = R^{2(k-1)}$ ;  $R$  — сумма большой и малой полуосей эллипса. Отсюда видно, что естественным выражением априорной плотности вероятности коэффициентов  $C_k$  в интервале  $dC_k$  вокруг  $C_k$  является

$$P(C_1, \dots, C_M | \lambda) \propto \prod_{k=1}^M \exp(-\lambda R_k C_k^2 / 2) (\lambda R_k)^{1/2} dC_k. \quad (10)$$

Масштабный множитель  $\lambda$  определяет эффективное обрывание ряда. Априорная вероятность максимальна при  $C_k = 0$  для всех  $k$ . Однако, для того чтобы получить хорошую подгонку к данным, нельзя допускать слишком больших отклонений  $C_k$  от  $d_k$ , особенно при малых  $k$ . Оба эти требования можно примирить введением компромиссной постериорной плотности вероятности:

$$P'(C_1, \dots, C_M | \lambda) \propto \prod_{k=1}^M \exp[-1/2(d_k - C_k)^2] \times \\ \times \exp(-\lambda R_k C_k^2 / 2) (\lambda R_k)^{1/2} dC_k. \quad (11)$$

Тогда наилучшие значения коэффициентов  $C_k$  можно получить, максимизируя выражение (11), предварительно переписав его в более удобном виде:

$$P' \propto \prod_{k=1}^M \exp\left[-1/2(1 + \lambda R_k) \left(C_k - \frac{d_k}{(1 + \lambda R_k)}\right)^2\right] \times \\ \times \prod_{k=1}^M \exp\left[-1/2\left(1 - \frac{1}{1 + \lambda R_k}\right) d_k^2\right] \left(1 - \frac{1}{1 + \lambda R_k}\right)^{1/2}. \quad (12)$$



Если предположить, что  $\lambda$  имеет равномерное априорное распределение, то ее постериорное распределение вероятности

$$P_\lambda \propto \prod_{k=1}^M \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{1 + \lambda R_k} \right) d_k^2 \right] \times \left( 1 - \frac{1}{1 + \lambda R_k} \right)^{1/2} d\lambda. \quad (13)$$

Максимизация выражения (13) дает наилучший масштабный множитель  $\bar{\lambda}$ , требуемый экспериментальными данными. Согласно принципу максимума правдоподобия, наилучшие оценки коэффициентов  $C_k$  на основе (12) задаются в виде

$$\bar{C}_k = d_k / (1 + \lambda \bar{R}_k) \quad (14)$$

со стандартным отклонением

$$\delta \bar{C}_k = 1 / (1 + \lambda \bar{R}_k). \quad (15)$$

Это и представляет решение проблемы. Общая погрешность экстраполированного значения функции в точке  $z_0$  равна

$$\Delta f(z_0) = \sqrt{\sum_{k=1}^M [P_k(z_0)]^2 (\delta \bar{C}_k)^2}. \quad (16)$$

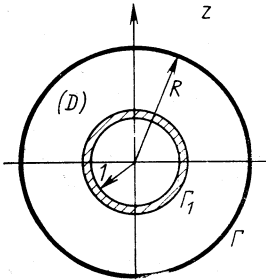


Рис. 2. Отображение  $z$ -плоскости в окружность в  $z$ -плоскости.

Экспериментальная область находится на единичной окружности, а разрезы на окружности радиуса  $R$ .

Перейдем теперь к рассмотрению полиномиального аналитического продолжения к разрезу, т.е. типа  $I \rightarrow B$ .]

Отобразим  $x$ -плоскость (см. рис. 1) в  $z$ -плоскость так, чтобы физическая область  $-1 \leq x \leq 1$  перешла в окружность  $\Gamma_1$  радиуса 1, а разрезы разместились на концентрической окружности  $\Gamma$  радиуса  $R$  (рис. 2)\*

Пусть в экспериментальной области  $\Gamma_1$  выполняется условие

$$|f(z) - h(z)| < \varepsilon, \quad z \in \Gamma_1, \quad (17)$$

где  $h(z)$  — экспериментальная гистограмма;  $\varepsilon$  — погрешность. Для того чтобы экстраполяция к разрезу была бы стабильной, потребуем выполнения условия Гелдера для функции на разрезе:

$$|f^{(p)}(z) - f^{(p)}(z')| < |z - z'|^\alpha, \quad z \in \Gamma, \quad (18)$$

где  $(p)$  означает  $p$ -ю производную функции,  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда согласно работе [3] можно записать

$$|f(z) - S_{n_c}(z, z^{-1})| < B \left[ 1 + \frac{p + \alpha}{n_c(\varepsilon) \ln R} \right] / n_c^{p + \alpha}(\varepsilon), \quad z \in \Gamma, \quad (19)$$

\* Как уже отмечалось выше, это конформное отображение также является оптимальным. Формулы для его практического осуществления приведены в приложении 2.

где

$$S_{n_c}(z, z^{-1}) = a_0 + a_1(z + z^{-1}) + \dots + a_{n_c}(z^{n_c} + z^{-n_c}); \quad (20)$$

$$n_c(\varepsilon) \approx \ln \left[ \frac{B(p+\alpha)}{\varepsilon \ln R} \right] / \ln(R \cdot 1,44^{p+\alpha}); \quad (21)$$

$B$  — некоторая константа.

Выражение (21) для оценки степени полинома довольно академическое, поскольку оно содержит неизвестную константу  $B$ . Однако в работах [3] доказано существование такого максимального критического значения  $n_c$ , что при  $n \leq n_c$  экстраполяция стабильна (правая часть неравенства (19) стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

В практических расчетах значение  $n_c$  определяют не по формуле (21), а отождествлением его с критическим числом членов в (20), при котором вычисление подгонки (20) на разрезе  $\Gamma$  начинает давать результаты, отличающиеся от подгонки с меньшим числом членов.

Итак видно, что хотя экстраполяция к границе области аналитичности возможна, оценка ее погрешности содержит в принципе названные величины  $p$  и  $\alpha$ . Кроме того, задавая в качестве  $\varepsilon$  наибольшую экспериментальную погрешность, согласно (17), не учитывая статистический характер погрешностей, что несомненно приводит к завышению оценки погрешности экстраполяции с помощью правой части неравенства (19).

Некоторые улучшения экстраполяции типа  $I \rightarrow B$  достигнуты при разработке других методов аналитического продолжения.

### Применение взвешенных дисперсионных соотношений

Этот метод аналитического продолжения основан на теореме Коши и аппроксимации ядра Коши некоторыми весовыми функциями. Весовые функции выбраны так, чтобы вклад в  $f(z_0)$  в формуле Коши от той части границы, где значение аналитической функции неизвестно, был бы подавлен.

Рассмотрим сначала наиболее простой случай: экстраполяцию типа  $I \rightarrow I$  [12]. Пусть экспериментальные значения функции  $f(z)$  известны на окружности  $\Gamma_1$ . Зададимся целью определить значение функции  $f(z)$  в точке  $z_0$ , которая находится на реальной оси \* между двумя окружностями (см. рис. 2).

Функция  $f(z) = f[z(x)]$ , согласно конструкции, голоморфна в области  $D$ . Если  $g(z)$  является какой-нибудь также голоморфной функцией в области  $D$  и непрерывной в  $\bar{D} = D \cup \Gamma_1 \cup \Gamma$ , то на

\* Это удобно и в то же время не уменьшает общность, поскольку отображением круга самого на себя всегда можно любую точку разместить на реальную ось.

основе теоремы Коши можно записать:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) [(z - z_0)^{-1} - g(z)] dz + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f(z) [(z - z_0)^{-1} - g(z)] dz. \quad (22)$$

Вспоминая обозначения, использованные в (17), уравнение (22) можно записать в виде:

$$f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} h(z) Q(z) dz = E(z_0), \quad (23)$$

где

$$E(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \varepsilon(z) Q(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) Q(z) dz; \quad (24)$$

$$Q(z) = (z - a)^{-1} - g(z). \quad (25)$$

Теперь вся задача сводится к тому, чтобы найти функцию  $g(z)$ , минимизирующую величину  $|E(z_0)|$ . Эту минимизацию можно провести только в случае, если имеется некоторая информация о поведении  $\varepsilon(z)$  на  $\Gamma_1$  и  $f(z)$  на  $\Gamma$ . Потребуем выполнения условия интегрирования

$$\int_{\Gamma_1} |\varepsilon(z)| |dz| = 2\pi \varepsilon M; \\ \int_{\Gamma} |f(z)| |dz| = 2\pi M, \quad (26)$$

где  $\varepsilon$  и  $M$  — константы. Введем обозначения

$$\max_{z \in \Gamma_1} |Q(z)| = \rho_l, \\ \max_{z \in \Gamma} |Q(z)| = \rho. \quad (27)$$

Тогда на основе (23) можно записать ограничение на  $|E(z_0)|$  в следующем виде:

$$|E(z_0)| \leq M(\rho + \varepsilon \rho_l). \quad (28)$$

Оказывается, что если выбрать в качестве функции  $g(z)$  полиномы, причем такие, которые наилучшим образом аппроксимируют ядро Коши  $(z - z_0)^{-1}$ , то сравнительно простые рассуждения [12] приводят к выражению

$$E(z_0) \leq [M(z_0^2 - 1)] \varepsilon^{1-\omega(z_0)} [\lg(R/z_0)/\lg(z_0)]^{\omega(z_0)} \times \\ \times [(z_0 R - 1)/(R - z_0)]^{1-\omega(z_0)} [\lg(R/z_0)], \quad (29)$$

где  $\omega(z) = \lg(R/|z|)/\lg R$  — гармоническая мера области  $1 \leq |z| \leq R$ .

Неравенство (29) вместе с (23), где

$$Q(z) = [1/(z - z_0)] (z/z_0)^n [(zz_0 - 1)/(z_0 - 1)]; \quad (30)$$

$$n = \frac{\lg \left[ \frac{(R - z_0) \lg z_0}{(z_0 R - 1) \lg (R/z_0)} \right]}{\lg R} \quad (31)$$

представляет собой решение задачи. Это решение стабильно:  $E(z_0) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Оптимальность отображения (см. рис. 2) проявляется в том, что оно делает отношение  $1/z_0$  минимальным и, следовательно, максимально снижает значение  $E(z_0)$ . Тем не менее оказывается, что это значение можно несколько уменьшить, поскольку представление весовой функции  $g(z)$  в виде полиномов не является наилучшим. В приложении С работы [13] приводится способ конструкции оптимальной, но довольно сложной весовой функции. Она может быть найдена лишь численными методами.

Сравним теперь оба метода: полиномиальный и дисперсионный с весовой функцией.

Полиномиальный метод позволяет использовать один и тот же полином для продолжения в разные точки комплексной плоскости. В дисперсионном методе, как это видно из (23), приходится использовать разные ядра для разных точек. В полиномиальном мы имеем дело непосредственно с экспериментальными данными — значениями функций и погрешностей в дискретных точках. В дисперсионном методе, для того чтобы провести интегрирование в (23), приходится сначала построить плавную непрерывную гистограмму через экспериментальные точки. Это затруднительно в том случае, когда точки находятся далеко друг от друга. Следует помнить, что и в полиномиальном методе наличие плавной гистограммы так или иначе подразумевается, поскольку аналитическую функцию никак нельзя определить на основе ее значений в конечном числе точек.

В работе [14] разработан метод экстраполяции типа  $I \rightarrow B$ . Стабильность решения в этом случае достигается экстраполяцией в среднем\*. Таким же способом стабильность гарантируется при экстраполяции типа  $B \rightarrow I$  [16] и  $B \rightarrow B$  [13].

В работе [17] доказано, что наилучшей экстраполяцией с помощью взвешенных дисперсионных соотношений является экстраполяция, где весовая функция выбрана в виде функции типа Карлемана, а ядро Коши заменено на ядро Пуассона. В этой работе рассмотрена экстраполяция типа  $B \rightarrow I$ ; обсуждается возможность

\* Возможность стабильной экстраполяции в среднем к границе впервые была замечена в работе [15], где она применялась практически для экстраполяции форм-фактора протона из пространственноподобной области во времениподобную.

учета неодинаковости экспериментальной погрешности во всей области  $\Gamma_1$ ; показано, что информация о положениях нулей функции  $f(z)$  позволяет улучшить стабильность и уменьшить погрешность экстраполированного значения функции; показано, как можно значительно улучшить экстраполяцию в случае, когда производная функция равна нулю в некоторой точке внутри области аналитичности.

В работе [18] обобщены результаты работы [17] для более трудного случая двухсвязной области. И, наконец, заканчивая обсуждение аналитического продолжения с помощью взвешенных дисперсионных соотношений, следует указать на работу [19], где так же, как и в работе [13], исследуется продолжение типа  $B \rightarrow B$ . При этом используется весовая функция типа Карлемана, а главное — стабильность экстраполяции достигается не экстраполяцией в среднем, как в работе [13], а с помощью наложения дополнительных условий на поведение функции на границе области аналитичности.

#### Аналитическое продолжение с помощью континуального интегрирования

При рассмотрении полиномиального аналитического продолжения уже отмечалась работа [9], в которой намечен путь учета статистического характера экспериментальных погрешностей при аналитическом продолжении, и разбирался один конкретный метод [10, 11] оценки погрешностей в экстраполяции.

С другой стороны, в предыдущем разделе статистический характер погрешностей полностью игнорировался, а в качестве экспериментальных погрешностей брались их верхние пределы. Это привело к тому, что для погрешностей экстраполированных величин были получены только их верхние пределы, которые, весьма вероятно, гораздо больше истинных значений погрешностей.

Здесь рассмотрим методы, позволяющие связать статистический характер погрешностей с аналитичностью функции. Выяснению этого вопроса посвящены работы [20—26]. К сожалению, методы, предложенные в этих работах, сложны. Поэтому ограничимся в основном рассмотрением качественной стороны дела, отсылая читателя за «рабочими формулами» к оригинальным работам.

Пусть  $F(z)$  реальная [ $F^*(z) = F(z^*)$ ] аналитическая функция в единичном круге  $D$ . Пусть экспериментальные данные  $y_i$  с погрешностями  $\sigma_i$  даны в точках  $z_i$  вдоль дуги единичной окружности  $\Gamma$ . О поведении функции  $F(z)$  на остальной части окружности  $\Gamma_2 = \Gamma - \Gamma_1$  сделаем некоторую гипотезу, которую уточним позже.

Этих предположений достаточно для введения в пространство функций аналитических в круге  $D$  некой вероятности, которая описывает совместимость функции  $F(z)$  с экспериментальными данными.

В работе [20] эта вероятность задается в следующем виде:

$$P(F) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \chi_c^2(F) \right], \quad (32)$$

где

$$\chi_c^2(F) = \frac{1}{L} \int_{\Gamma} |F(z) - \Phi(z)|^2 \sigma^{-2}(z) |dz|; \quad (33)$$

$L$  — длина границы  $\Gamma$ ;

$$\Phi(z) = \begin{cases} y_{\Gamma_1}(z) \\ y_{\Gamma_2}(z) \end{cases}; \quad \sigma(z) = \begin{cases} \sigma_{\Gamma_1}(z) & z \in \Gamma_1, \\ \text{для} & \\ \sigma_{\Gamma_2}(z) & z \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (34)$$

Здесь  $y_{\Gamma_1}(z)$  — гладкая интерполяция экспериментальных значений  $y_{\Gamma_1}(z_i) = y_i$ ;  $\sigma_{\Gamma_1}(z)$  — «эффективная интерполированная погрешность»;  $\sigma_{\Gamma_1}(z_i) = \sigma_i \rho^{-1/2}(z_i)$ , где  $\rho(z_i)$  — плотность экспериментальных точек вокруг  $z_i$ . Плотность  $\rho(z)$  нормализована так, чтобы выполнялось равенство  $\int_{\Gamma_1} \rho(z) |dz| = \text{числу}$  экспериментальных точек.

Функция  $y_{\Gamma_2}(z)$  представляет собой гипотезу о поведении функции  $F(z)$  на  $\Gamma_2$ , а  $\sigma_{\Gamma_2}(z)$  — «ошибку» этой гипотезы.

Задача теперь сводится к нахождению интегрального представления наиболее вероятной функции  $\bar{F}(z)$ , т. е. той функции, которая максимизирует  $P(F)$ .

Предположим, что функция  $\Phi(z)$  с весом  $\sigma^{-2}(z)$  квадратично интегрируема на окружности:

$$\int_{\Gamma} |\Phi(z)|^2 \sigma^{-2}(z) |dz| < \infty. \quad (35)$$

В пространстве всех функций, аналитических в области  $D$  и удовлетворяющих условию конечной нормы

$$\|F\|^2 \equiv \frac{1}{L} \int_{\Gamma} |F(z)|^2 \sigma^{-2}(z) |dz| < \infty, \quad (36)$$

определим внутреннее произведение в виде

$$(F, G) = \frac{1}{L} \int_{\Gamma} \sigma^{-2}(z) F(z) G^*(z) |dz|, \quad (37)$$

$$(\chi_c^2(F) = (F, F))$$

и обозначим соответствующее гильбертово пространство  $D$  (2).

Выбрав ортонормированный базис по отношению к внутреннему произведению (37), можно ввести функциональное интегрирова-

ние в пространстве  $D$  (2). Это, в свою очередь, с помощью выражения

$$\langle R \rangle = \int R(F) P(F) dF / \int P(F) dF, \quad (38)$$

где  $\int \dots dF$  означает континуальное интегрирование по пространству  $D$  (2) \*, позволяет вычислять среднее значение любого реального функционала  $R(F)$ , определенного на пространстве  $D$  (2).

Стандартное отклонение определяется обычным способом:

$$(\Delta R)^2 = \langle R^2 \rangle - \langle R \rangle^2. \quad (39)$$

Результаты (38) и (39) можно использовать для осуществления экстраполяции. Например, чтобы провести экстраполяцию функции от границы  $\Gamma$  в точку  $z = 0$ , необходимо исследовать функционал  $R(F) = F(0)$ . На основе выражений (32), (33) можно получить [20]:

$$\langle R \rangle = \frac{g(0)}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{Re} [\Phi(\exp[i\beta]) / g(\exp[i\beta])] d\beta \quad (40)$$

и

$$\Delta R = (2\pi)^{-1/2} |g(0)|, \quad (41)$$

где  $g(z)$  — реальная аналитическая функция в области  $D$ , не имеющая там нулей и удовлетворяющая соотношению

$$|g(z)| = \sigma(z), \quad z \in \Gamma; \quad (42)$$

$$g(0) = \lg[\sigma(z)] - \sum_{n=1}^N a_n \cos(n \exp[i\beta]). \quad (43)$$

Следует отметить, что результаты (40)–(42) формально совпадают с результатами работ [16–18], где был использован метод оптимальных весовых функций. Существенно, однако, что величина  $\sigma(z)$  в обоих случаях имеет разное значение и что погрешность величины  $R$ , даваемая уравнениями (40) и (41), хорошо определена в статистическом смысле.

Следует сказать, что интегрирование в функциональных пространствах позволяет избежать неточностей, связанных с выбором произвольных или недостаточно обоснованных параметризаций. Некоторый произвол остается, конечно, и в этом случае, поскольку приходится выбирать определенный вид пространства и опреде-

\* В работе [20] показано, что фактически можно обойти трудность, связанную с континуальным интегрированием, если выбрать удобный базис в  $D$  (2). Тогда оказывается, что  $\langle R \rangle = R(\bar{F})$ . Другими словами, удобнее сначала, минимизируя  $\chi_C^2(F)$ , найти  $\bar{F}(x)$ , а потом  $\langle R \rangle$ .

лять в нем вероятность. Однако эта процедура менее опасна, и ее результаты более легко поддаются контролю. Основное преимущество использования функциональных пространств — однозначное толкование понятия погрешностей.

Определяя  $P(F)$  в форме (32), подразумеваем, что экспериментальные погрешности величин  $\operatorname{Re}[F(z_i)]$  и  $\operatorname{Im}[F(z_i)]$  одинаковы. На самом же деле это часто не так \*. В работах [21, 22] обобщен метод работы [20] для случая неравных погрешностей и рассмотрены продолжения типа  $B \rightarrow I$  и  $B \rightarrow B$  в односвязной области. К сожалению, решение этой задачи достаточно сложное, и поэтому здесь никаких формул приводить не будем.

Перейдем к работам [23, 24], в которых, на основе только что рассмотренных идей, строится некое интегральное уравнение, пригодное для интерполяции и аналитического продолжения.

Предположим опять, что функция  $F(z)$  аналитична внутри единичного круга  $D$  с окружностью  $\Gamma$ . Экспериментальная информация задана в области  $H$  внутри  $D$ . Если нет больше никаких теоретических аргументов, то естественно, по аналогии с (32) и (33), определить вероятность для функции  $F(z)$  в виде:

$$P_H(F) \sim \exp \left[ - \int_H |F(z) - H(z)|^2 \varepsilon^{-2}(z) |dz| \right], \quad (44)$$

где  $H(z)$  может быть интерпретирована как экспериментальная гистограмма с «гладкой ошибкой»  $\varepsilon(z)$ . Для того чтобы отличить полезную информацию (аналитическую) от шума (неаналитическую), строится вторая пробная функция

$$P_\Gamma(F) \sim \exp \left[ - \oint_\Gamma |F(z) - G(z)|^2 M^{-2}(z) |dz| \right], \quad (45)$$

которая измеряет «гладкость»  $F(z)$  на границе ее области аналитичности. Функция  $G(z)$  является теоретически предпочтительным значением функции  $F(z)$  с весом  $M^{-1}(z)$  в случае отсутствия экспериментальной информации. Из  $P_H$  и  $P_\Gamma$  можно построить полный  $\chi^2$ -квадрат:

$$\begin{aligned} \chi^2(F) = & \oint_\Gamma |F(z) - G(z)|^2 M^{-2}(z) |dz| + \\ & + \int_H |F(z) - H(z)|^2 \varepsilon^{-2}(z) |dz|. \end{aligned} \quad (46)$$

Вероятность функции  $F$

$$P(F) \sim \exp[-\chi^2(F)] \quad (47)$$

\* Например, если  $F(z)$  — амплитуда адрон-адронного рассеяния вперед, то ее реальная часть определяется из эксперимента гораздо хуже, чем мнимая часть.



интерпретируется так же, как и раньше, т.е. наиболее вероятная функция  $\bar{F}(z)$  минимизирует  $\chi^2$ .

Перепишем (46) в виде:

$$\chi^2(F) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} |f(z) - g(z)|^2 |dz| + \int_{\bar{H}} |f(z) - h(z)|^2 W(z) |dz|, \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} f(z) &= F(z)/\eta(z); \\ g(z) &= G(z)/\eta(z); \\ h(z) &= H(z)/\eta(z); \\ W(z) &= \varepsilon^{-2}(z) |\eta(z)|^2. \end{aligned} \quad (49)$$

Интерполирующая функция погрешностей  $\eta(z)$  построена так, чтобы функция  $\lg \eta(z)$  была бы аналитической внутри  $D$  и

$$|\eta(z)| = M(z)/\sqrt{2\pi}, \quad z \in \Gamma. \quad (50)$$

Пусть  $\bar{F}(z) \equiv \bar{f}_0(z) \eta(z)$  — наиболее вероятная функция в случае отсутствия экспериментальной информации, т.е. когда  $W(z) = 0$ . Тогда, вводя определение для корреляционных функций:

$$K(z, y) = \langle (f(z) - \bar{f}_0(z))(f(y) - \bar{f}_0(y))^* \rangle_{|W(z)=0}; \quad (51)$$

$$H(z, y) = \langle (f(z) - \bar{f}(z))(f(y) - \bar{f}(y))^* \rangle, \quad (52)$$

можно показать [23], что справедливо следующее интегральное уравнение Фредгольма:

$$H(z, y) + \int_{\bar{H}} H(z, x) W(x) K(x, y) |dx| = K(z, y). \quad (53)$$

Если найти отсюда  $H(z, y)$ , то проблема решена, поскольку  $\bar{f}(z)$  и  $|\Delta \bar{f}(z)|^2$  выражаются прямо через  $H(z, y)$ :

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} g(y) H(z, y) |dy| + \int_{\bar{H}} h(y) H(z, y) |dy|; \quad (54)$$

$$|\Delta \bar{f}(z)|^2 = H(z, z). \quad (55)$$

Решение уравнения (53) зависит от специфической формы  $W(z)$ . В общем случае его можно решить только численно. Однако практически, когда число экспериментальных точек конечно, уравнение (53) распадается на алгебраические уравнения, которые легко решаются.

В работе [23] рассматривается ряд примеров с различными  $W(z)$ . Кроме того, там рассматривается итеративное интегральное уравнение, которое получается, если часть экспериментальной

информации включить в  $\Gamma$  как начальные условия. В этой связи коротко обсуждается интересный вопрос об «оптимальной геометрии», т. е. вопрос об оптимальном размещении экспериментальных данных.

Уравнение (53), а также упомянутое итеративное уравнение обобщаются в работе [24] для случая, когда экспериментальные погрешности реальной и мнимой частей функции различны. Там же разбирается ряд конкретных примеров с различными  $W_R(z)$  и  $W_I(z)$ . Рассматривается применение этих уравнений к экстраполяции типа  $B \rightarrow I$  и делается заключение о том, что погрешность экстраполированного значения функции гораздо менее чувствительна к погрешностям мнимой части функции в экспериментальной области, чем к погрешностям реальной части. Поэтому при экстраполяции не стоит очень стараться использовать данные с малыми погрешностями мнимых частей, если погрешности реальных частей большие.

Методы, предложенные в работах [23, 24], также достаточно сложные, однако впечатление такое, что они более пригодны для практического использования, чем методы, рассмотренные в работах [21, 22].

Заканчивая этот раздел, отметим еще две работы [25, 26], где на основе идей работ [20—24] рассматривается случай, часто встречаемый на практике, когда экспериментальная информация задана на части разреза и, кроме того, в нескольких изолированных точках внутри области аналитичности.

### Использование нелинейных методов в аналитическом продолжении

Говоря об аналитическом продолжении на основе дисперсионных соотношений с различными весами, автоматически подразумевалось, что задача линейна. Естественно возникает вопрос, нельзя ли улучшить аналитическое продолжение применением более общих нелинейных методов и таким образом, говоря словами работы [27], найти абсолютный оптимум экстраполяции аналитической функции. В работе [27], где рассматривается экстраполяция типа  $B \rightarrow I$ , задача ставится в наиболее общем виде.

Пусть  $f(z)$  аналитична в односвязной области  $D$ . Граница этой области состоит из двух частей: экспериментальной —  $\Gamma_1$  и неизвестной  $\Gamma_2$ . Надо найти все возможные функции  $f(z)$ , которые удовлетворяют условиям:

$$|f(z) - h(z)| \leq \varepsilon, \quad z \in \Gamma_1; \quad (56)$$

$$|f(z)| \leq M, \quad z \in \Gamma_2, \quad (57)$$

где  $h(z)$  — экспериментальная гистограмма;  $\varepsilon$  — погрешность;  $M$  — некоторая константа.

Оказывается [27], что для каждой точки  $z$  внутри  $D$  множество всех таких функций заполняют круг с центром  $\hat{f}(z)$  и радиусом  $\eta(z)/|C_0(z)|$ , которые можно вычислить на основе  $\varepsilon$ ,  $M$  и отрицательных коэффициентов Фурье взвешенной определенным образом гистограммы  $h(z)$ . В работах [27, 28] доказан результат большой значимости: может случиться, что не существует даже одной голоморфной функции, удовлетворяющей условиям (56), (57). Это имеет место, если  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  — некоторая величина, также определенным образом зависящая от коэффициентов Фурье.

Важность этого результата легко понять, если вспомнить, что во всех экстраполяциях всегда предполагалось существование, по крайней мере, одной аналитической функции, удовлетворяющей условиям (56) и (57). Однако это не так, поскольку часть взвешенной гистограммы  $\tilde{h}_2(z)$  является неаналитической функцией. Таким образом, ясно, что мы не можем аппроксимировать с произвольной точностью неаналитическую функцию с помощью аналитической функции. Важно подчеркнуть, что в противоположность  $\varepsilon$  величина  $\varepsilon_0$  не зависит исключительно от точности эксперимента, а зависит также и от самого эксперимента, т. е.  $\varepsilon_0$  — функционал от  $\tilde{h}_2(z)$ . Можно сказать еще так: присутствие  $\tilde{h}_2(z)$  связано с отсутствием экспериментальных данных на  $\Gamma_2$ , а не с их недостаточной точностью  $\Gamma_1$ .

В случае, когда  $\varepsilon_0 \ll \varepsilon$ , центр  $\hat{f}(z)$  множества всех допустимых функций  $f(z)$  мало отличается от экстраполирующей функции  $\hat{h}(z)$ , полученной на основе дисперсионных соотношений с оптимальным весом [17, 18]. Если же  $\varepsilon_0$  близко к  $\varepsilon$ , то большая часть круга предела погрешностей  $\varepsilon/|C_0(z)|$  — пустая, и допустимые функции находятся очень близко к  $\hat{f}(z)$ , которая может значительно отличаться от  $\hat{h}(z)$ . В этом случае как раз и проявляется улучшение экстраполяции по сравнению с использованием взвешенных дисперсионных соотношений.

Из сказанного выше вытекает, что задачу можно сформулировать и так: найти то минимальное значение  $M = M_0$ , при котором (с заданными  $h(z)$  и  $\varepsilon$ ) существует хотя бы одна функция, удовлетворяющая условиям (56) и (57).

Оказывается [28], что имеет место следующее монотонное неравенство:

$$\varepsilon_0[h; M_1/\varepsilon] < \varepsilon_0[h; M_2/\varepsilon], \quad (58)$$

если  $M_1 > M_2$ .

Отсюда видно, что при уменьшении  $M$   $\varepsilon_0$  увеличивается до тех пор, пока при  $M = M_0$  оно не достигает значения  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon_0[h; M_0/\varepsilon] = \varepsilon. \quad (59)$$

Поэтому для  $M < M_0$  не существует допустимой функции, поскольку с учетом (58)  $\varepsilon_0(M)$  должна быть больше, чем заданная  $\varepsilon_0$ . Численное значение  $M_0$  можно определить из уравнения (59).

Следует заметить, что величина  $M_0$  может быть очень полезной для решения разных проблем. Например, в работе [29] исследуется возможность использования  $M_0$  для нахождения нулей и полюсов функции. Пусть функция  $A(z)$  имеет нуль в области аналитичности  $D$ . Тогда функция

$$F(z) = A(z) (1 - z_0 z_0^*/(z - z_0)), \quad (60)$$

гистограмма которой  $h(z)$  задана на  $\Gamma_1$ , не будет голоморфной в  $D$ , если параметр  $z_0$  точно не совпадает с положением нуля функции  $A(z)$ . Оказывается, что кривая  $M_0(z_0)$  очень чувствительна к этому обстоятельству, особенно если  $\varepsilon$  мало. Действительно, если  $\varepsilon$  мало, то очень трудно найти голоморфную функцию, аппроксимирующую неаналитическую функцию, а это выражается в очень большом значении  $M_0$ . С приближением параметра  $z_0$  к истинному положению нуля функции  $F(z)$  величина  $M_0$  резко падает и достигает там минимума. Таким образом, исследование зависимости  $M_0(z_0)$  позволяет локализовать положение нуля (полюса) функции. Если в нашем распоряжении имеются еще некоторые теоретические аргументы, накладывающие верхний предел  $M_{\text{физ}}$  на  $M$ , то единственно возможные значения  $z_0$  такие, при которых  $M_0(z_0) < M_{\text{физ}}$ . В этом случае расстояние между кривой  $M_0(z_0)$  и линией  $M_{\text{физ}}$  определяет некую вероятность распределения положений нулей (полюсов) функции.

### Падэ-приближение и аналитическое продолжение

До сих пор, говоря об аналитической функции, мы, как правило, использовали ее представление в виде полинома или с помощью теоремы Коши. Однако уже давно известен другой, простой и в то же время мощный способ представления аналитической функции: падэ-приближение.

Падэ-приближение широко применяется в физике, что уже нашло свое отражение в некоторых обзорах (см., например, работы [30, 31]). Мы особенно рекомендуем читателю самый последний обзор [32], где подробно рассматривается применение падэ-приближения в физике сильных взаимодействий. Здесь ограничимся лишь приведением самых элементарных сведений из этой области.

Пусть имеется аналитическая функция  $f(z)$ . Разложим ее в ряд Тейлора вокруг точки  $z = 0$ :

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (61)$$

Этот ряд сходится в круге  $|z| \leq R$ , где  $R$  — расстояние от центра до ближайшей сингулярности функции  $f(z)$ . Предположим

теперь, что мы хотим найти значение  $f(z_1)$ , где  $z_1$  находится за пределами круга сходимости, но где  $f(z)$  аналитична. Ряд (61) не пригоден для этой цели, поскольку он расходится в точке  $z_1$ . С другой стороны, из теории аналитических функций известно, что  $f(z_1)$  полностью определяется коэффициентами  $a_0, a_1, \dots$ . Итак, можно сформулировать проблему: дано разложение аналитической функции в ряд и как продолжить аналитически этот ряд за пределы его сходимости?

Падэ-приближение  $[N, M]$  дает решение этой задачи. Оно определяется как отношение двух полиномов:  $P_N(z)$  и  $Q_M(z)$  степеней  $N$  и  $M$  соответственно. Это отношение имеет в точке  $z = 0$  те же самые  $N + M$  первых производных, что и  $f(z)$ :

$$f^{[N, M]}(z) \equiv P_N(z)/Q_M(z) = f(z) + O(z^{N+M+1}). \quad (62)$$

Поэтому можно сказать, что падэ-приближение — обобщение ряда Тейлора:  $[N, 0]$ -приближение тождественно парциальным суммам ряда (61).

Падэ-приближения строятся из коэффициентов ряда Тейлора. С их помощью можно суммировать расходящиеся ряды. Более того, даже внутри области сходимости ряда Тейлора падэ-приближение лучше аппроксимирует функции, чем сам ряд Тейлора. Таким образом, внутри круга сходимости падэ-приближение служит ускорителем сходимости.

Очень важно следующее обстоятельство: ряд Тейлора является разложением функции вокруг одной точки, в то время как падэ-приближение можно построить так, чтобы оно содержало информацию о функции и ее производной в нескольких точках. Последнее свойство особенно важно в применении к физическим задачам, когда имеются измерения  $f(z)$  в  $P$  точках  $z_1, z_2, \dots, z_P$ . В этом случае падэ-приближение для функции  $f(z)$  строится в виде отношения двух полиномов  $P_N(z)$  и  $Q_M(z)$  так, чтобы  $N + M = P - 1$ , а  $f(z)$  принимала бы значения  $f(z_i)$  в точках  $z = z_i$ :

$$f^{[N, M]}(z) \equiv P_N(z)/Q_M(z); \quad (63)$$

$$f^{[N, M]}(z_i) = f(z_i), \quad i = 1, P. \quad (64)$$

Падэ-приближение, построенное таким образом, дает очень хорошую интерполяцию аналитической функции  $f(z)$  между точками  $z_i$ . Очень важно при этом, что падэ-приближение позволяет экстраполировать функцию  $f(z)$  за пределы интервала  $z_1, z_2, \dots, z_P$  и проводить численно аналитическое продолжение.

Падэ-приближение «чувствует» поведение стольких производных, сколько имеется экспериментальных точек. Оно способно воспроизвести все существенные аналитические свойства и поэтому может определить полезную (аналитическую) информацию от шума (неаналитическая составная часть экспериментальных данных).

Суммируя, можно сказать, что паде-приближение обладает большей областью сходимости, чем полиномиальное представление аналитической функции, оно сходится быстро и позволяет стабильно проводить аналитическое продолжение.

## 2. КОНКРЕТНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ В СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

### Фазовый анализ

Обычное разложение амплитуды  $f(x \equiv \cos \theta)$  по парциальным волнам в ряд по полиномам Лежандра

$$f(x) = \sum_{l=0}^L a_l P_l(x) \quad (65)$$

сходится внутри эллипса, размеры которого ограничены разрезами, возникающими из-за сингулярностей в кросс-каналах. При подгонке экспериментальных данных ряд обрывают (например, по критерию  $\chi^2$ ) при некотором значении  $L$ .

Для того чтобы ускорить сходимость ряда, а следовательно, обойтись меньшим числом параметров при том же значении  $\chi^2$ , отобразим конформно всю  $x$ -плоскость в эллипс в  $z$ -плоскости так, чтобы физическая область  $-1 \leq x \leq 1$  совпала с отрезком  $-1 \leq z \leq 1$ , а разрезы разместились на эллипсе [4] (см. приложение 1). Теперь амплитуду можно разложить в ряд по ортонормированным полиномам\* в  $z$ -плоскости:

$$f(z) = \sum_{n=0}^N b_n T_n[z(x)]. \quad (66)$$

Подгоняя (66) к экспериментальным данным, можно найти коэффициенты  $b_n$ \*\* . Работать, однако, с новыми «парциальными волнами»  $b_n$  очень неудобно. Во-первых, они не имеют прямой, наглядной физической интерпретации, во-вторых, их аналитические свойства, как функции от энергии, очень сложны, поскольку они содержат сингулярности второго листа Римана, и, наконец, в-третьих, они в отдельности не удовлетворяют условию унитарности. Поступим поэтому следующим образом: выразим парциальные волны через коэффициенты  $b_n$

$$a_l = \sum_{n=0}^N C_{ln} b_n, \quad (67)$$

\* Наиболее удобными [9] являются полиномы Чебышева.

\*\* Всегда имеет место неравенство  $N \leq L$ , оно тем сильнее, чем больше  $L$ .

где

$$C_{ln} = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 P_l(x) T_n[z(x)] dx. \quad (68)$$

С другой стороны, решая (67) относительно  $b_n$ , имеем

$$b_n = \sum_{l=0}^N C_{ln}^{-1} a_l. \quad (69)$$

Подставим теперь  $b_n$  снова в (67), тогда

$$a_l = \sum_{\substack{n=0 \\ k=0}}^N C_{ln} C_{kn}^{-1} a_k. \quad (70)$$

Коэффициенты  $a_{l \leq N}$  назовем низшими парциальными волнами, а  $a_{l > N}$  — высшими. Для  $l \leq N$  (70) есть просто тождество, но для  $l > N$  оно выражает очень любопытный факт: парциальные волны не являются независимыми, как это обычно полагают, а высшие парциальные волны выражаются через линейную комбинацию низших волн. Если бы парциальные волны были независимыми, то сечения испытывали бы флуктуации Эриксона [33]. Поскольку эти флуктуации не наблюдаются в природе, то амплитуды парциальных волн должны быть скоррелированы. Выражение (70), полученное фактически на основе аналитичности, как раз и выражает это обстоятельство. Такой факт может показаться несколько странным. Представим себе, что в одной из низших парциальных волн наблюдается резонанс. Согласно (70), существование этого резонанса должно как-то отразиться во всех высших парциальных волнах. Неожиданный на первый взгляд вывод — прямое следствие аналитичности.

Следует отметить, что высшие парциальные волны могут оказаться в принципе несколько неунитарными. Это может случиться из-за того, что либо значения низших парциальных волн выбраны неправильно, либо ряд (66) оборван неправильно. В таком случае приходится «подправлять рукой» высшие парциальные волны на унитарность, следуя, например, методу «кратчайшего пути», перенося кратчайшим путем конец вектора парциальной волны на окружность унитарности [34]. Итак, схема нового метода фазового анализа такова:

- 1) производится конформное отображение \*;
- 2) вычисляются коэффициенты  $C_{ln}$ ;
- 3) подгонкой (66) к экспериментальным данным находятся низшие парциальные волны;

\* В принципе надо производить отдельно два отображения: одно для мнимой части амплитуды, а второе для реальной части, поскольку хорошо известно, что область аналитичности у  $\text{Im } f(x)$  больше, чем у  $\text{Re } f(x)$ .

4) по (70) вычисляются высшие парциальные волны и производится поправка на унитарность, если это необходимо.

Каковы же результаты практических расчетов? До сих пор новый метод применялся для  $K^+p$ -рассеяния [34—36],  $pp$ -рассеяния [37],  $\pi^\pm\text{He}^4$ -рассеяния [38] и  $\pi^+p$ -рассеяния [39].

В случае  $K^+p$ -рассеяния число параметров было выбрано таким, чтобы новое разложение хорошо описывало экспериментальные данные. Сохранив это же число параметров и проделав подгонку по старому методу, авторы приходят к выводу, что  $\chi^2$  увеличился в среднем на 20%. Это увеличение в  $\chi^2$  оказалось более значительным для данных в районе  $2 \text{ Гэв}/c$ , чем вблизи  $1 \text{ Гэв}/c$ . При самой высокой энергии ( $2,5 \text{ Гэв}/c$ ) оказалось достаточно взять четырнадцать новых параметров, что соответствует парциальным волнам  $L \leq 3$ . Пришлось, однако, включить высшие парциальные волны вплоть до  $L \leq 15$  для того, чтобы получить достаточно хорошее описание экспериментальных данных с помощью обычного разложения по парциальным волнам. Этот факт очень красноречиво указывает на опасность прерывания ряда в обычном разложении. Существенное бедствие фазового анализа — его неоднозначность: наличие различных (но одинаковых по  $\chi^2$ ) решений. В новом методе эта неоднозначность уменьшается по двум причинам: во-первых, как правило, требуется меньшее количество параметров; во-вторых, оказывается, что в случае обычного метода некоторые решения являются искусственными, они возникают как следствие неправильного обрыва ряда (65). Когда к этим решениям добавлялись высшие парциальные волны, решения становились более плохими, вместо того чтобы стать лучшими. При энергиях ниже  $1 \text{ Гэв}/c$  удалось получить однозначные решения. Выше  $1 \text{ Гэв}/c$  некоторые неоднозначности остались. Самым важным эффектом, который проявился в ходе анализа данных новым методом, оказался значительный вклад в сечения от высших парциальных волн: до 40% в неупругое сечение и до 25% в полное сечение.

В случае  $pp$ -рассеяния оказалось, что вместо четырнадцати параметров (включая  $H$ -волны), которые требуются в обычном методе, достаточно девяти параметров при  $220 \text{ Мэв}$  и десяти при  $330 \text{ Мэв}$ . Погрешности найденных фаз при этом значительно уменьшились.

Анализ  $\pi^\pm\text{He}^4$ -рассеяния проводился при очень низких энергиях около  $100 \text{ Мэв}$ . Число параметров сократить не удалось, однако, две высшие парциальные волны ( $F$  и  $G$ ) оказались несколько отличными от нуля, что позволило отбросить некоторые нефизические решения. Была предпринята попытка провести новым методом энергозависимый фазовый анализ для нуклон-нуклонного рассеяния [40]. В принципе это гораздо более сложная задача, поскольку в этом случае аналитичность относится уже



не к голоморфной, а к мероморфной области, усложняется трактовка унитарности и т. п.

В заключение следует рекомендовать применение нового метода фазового анализа, так как он максимально полно использует аналитические свойства амплитуды. Лучше всего производить его параллельно со стандартным методом, поскольку неосторожное использование разложения с ускоренной сходимостью может привести к неверным результатам [39, 41, 42]. В этих работах дается некоторая критика нового метода фазового анализа.

### Параметризация дифференциального сечения при высоких энергиях

В настоящее время не существует общей модели, которая могла бы объяснить дифференциальное сечение адрон-адронного рассеяния при высоких энергиях во всем интервале углов. Имеется несколько феноменологических формул, которые описывают рассеяние в разных интервалах углов. Однако эти формулы не учитывают аналитическую структуру амплитуды. Поскольку аналитические свойства амплитуды рассеяния непосредственно связаны с характером сил, ответственных за сильное взаимодействие адронов, то формула, удовлетворяющая требованиям аналитичности, должна лучше описать экспериментальные данные по рассеянию. В работах [43, 44] сделана первая попытка дать феноменологическую формулу для дифференциального сечения рассеяния при высоких энергиях, которая обладала бы правильными аналитическими свойствами. Схема построения подобной формулы не отличается от рассмотренной выше.

В работе [44] предлагается конформно отразить  $x$ -плоскость во внутреннюю часть эллипса в  $z$ -плоскости так, чтобы область, где имеются измерения дифференциального сечения, попала бы на отрезок  $[-1, 1]$ . Дифференциальное сечение параметризуется в следующем виде:

$$\frac{d\sigma(z)}{dt} = \left( \frac{d\sigma}{dt} \right)_0 \frac{1 + \sum_{m=2}^M A_m B_m T_m [z(t)]}{1 + \sum_{m=2}^M A_m B_m T_m [z(0)]}, \quad (71)$$

где  $T_m(z)$  — полиномы Чебышева;  $B_m = 2/\sqrt{Q^{2(m-1)} + Q^{-2(m-1)}}$ ;  $Q$  — сумма полуосей эллипса. Коэффициенты  $A_m$  находят подгонкой к экспериментальным данным.

Эта параметризация, являясь просто разложением аналитической функции в сходящийся ряд, справедлива при всех энергиях и всех углах. Она проверялась для упругого  $pp$ -,  $\bar{p}p$ -,  $pd$ -,  $\pi^\pm p$ - и  $K^\pm p$ -рассеяния при высоких энергиях и малых углах. Число

параметров, необходимое для описания экспериментальных данных, такое же, что и при использовании обычных параметризаций, т.е. в данном случае экспонент. Новые же значения таких физических величин, как наклон дифференциального конуса или  $(d\sigma/dt)_0$ , в большинстве случаев существенно отличаются от старых значений. В частности, наклон дифференциального конуса в случае  $pp$ -,  $\bar{p}p$ - и  $K^\pm p$ -рассеяния непрерывно растет с приближением к направлению рассеяния вперед.

### Нахождение реальной части амплитуды рассеяния вперед

Для прямого способа получения экспериментальных значений реальной части амплитуды рассеяния используется соотношение

$$D^2 = (d\sigma/d\Omega)_0 - (q\sigma_t/4\pi)^2, \quad (72)$$

где  $D$  — реальная часть амплитуды рассеяния;  $(d\sigma/d\Omega)_0$  — упругое дифференциальное сечение рассеяния вперед;  $\sigma_t$  — полное сечение;  $q$  — импульс в с. п. и. Если  $\sigma_t$  измеряется сравнительно легко и известно достаточно точно, то этого нельзя сказать про  $(d\sigma/d\Omega)_0$ , которое получают экстраполяцией дифференциального сечения, измеренного в некотором интервале углов, к направлению вперед. Для этой цели используют в основном две параметризации дифференциального сечения. При низких энергиях (ниже нескольких гигаэлектронвольт) дифференциальное сечение представляют в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$d\sigma(\theta)/d\Omega = \sum_{l=0}^N A_l P_l(\cos\theta). \quad (73)$$

Коэффициенты  $A_l$  находят, подгоняя это выражение к экспериментальным значениям  $d\sigma(\theta)/d\Omega$ , а потом ряд (73) вычисляют при  $\cos\theta = 1$ , т. е. производят экстраполяцию (типа  $I \rightarrow I$ ) к направлению вперед. Аналогично поступают и при более высоких энергиях, когда упругое рассеяние при малых углах имеет дифракционный характер и когда дифференциальное сечение представляют в виде экспоненциальной формы по квадрату переданного импульса:

$$d\sigma(t)/dt = \exp(a + bt + ct^2 + \dots). \quad (74)$$

Эта схема получения экспериментальных значений реальной части амплитуды сохраняется также и для случая, когда в эксперименте можно измерить интерференцию между ядерной и кулоновской амплитудами, а следовательно, определить знак реальной части. В этом случае, а также при учете спина взаимодействующих частиц выражения (73) и (74) имеют более сложный вид.

Таким образом, при экспериментальном определении реальной части амплитуды рассеяния вперед не учитывается аналитическая структура амплитуды, поскольку выражения (73) и (74) не отражают правильно аналитические свойства дифференциального сечения. Итак, вместо этих выражений следует пользоваться разложением типа (71). В этой связи отметим работу [44], в которой показано, что иногда экстраполяция дифференциального сечения к направлению вперед по формуле (71) дает значение на 20% больше по сравнению со значением, полученным с помощью (74).

### Определение констант связи

Обычно значения констант связи определяются из дисперсионных соотношений. При этом возникают трудности, связанные с наличием нефизической и асимптотической областей, для которых приходится использовать модели. Кроме того, учитывая, что константы связи входят в различные представления амплитуды как по переданному импульсу, так и по энергии, и имея измеренные значения амплитуды или при разных углах и фиксированной энергии, или при разных энергиях и фиксированном значении переданного импульса, можно произвести экстраполяцию к полюсам и определить значения констант связи.

Начнем с рассмотрения первой возможности. В работе [45] впервые было предложено использовать экспериментальные данные по дифференциальному сечению нуклон-нуклонного рассеяния для определения пион-нуклонной константы связи его экстраполяцией к пионному полюсу (экстраполяция типа  $I \rightarrow I$ ). Эта идея осуществлена практически в работах [46—49].

Однако только начиная с работ [50—56], в которых применялось оптимальное конформное отображение и правильно оценивалась погрешность, можно говорить о современном использовании идеи работы [45] для определения констант связи из экспериментальных данных по дифференциальному сечению при фиксированной энергии. Речь идет об определении констант связи  $g_{\pi NN}^2$  и  $g_{\Lambda\Sigma,KN}^2$  из дифференциальных сечений  $n\bar{p}$ - и  $K^+p$ -рассеяния [50]; константы связи  $g_{\pi NN}^2$  из данных по дифференциальному сечению фоторождения пионов [51], констант связи  $g_{\Lambda np}^2$  и  $g_{\text{He}^4, \text{He}^3 n}^2$  из данных по дифференциальным сечениям  $nd$ - и  $n \text{He}^4$ -рассеяний [52], константы связи  $g_{\pi^+ \text{He}^3 n}^2$  из данных по дифференциальному сечению  $\pi^+ \text{He}^3$ -рассеяния [53], констант связи  $g_{\pi^+ d n}^2$  и  $g_{\pi^+ \text{He}^3 n}^2$  из данных по дифференциальному сечению  $n \text{He}^3$ - и  $n \text{H}^3$ -рассеяния [54]. В работе [55] сделана попытка применить этот метод для рассеяния нейтронов на легких ядрах вплоть до  $z \leq 14$ , а в работе [56] обсуждается влияние кулоновских эффектов при его использовании. Во всех этих работах используется разложе-

ние типа

$$(z - z_{\text{поллюс}}) [(d\sigma(z)/d\Omega)_{\text{эксп}} - (d\sigma(z)/d\Omega)_{\text{поллюс}}] = \sum_n c_n P_n(z), \quad (75)$$

где  $z_{\text{поллюс}}$  — положение полюса;  $P_n$  — некоторые ортогональные полиномы.

Второй модельно-независимый метод определения констант связи заключается в использовании экспериментальных данных по реальной и мнимой частям амплитуды рассеяния вперед одновременно при многих значениях энергии. Первой попыткой такого подхода можно считать работу [57], в ней было определено значение константы связи  $g_{\text{ЛКН}}^2$ . При этом, однако, не было использовано оптимальное конформное отображение. Авторы работы [10] улучшили технику работы [57], применив вместо круга оптимальное отображение — эллипс. Энергетическая  $\omega$ -плотность  $K^\pm p$ -рассеяния вперед конформно отображалась в эллипс (с фокусами в точках  $z = \pm 1$ ) в  $z$ -плоскости; таким образом, на отрезке  $-1 \leq z \leq 1$  разместилась область, где существуют экспериментальные данные по реальным частям  $K^\pm p$ -рассеяния вперед, а нефизическая область и область низкоэнергетического  $K^- p$ -рассеяния, где нет данных по полным сечениям, попали на эллипс.

Выше строилась так называемая функция расхождения в следующем виде:

$$\Delta(z) = (z - z_\infty) D(z) - \frac{1}{\pi} P \left[ \int_{z_{K_p^+}}^{z_\infty} \frac{A_+(z')(z' - z_\infty)}{z' - z_\infty} dz' - \int_{z_\infty}^{z_{K_p^-}} \frac{A_-(z')(z' - z_\infty)}{z' - z} dz' \right], \quad (76)$$

где  $D(z)$  и  $A(z)$  — реальная и мнимая части амплитуды рассеяния вперед. Множитель  $(z - z_\infty)$  введен для устранения асимптотической расходимости мнимой части. Функция  $\Delta(z)$  аналитична во всем эллипсе, кроме точек, где расположены полюса. Значения  $\Delta(z)$  на отрезке  $-1 \leq z \leq +1$  известны во всех точках, где существуют экспериментальные данные по  $D(z)$ .; Функцию  $\Delta(z)$   $(z - z_{\text{поллюс}})$  можно разложить в ряд по ортогональным полиномам, оставляя вычеты полюсных членов в виде свободных параметров. Подгоняя это разложение к экспериментальным данным и экстраполируя его (экстраполяция типа  $I \rightarrow I$ ) к положенным полюсам, было найдено значение константы связи.

Большие преимущества такого метода определения константы связи очевидны. В отличие от дисперсионных соотношений здесь

не надо использовать никаких моделей нефизической и асимптотической областей\*.

Представляют интерес работы [59, 60], где использовалось паде-приближение для продолжения амплитуды  $K^{\pm}p$ -рассеяния вперед из экспериментальной области к полюсам и к нефизическому разрезу. Получено относительно точное значение константы связи и усредненные значения амплитуды на нефизическом разрезе. В работе [61] повторен анализ, проведенный в работах [57, 40] с использованием дополнительных экспериментальных данных о низкоэнергетическом  $K^-p$ -рассеянии. Работы [62, 63] посвящены определению константы связи  $g_{\pi NN}^2$  исходя из экспериментальных значений реальных и мнимых частей амплитуды пион-нуклонного рассеяния вперед. В этих работах комплексная энергетическая  $\omega$ -плоскость отображалась в круг, так что нуклонный полюс разместился в центре круга, а физический разрез поместился на окружность (экстраполяция типа  $B \rightarrow I$ ).

Наконец, следует отметить работы [64—66], где рассматривается физически более сложная задача: определение параметров резонансов аналитическим продолжением экспериментальных данных.

### Поиски нулей амплитуд

Под нулем амплитуды подразумевается то значение энергии или переданного импульса, при котором как реальная, так и мнимая часть амплитуды равна нулю. Нули амплитуды подобно полюсам являются своего рода «избранными точками» амплитуды в комплексных плоскостях энергии или переданного импульса [67]. Так, если записать дисперсионные соотношения для обратной величины или для логарифма амплитуды рассеяния вперед, то эти соотношения не будут содержать константы связи. Роль их здесь будут играть положения нулей амплитуды. С другой стороны, знание положений нулей амплитуды в  $\cos \theta$ -плоскости при фиксированной энергии может оказаться очень важным для фазового анализа, где оно уменьшает неоднозначность решений [68, 69]. Довольно странно, что, несмотря на очевидную важность информации о положениях нулей амплитуды, совсем недавно были произведены их поиски. Нули амплитуды можно искать, используя стандартные дисперсионные соотношения — вычисляя их при комплексных значениях переменной. Это влечет за собой все обычные трудно-

\* Более того, поскольку нефизическая область отображена на эллипс, то появляется принципиальная возможность получить сведения о ней аналитическим продолжением (типа  $I \rightarrow B$ ) функции расхождения из области изменения  $-1 \leq z \leq +1$  к границе эллипса. Было бы интересно провести это продолжение с помощью методов, рассмотренных выше. В самом простом и нестрогом виде это сделано в работе [58], где рассматривается  $pp$ -рассеяние вперед.

сти — надо знать значения констант связи, модели нефизической и асимптотической областей. Нули амплитуды можно искать и модельно-независимым способом — аналитическим продолжением, которое по существу ничем не отличается от продолжения к полюсам и нахождения констант связи. Так, параметризованную в физической области функцию расхождения (76) можно продолжить к комплексным значениям (экстраполяция типа  $I \rightarrow I$ ) и найти те значения  $z$ , при которых амплитуда превращается в нуль. Это было сделано в работе [70] для  $K^{\pm}p$ -рассеяния вперед и в работе [71] для  $pp$ -,  $\bar{p}p$ -рассеяния вперед.

В случае  $K^{\pm}p$ -рассеяния были найдены положения двух нулей из трех существующих, а в случае  $pp$ -,  $\bar{p}p$ -рассеяния вперед, где число нулей неизвестно, были найдены положения четырех нулей. Важно отметить, что в работе [60], используя совершенно другой метод аналитического продолжения (падэ-приближение), было найдено положение нуля, близкое к значению этой величины, найденной в работе [70]. Полностью аналогичным способом можно было бы искать положения нулей форм-факторов. Это представляет несомненный интерес, поскольку в случае форм-факторов неизвестно даже число нулей, уже не говоря об их положениях. Однако, как ни странно, это не было сделано даже в работах, в которых предпринималась более трудная попытка — определить форм-факторы протонов во времениподобной области.

### Экстраполяция форм-факторов протонов во времениподобную область

В настоящее время имеется много хороших измерений (см., например, компиляцию [72]) электрического форм-фактора  $G_E(t)$  и магнитного форм-фактора  $G_M(t)$  протона в широком интервале квадрата переданного импульса в пространственноподобной области  $t < 0$ . Экспериментальные данные указывают на хорошее выполнение [73] в этой области масштабного закона  $G_E(t) = G_M(t)/\mu$ , где  $\mu$  — магнитный момент протона.

Предполагается, что форм-факторы протонов являются аналитическими функциями комплексной переменной  $t$ . Это в принципе позволяет, на основе экспериментальных данных, при  $t < 0$  найти значения форм-факторов во времениподобной области  $t > 0$ , где измерения затруднительны (процесс  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$ ) или невозможны (нефизическая область).

Исходным пунктом служит дисперсионное соотношение:

$$G(t) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{g(t')}{t' - t} dt', \quad (77)$$

где  $t$  — квадрат переданного импульса в единицах  $4m_\pi^2$ ,  $g(t') = = \text{Im}G(t')$  — так называемая спектральная функция. Соотношение (77) надо перевернуть, т. е. надо найти спектральную функцию  $g(t)$  при  $t > 1$  на основе экспериментальных данных по форм-фактору при  $t < 0$ .

Первые попытки решения этой задачи были предприняты в работах [74—77], где  $t$  — плоскость конформно отображалась в единичный круг в  $z$ -плоскости. Таким образом времениподобная область  $1 \leq t \leq \infty$  попала на окружность, а пространственноподобная область — на реальную ось внутри круга. Форм-фактор  $G(t)$  раскладывался в степенной ряд, конечное число коэффициентов которого находилось подгонкой к экспериментальным данным. Спектральная функция вычислялась продолжением (типа  $I \rightarrow B$ ) этого ряда к окружности.

Однако в работах [74—77] не удалось получить надежную информацию о спектральной функции. Это и не удивительно, так как такое решение задачи некорректно, поскольку вопрос о сходимости ряда на окружности более тонкий. Подобный вопрос был частично исследован в работе [78], в которой отмечено, что такое продолжение возможно только в случае, когда форм-фактор определенным образом ограничен сверху во всей времениподобной области.

Интересные результаты получены в работе [15], в которой показано, что на основе экспериментальных данных по  $G(t)$  при  $t < 0$  нельзя восстановить спектральную функцию в каждой точке, а можно лишь вычислить усредненные по неким интервалам  $t > 0$  \* значения  $g(t)$ .

И наконец, надо отметить работы [79—81], в которых удалось найти наиболее полные модельно-независимые сведения о спектральной функции, в частности, получено указание на сильное нарушение масштабного закона во времениподобной области. Следует, однако, сказать, что оценки погрешностей в этих работах некорректны — по существу там игнорируется тот факт, что экстраполяция является типа  $I \rightarrow B$ . В этой связи представляются интересными работы [82, 83], в которых экстраполяция форм-фактора во времениподобную область проведена самым строгим и корректным образом с использованием техники континуального интегрирования.

### Определение амплитуд пион-нуклонного рассеяния

В области ниже  $270 \text{ Мэв}$  нет измерений дифференциальных сечений пион-нуклонного рассеяния, и поэтому здесь невозможно находить фазы амплитуд при помощи фазового анализа.

\* Другими словами, в этой работе на практическом примере показана возможность экстраполяции «в среднем».

В работах [84—86] использовались дисперсионные соотношения при фиксированном  $t$  для получения информации о различных амплитудах пион-нуклонного рассеяния в низкоэнергетической и нефизической областях. Важно отметить, что дисперсионные соотношения здесь, так же как и в задачах, рассмотренных выше, использовались лишь в качестве промежуточного этапа — для постройки функции расхождения, аналитическое продолжение (типа  $I \rightarrow I$ ) которой позволяло получать искомые результаты.

Так, в работах [84, 86] на основе экспериментальных данных по полным сечениям  $\pi^+p$ -рассеяния ниже  $290 \text{ Мэв}$  и существующих фазовых сдвигов выше этой энергии вычислены фазовые сдвиги амплитуд ниже  $270 \text{ Мэв}$ . Найдены также парциальные  $S$ -,  $P$ - и  $D$ -волны в нефизической области  $(M - \mu)^2 \leq s \leq (M + \mu)^2$  и получены их длины рассеяния. Приведены подробные таблицы фаз, включая  $F$ -волну, при  $25 \text{ энергиях}$  ниже  $270 \text{ Мэв}$ .

В работе [85], используя значения фаз, полученных в работе [79], вычислены инвариантные амплитуды пион-нуклонного рассеяния в нефизической области  $-25 \mu^2 \leq t \leq 4 \mu^2$ . В этой же области вычислены спиральные амплитуды  $f_{\pm}^{\prime}(t)$  для  $J = 0, 1$  и  $2$ .

В работе [87] практически аналитическим продолжением определяются различные амплитуды  $\pi N$ -рассеяния в области  $-1,5 (\text{Гэв}/c)^2 < t < 0$ , исходя из экспериментальных данных по  $\pi N$ -взаимодействию при  $6 \text{ Гэв}/c$ .

Работа [88] посвящена анализу  $\pi N$ -рассеяния в области  $-0,5 (\text{Гэв}/c)^2 \leq t \leq -0,1 (\text{Гэв}/c)^2$  с применением оптимальных разложений и конформных преобразований. Эта же техника применена в [89] для исследования взаимодействия  $P$ -волны в  $\pi N$ -рассеянии в работе [90], для записи оптимизированных правил сумм при конечных энергиях. Интересны работы [91, 92], в которых на основе методов, рассмотренных выше, в самом общем виде проверяется совместимость экспериментальных данных по  $\pi N$ -рассеянию с требованиями аналитичности и перекрестной симметрии.

### Исследование пион-пионного рассеяния

Один из способов получения информации о  $\pi\pi$ -взаимодействии состоит в аналитическом продолжении (типа  $B \rightarrow B$ ) амплитуды из физической области  $\pi N$ -рассеяния в область  $4\mu^2 \leq t \leq 4M$  в  $t$  канале:  $\pi\pi \rightarrow NN$ . Такое продолжение дает информацию о парциальных волнах (или о спиральных амплитудах) в этой области. В свою очередь, из принципа обобщенной унитарности вытекает, что фазы спиральных амплитуд равны (или противоположны) соответствующим фазам амплитуды  $\pi\pi$ -рассеяния.



Для того чтобы осуществить это продолжение в качестве промежуточного этапа — постройки функций расхождения, в работе [93] применялись дисперсионные соотношения для парциальных волн  $\pi N$ -рассеяния и для амплитуды  $\pi N$ -рассеяния назад. В работе вычислены значения амплитуды  $f_+^0(t)$ ,  $f_{\pm}^1(t)$  и  $f_-^2(t)$  в области  $4\mu^2 \leq t \leq 50 \mu^2$ . Делаются некоторые предсказания относительно  $\sigma$ -мезона.

В работе [11] вычислены спиральные амплитуды  $f_+^0(t)$  и  $f_{\pm}^1(t)$ , основываясь на определенных предположениях о значениях фаз  $\delta_0^0$  и  $\delta_1^1$   $\pi\pi$ -рассеяния. В работе проверяется общая согласованность данных по низкоэнергетическому  $\pi\pi$ -взаимодействию и  $\pi N$ -рассеянию.

Отметим еще работу [94], в которой на примере  $\pi N$ -рассеяния показана пригодность паде-приближения для аналитического продолжения амплитуды из  $s$ -канала в  $t$ -канал, и особенно работу [95], в которой доказано, основываясь на унитарности, что, исходя из первых  $L$  парциальных волн и полных сечений  $\pi N$ -рассеяния, можно произвести экстраполяцию и найти парциальные волны процесса  $\pi\pi \rightarrow \bar{N}N$ . При этом оказывается, что паде-приближение сходится в среднем на разрезах. Это результат большой важности, и он несомненно будет иметь многочисленные приложения. В этой же работе показана стабильность паде-приближения по отношению к погрешностям экспериментальных данных.

Второй способ получения информации о  $\pi\pi$ -взаимодействии состоит в использовании экспериментальных данных по реакции  $\pi N \rightarrow \pi\pi N$  и применении экстраполяции Чу — Лоу по переменной  $t$ .

Имеется несколько работ [96, 97], в которых подобная экстраполяция производится более правильно, учитывая все аналитические свойства сечения  $\pi\pi$ -взаимодействия вне массовой поверхности и применяя оптимальные конформные отображения. Получается продолжение типа  $I \rightarrow I$ , которое должно дать более надежные результаты о  $\pi\pi$ -взаимодействии по сравнению с экстраполяцией типа  $B \rightarrow B$ , которая, как уже отмечалось, получается в случае извлечения данных о  $\pi\pi$ -взаимодействии из  $\pi N$ -рассеяния.

Авторы работ [96, 97] отмечают, что использование конформных отображений и разложений по новым переменным улучшает аналитическое продолжение:

а) уменьшается степень полинома, что значительно снижает погрешности;

б) уменьшается чувствительность и зависимость результата от способа разделения экспериментальных данных по сечениям  $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ -рассеяния на интервалы по  $\omega$  и от используемой области  $t$ .

В конце отметим еще две работы [98, 99]. В первой работе строятся кроссинг-симметричные, унитарные амплитуды для пион-пионного рассеяния решением системы нелинейных уравнений для физических парциальных волн.

Важным моментом является использование оптимального конформного отображения  $\cos \theta$ -плоскости. Работа [99] посвящена исследованию оптимальной экстраполяции амплитуд  $\pi\pi$ -рассеяния вокруг точки  $\nu = t = 0$ .

### Вычисление пиок-нуклонного $\sigma$ -члена

Как один из интересных практических примеров экстраполяции пион-нуклонной амплитуды можно отметить получение значения  $\sigma$ -члена (нуклонный матричный элемент  $\sigma$ -коммутатора алгебры токов), который может дать информацию о величине нарушения киральной  $SU(2)$ -симметричной части гамильтониана сильных взаимодействий [100].

После неожиданного результата [101]  $\sigma \approx 110 \text{ Мэв}$ , что указывает на сравнимость нарушений киральных  $SU(2)$ - и  $SU(3)$ -симметрий, были произведены многие (см., например, работы [102, 103]) вычисления  $\sigma$ -члена, результаты которых,  $25 \text{ Мэв} \leq \sigma \leq 110 \text{ Мэв}$ , часто противоречат друг другу в пределах погрешностей. Все эти вычисления так или иначе основаны на моделях.

Лишь в работе [104] получено модельно-независимое значение  $\sigma = 46 \pm 140 \text{ Мэв}$  аналитическим продолжением инвариантной амплитуды  $A^{(+)} \pi N$ -рассеяния к нефизическому значению аргумента  $s = u = M^2$ .

Сначала амплитуда  $A^{(+)}$  экстраполировалась по  $t$  к точке  $t = 2 \mu^2$  при фиксированном  $s$  в физической области (экстраполяция типа  $I \rightarrow I$ ). Потом  $s$ -плоскость отображалась в круг таким образом, чтобы физические разрезы попали на окружность, а точка  $s = M^2$  — в центр круга, и производилось аналитическое продолжение по  $s$  к точке  $s = M^2$  при фиксированном  $t = 2 \mu^2$  (экстраполяция типа  $I \rightarrow I$ ). Полученное значение  $\sigma$  подтверждает справедливость предположения о малости нарушения киральной  $SU(2)$ -симметрии по сравнению с нарушением  $SU(3)$ -симметрии.

Следует особо подчеркнуть весьма тщательный анализ погрешностей, проделанный в работе [104], где впервые практически использовался метод, который позволяет учитывать при экстраполяции неодинаковость экспериментальных погрешностей реальной и мнимой частей амплитуды. Авторы работы утверждают, что полученная ими погрешность, хотя и большая, является реалистичной, в то время как погрешности, вычисленные другими авторами, заведомо занижены.

### Проверка совместимости фаз $K^+p$ -рассеяния с дисперсионными соотношениями для амплитуды рассеяния назад

Не удивительно, что выше речь шла исключительно о  $\pi N$ - и связанном с ним  $\pi\pi$ -взаимодействии, поскольку только для  $\pi N$ -взаимодействия имеется достаточное количество хороших экспериментальных данных. В последнее время ситуация начинает меняться: появляется все больше и больше хороших данных по  $KN$ - и  $NN$ -взаимодействию. Несомненно, что в ближайшем будущем для исследования этих взаимодействий также можно будет применить весь арсенал методов практического аналитического продолжения.

В качестве примера отметим одну лишь работу [105], где проверялась согласованность разных наборов фаз  $K^+p$ -рассеяния с дисперсионными соотношениями для амплитуды рассеяния назад. Идея исследования основывается на требовании согласованности энергетической зависимости амплитуд  $K^+p$ -рассеяния назад с наличием доминирующих ближайших сингулярностей (хорошо известные  $\varepsilon$ -,  $\rho$ - и  $\omega$ -резонансы) и слабо меняющихся дальних сингулярностей. В этой работе дисперсионные соотношения для амплитуды рассеяния назад используются в конструкции различных функций расхождения, которые после оптимальных конформных отображений подгоняются к экспериментальным данным. Вводится критерий, если различные функции расхождения в форме: полюсные члены + несколько (как правило, два) членов в ряде разложения по новой переменной, могут описать определенный набор фаз, то он считается хорошим. Таким способом обрабатывались особенно спорные наборы фаз  $K^+p$ -рассеяния. Некоторые из них удалось исключить. Кроме того, были получены некие данные относительно констант связи  $\varepsilon$ -,  $\rho$ - и  $\omega$ -мезонов с  $K\bar{K}$ - и  $N\bar{N}$ -каналами.

### Оптимизация $N/D$ -уравнений

Хорошо известно, что надежность решений  $N/D$ -уравнений очень сильно страдает от неточностей начальных данных, а также от отсутствия информации о короткодействующих силах (дальние районы левого разреза амплитуды рассеяния).

В работах [106, 107] с помощью методов, рассмотренных выше, впервые исследуются способы минимизации влияния отсутствия этой информации на точность решений. Рассмотрен также вопрос о неоднозначностях, связанных с наличием КДД (Кастильело, Далиц, Дейсон) полюсов и неупругостей. Исследуются возможные области для значений вычетов полюсов КДД при использовании условия согласованности с данным «коридором ошибок».

## Оптимизация решения уравнения Липмана — Швингера

Уравнение Липмана — Швингера, особенно в импульсном пространстве, играет большую роль в различных проблемах ядерной физики. Оно является интегральным уравнением и решается обычным способом, т. е. путем замены интеграла суммой по узловым точкам. Узловые точки выбираются произвольно. О том, хорош ли был выбор, судят по результатам вычислений. Если искомая функция стабильна по отношению к числу и положению узловых точек, то предполагают, что выбор был удачен. Конечно, в таком подходе никак не используются сведения о свойствах, в частности аналитических, искомой функции.

В работе [108] показано, что лучше поступать иначе. Перед решением уравнения надо исследовать аналитические свойства функции. Тогда при помощи методов, рассмотренных в первой главе, можно определить оптимальную переменную. В этой новой переменной получается максимально быстрая сходимость, что в конечном итоге уменьшает число нужных узловых точек, без какой-либо потери точности. В примере, рассмотренном в [108], это уменьшение достигало трех раз.

Несомненно, что это важный результат и что этот метод следует также применять при решении других уравнений, в частности квазипотенциала.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При изложении математической части обзора мы старались везде, где это было возможно, привести рабочие формулы, уделяя меньше внимания вопросу о том, как та или иная формула получена. Такой способ изложения не случайный, так как нашей основной целью является привлечение внимания к рассматриваемым вопросам в первую очередь экспериментаторов и теоретиков, занимающихся феноменологическим анализом экспериментальных данных. Дело в том, что, несмотря на довольно большое количество работ, где оптимальное использование аналитичности нашло конкретное практическое применение, эти методы еще очень далеки от всеобщего признания и использования, а там, где они применялись, это делалось, как правило, в самых простых вариантах.

Отметим ряд самых важных, на наш взгляд, математических проблем, которые предстоит решить в ближайшем будущем: 1) более детальная разработка практически очень важной экстраполяции типа  $B \rightarrow B$ ; 2) решение еще более трудного вопроса об

аналитическом продолжении на второй лист Римана \*; 3) более точная и строгая разработка проблемы оценки погрешностей в случае применения паде-приближения; 4) привлечение принципа унитарности для стабилизации аналитического продолжения \*\*; 5) разработка методов практического аналитического продолжения одновременно по двум переменным — энергии и переданного импульса \*\*\*; 6) выход за рамки бинарных реакций, поскольку уже установлены некоторые аналитические свойства амплитуд реакций множественного рождения частиц.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Пусть  $x$ -плоскость имеет два разреза вдоль реальной оси  $(-\infty, -x_-)$  и  $(x_+, \infty)$ ,  $|x_{\pm}| > 1$ . Требуется конформно отобразить  $x$ -плоскость во «внутренность» эллипса с фокусами  $z = \pm 1$  в  $z$ -плоскости так, чтобы интервал  $-1 \leq x \leq +1$  отобразился в интервал  $-1 \leq z \leq +1$ , а разрезы разместились на эллипсе.

Для этой цели  $x$ -плоскость сначала отображается на вспомогательную  $w$ -плоскость с разрезами вдоль  $(-\infty, -w_c)$  и  $(w_c, +\infty)$  (симметризация положений разрезов) выражением

$$w = (x - x_0)/(1 - x x_0), \quad (\text{П.1})$$

где

$$x_0 = (x_- - x_+)/ (x_+ x_- + x_+ x_- - 1); \quad (\text{П.2})$$

$$X_{\pm} = (x_{\pm}^2 - 1)^{1/2}; \quad (\text{П.3})$$

$$w_c = (x_+ X_- + x_- X_+) / (X_+ + X_-). \quad (\text{П.4})$$

Далее,  $w$ -плоскость преобразуется в  $z$ -плоскость с помощью выражения

$$z = \sin [\pi F(\sin^{-1} w, k_0) / 2K(k_0)], \quad (\text{П.5})$$

где  $F(\sin^{-1} w, k)$  и  $K(k) = F(1/2\pi, k)$  — неполный и полный эллиптические интегралы первого рода, модуль которых  $k_0 = 1/w_c$ . В работе [4] предложен очень удобный метод вычисления эллиптических интегралов на вычислительной машине. Метод основан на многократном использовании трансформации Гаусса

$$(1 + k_{n+1}) F(\sin^{-1} v_{n+1}, k_{n+1}) = F(\sin^{-1} v_n, k_n), \quad (\text{П.6})$$

которую после введения обозначения

$$\Phi(w, k) = \pi F(\sin^{-1} w, k) / 2K(k) \quad (\text{П.7})$$

можно записать в виде

$$\Phi(v_{n+1}, k_{n+1}) = \Phi(v_n, k_n), \quad (\text{П.8})$$

\* В этой связи интересно отметить работу [109], где применялась процедура Тихонова, для определения параметров (3.3) резонанса путем продолжения амплитуды через разрез на второй лист Римана.

\*\* Первый шаг в этом направлении сделан в работах [95, 110].

\*\*\* Этот вопрос обсуждается в работе [40].

где

$$k_{n+1} = (1 - k'_n) / (1 + k'_n) = k_n^2 (1 - k'_n)^{-2}; \quad (\text{П.9})$$

$$v_{n+1} = \frac{v_n (1 + k'_n)}{1 + (1 - k_n^2 v_n^2)^{1/2}}; \quad (\text{П.10})$$

$$k'_n = (1 - k_n^2)^{1/2}. \quad (\text{П.11})$$

Пусть  $k_0 = 1/w_c$  и  $v_0 = w$ , тогда для вычислений по (П.5) можно использовать любую последовательность значений  $(v_n, k_n)$ , генерируемых соотношениями (П.9) — (П.11). Учитывая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 0$  и  $F(\Phi, 0) = \Phi$ , находим

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \Phi(v_n, k_n) \lim_{n \rightarrow \infty} v_n. \quad \text{!}(\text{П.12})$$

Практические вычисления показали, что сходимость в (П.12) очень быстрая.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Конформное отображение  $x$ -плоскости (см. рис. 1) \* в  $z$ -плоскость, как это показано на рис. 2, можно произвести с помощью выражения

$$z(x) = i \exp[-i\pi u(x)/2K(a)], \quad (\text{П.13})$$

где

$$u(x; a) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(a^2-t^2)}}; \quad (\text{П.14})$$

$K(a)$  — полный эллиптический интеграл первого рода:

$$K(a) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(a^2-t^2)}}. \quad (\text{П.15})$$

Радиус внешнего круга  $R$  зависит только от положения разрезов:

$$R = \exp[\pi K'(a)/2K(a)], \quad (\text{П.16})$$

где  $K'(a)$  — эллиптический интеграл второго рода:

$$K'(a) = -i \int_1^a \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(a^2-t^2)}}. \quad (\text{П.17})$$

Отметим, что выражение

$$Z = (z - z^{-1})/2 \quad (\text{П.18})$$

преобразует кольцо (см. рис. 2) в эллипс с фокусами при  $\pm 1$  (см. рис.1).

\* Если разрезы расположены несимметрично, нужно произвести симметризацию согласно (П.4).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chew G. F. *Suppl. Nuovo cimento*, 1966, v. 4, p. 369.
2. Pišut J. *Springer Tracts Modern Phys.*, 1970, v. 55, p. 43.
3. Ciulli S. *Nuovo cimento*, 1969, v. 61, p. 787; 1969, v. 62, p. 301.
4. Cutkosky R. E., Deo B. B. *Phys. Rev.*, 1968, v. 174, p. 1859.
5. Walsh J. L. «Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain». *Amer. Math. Soc. Coll. Publications. V. XX.* Publ. by the Amer. Math. Soc., 1969.
6. Ciulli S., Cutkosky R. E. *Nordita preprint*, 1969.
7. Hamilton J., Spearman T. D. *Ann. Phys.*, 1969, v. 12, p. 172.
8. Ciulli I., Ciulli S., Fisher J. *Nuovo cimento*, 1962, v. 23, p. 1129.
9. Cutkosky R. E. *Ann. Phys.* 1969, v. 54, p. 350.
10. Chao Yung-An, Pietarinen E. *Phys. Rev. Lett.*, 1971, v. 26, p. 1060.
11. Nielsen M., Oades G. C. *Nucl. Phys. B*, 1972, v. 49, p. 586.
12. Pišut J., Prešnajder P. *Nucl. Phys. B*, 1969, v. 12, p. 110.
13. Prešnajder P., Pišut J. *Nucl. Phys. B*, 1970, v. 22, p. 365.
14. Pišut J., Prešnajder P., Fisher J. *Nucl. Phys. B*, 1969, v. 12, p. 586.
15. Bowcock J. E., Cottingham W. N., Williams J. G. *Nucl. Phys.*, B, 1967, v. 3, p. 95.
16. Prešnajder P., Pišut J. *Nucl. Phys. B*, 1969, v. 14, p. 489.
17. Ciulli S., Fisher J. *Nucl. Phys. B*, 1970, v. 24, p. 537.
18. Nenciu G. *Nuovo cimento Lett.*, 1970, v. 4, p. 96.
19. Ciulli S., Nenciu G. *Comm. Math. Phys.*, 1972, v. 26, p. 237.
20. Prešnajder P., Pišut J., *Nuovo cimento A*, 1971, v. 3, p. 603.
21. Ross G. G. *Nucl. Phys. B*, 1971, v. 31, p. 113.
22. Ross G. G. *Rutherford Laboratory Preprint, RPP/C/29*, 1971.
23. Shih C. C. *Phys. Rev. D*, 1971, v. 4, p. 3293.
24. Shepard H. K., Shih C. C. *Nucl. Phys. B*, 1972, v. 42, p. 397.
25. Nenciu G. *Nuovo cimento Lett.*, 1972, 4, p. 681.
26. Prešnajder P. *Nuovo cimento Lett.*, 1972, v. 5, p. 520.
27. Ciulli S., Nenciu G. *J. Math. Phys.*, 1973, v. 14, p. 1675.
28. Ciulli S., Nenciu G. *Nuovo cimento A*, 1972, v. 8, p. 735.
29. Caprini K. e. a. *Phys. Rev. D*, 1972, v. 5, p. 1658.
30. Basdevant J. L. *Padé Approximants — In.: Methods in Subnuclear Physics. V. IV*, M. Nicolic Editor, Gordon and Breach, London, 1970.
31. Zinn-Justin J. *Phys. Reports, C*, 1971, v. 1, N 3.
32. Basdevant J. L. *Fortschr. Phys.* 1972, v. 20, p. 283.
33. Frautschi S. *Nuovo cimento A*, 1972, v. 12, p. 133.
34. Cutkosky R. E., Deo B. *Phys. Rev. D*, 1970, v. 1, p. 2547.
35. Miller R. C. e. a. *Nucl. Phys. B*, 1972, v. 37, p. 401.
36. De Roo M., Wagner F. *Rutherford Laboratory Report RHEL/R 245*, 1972.
37. Chao Yung-An. *Phys. Rev. Lett.*, 1970, v. 25, p. 309.
38. Dumbrajs O. V. Nichitiu F., Scherbakov Yu. A. *Rev. Roum. Phys.*, 1973, v. 18, p. 1249.
39. Arndt R. A., Hackman R. H., Roper L. D. *Phys. Rev. Lett.*, 1974, v. 32, p. 31.
40. Cutkosky R. E., Shih C. C. *Phys. Rev.*, 1971, v. 4, p. 2750.
41. Griss M., Fox G. *Phys. Rev. D*, 1973, v. 7, p. 74.
42. Lovelace C. *Rapporteur talk at the NAL-Chicago Happening on High Energy Phys.*, Sept., 1972.
43. Думбрайс О. В., Чернев Х. М. *Препринт ОИЯИ P2-6891*, 1973.
44. Dumbrajs O. V., Chernev Kh., Zlatanov Z. *Nucl. Phys. B*, 1974, v. 69, p. 336.
45. Chew G. F. *Phys. Rev.*, 1958, v. 112, p. 1380.
46. Taylor J. G., Moravcsik M. J., Uretsky J. L. *Phys. Rev.*, 1959, v. 113, p. 689.

47. Cziffra P., Moravcsik M. J. Phys. Rev., 1959, v. 116, p. 226.
48. Амарлобели Н. С. и др. ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 948.
49. Frazer W. R. Phys. Rev., 1961, v. 123, p. 2180.
50. Cutkosky R. E., Deo B. B. Phys. Rev. Lett., 1968, v. 20, p. 1272.
51. Schwela D. Nuovo cimento Lett., 1972, v. 5, p. 453.
52. Kisslinger L. S. Phys. Rev. Lett., 1972, v. 29, p. 505.
53. Думбрайс О. В., Никитиу Ф., Щербачков Ю. А. «Ядерная физика», 1973, т. 18, с. 327.
54. Dubnička S., Dumbrajs O. V., Nichitiu F. Nucl. Phys. A, 1973, v. 217, p. 535.
55. Dubnička S., Dumbrajs O. V. Nucl. Phys., A, 1974.
56. Kisslinger L. S. Phys. Lett. B, 1973, v. 47, p. 93.
57. Dumbrajs O. V., Dumbrajs T. Yu., Queen N. M. Nucl. Phys. B, 1971, v. 26, p. 497.
58. Kanazawa A. Phys. Rev. D, 1973, v. 7, p. 2626.
59. Lopez C., Yndurain F. J. Phys. Lett. B, 1972, v. 41, p. 183.
60. Lopez C., Yndurain F. J. Nucl. Phys. B, 1973, v. 64, p. 315.
61. Kariya T. Progr. Theor. Phys., 1973, v. 50, p. 891.
62. Lichard P., Prešnajder P. Nucl. Phys. B, 1971, v. 33, p. 605.
63. Pazman A., Pišut J., Prešnajder P., Lichard P. Nucl. Phys. B, 1972, v. 46, p. 637.
64. Petersen J. L., Pišut J. Nucl. Phys. B, 1972 v. 38, p. 207.
65. Nogova A., Pišut J., Prešnajder P. Nucl. Phys. B, 1973, v. 61, p. 438.
66. Nogova A., Pišut J. Nucl. Phys. B, 1973, v. 61, p. 445.
67. Dumbrajs O. V., Staszal M. Nucl. Phys. 1974.
68. Barrelet E. Nuovo cimento A, 1972, v. 8, p. 331.
69. Coleman T. P., Sperman T. D. Phys. Lett. B, 1972, v. 39, p. 240.
70. Dumbrajs O. V. Nucl. Phys. B, 1972, v. 38, p. 600.
71. Dumbrajs O. V. Nucl. Phys. B, 1972, v. 46, p. 164.
72. Pfister H. Fortschr. Phys., 1971, v. 19, p. 1.
73. Бильнская С. И., Бильнский С. М., Казаринов Ю. М. «Письма в ЖЭТФ», 1972, т. 15, с. 420.
74. Levinger J. S., Peierls R. F. Phys. Rev. B, 1964, v. 134, p. 1341.
75. Levinger J. S., Wang C. P. Phys. Rev. B, 1964, v. 136, p. 733.
76. Levinger J. S., Wang C. P. Phys. Rev. B, 1965, v. 138, p. 4207.
77. Levinger J. S. Phys. Rev. 1967, v. 162, p. 1589.
78. Bertero M., Viano G. A. Nuovo cimento, 1965, v. 38, p. 1915.
79. Pfister H. Z. Phys., 1969, v. 211, p. 176.
80. Pfister H. Nucl. Phys. B, 1970, v. 20, p. 320.
81. Pfister H. Nucl. Phys. B, 1970, v. 22, p. 327.
82. Cheung S. C. Carnegie Mellon University preprint, COO-3066-1, 1972.
83. Deo B. B., Parida M. K. Phys. Rev. D, 1973, v. 8, p. 2939.
84. Nielsen H. Nucl. Phys. B, 1971, v. 30, p. 317.
85. Nielsen H. Nucl. Phys. B, 1971, v. 33, p. 152.
86. Nielsen H., Oades G. C. Nucl. Phys. B, 1972, v. 49, p. 573.
87. Kelly R. L. Phys. Lett. B, 1972, v. 39, p. 635.
88. Pietarinen E. Nucl. Phys. B, 1973, v. 49, p. 315.
89. Elvekjaer F. Rutherford Laboratory Preprint RPP/T116, 1972.
90. Elvekjaer F., Pietarinen E. Nucl. Phys. B, 1972, v. 45, p. 621.
91. Caprini I. Nuovo cimento Lett., 1972, v. 5, p. 443.
92. Pietarinen E. Nuovo cimento A, 1972, v. 12, p. 522.
93. Nielsen H., Petersen J. L., Pietarinen E. Nucl. Phys. B, 1970, v. 22, p. 525.
94. Fleischer J. Nucl. Phys. B, 1972, v. 37, p. 59.
95. Yndurain F. J. Ann. Phys., 1973, v. 75, p. 171.
96. Baton J. P., Lourens G., Reiquier J. Phys. Lett. B, 1970, v. 33, p. 525; 1970, v. 33, p. 528.
97. Baillet P. e.a. Phys. Lett. B, 1972, v. 38, p. 555.



98. Atkinson D., Johnson P. W., Warnock R. L. Phys. Rev. D, 1972, v. 6, p. 2966.
99. Gensini P., Paver N., Verzegnassi C. Phys. Lett. B, 1973, v. 47, p. 515.
100. von Hippel F., Kim J. Phys. Rev. D, 1970, v. 1, p. 151.
101. Cheng T. P., Dashen R. Phys. Rev. Lett., 1971, v. 26, p. 594.
102. Höhler G., Jakob H., Strauss R. Phys. Lett. B, 1971, v. 35, p. 445.
103. Гердт В. П., Журавлев В. И., Мещеряков В. А. «Ядерная физика», 1974, т. 20, с. 756.
104. Shih C. C., Shepard H. K. University of Tennessee preprint, 1972.
105. Nielsen H., Oades G. C. Nucl. Phys. B, 1972, v. 41, p. 525.
106. Ciulli S. e.a. Phys. Rev. D, 1973, v. 8, p. 455.
107. Ciulli S. e.a. Nucl. Phys. B, 1974, v. 71, p. 269.
108. Chao Yung-An, Jackson A. D. Nucl. Phys. A, 1973, v. 215, p. 157.
109. Исаев П. С., Недеяков И. П. «Докл. Болгарской АН», 1971, т. 24, с. 451.
110. Fisher J. Commun. Math. Phys., 1973, v. 30, p. 249.