

УДК 539.1

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА РЕАКЦИЙ СТОЛКНОВЕНИЯ

$$p_1 + p_2 \rightarrow q_j + q_k + q_l$$

И ВЫДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ ИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В. К. Сусленко

Радиовый институт им. В. Г. Хлопина,
Ленинград

Излагаются релятивистская кинематика общего случая реакций столкновения двух частиц, преобразующихся в три частицы, и схема детального кинематического анализа для выделения динамической информации из экспериментальных данных, получаемых в условиях кинематически полного эксперимента.

The summary of the relativistic kinematics in a general case of the collision reactions of two particles transforming into three particles and the detailed kinematical analysis which is necessary for extracting the reaction dynamics from the experimental data measured in the kinematically complete experiment are given.

ВВЕДЕНИЕ

Реакции столкновения «два в три» являются важным источником сведений о взаимодействиях элементарных частиц и свойствах ядер. Для примера достаточно указать на процессы образования одиночных пионов в нуклон-нуклонных [1—3], пион-нуклонных [4], каон-нуклонных [5] столкновениях и ядерные реакции типа $(p, 2p)$ [6, 7], (p, pa) [8] и т. п.

Удовлетворительные теория взаимодействий элементарных частиц и теория ядерных реакций еще не созданы, и в этих условиях экспериментальное исследование реакций столкновения представляет решающие критерии для оценки надежности модельных представлений и для построения строгой теории этих процессов. В этой связи, для выделения динамической информации исключительно важное значение приобретает корректный кинематический анализ экспериментальных данных.

Излагаемое ниже рассмотрение вопросов релятивистской кинематики, вычисления фазовых объемов конечных состояний и процедуры выделения динамической информации из экспериментальных данных для реакций с числом конечных частиц $n = 3$ ведется в форме, отвечающей интересам физика-экспериментатора, и имеет целью предоставить в его распоряжение схему кинематических расчетов и вычислительный рабочий аппарат, удобные для детального и конкретного планирования эксперимента и последующего анализа экспериментальных данных. В полном соответствии с нуждами экспериментального исследования все важные выражения и соотношения представляются в конечном счете в терминах кинетических (полных) энергий, импульсов и углов вылета частиц, участвующих в реакции.

Предлагаемое кинематическое описание на необходимых этапах включает релятивистскую инвариантность, позволяя использовать по мере надобности любые инерциальные системы отсчета; все получаемые выражения релятивистские и, следовательно, применимы при любых величинах кинетических энергий начальных и конечных частиц.

Вопросы кинематики реакций с $n = 2$ излагались во многих монографиях и статьях (например, см. работы [9—17]), среди которых наибольшей полнотой выделяются монография А. М. Балдина и др. [9], а также работа [17].

Кинематика реакций с $n = 3$ рассматривалась, например, в работах [11—14, 16, 20—23], но до сих пор не имелось систематического изложения этого предмета. В основных чертах кинематика реакций с $n = 3$ изложена в работах Феррари и Селлери [20, 1], где используется метод кинематических инвариантов. Весьма широко метод кинематических инвариантов применен и в монографии Г. И. Копылова [16].

Ниже используется именно формализм релятивистских кинематических инвариантов. Там, где это оказывается наглядным и удобным, используются преобразования Лоренца в их явном виде. Результаты работ [21, 22], где на примере реакции $N + N \rightarrow N + N + \pi$ рассмотрена кинематика реакций с $n = 3$ и получены релятивистские выражения для фазовых объемов, обобщаются для любых масс участвующих частиц.

Для полноты следует отметить, что кинематика реакций с $n = 3$ в нерелятивистском приближении рассматривалась также в работе [18].

Важно иметь в виду, что релятивистская кинематика реакций столкновения с любым числом конечных частиц в наиболее общем виде формулируется в терминах образов пространства Лобачевского. Общий метод такого рассмотрения кинематики реакций столкновения был предложен и развит Н. А. Черниковым [19].

1. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ОПИСАНИЯ РЕАКЦИЙ СТОЛКНОВЕНИЯ С ЧИСЛОМ ЧАСТИЦ $n \geq 2$ В КОНЕЧНОМ КАНАЛЕ

Исходные принципы

Реакции столкновения двух частиц p_1 и p_2 , преобразующихся в n частиц q_1, q_2, \dots, q_n , символически обозначают

$$p_1 + p_2 \rightarrow q_1 + q_2 + \dots + q_n. \quad (1)$$

Для наглядности любой реакции столкновения удобно сопоставлять схему, напоминающую фейнмановскую диаграмму (рис. 1).

Реакция включает три следующие характерные стадии:

1) начальное состояние или начальный канал — две свободные начальные частицы p_1 и p_2 , движущиеся к месту их столкновения;

2) взаимодействие частиц p_1 и p_2 протекает в течение очень короткого промежутка времени ($\sim 10^{-24} - 10^{-23}$ сек), заканчиваясь развалом взаимодействующей системы на отдельные свободные невзаимодействующие частицы (на рис. 1 в общем случае взаимодействие изображено заштрихованной областью — «черным ящиком»);

3) конечное состояние или конечный канал — n свободных разлетающихся конечных частиц q_1, q_2, \dots, q_n .

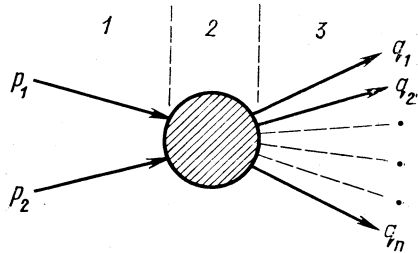


Рис. 1. Общая схема реакций столкновения:

1—начальный канал; 2—область, взаимодействия; 3—конечный канал.

Исходя из общих представлений о характере физических явлений, полагают, что все свойства реакций (1) и их характеристики обусловлены одновременным действием закономерностей двух типов: 1) кинематических, вытекающих из различных законов сохранения, согласно которым определенные физические величины должны иметь одно и то же значение в начальном и конечном состояниях независимо от того, что происходит во взаимодействующей системе («черном ящике» на рис. 1); 2) динамических, обусловленных динамикой взаимодействия, т. е. структурой «черного ящика». Роль кинематических и динамических закономерностей при анализе экспериментальных данных совершенно различна. Исследование кинематических закономерностей заключается, в частности, в получении соотношений и выражений, базирующихся на законах сохранения энергии и импульса в их релятивистски инвариантной форме. Эта задача в принципе

может быть решена точно. В то время как кинематические соотношения и выражения обладают такой же степенью строгости, как и использованные для их получения законы сохранения энергии и импульса, динамические закономерности реакций (1), еще не изученные в достаточной мере, в настоящее время исследуются в рамках предварительных модельных представлений, нуждающихся в экспериментальной проверке. Поэтому информацию о динамических свойствах взаимодействующей системы нужно извлекать из экспериментальных данных, для чего необходимо уметь отделять динамический и кинематический вклады. При конкретном исследовании реакций (1) знание кинематики должно предшествовать выводам о динамике процесса. Исследователю, в особенности экспериментатору, необходимо предварительно знать допустимые интервалы углов вылета и кинетических энергий конечных частиц, кинетические энергии частиц, вылетающих при заданных углах, порог реакции и т. д.; процедура выделения динамической информации из экспериментальных данных требует знания релятивистских выражений для фазовых объемов, описывающих кинематический вклад в изучаемые распределения конечных частиц и получаемых на основе релятивистского рассмотрения. Именно многообразие кинематических задач и получение соотношений и выражений, необходимых для извлечения динамической информации из экспериментальных данных, составляют предмет следующего ниже изложения.

Системы отсчета. 4-векторы и преобразования Лоренца. Релятивистские инварианты. Чтобы описать любое физическое явление, необходимо задать систему отсчета. Из принципа относительности следует, что все инерциальные системы отсчета равноправны и, следовательно, результаты физических измерений в любых инерциальных системах должны приводить к одному и тому же виду законов физики. Однако из бесконечного множества инерциальных (равноправных) систем отсчета на практике используются только некоторыми из них. Например, к часто употребляемому относятся лабораторная система, т. е. система отсчета, связанная с неподвижными относительно места события (физического явления) наблюдателем и его приборами, а также различные системы центра масс — система общего центра масс всех n конечных (двух начальных) частиц в реакциях (1) (такую систему часто называют барицентрической) и системы центра масс подсистем, состоящих из частиц, число которых при $n \geq 3$ не превышает $n - 1$. Системы отсчета, удобные для анализа реакций (1), рассмотрим ниже.

В релятивистском описании переменные, характеризующие состояние движения частицы, представляют в виде компонент четырехмерного вектора (4-вектора).

Преобразования Лоренца для компонент A_0 и \mathbf{A} некоторого произвольного 4-вектора $a = \{A_0, \mathbf{A}\}$ при переходе из некоторой

инерциальной системы отсчета S в любую другую инерциальную систему отсчета S' имеют явный вид:

$$a \rightarrow a' \begin{cases} A' = A + \gamma \beta \left[\beta \cdot A \frac{1}{\beta^2} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) - A_0 \right]; \\ (S \rightarrow S') \begin{cases} A'_0 = \gamma (A_0 - \beta \cdot A), \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

где компоненты со штрихом относятся к системе отсчета S' , без штриха — к S ; векторная величина $\beta = \beta^{SS'} = v^{SS'}/c$ — выраженная в единицах величины скорости света c постоянная скорость $v^{SS'}$, с которой движется система отсчета S' относительно системы отсчета S ; величина $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ называется лоренц-фактором. Обратное преобразование вида $a' \rightarrow a$ ($S' \rightarrow S$) получается из (2) и (3) переобозначением компонент со штрихом на компоненты без штриха, и наоборот, с заменой знака у вектора скорости β , т. е. $\beta^{S'S} = -\beta^{SS'} = -\beta$.

Пользуясь преобразованиями Лоренца (2) и (3), легко убедиться, что при переходах $S \rightleftharpoons S'$ величина скалярного произведения любых двух 4-векторов a и b остается неизменной* :

$$a \cdot b = A_0 B_0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A'_0 B'_0 - \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' = a' \cdot b' = \text{invar.} \quad (4)$$

Каждой частице удобно сопоставлять характерный 4-вектор, а именно, ее 4-импульс. Условимся обозначать 4-импульсы частиц теми же буквами, которыми обозначаются сами частицы [см. (1) и рис. 1]. Запишем 4-импульсы частиц, участвующих в реакции (1), через их компоненты в виде

$$p_1 = \{p_{10}, \mathbf{p}_1\}, p_2 = \{p_{20}, \mathbf{p}_2\}; q_1 = \{q_{10}, \mathbf{q}_1\}, q_2 = \{q_{20}, \mathbf{q}_2\}, \dots \\ \dots, q_n = \{q_{n0}, \mathbf{q}_n\}, \quad (5)$$

где p_{i0}, q_{f0} — полные энергии частиц и называются энергетическими (временными) компонентами 4-импульсов; $\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_f$ — векторы 3-импульсов этих частиц и называются импульсными (пространственными) компонентами соответствующих 4-импульсов. Массы покоя частиц p_1, p_2 (q_1, q_2, \dots, q_n) обозначим M_1, M_2 (m_1, m_2, \dots, m_n) соответственно. Массы покоя частиц и их 4-импульсы связаны соотношениями — «условиями масс»:

$$p_i^2 = M_i^2, (i = 1, 2); q_f^2 = m_f^2, (f = 1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

которые означают, что имеют место релятивистские соотношения**:

$$p_{i0}^2 - \mathbf{p}_i^2 = M_i^2, (i = 1, 2); q_{f0}^2 - \mathbf{q}_f^2 = m_f^2, (f = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

* Для записи скалярных произведений двух 4-векторов используется метрика (1, -1, -1, -1), в которой $a \cdot b = A_0 B_0 - A_x B_x - A_y B_y - A_z B_z$.

** Используется система единиц, в которой скорость света $c = 1$. В этой системе единиц масса, кинетическая (полная) энергия, абсолютная величина импульса частицы выражаются в одних единицах, например в $M_{эв}, G_{эв}$ и т. п.

Квадрат 4-импульса частицы — очевидный релятивистский инвариант.

Релятивистскими инвариантами являются также скалярные произведения любых двух 4-импульсов вида (4), где a и b — не только отдельные 4-импульсы из набора (5), но и их любые линейные комбинации.

Выражения для компонент 4-импульсов частиц, участвующих в реакциях (1), через их массы покоя и кинетические энергии имеют вид:

$$p_{i0} = M_i + T_i, \quad |\mathbf{p}_i| = \sqrt{T_i(T_i + 2M_i)}; \quad q_{f0} = m_f + T_f, \quad |\mathbf{q}_f| = \sqrt{T_f(T_f + 2m_f)}, \quad (8)$$

где T_i (T_f) — кинетическая энергия частицы p_i (q_f) начального (конечного) канала, $i = 1, 2$ ($f = 1, 2, \dots, n$).

Закон сохранения полного 4-импульса. Для реакций (1) должен выполняться закон сохранения полного 4-импульса в виде равенства полных 4-импульсов начального и конечного каналов

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P}; \quad \mathcal{P} = p_1 + p_2, \quad \mathcal{Q} = q_1 + q_2 + \dots + q_n, \quad (9)$$

где \mathcal{P} (\mathcal{Q}) — полный 4-импульс начального (конечного) канала. Закон сохранения полного 4-импульса в виде (9) представляет а) закон сохранения полной энергии:

$$Q_0 = P_0; \quad P_0 = p_{10} + p_{20}, \quad Q_0 = q_{10} + q_{20} + \dots + q_{n0}; \quad (10)$$

б) закон сохранения полного 3-импульса:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}; \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \dots + \mathbf{q}_n, \quad (11)$$

где P_0 , \mathbf{P} (Q_0 , \mathbf{Q}) — полная энергия и полный 3-импульс начального (конечного) канала.

Для дальнейшего изложения важным является то обстоятельство, что общая запись законов сохранения полных энергии и 3-импульса в форме (10) и (11) не требует конкретизации системы отсчета вследствие релятивистской инвариантности полного 4-импульса (9) систем частиц начального и конечного каналов и что соотношения (10) и (11) выполняются для любой системы отсчета, если они оба записаны в одной и той же системе отсчета и рассматриваются совместно.

Полное число независимых кинематических инвариантов, описывающих систему частиц. В рамках релятивистского описания реакций (1) необходимо также установить полное число независимых релятивистских кинематических инвариантов. Оно равно числу независимых компонент из полного числа $4(n+2)$ компонент всех $(n+2)$ 4-импульсов частиц в реакции (1) и определяется в результате следующего рассмотрения. Из полного числа $4(n+2)$ переменных следует вычесть зависимые переменные,

число которых определяется суммой следующих связей: $(n + 2)$ связи, налагаемые условиями масс (6); четыре связи, налагаемые законами сохранения энергии и импульса (9); шесть связей, соответствующих шести переменным, характеризующим пространственные вращения и поступательное движение системы частиц как целого, т. е. три угла Эйлера и три компоненты скорости пространственных трансляций системы частиц. В итоге получаем полное число независимых релятивистских кинематических инвариантов:

$$K = 4(n + 2) - (n + 2) - 4 - 6 = 3n - 4. \quad (12)$$

Следует, однако, иметь в виду, что полученное число $K = 3n - 4$ не ограничивает число кинематических инвариантов, которыми можно пользоваться при описании реакций (1) и в процессе вычислений. Можно использовать и другие, зависимые, инварианты при условии, что известен способ их выражения через независимые кинематические инварианты. Такие инварианты называются вспомогательными. Полученный результат полезно сформулировать в виде правила: для релятивистского описания реакций (1) необходимо задать набор независимых релятивистских кинематических инвариантов (обозначим их как z_1, z_2, \dots, z_K), число которых $K = 3n - 4$ (n — число частиц конечного канала, в начальном канале — две частицы) и, если удобно, можно использовать любое число вспомогательных кинематических инвариантов, выражаемых в конечном счете через независимые кинематические инварианты*.

Отметим, что выбор независимых кинематических инвариантов достаточно произволен, однако не составляет труда ввести тот или иной их набор в каждом конкретном случае описания реакций (1). Выбор в качестве переменных в релятивистском описании реакций (1) именно релятивистских кинематических инвариантов является естественной, но не единственной возможностью. С таким же успехом могут использоваться (и часто используются в практике экспериментального и теоретического исследования)

* Из более детального рассмотрения следует, что полное число переменных (обозначим его \tilde{K}) превышает на единицу число $K = 3n - 4$, т. е. $\tilde{K} = K + 1 = 3(n - 1)$. Это обусловлено тем, что число событий в конечном канале пропорционально интервалу исключенной выспе переменной азимутального угла вращения системы конечных частиц как целого. Для плотности числа частиц при условии отсутствия поляризаций эта переменная может быть исключена из рассмотрения, и именно этому уровню описания соответствует число $K = 3n - 4$ переменных, характеризующих конечный и начальный каналы реакций (1). В дальнейшем изложении будет учитываться, что при фиксированном значении переменной, характеризующей начальный канал, максимально дифференциальные распределения конечных частиц в общем случае зависят от $K = 3n - 4$ переменных, одна из которых соответствует переменной азимутального угла вращения системы конечных частиц.

и релятивистские инвариантные переменные. Установление связи между этими двумя классами переменных является одной из задач кинематического анализа и будет рассмотрено ниже.

Измеряемые величины, дифференциальные сечения и фазовые объемы Кинематический и динамический вклады

Измеряемые величины. Основные характеристики реакций (1) — эффективные поперечные сечения различных порядков дифференциальности. Дифференциальное эффективное поперечное сечение η -порядка обозначается как $d^\eta\sigma$, где величина η — показатель порядка дифференциальности, который равен числу независимых кинематических переменных z_1, z_2, \dots, z_η , фиксированных в их бесконечно малых интервалах $(z_1, z_1 + dz_1), \dots, (z_\eta, z_\eta + dz_\eta)$. В реальном физическом эксперименте фиксирование кинематических переменных регистрирующим прибором можно осуществить хотя и в малой, но имеющей конечные размеры η -мерной области $\Delta^\eta D_z$, определяемой η -кратным интегралом вида

$$\Delta^\eta D_z = \int_{z_1}^{z_1 + \Delta z_1} \dots \int_{z_\eta}^{z_\eta + \Delta z_\eta} d^\eta D_z; \quad d^\eta D_z = dz_1 dz_2 \dots dz_\eta. \quad (13)$$

Область $\Delta^\eta D_z$ в общем случае имеет сложные границы, и ее пределы по некоторым из переменных могут зависеть от других переменных, вследствие чего эту область в большинстве случаев нельзя представить в факторизованном виде как $\Delta^\eta D_z = \Delta z_1 \cdot \Delta z_2 \dots \Delta z_\eta$. Малая область $\Delta^\eta D_z$ будет иметь с большой точностью факторизованный вид, если ее границы соответствуют линиям координатной сетки используемой системы координат, причем точная факторизация имеет место только в прямоугольной системе координат*. Конечные размеры и сложность границ выделяемой в эксперименте области $\Delta^\eta D_z$, определяемой «разбросами» $\Delta z_1, \dots, \Delta z_\eta$, с которыми осуществляется фиксация величин переменных z_1, \dots, z_η , приводят к тому, что измеряемые в реальном физическом эксперименте величины представляют собой величины либо «интегральные» по области $\Delta^\eta D_z$, либо усредненные по ней.

Важной экспериментальной измеряемой величиной является число событий $\Delta^\eta N$, реализуемых в результате актов реакций (1) в единице реагирующего объема двух сталкивающихся пучков

* Во избежание путаницы будем отличать понятие «система отсчета» в смысле выбора величины и направления относительной скорости движения наблюдателя и места события от понятия «система координат» в смысле выбора координатной сетки (прямоугольная, полярная, сферическая и т. п. системы координат).

частиц p_1 и p_2 за единицу времени и детектируемых прибором, фиксирующим переменные z_1, \dots, z_n в пределах области $\Delta^n D_z$ *. Переходу к бесконечно малой области $d^n D_z = dz_1 \dots dz_n$ соответствует понятие дифференциала числа событий $d^n N$. Тогда связь дифференциального сечения η -порядка $d^n \sigma$ с соответствующим дифференциалом числа событий $d^n N$ дается следующим релятивистски инвариантным соотношением (например, [9, 25]):

$$d^n N = j d^n \sigma = \frac{n_1 \cdot n_2}{p_{10} \cdot p_{20}} F d^n \sigma, \tag{14}$$

где $j = n_1 n_2 F / (p_{10} p_{20})$ — релятивистски инвариантный относительный поток двух сталкивающихся пучков частиц p_1 и p_2 с плотностями (числом частиц в единице объема) n_1 и n_2 соответственно; величины p_{10} и p_{20} означают полные энергии частиц p_1 и p_2 в тех же системах отсчета, в которых определены плотности n_1 и n_2 , а величина F определяется выражением

$$F = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - M_1^2 M_2^2} \tag{15}$$

и представляет собой релятивистский инвариант **.

* Типичные физические приборы, регистрирующие число актов реакций (1), — пузырьковые камеры, стопки фотоэмульсий, различные виды счетчиков частиц, включенных в схему совпадений.

** В наиболее общем виде в наглядно релятивистски инвариантной форме относительный поток двух сталкивающихся пучков частиц p_1 и p_2 определяется выражением [24]

$$j = \frac{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - M_1^2 M_2^2}}{(p_1 p_2)} (j_1 j_2),$$

где p_i — 4-импульс частицы p_i сорта i ($i = 1, 2$); $j_i = (n_i, n_i \beta_i)$ — 4-вектор потока пучка плотности n_i частиц вида i , движущихся со скоростью $\beta_i = \mathbf{p}_i / p_{i0}$.

Наряду с величиной $F = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - M_1^2 M_2^2}$ скалярное произведение $(j_1 j_2)$ двух 4-векторов j_1 и j_2 — релятивистский инвариант. Учитывая затем, что

$$(j_1 j_2) = n_1 n_2 (1 - \beta_1 \beta_2) = n_1 n_2 \left(1 - \frac{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}{p_{10} p_{20}} \right) = n_1 n_2 \frac{(p_1 p_2)}{p_{10} p_{20}},$$

для потока j получаем выражение

$$j = \frac{n_1 n_2}{p_{10} p_{20}} \sqrt{(p_1 p_2)^2 - M_1^2 M_2^2} = \frac{n_1 n_2}{p_{10} p_{20}} F,$$

фигурирующее в (14). Теперь очевидно, что отношение $(n_1 n_2) / (p_{10} p_{20})$ — также релятивистский инвариант. Более того, можно показать, что величины n_i / p_{i0} и n_2 / p_{20} в данном случае по отдельности тоже являются инвариантами и могут вычисляться в любых (разных или одинаковых) системах отсчета. В этом легко убедиться, рассмотрев, например, отношение n_1 / p_{10} в системе покоя O пучка частиц p_1 и в произвольной системе S ; тогда из его предполагаемой инвариантности должно следовать $n_1^S / p_{10}^S = n_1^O / M_1$, т. е. $n_1^S = n_1^O \gamma_1^S$, где n_1^O — плотность

Число столкновений, приводящих к актам реакции, является внутренней характеристикой взаимодействующей системы и вследствие этого не должно зависеть от системы отсчета, представляя собой релятивистский инвариант. В свою очередь, дифференциал числа событий $d^n N$ — дифференциальный релятивистский инвариант, и, в соответствии с соотношением (14), дифференциальное сечение $d^n \sigma$ — также дифференциальный релятивистский инвариант.

Выделяя в соотношении (14) дифференциал области изменения переменных $d^n D_z = dz_1 \dots dz_\eta$, перепишем это соотношение в виде

$$\left(\frac{d^n N}{dz_1 \dots dz_\eta} \right) d^n D_z = \frac{n_1 \cdot n_2}{p_{10} \cdot p_{20}} F \cdot \left(\frac{d^n \sigma}{dz_1 \dots dz_\eta} \right) d^n D_z, \quad (16)$$

где величина $\left(\frac{d^n N}{dz_1 \dots dz_\eta} \right)$ — плотность числа событий, а соответствующая ей величина $\left(\frac{d^n \sigma}{dz_1 \dots dz_\eta} \right)$ означает плотность дифференциального сечения η -порядка *, причем обе эти величины определены в точке $z = z(z_1, \dots, z_\eta)$, расположенной внутри η -мерной области D_z , и, следовательно, представляют собой функции текущей точки $z = z(z_1, \dots, z_\eta)$ в конфигурационном η -мерном пространстве переменных z_1, z_2, \dots, z_η .

Часто вводят обозначение

$$f_N^n = f_N(z_1, \dots, z_\eta) = \left(\frac{d^n N}{dz_1 \dots dz_\eta} \right), \quad (17)$$

и функцию $f_N(z_1, \dots, z_\eta)$, означающую плотность числа событий в ее зависимости от переменных z_1, \dots, z_η , называют функцией N -распределения η -порядка.

числа частиц p_1 в их собственной системе покоя O и n_1^S — плотность в движущейся системе отсчета S , характеризуемой лоренц-фактором $\gamma_1^S = p_{10}^S / M_1$. С другой стороны, соотношение $n_1^S = n_1^0 \gamma_1^S$ независимо следует из учета релятивистского сокращения трехмерного объема, что и доказывает независимую друг от друга инвариантность отношений n_1 / p_{10} и n_2 / p_{20} .

Отметим, что формула (11.1') в работе [9] следует из (14) при $\gamma_1^0 = \gamma_2^0 = 1$, $p_{10}^0 (p_{20}^0) = M_1 (M_2)$ и $n_1 (n_2) = n_1^0 (n_2^0)$, т. е. плотности каждого пучка частиц p_1 и p_2 в этой формуле берутся по отдельности в их собственных системах покоя.

* Интересно отметить, что в литературе часто термином «дифференциальное сечение» наделяют наряду с величинами $d^n \sigma$ также и величины $\left(\frac{d^n \sigma}{dz_1 \dots dz_\eta} \right)$. Эта неточность возникает, по-видимому, из-за стремления к краткости терминологии и допустима там, где не вызывает недоразумений. Ниже всюду величина $\left(\frac{d^n \sigma}{dz_1 \dots dz_\eta} \right)$ в соответствии с ее физическим смыслом будет называться плотностью дифференциального сечения η -порядка.

Соотношения (14) и (16) не могут быть непосредственно использованы в практике обработки экспериментально измеряемых распределений числа событий потому, что экспериментально получаемые величины являются всегда величинами либо интегральными по некоторой конечной области $\Delta^n D_z$ изменения переменных z_1, \dots, z_η , либо усредненными по этой области. Это означает, что сравнение теоретически вычисляемых распределений с экспериментально измеряемыми распределениями числа событий должно проводиться или на основе соотношения

$$\begin{aligned} \Delta^n N &= \int_{\Delta z_1 \dots \Delta z_\eta} \dots \int \left(\frac{d^n N}{dz_1 \dots dz_\eta} \right) d^n D_z = \\ &= \frac{n_1 \cdot n_2}{p_{10} \cdot p_{20}} \cdot F \cdot \int_{\Delta z_1 \dots \Delta z_\eta} \dots \int \left(\frac{d^n \sigma}{dz_1 \dots dz_\eta} \right) d^n D_z = \frac{n_1 \cdot n_2}{p_{10} \cdot p_{20}} \cdot F \cdot \Delta^n \sigma, \end{aligned} \quad (18)$$

или на основе соотношения, получаемого из (18) применением теоремы о среднем с дальнейшим делением на величину области $\Delta^n D_z$, а именно

$$\frac{\Delta^n N}{\Delta^n D_z} = \overline{\left(\frac{d^n N}{d^n D_z} \right)} = \frac{n_1 \cdot n_2}{p_{10} \cdot p_{20}} \cdot F \cdot \overline{\left(\frac{d^n \sigma}{d^n D_z} \right)} \quad (19)$$

{черта сверху означает усреднение по некоторой достаточно малой, но имеющей конечные размеры, области $\Delta^n D_z$, определяемой выражением (13)}. Необходимо учитывать, что величина (объем) области $\Delta^n D_z$, задаваемой типом проводимого эксперимента и характеристиками регистрирующих приборов, должна быть вычислена на основе выражения (13) с учетом возможной сложности границ области.

Рассматривая в данном месте лишь принципиальную сторону вопроса, важно иметь в виду, что в результате эксперимента, в котором измеряется число событий $\Delta^n N$, имеются две возможности систематизации экспериментальных данных, а именно: а) получение набора интегральных по области $\Delta^n D_z$ величин $\Delta^n N$ и, в соответствии с соотношениями (18) и (14), набора величин $\Delta^n \sigma$ в виде их зависимости от переменных z_1, \dots, z_η , не интересуясь при этом явным вычислением величины (объема) области $\Delta^n D_z$, к которой эти величины относятся; б) получение набора усредненных по области $\Delta^n D_z$ величин $\overline{\left(\frac{d^n N}{dz_1 \dots dz_\eta} \right)}$ и, в соответствии с соотношениями (19) и (14), набора величин $\overline{\left(\frac{d^n \sigma}{dz_1 \dots dz_\eta} \right)}$ в виде их зависимости от переменных z_1, \dots, z_η , причем для их получения из данных набора а) необходимо вычислять величину (объем) области $\Delta^n D_z$, к которой они относятся.

Для целей выделения динамической информации из экспериментальных данных оба способа их систематизации совершенно равноправны. Однако для цели графического представления экспериментального материала в виде функций распределений (17) в общем случае удовлетворяет только набор данных типа б). Относительно вида кинематических переменных необходимо отметить, что до сих пор в тексте использовались условные (конкретно не определенные) независимые кинематические инварианты, обозначаемые как z_1, z_2, \dots, z_n . Однако вовсе не обязательно использовать лишь инвариантные переменные. Можно применять любой набор неинвариантных независимых переменных, которые будем условно обозначать как x_1, x_2, \dots, x_n . Переход от одного набора переменных к другому эквивалентен приему замены переменных под знаком интеграла. При этом переходе подынтегральные функции преобразуются с помощью якобианов.

Общее выражение для дифференциального поперечного сечения. После получения экспериментальных данных в виде наборов а) и б) (см. предыдущий раздел) важный этап исследования — сравнение экспериментальных значений с соответствующими теоретическими вычисленными значениями. Это сравнение далеко не всегда можно выполнить до конца, так как динамические закономерности не всегда изучены даже на уровне предварительных моделей. Тем не менее в рамках весьма общего теоретического подхода известна схема записи выражений для дифференциальных сечений реакций столкновения. Именно, на основе представлений квантовой теории поля и теории элементарных частиц теоретически получаемое общее выражение для дифференциального поперечного сечения максимального порядка дифференциальности $K = 3n - 4$ в случае реакций (1) имеет следующий вид (см., например, работы [13, 16, 20, 24]):

$$d^K \sigma = (2\pi)^{4-3n} \frac{1}{F} \sum_{\text{спин}} |\mathcal{M}_{fi}(z_1, \dots, z_K)|^2 \delta^4(\mathcal{Q} - \mathcal{F}) \times \\ \times \frac{d^3 q_1}{q_{10}} \cdot \frac{d^3 q_2}{q_{20}} \dots \frac{d^3 q_n}{q_{n0}}, \quad (20)$$

где величина $F = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 \cdot M_2^2}$ определена ранее в (15) и представляет собой инвариант, с точностью до множителя характеризующий релятивистски инвариантный относительный поток сталкивающихся начальных частиц p_1 и p_2 (см. примечание на с. 181); $\sum_{\text{спин}} |\mathcal{M}_{fi}(z_1, \dots, z_K)|^2$ есть релятивистски инва-

риантное выражение для квадрата матричного элемента перехода из начального состояния i в конечное состояние f в реакциях (1) в виде функции всех независимых кинематических инвариантов z_1, z_2, \dots, z_K (либо неинвариантных независимых кинематических

переменных x_1, x_2, \dots, x_K), просуммированного по конечным и усредненного по начальным спиновым состояниям; $\delta^4(\mathcal{Q} - \mathcal{P}) = \delta^0(Q_0 - P_0) \delta^3(\mathbf{Q} - \mathbf{P})$ — 4-мерная δ -функция, отражающая закон сохранения полного 4-импульса [законы сохранения полной энергии (10) и 3-импульса (11)]; $d^3q_1, d^3q_2, \dots, d^3q_n$ — дифференциалы 3-импульсов $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ и $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}$ — полные энергии соответствующих всех n частиц конечного канала, причем отношения $d^3q_1/q_{10}, d^3q_2/q_{20}, \dots, d^3q_n/q_{n0}$ представляют собой элементы объема в пространстве 4-импульсов и являются каждый в отдельности релятивистскими инвариантами, $d^3q_f/2q_{f0} = \delta^4(q_f^2 - m_f^2) d^4q_f$ (здесь $f = 1, 2, \dots, n$).

Выражение (20), рассматриваемое как целое, — дифференциальный релятивистский инвариант, причем следующее выражение, включающее 4-кратный интеграл (обозначено $d\mathbf{q} = d^3q$),

$$d^2J = \int \delta^4(\mathcal{Q} - \mathcal{P}) \frac{d\mathbf{q}_1}{q_{10}} \cdot \frac{d\mathbf{q}_2}{q_{20}} = \text{invar} \tag{21}$$

является также дифференциальным релятивистским инвариантом (из имеющихся шести дифференциалов два дифференциала остаются и после учета δ^4 -функции) и должно рассматриваться как единое целое. Выражение (21) и каждый из остальных сомножителей в правой части выражения (20), по отдельности являясь релятивистскими инвариантами, можно вычислять независимо друг от друга в любой системе отсчета.

Выполнение 4-кратного интегрирования с δ^4 -функцией в (20) эквивалентно учету законов сохранения энергии и импульса в импульсном пространстве конечных состояний. В результате вычисления интеграла (21) определяется основной множитель в выражении для плотности фазового объема импульсных состояний конечных частиц в реакциях (1). Его можно вычислить не прибегая к конкретизации системы отсчета, т. е. не вводя пока условий, определяющих ту или иную систему отсчета, для чего используем запись законов сохранения энергии и импульса в форме (10) и (11). Их удобно переписать, введя характерный 4-вектор \mathcal{R}

$$\mathcal{R} = \{R_0, \mathbf{R}\} \rightarrow \begin{cases} R_0 = P_0 - \sum_{l=3}^n q_{l0} = q_{j0} + q_{k0}; & (22) \\ \mathbf{R} = \mathbf{P} - \sum_{l=3}^n \mathbf{q}_l = \mathbf{q}_j + \mathbf{q}_k, & (22') \end{cases}$$

где сумма по l означает суммирование по всем индексам $n - 2$ конечных частиц из их полного числа n за исключением двух индексов, которые обозначены как j и k (для определенности можно полагать, что $j, k \leftrightarrow 1, 2$). Используя правила интегрирова-

ния с δ -функциями (см., например, [9,24,26]) и учитывая, что

$$d\mathbf{q} = d^3q = \mathbf{q}^2 dq d\Omega = |\mathbf{q}| \cdot q_0 dq_0 dx d\varphi, \tag{23}$$

для интеграла (21) приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} d^2J &= \int \delta^4(\mathcal{Q} - \mathcal{F}) \frac{dq_j dq_k}{q_{j0}q_{k0}} = \\ &= \sum_{(\pm)} [q_j^{(\pm)}(x_j)]^2 \cdot |R_0 \cdot q_j^{(\pm)}(x_j) - R \cdot q_{j0}^{(\pm)}(x_j) \cdot x_j|^{-1} dx_j d\varphi_j, \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned} q_{j0}^{(\pm)}(x_j) &= \frac{1}{2(R_0^2 - R^2 x_j^2)} \{ [(R_0^2 - R^2) + (m_j^2 - m_k^2)] R_0 \pm \\ &\pm R x_j \sqrt{[(R_0^2 - R^2) + (m_j^2 - m_k^2)]^2 - 4m_j^2 (R_0^2 - R^2 x_j^2)} \}; \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} q_j^{(\pm)}(x_j) &= \frac{1}{2(R_0^2 - R^2 x_j^2)} \{ [(R_0^2 - R^2) + (m_j^2 - m_k^2)] R x_j \pm \\ &\pm R_0 \sqrt{[(R_0^2 - R^2) + (m_j^2 - m_k^2)]^2 - 4m_j^2 (R_0^2 - R^2 x_j^2)} \}. \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь величина $x_j = \cos \theta_j = (\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{R}) / (|\mathbf{q}_j| \cdot |\mathbf{R}|)$ играет роль переменной, а определенные левыми частями равенств в (22)

и (22') величины $R_0 = P_0 - \sum_{l=3}^n q_{l0}$ и

$$R = |\mathbf{R}| = \left| \mathbf{P} - \sum_{l=3}^n \mathbf{q}_l \right| = \left| \sqrt{P^2 + \left(\sum_{l=3}^n \mathbf{q}_l \right)^2 - 2\mathbf{P} \cdot \sum_{l=3}^n \mathbf{q}_l} \right|$$

являются фиксированными параметрами. В выражениях (25) и (26) индексы j и k могут взаимно заменяться, причем они всегда связаны так, что если обозначено $j = 1$, то $k = 2$, и если $j = 2$, то $k = 1$. Отметим важное обстоятельство, вытекающее непосредственно из вида выражений (25) и (26): решения для $q_{j0}^{(\pm)}$ и $q_j^{(\pm)}$ являются функциями только переменной полярного угла $x_j = \cos \theta_j$ и не зависят от переменной азимутального угла φ_j .

Вид выражения для дифференциального сечения K -порядка после учета законов сохранения энергии и импульса. После учета законов сохранения энергии и импульса в виде (22) и (22'), т.е. выполнив 4-кратное интегрирование в (20) с учетом δ^4 -функции,

для дифференциального сечения K -порядка получаем выражение

$$\begin{aligned}
 d^K \sigma_j^{(\pm)} &= c \frac{1}{F} \sum_{\text{спин}} |\mathcal{M}_{fi}(z_1, \dots, z_K)|^2 \times \\
 &\times \{ [q_j^{(\pm)}(x_j)]^2 / |R_0 q_j^{(\pm)}(x_j) - R q_{j_0}^{(\pm)}(x_j) \cdot x_j| \cdot dx_j d\varphi_j \} \times \\
 &\times \prod_{l=3}^n \frac{dq_l}{q_{l0}} = c \frac{1}{F} \sum_{\text{спин}} |\mathcal{M}_{fi}(z_1, \dots, z_K)|^2 \times \\
 &\times \rho^{(\pm)}(x_j) dx_j d\varphi_j \prod_{l=3}^n q_l dq_{l0} dx_l d\varphi_l, \tag{27}
 \end{aligned}$$

где во втором равенстве учтено соотношение (23) и для функции $d^2 J^{(\pm)} / dx_j d\varphi_j$, полученной в (24), введено обозначение

$$\begin{aligned}
 \rho_{(j \leftrightarrow k)}^{(\pm)}(x_j) &= (d^2 J^{(\pm)} / dx_j d\varphi_j) = \\
 &= [q_j^{(\pm)}(x_j)]^2 / |R_0 \cdot q_j^{(\pm)}(x_j) - R \cdot q_{j_0}^{(\pm)}(x_j) \cdot x_j|, \tag{28}
 \end{aligned}$$

здесь, в свою очередь, величины $q_{j_0}^{(\pm)}(x_j)$ и $q_j^{(\pm)}(x_j)$ определены выражениями (25) и (26); $c = (2\pi)^{4-3n} 2^{-b}$.

Выражение для плотности дифференциального сечения K -порядка сразу же следует из (27), если все дифференциалы в правой части этого выражения перенести в его левую часть (формально это эквивалентно делению обеих частей выражения (27) на все дифференциалы, имеющиеся в его правой части), и имеет вид

$$\begin{aligned}
 &\frac{d^K \sigma_j^{(\pm)}}{dx_j d\varphi_j \prod_{l=3}^n dq_{l0} dx_l d\varphi_l} = \\
 &= c \frac{1}{F} \sum_{\text{спин}} |\mathcal{M}_{fi}(z_1, \dots, z_K)|^2 \rho^{(\pm)}(x_j) \prod_{l=3}^n q_l, \tag{27'}
 \end{aligned}$$

причем необходимо, чтобы каждая из двух групп переменных x_j, φ_j и $q_{l0}(q_l), x_l, \varphi_l$ определялась в своей собственной системе отсчета, если по какой-либо причине задание этих групп переменных дано в различных системах отсчета.

Знаки (\pm) в выражениях (25) и (26) и соответственно в (27) употребляются с учетом условий:

$$\text{а) если } 2m_j R_0 - [(R_0^2 - R^2) + (m_j^2 - m_k^2)] \geq 0, \tag{29}$$

то для угла вылета θ_j частицы q_j относительно вектора \mathbf{R} существует предельный угол θ_j^{np} , определяемый выражениями

$$\begin{aligned}
 A_j = \cos \theta_j^{\text{np}} &= \frac{1}{2m_j R} \left| \sqrt{4m_j^2 R_0^2 - [(R_0^2 - R^2) + (m_j^2 - m_k^2)]^2} \right|; \tag{30} \\
 \theta_j^{\text{np}} &= \arccos A_j.
 \end{aligned}$$

Наличие предельного угла означает, что под любым углом θ_j ($x_j = \cos \theta_j$), лежащим в интервале

$$0 \leq \theta_j \leq \arccos A_j, \quad +1 \geq x_j \geq A_j, \quad (31)$$

частицы q_j сорта j вылетают как с энергией $q_{j0}^{(+)}(x_j)$, так и с энергией $q_{j0}^{(-)}(x_j)$, величины которых определяются выражением (25). Соответствующие абсолютные величины 3-импульсов $q_j^{(+)}(x_j)$ и $q_j^{(-)}(x_j)$ определяются выражением (26). Выражение (27) для $dK_{\sigma}^{K(\pm)}$ со знаками (+) и (-) в данном случае определяет теоретические дифференциальные сечения максимального порядка дифференциальности $K = 3n - 4$, соответствующие этим двум возможностям;

$$б) \text{ если } 2m_j R_0 - [(R_0^2 - R^2) + (m_j^2 - m_k^2)] < 0, \quad (32)$$

то предельный угол отсутствует и частицы q_j сорта j вылетают во всем физическом интервале углов

$$0 \leq \theta_j \leq \pi, \quad +1 \geq x_j \geq -1. \quad (31')$$

В этом случае в (25)–(27) и (27') следует или брать только знак (+), если $x_j = \cos \theta_j$ определяется со знаком во всем интервале (31'), или оставить знаки (\pm), но для x_j брать его абсолютную величину $|x_j|$, причем при таком определении знак (+) относится только к интервалу $+1 \geq x_j \geq 0$, а знак (-) — только к интервалу $0 \geq x_j \geq -1$.

Относительно выражения для $dK_{\sigma}^{K(\pm)}$ важно отметить следующее:

1) выражение (27) определено релятивистски инвариантным образом и применимо в любых системах отсчета, вводимых для описания реакций (1) с $n \geq 2$;

2) введение 4-вектора $\mathcal{R} = \{R_0, \mathbf{R}\}$ с компонентами R_0 и \mathbf{R} , определенными в (22) и (22'), соответствует выделению азимутальной симметрии вылета относительно вектора \mathbf{R} частиц сортов j и k , обеспечивающей в (27) разделение переменных x_j и φ_j (или x_k и φ_k), в результате чего выражения (25), (26) и (28) для $q_{j0}^{(\pm)}(x_j)$, $q_j^{(\pm)}(x_j)$ и функционального множителя плотности фазового объема $\rho^{(\pm)}(x_j)$ зависят только от переменной полярного угла $x_j = \cos \theta_j$ и не зависят от переменной азимутального угла φ_j . Это означает, что направление 3-вектора \mathbf{R} следует использовать в качестве оси сферической системы координат, от которой отсчитываются полярные углы частиц q_j и q_k ;

3) с величиной и направлением 3-вектора \mathbf{R} естественно связывать систему отсчета, причем очевидно, что выражение (27) применимо для любых систем отсчета как с вектором $\mathbf{R} \neq 0$, так и с вектором $\mathbf{R} = 0$ (системы центра масс подсистем любых двух частиц, в частности q_j и q_k), при этом 4-вектор \mathcal{R} фиксирован;

4) выражение (27) является исходным для получения сечений $d^n\sigma^{(\pm)}$ порядков дифференциальности η , меньших, чем $K = 3n - 4$. Для этого необходимо проводить последовательно интегрирования выражения (27) по полному интервалу изменения числа $K - \eta$ тех или иных независимых переменных; при этом ясно, что последовательность интегрирований должна быть такой: сначала проводится интегрирование по независимым переменным x_j и φ_j частицы q_j (или x_k, φ_k частицы q_k) и далее по независимым переменным q_{l0}, x_l, φ_l ($l = 3, \dots, n$), содержащимся в 3-мерных дифференциалах остальных $n - 2$ частиц, $dq_l/q_{l0} = q_l dq_{l0} dx_l d\varphi_l$. Чтобы выполнить такое интегрирование в случае, когда в (27) матричный элемент $\mathcal{M}_{ji} = \mathcal{M}_{ji}(z_1, z_2, \dots, z_K)$ задан в виде функции независимых релятивистских кинематических инвариантов z_1, z_2, \dots, z_K , необходимо установить связь между двумя группами переменных $\{x_j, \varphi_j; q_{30}, x_3, \varphi_3; \dots; q_{n0}, x_n, \varphi_n\} \leftrightarrow \{z_1, z_2, \dots, z_K\}$, где $j = 1$ или 2 и $K = 3n - 4$;

5) получаемое из $d^K\sigma^{(\pm)}$ интегрированием выражения (27) по полным интервалам изменения $K - \eta$ независимых переменных дифференциальное сечение η -порядка $d^\eta\sigma^{(\pm)}$ служит, в свою очередь, исходным выражением для вычисления интегральных по величине малой конечной области $\Delta^n D$ дифференциальных сечений $\Delta^n\sigma^{(\pm)}$. Таким образом, выражение для дифференциального по малой конечной области $\Delta^n D$ сечения η -порядка $\Delta^n\sigma^{(\pm)}$ содержит $K - \eta$ интегрирования по полным интервалам изменения $K - \eta$ независимых переменных из полного числа $K = 3n - 4$ и η интегрирований по остальным η независимым переменным в пределах заданной малой конечной области $\Delta^n D$, определяемой заданными малыми, но конечными изменениями этих переменных $\Delta z_1, \Delta z_2, \dots, \Delta z_\eta$ (или $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_\eta$). В частности, когда $\eta = K$, выражение для $\Delta^K\sigma^{(\pm)}$ содержит $K = 3n - 4$ интегрирований по всем независимым переменным в пределах их малых конечных изменений, определяющих величину области $\Delta^K D$; при $\eta = 0$ выражение (27) должно быть проинтегрировано по полным допустимым интервалам изменения всех $K = 3n - 4$ независимых переменных, в результате чего получают величину полного сечения σ^{tot} рассматриваемой реакции столкновения.

Выражение для дифференциального фазового объема K -порядка и выделение динамики реакции в виде квадрата матричного элемента. Выражение (27) для дифференциального сечения K -порядка $d^K\sigma$ содержит множители, имеющие с точки зрения их физического смысла различный характер, а именно:

а) множитель $\sum_{\text{спин}} |\mathcal{M}_{ji}(z_1, z_2, \dots, z_K)|^2$ представляет собой квадрат матричного элемента реакции, просуммированный по конечным и усредненный по начальным спиновым состояниям,

и составляет предмет динамики реакций (1); он отражает свойства взаимодействующей системы («черный ящик» на рис. 1), экспериментальное исследование которых является источником решающих сведений о характере исследуемого взаимодействия;

б) остальные множители имеют кинематическую природу и составляют выражение для дифференциального фазового объема максимального порядка дифференциальности $K = 3n - 4$, который обозначается как $d^K\Phi_j^{(\pm)}$ и имеет явный вид

$$\begin{aligned} d^K\Phi_j^{(\pm)} &= c \frac{1}{F} \rho^{(\pm)}(x_j) dx_j d\varphi_j \prod_{l=3}^n \frac{dq_l}{q_{l0}} = \\ &= c \frac{1}{F} \rho^{(\pm)}(x_j) dx_j d\varphi_j \prod_{l=3}^n q_l dq_{l0} dx_l d\varphi_l, \end{aligned} \quad (33)$$

где второе равенство следует из первого с учетом (23); выражение для плотности фазового объема K -порядка, вытекающее из (33), имеет вид

$$\frac{d^K\Phi_j^{(\pm)}}{dx_j d\varphi_j \prod_{l=3}^n dq_{l0} dx_l d\varphi_l} = c \frac{1}{F} \prod_{l=3}^n q_l \cdot \rho^{(\pm)}(x_j), \quad (33')$$

где в (33) и (33') функция $\rho^{(\pm)}(x_j)$ определена в (28) и представляет собой основной функциональный множитель в данных выражениях. Выражение (33) получено из (27), в котором положено $\sum_{\text{спин}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = 1$. Действительно, равенство

$$d^K\Phi_j^{(\pm)} = d^K\sigma_j^{(\pm)} \left(\sum_{\text{спин}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = 1 \right) \quad (34)$$

может рассматриваться как определение понятия дифференциального фазового объема K -порядка. Аналогичное соотношение имеет место для плотностей (27') и (33').

Теоретически полученные выражения (27) и (33) могут в принципе быть вычислены, если известны:

1) матричный элемент реакции $\mathcal{M}_{fi}(z_1, z_2, \dots, z_K)$ в виде функции всех независимых переменных z_1, z_2, \dots, z_K (или x_1, x_2, \dots, x_K);

2) способ построения 4-вектора $\mathcal{R} = \{R_0, \mathbf{R}\}$ с компонентами R_0 и \mathbf{R} , определяемыми выражениями (22) и (22'); фиксирование 4-вектора \mathcal{R} необходимо и достаточно для вычисления функций $q_{j0}^{(\pm)}(x_j)$ и $q_j^{(\pm)}(x_j)$ по формулам (25) и (26) и, следовательно, функции $\rho^{(\pm)}(x_j)$ по формуле (28), входящей в выражения (27), (27') и (33), (33').

Содержание пункта 1) составляет динамический аспект проблемы реакций (1). Однако, несмотря на разнообразные попытки,

до сих пор не имеется строгой теории, позволяющей в общем случае взаимодействий теоретически определять матричные элементы реакций (1). Вследствие этой принципиальной трудности обычно ставится задача об извлечении динамической информации из получаемых при исследовании реакций (1) экспериментальных данных. При этом основываются на следующем очевидном утверждении: имея в распоряжении теоретическое выражение (33) для дифференциального фазового объема K -порядка $d^K\Phi^{\text{теор}}$ и получив из экспериментальных данных на основе выражения (14) величины дифференциальных сечений K -порядка $\Delta K\sigma^{\text{экс}}$, относящихся к области $\Delta^K D$ изменения всех независимых переменных z_1, z_2, \dots, z_K (x_1, x_2, \dots, x_K), в принципе возможно извлечь информацию о квадрате матричного элемента $\sum_{\text{спин}} |\mathcal{M}_{fi}|^2$, пользуясь следующими соотношениями:

$$\Delta K\sigma^{\text{экс}} / \Delta^K \Phi^{\text{теор}} = \left. \begin{aligned} &= \Delta K\sigma^{\text{экс}} / \int_{\Delta^K D} \dots \int d^K \Phi^{\text{теор}} = \left\{ \sum_{\text{спин}} |\mathcal{M}_{fi}(z_1, \dots, z_K)|^2 \right\}_{Av}, & (35) \\ & \left(\frac{\Delta K\sigma^{\text{экс}}}{\Delta^K D} \right) / \left(\frac{1}{\Delta^K D} \int_{\Delta^K D} \dots \int d^K \Phi^{\text{теор}} \right) = \left\{ \dots \right\} & (36) \end{aligned} \right\}$$

где индекс Av означает усреднение по величине области $\Delta^K D$, определяемой интегралом (13) в соответствии с выделяемыми в эксперименте малыми конечными интервалами всех K независимых переменных z_1, z_2, \dots, z_K (x_1, x_2, \dots, x_K), фиксированных с точностью до этих интервалов.

Важно иметь в виду, что левые части выражений (35) и (36) представляют собой отношения экспериментально получаемых величин дифференциального сечения K -порядка $\Delta K\sigma^{\text{экс}}$ и теоретически вычисляемых на основе выражений (33) или (33') величин дифференциального фазового объема K -порядка $\Delta^K \Phi^{\text{теор}} = \int_{\Delta^K D} \dots \int d^K \Phi^{\text{теор}}$, а также вычисляемых на основе (13) величин (объемов) дифференциальной области $\Delta^K D$, выделяемой приборами при многократных измерениях в условиях максимально дифференциального эксперимента.

Именно получение в соответствии с правилами (35) и (36) набора данных, свидетельствующих о поведении квадрата матричного элемента той или иной реакции типа (1), в их детальной зависимости от всех независимых кинематических переменных z_1, z_2, \dots, z_K (x_1, x_2, \dots, x_K) представляет собой наиболее общую и важную цель экспериментального исследования реакций столкновения (1) и составляет вклад, вносимый экспериментальным

исследованием в анализ динамического аспекта изучаемых реакций столкновения. Чтобы выполнить указанный анализ на основе выражений (35) и (36), необходимо также иметь все сведения, составляющие кинематический аспект проблемы. В процессе экспериментального и теоретического исследования реакций (1) необходимо, например, знать: 1) допустимые законами сохранения энергии и импульса интервалы изменения кинематических величин (энергий, импульсов, углов вылета) всех конечных частиц в различных системах отсчета; 2) выражения для дифференциальных фазовых объемов того или иного требуемого порядка дифференциальности; 3) ограничения, предъявляемые к размерам и расположению регистрирующих приборов, которые следует соблюдать для корректного использования выражений (35) и (36) с целью выделения динамической информации. Эти и другие вопросы составляют предмет детального кинематического анализа и будут рассмотрены в следующих главах.

Кинематически полный (максимально дифференциальный) эксперимент. Способ выделения динамической информации вида $\sum_{\text{спин}} |\mathcal{M}_{fi}(z_1, \dots, z_K)|^2$, основанный на соотношениях (35) и (36), подразумевает наличие экспериментальных данных, получаемых при исследовании реакций столкновения в условиях кинематически полного (максимально дифференциального) эксперимента. Установим, как должен быть выполнен кинематически полный эксперимент в случаях реакций с $n = 2$ и $n = 3$, представляющих непосредственный интерес с точки зрения современных возможностей техники экспериментального исследования.

$n = 2$. Реакция $p_1 + p_2 \rightarrow q_j + q_k$. В этом случае 4-вектор \mathcal{R} совпадает с 4-вектором \mathcal{P} , описывающим начальный канал, т.е.

$$\mathcal{R} = \mathcal{P} = q_j + q_k \begin{cases} R_0 = P_0 = q_{j0} + q_{k0}; \\ \mathbf{R} = \mathbf{P} = \mathbf{q}_j + \mathbf{q}_k. \end{cases}$$

Решения для $q_j^{(\pm)}(x_j)$ и $q_k^{(\pm)}(x_j)$ в этом случае получим, подставив в (25) и (26) величины $R_0 = P_0$, $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{P}|$ и $x_j = (\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{P}) / (|\mathbf{q}_j| \cdot |\mathbf{P}|)$; множитель $\prod_{i=3}^n dq_i / q_{i0}$ в случае $n = 2$ отсутствует. В результате выражение (27) принимает вид:

$$d^2\sigma_j^{(\pm)} = d^{(3 \cdot 2 - 4)}\sigma_j^{(\pm)} = c \frac{1}{F} \sum_{\text{спин}} |\mathcal{M}_{fi}(x_j, \varphi_j)|^2 \times \\ (j \longleftrightarrow k) \\ \times \frac{[q_j^{(\pm)}(x_j)]^2}{|P_0 q_j^{(\pm)}(x_j) - |\mathbf{P}| q_{j0}^{(\pm)}(x_j) x_j|} dx_j d\varphi_j.$$

$n = 3$. Реакция $p_1 + p_2 \rightarrow q_j + q_k + q_l$. В этом случае индексы l и n совпадают, $l = n = 3$ и 4-вектор \mathcal{R} есть разность 4-векторов \mathcal{P} и q_l , т. е.

$$\mathcal{R}_l = \mathcal{P} - q_l = q_j + q_k \quad \begin{cases} R_{l0} = P_0 - q_{l0} = q_{j0} + q_{k0}; \\ \mathbf{R}_l = \mathbf{P} - \mathbf{q}_l = \mathbf{q}_j + \mathbf{q}_k, \end{cases}$$

где индексы j, k, l образуют циклическую перестановку. Решения для $q_j^{(\pm)}(x_j)$ и $q_k^{(\pm)}(x_k)$ получим, подставив в (25) и (26) величины $R_{l0} = P_0 - q_{l0}$ и $R_l = |\mathbf{R}_l| = |\mathbf{P} - \mathbf{q}_l| = |\sqrt{\mathbf{P}^2 + \mathbf{q}_l^2} - 2|\mathbf{P} \cdot \mathbf{q}_l| x_l|$, где $x_l = (\mathbf{q}_l \cdot \mathbf{P}) / |\mathbf{q}_l| \cdot |\mathbf{P}|$ и $x_j = (\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{R}_l) / |\mathbf{q}_j| \cdot |\mathbf{R}_l|$, причем выражения для R_{l0} и R_l будут определены, если частица q_l будет фиксирована с полной (кинетической) энергией q_{l0} ($T_l = q_{l0} - m_l$) под полярным углом ее вылета θ_l ($x_l = \cos \theta_l$) (азимутальный угол φ_l — произвольный в пределах $0 \leq \varphi_l \leq 2\pi$; для определенности можно полагать $\varphi_l = 0$). При этом фиксированные значения величин q_{l0} и θ_l должны лежать внутри своих допустимых законами сохранения энергии и импульса интервалов (их определение рассматривается в разд. 2).

Выражение (27) при $n = 3$ имеет смысл только для величин q_{l0} и θ_l , лежащих внутри допустимых для них интервалов, принимая вид

$$\begin{aligned} d^5\sigma_j^{(\pm)} &= d^{(3 \cdot 3 - 4)}\sigma_j^{(\pm)} = \\ &= c \frac{1}{F} \sum_{\text{спин}} |\mathcal{M}_{fi}(x_j, \varphi_j; q_{l0}, x_l, \varphi_l)|^2 \times \\ &\times \left\{ \frac{[q_j^{(\pm)}(x_j)]^2}{|R_{l0}q_j^{(\pm)}(x_j) - R_lq_{j0}^{(\pm)}(x_j)x_j|} \right\} (q_l dq_{l0} dx_l d\varphi_l). \end{aligned} \quad (37)$$

Сравнение условий, необходимых для вычисления дифференциальных сечений (и соответствующих им фазовых объемов) максимального порядка дифференциальности $K = 3n - 4$ в случаях $n = 2$ и $n = 3$, приводит к следующим требованиям, предъявляемым к эксперименту.

В случае $n = 2$ величина $K = 2$ и для получения сведений о $\Delta^2\sigma_j^{(\pm)}$ достаточно регистрировать только одну из частиц, например q_j , вылетающую под полярным углом θ_j ($x_j = \cos \theta_j$) в интервале от x_j до $x_j + \Delta x_j$ и в интервале азимутального угла от φ_j до $\varphi_j + \Delta\varphi_j$ (в отсутствие поляризаций начальных и конечных частиц распределение конечных частиц изотропно по φ_j).

В случае $n = 3$ величина $K = 5$ и для получения сведений о $\Delta^5\sigma_j^{(\pm)}$ необходимо регистрировать в эксперименте на совпадения любые две конечные частицы (из полного числа трех конечных частиц), причем

а) у одной из частиц, например q_l , должны регистрироваться кинетическая энергия в интервале от T_l до $T_l + \Delta T_l$ ($T_l =$

$= q_{10} - m_l$, $dT_l = dq_{10}$), ее полярный угол вылета в интервале от θ_l до $\theta_l + \Delta\theta_l$ (от x_l до $x_l + \Delta x_l$; $x_l = \cos \theta_l$) и азимутальный угол в интервале от φ_l до $\varphi_l + \Delta\varphi_l$;

б) другая частица, например q_j , должна регистрироваться в интервале ее полярного угла от θ_j до $\theta_j + \Delta\theta_j$ (от x_j до $x_j + \Delta x_j$; $x_j = \cos \theta_j$) и в интервале ее азимутального угла от φ_j до $\varphi_j + \Delta\varphi_j$, причем достаточно регистрировать лишь факт ее вылета в этих угловых интервалах.

В результате следует, что в случае реакций с $n = 3$:

1) необходимо и достаточно выполнить эксперимент, в котором производится регистрация на совпадения каких-либо двух конечных частиц (из трех), например частиц q_l и q_j , чтобы, воспользовавшись затем выражениями типа (35) и (36), извлечь динамическую информацию — поведение квадрата матричного элемента в зависимости от всех независимых переменных, характеризующих реакции (1) с $n = 3$;

2) процедура извлечения динамической информации из получаемых экспериментальных данных помимо формального использования соотношений типа (35) и (36) требует детального знания кинематических характеристик реакций с $n = 3$, т.е. требуется последовательное проведение полного кинематического анализа, составляющего кинематический аспект проблемы.

Далее рассматривается лишь класс реакций с $n = 3$. Их кинематическое описание проводится в общем случае любых масс участвующих частиц и любых величин их энергий.

2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА РЕАКЦИЙ С $n = 3$ ТИПА $p_1 + p_2 \rightarrow q_j + q_k + q_l$. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Q-реакции

Общий случай реакций столкновения с $n = 3$ при любых допустимых массах участвующих частиц, символически обозначаемый в виде

$$p_1 + p_2 \rightarrow q_j + q_k + q_l \quad (M_1 + M_2 \rightarrow m_j + m_k + m_l) \quad (1)$$

через 4-импульсы (массы) частиц, включает три класса реакций в зависимости от величины энергосвободы Q реакций, определяемого как разность масс начальных и конечных частиц:

$$Q = (M_1 + M_2) - (m_j + m_k + m_l) = M_I - M_F, \quad (38)$$

где $M_I = M_1 + M_2$ ($M_F = m_j + m_k + m_l$) — сумма масс покоя всех начальных (конечных) частиц. По своему физическому смыслу определенная таким образом величина Q означает величину массы, преобразующейся в кинетическую энергию конечных частиц. Тогда если: а) $Q > 0$ ($M_F < M_I$) — реакция экзотермическая, т. е. происходит преобразование некоторой массы системы

начальных частиц в кинетическую энергию конечных частиц — реакция не имеет порога и протекает при любых кинетических энергиях начальных частиц; б) $Q < 0$ ($M_F > M_I$) — реакция эндотермическая, т. е. происходит образование некоторой массы (либо увеличение массы конечных частиц, либо образование новых частиц) в конечном канале за счет кинетической энергии частиц начального канала — реакция имеет порог, т.е. начинается с некоторой (больше нуля) кинетической энергии, реализуемой в начальном канале; в) $Q = 0$ ($M_F = M_I$) — случай рассеяния при $n = 2$ и реакций преобразования частиц таким образом, что суммы масс покоя начальных и конечных частиц в точности равны.

Классификация реакций (1) на случаи а)–в) требует знания только величин масс покоя участвующих частиц и предшествует детальному кинематическому анализу.

Релятивистские кинематические инварианты для реакций с $n = 3$

Первым этапом кинематического анализа является введение релятивистских инвариантов, выполняющих роль кинематических переменных в релятивистском описании реакций столкновения. Для реакций (1) с $n = 3$ требуется ввести набор из числа $K = = 3 \cdot 3 - 4 = 5$ независимых релятивистских кинематических инвариантов, который называют фундаментальным. Он может состоять, в частности, из следующих инвариантов [20]

$$\left. \begin{aligned} W_{12}^2 &= (p_1 + p_2)^2 = (q_j + q_k + q_l)^2 = W^2; \\ \omega_{jl}^2 &= (q_j + q_l)^2 = (p_1 + p_2 - q_k)^2 = \omega^2; \\ \omega_{kl}^2 &= (q_k + q_l)^2 = (p_1 + p_2 - q_j)^2 = u^2; \\ t_{j1}^2 &= -(q_j - p_1)^2 = -(p_2 - q_l - q_k)^2 = t^2; \\ t_{k2}^2 &= -(q_k - p_2)^2 = -(p_1 - q_l - q_j)^2 = \Delta^2, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

представляющих для случая реакций с $n = 3$ конкретный выбор набора из числа $K = 5$ независимых релятивистских кинематических инвариантов, ранее условно обозначаемых как z_1, z_2, \dots, z_K . Здесь $W_{12}^2, \omega_{jl}^2, \omega_{kl}^2$ — квадраты полных энергий двух частиц, означенных индексами снизу, в их с.ц.м.; t_{j1}^2, t_{k2}^2 — квадраты переданных 4-импульсов. Можно также образовать инварианты:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{jk}^2 &= (q_j + q_k)^2 = (p_1 + p_2 - q_l)^2 = z^2; \\ t_{k1}^2 &= -(q_k - p_1)^2 = -(p_2 - q_l - q_j)^2 = \bar{\Delta}^2; \\ t_{j2}^2 &= -(q_j - p_2)^2 = -(p_1 - q_l - q_k)^2 = \bar{t}^2; \\ t_{l1}^2 &= -(q_l - p_1)^2 = -(p_2 - q_j - q_k)^2 = r^2; \\ t_{l2}^2 &= -(q_l - p_2)^2 = -(p_1 - q_j - q_k)^2 = \bar{r}^2, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

которые составляют вспомогательный набор, где ω_{jk}^2 — квадрат полной энергии частиц q_j и q_k в их с.ц.м., остальные инварианты — переданные 4-импульсы. Двойное обозначение инвариантов наборов (39) и (40) введено для сокращения в дальнейшем записи однотипных соотношений.

Инварианты вспомогательного набора выражаются через инварианты фундаментального набора следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{jk}^2 &= W_{12}^2 - \omega_{jl}^2 - \omega_{kl}^2 + (m_j^2 + m_k^2 + m_l^2) = \\ &= W^2 - \omega^2 - u^2 + (m_j^2 + m_k^2 + m_l^2) = z^2; \\ t_{k1}^2 &= W_{12}^2 - \omega_{jl}^2 - t_{k2}^2 - (m_k^2 + M_1^2 + M_2^2) = \\ &= W^2 - \omega^2 - \Delta^2 - (m_k^2 + M_1^2 + M_2^2) = \bar{\Delta}^2; \\ t_{j2}^2 &= W_{12}^2 - \omega_{kl}^2 - t_{j1}^2 - (m_j^2 + M_1^2 + M_2^2) = \\ &= W^2 - u^2 - t^2 - (m_j^2 + M_1^2 + M_2^2) = \bar{t}^2; \\ t_{l1}^2 &= \omega_{jl}^2 + t_{k2}^2 - t_{j1}^2 - (m_l^2 + m_j^2 + M_1^2) = \\ &= \omega^2 + \Delta^2 - t^2 - (m_l^2 + m_j^2 + M_1^2) = r^2; \\ t_{l2}^2 &= \omega_{kl}^2 + t_{j1}^2 - t_{k2}^2 - (m_l^2 + m_k^2 + M_2^2) = \\ &= u^2 + t^2 - \Delta^2 - (m_l^2 + m_k^2 + M_2^2) = \bar{r}^2. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Выбор фундаментального набора — до некоторой степени вопрос удобства. Соблюдая соотношения (41), можно часть инвариантов из наборов (40) и (39) взаимно поменять местами. Ниже будет приведен конкретный пример фундаментального набора, отличающегося от (39). Свойство инвариантов иметь одну и ту же величину в любых инерциальных системах отсчета позволяет устанавливать связь кинематических величин в любых системах отсчета без привлечения преобразований Лоренца в их явном виде (2) и (3). Это правило оказывается полезным в очень широком круге кинематических задач, предоставляя простой и удобный метод получения преобразований кинематических величин, необходимых в практике исследования реакций столкновения.

Выражения для кинематических величин в различных системах отсчета, проклассифицированных по величине 3-вектора R_f^S

Любые возможные системы отсчета, в том числе наиболее употребительные на практике, полезно проклассифицировать в зависимости от того, отлична от нуля или равна нулю величина 3-вектора R_f^S в рассматриваемых системах отсчета S, S', S'', \dots . В этой схеме ниже приводим наиболее употребительные системы отсчета, перечисляемые в соответствии с их классификацией по величине

$R_f^S = |R_f^S|$ вместе с выражениями для кинематических величин, необходимых для описания реакций с $n = 3$.

Системы отсчета с 3-вектором $R_f^S \neq 0$. а) *Лабораторная система отсчета (л.с.).* Лабораторная система отсчета определяется как система отсчета, связанная с неподвижными наблюдателем и его измерительными приборами. Для описания физического явления необходимо также задать тип координатной сетки — систему координат. В случае реакций столкновения наиболее удобной оказывается сферическая система координат. Сферическую систему координат с заданным направлением оси в рассматриваемой системе отсчета будем называть вариантом данной системы отсчета. В связи с тем что в реакциях столкновения с $n = 3$, рассматриваемых в лабораторной системе, проявляется несколько направлений азимутальной симметрии, практический интерес будут представлять соответствующие варианты л.с.

L-система — вариант л.с., в которой за направление оси сферической системы координат принимается направление суммарного 3-вектора начального (или конечного) канала $P^L = p_1^L + p_2^L$. Характерные 3-векторы $R_f^L = P^L - q_f^L$, ($f = j, k, l$) отличны от нуля, но в *L*-системе их направления в качестве выделенных направлений не используются.

Выражения для кинематических величин в *L*-системе рассмотрим для двух типичных случаев условий столкновения частиц p_1 и p_2 .

1. **Неподвижная мишень** — мишень, состоящая, например, из частиц p_2 , покоится относительно наблюдателя; точка акта столкновения частиц p_1 и p_2 определяется положением мишени. В этом случае вектор 3-импульса частицы p_2 равен нулю, $p_2^L = 0$. Направление вектора $p_1^L = P^L$ выбирается в качестве оси сферической системы координат. Выражая инварианты наборов (39) и (40) через кинематические величины в *L*-системе, легко убедиться в том, что в данном случае существуют простые обратные выражения для кинематических величин через инварианты (39) и (40).

Кинетическая энергия и абсолютная величина 3-импульса частицы p_1 :

$$T = \frac{1}{2M_2} [W^2 - (M_1 + M_2)^2], \quad p_1^L = |p_1^L| = \{T(T + 2M_1)\}^{1/2}, \quad (42)$$

где для простоты у величины T_1^L в этом случае опущены оба индекса.

Кинетические энергии и абсолютные величины 3-импульсов частицы q_f ($f = j, k, l$):

$$T_f^L = \frac{1}{2M_2} [t_{f2}^2 + (M_2 - m_f)^2], \quad q_f^L = |q_f^L| = \{T_f^L(T_f^L + 2m_f)\}^{1/2}. \quad (43)$$

Косинусы углов вылета частицы q_f ($f = j, k, l$) по отношению к направлению вектора p_1^L :

$$x_{1f}^L = \cos \theta_f^L = \frac{1}{2p_1^L q_f^L} \times \\ \times [2T(T_f^L + m_f) + 2M_1 T_f^L - (m_f - M_1)^2 - t_{f1}^2]. \quad (44)$$

Соотношения (42)–(44) полезны как определения кинематических величин в L -системе в случае, когда инварианты (39) и (40) заданы в любой системе, кроме собственно L -системы. Поскольку L -система является той системой, в которой с помощью приборов

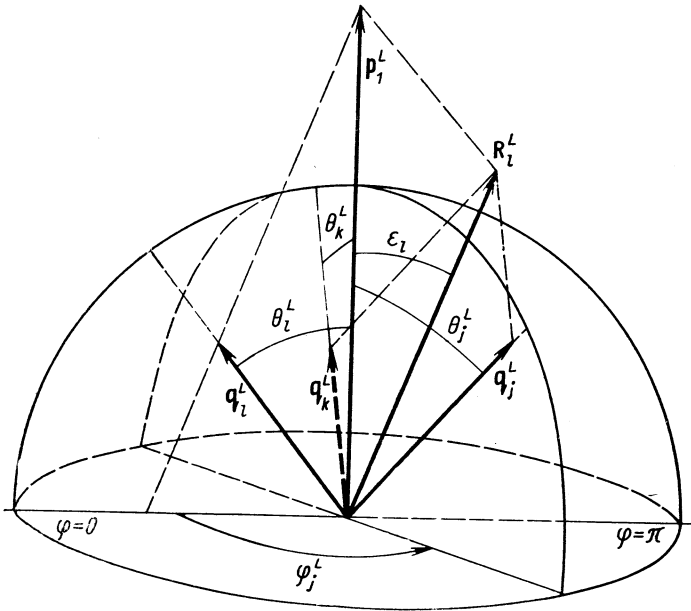


Рис. 2. Типичное расположение 3-векторов частиц, участвующих в реакции $p_1 + p_2 \rightarrow q_j + q_k + q_l$, и отсчет их углов вылета в L -системе. Случай неподвижной частицы мишени p_2 ($p_2^L = 0$).

экспериментально определяются все кинематические величины, то на практике сами величины инвариантов (39) и (40) задаются именно через кинематические величины в L -системе. Значениями величин инвариантов (39)–(40), определенными через кинематические величины в L -системе, обычно пользуются для определения кинематических величин во всех других системах отсчета. Графически ситуация в L -системе изображена на рис. 2.

2. Встречные пучки — сталкивающиеся пучки частиц p_1 и p_2 движутся в произвольных направлениях, имея любые

кинетические энергии. В общем случае произвольных величин и направлений векторов \mathbf{p}_1^L и \mathbf{p}_2^L их суммарный вектор \mathbf{P}^L отличен от нуля, $\mathbf{P}^L = \mathbf{p}_1^L + \mathbf{p}_2^L \neq 0$, и его направление выбирается в качестве оси сферической системы координат (в принципе для этой же цели можно использовать и направления векторов \mathbf{p}_1^L или \mathbf{p}_2^L). Характерные для реакции с $n = 3$ 3-векторы $\mathbf{R}_f^L = \mathbf{P}^L - \mathbf{q}_f^L$ также отличны от нуля, но в L -системе их направления в качестве выделенных направлений не используются. Условимся кинематические инварианты в случае встречных пучков снабжать шляпкой сверху. Например, инвариант квадрата полной энергии частиц p_1 и p_2 , имеющий вид $\hat{W}^2 = 2M_2 T + (M_1 + M_2)^2$ в случае неподвижной частицы p_2 , в случае встречных пучков приобретает вид

$$\begin{aligned} \hat{W}^2 &= (p_1 + p_2)^2 = M_1^2 + M_2^2 + \\ &+ 2(p_{10}^L p_{20}^L - p_1^L p_2^L \cos \theta_{12}^L), \end{aligned} \quad (45)$$

где $\cos \theta_{12}^L = (\mathbf{p}_1^L \cdot \mathbf{p}_2^L) / (|\mathbf{p}_1^L| \cdot |\mathbf{p}_2^L|)$. В частных случаях, когда частицы p_1 и p_2 движутся:

а) навстречу друг другу ($\cos \theta_{12}^L = -1$), то

$$\hat{W}^2 \rightarrow \hat{W}_+^2 = M_1^2 + M_2^2 + 2(p_{10}^L p_{20}^L + p_1^L p_2^L); \quad (46)$$

б) в одном направлении ($\cos \theta_{12}^L = +1$), то

$$\hat{W}^2 \rightarrow W_-^2 = M_1^2 + M_2^2 + 2(p_{10}^L p_{20}^L - p_1^L p_2^L). \quad (47)$$

Следует иметь в виду, что случай неподвижной мишени и случай встречных пучков, осуществляемые в L -системе, реализуют несводимые друг к другу физические ситуации столкновения частиц p_1 и p_2 . Кинематические инварианты (39) и (40) не являются заведомо равными друг другу в этих двух случаях. Их следует приравнивать тогда, когда ставится вопрос об эффективном воспроизведении одного случая в условиях другого. Так, приравнивая инвариант \hat{W}^2 инварианту W^2 для случая неподвижной частицы p_2 , находим выражение для эффективной кинетической энергии \hat{T} частицы p_1

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \frac{1}{M_2^2} [(M_2 T_1^L + M_1 T_2^L) + T_1^L T_2^L - \\ &- \sqrt{T_1^L (T_1^L + 2M_1)} \cdot \sqrt{T_2^L (T_2^L + 2M_2)} \cdot \cos \theta_{12}^L], \end{aligned} \quad (48)$$

необходимой в условиях неподвижной мишени, состоящей из частиц p_2 , для воспроизведения того же самого энергетического эффекта, как и в случае сталкивающихся под углом θ_{12}^L частиц p_1 и p_2 с кинетическими энергиями T_1^L и T_2^L , соответственно. Необходимо также иметь в виду, что в случае встречных пучков инва-

риант \hat{W}^2 , являясь функцией трех кинематических величин T_1^L , T_2^L и $x_{12}^L = \cos \theta_{12}^L$, тем не менее должен рассматриваться как одна независимая кинематическая переменная. Очевидно также, что по отдельности каждая из величин T_1^L , T_2^L , $\cos \theta_{12}^L$ не может быть представлена в виде функции только инварианта \hat{W}^2 . Кроме того, соотношения (43) теперь не имеют места, в чем легко убедиться, рассмотрев инварианты \hat{t}_{f2}^2 , которые имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{t}_{f2}^2 = & -(q_f - p_2)^2 = -(m_f^2 + M_2^2) + \\ & + 2p_{20}^L q_{f0}^L - 2p_2^L q_f^L x_{2f}^L, \quad (f = j, k, l). \end{aligned} \quad (49)$$

Однако, выполняя в (42)–(44) замены $W^2 \rightarrow \hat{W}^2$, $t_{j2}^2 \rightarrow \hat{t}_{j2}^2$, $t_{j1}^2 \rightarrow \hat{t}_{j1}^2$ и тем самым совершая переход от ситуации встречных пучков к эффективно соответствующей ситуации с неподвижной частицей мишени p_2 , получая соответствующие эффективные кинематические величины \hat{T} , \hat{T}_f^L и \hat{x}_{ij}^L . Следует отметить, что, строго говоря, этот прием соответствует переходу в систему отсчета, движущуюся со скоростью $\beta = p_2^L/p_{20}^L$ относительно L -системы, в которой реализована ситуация встречных пучков частиц p_1 и p_2 .

R_f^L -системы ($f = j, k, l$) — варианты лабораторной системы отсчета, в которых наряду с условием, определяющим L -систему, вводится следующее добавочное условие: в реакциях (1) с $n = 3$ при фиксированном в L -системе векторе 3-импульса одной из конечных частиц, т. е. фиксированы ее кинетическая энергия, полярный и азимутальный углы вылета, для двух остальных конечных частиц отсчет их полярных углов вылета производится от направления их суммарного вектора 3-импульса. Это условие для реакций с $n = 3$ равносильно введению 4-импульса вида $\mathcal{R}_l = q_j + q_k = \mathcal{P} - q_l$ с компонентами R_{l0} и \mathbf{R}_l , имеющими в L -системе вид:

$$q_{j0}^l + q_{k0}^l = R_{l0}^L = P_0^L - q_{l0}^L; \quad (50)$$

$$\mathbf{q}_j^l + \mathbf{q}_k^l = \mathbf{R}_l^L = \mathbf{P}^L - \mathbf{q}_l^L, \quad (51)$$

и выделению переменной полярного угла $x_j^l = \cos \theta_j^l = (\mathbf{q}_j^l \cdot \mathbf{R}_l^L) / (|\mathbf{q}_j^l| \cdot |\mathbf{R}_l^L|)$, причем индексы j, k, l в этих выражениях образуют циклическую перестановку с тем, чтобы получить любой из 4-векторов \mathcal{R}_f ($f = j, k, l$).

Таким образом, выражения (50) и (51) определяют три вектора 3-импульса: \mathbf{R}_l^L , \mathbf{R}_k^L , \mathbf{R}_j^L , выполняющих роль осей сферических систем координат, относительно которых определяются полярные углы θ_j^l и θ_k^l , θ_j^k и θ_l^k , θ_k^j и θ_l^j соответственно. Каждый из этих векторов оказывается полезным в случае, когда в L -системе фиксируются кинематические величины конечной частицы с тем же

индексом. В (50) и (51) верхний индекс l у кинематических величин частиц q_j и q_k есть индекс частицы q_l , кинематические величины которой фиксированы в L -системе, и одновременно он есть нижний индекс R_l^L -системы. Например, величина 3-вектора \mathbf{R}_l^L следует из равенства справа в (51)

$$R_l^L = |\mathbf{R}_l^L| = \sqrt{(\mathbf{P}^L)^2 + (\mathbf{q}_l^L)^2 - 2|\mathbf{P}^L| \cdot |\mathbf{q}_l^L| x_l^L}, \quad (52)$$

где величина $x_l^L = \cos \theta_l^L = (\mathbf{q}_l^L \cdot \mathbf{P}^L) / (|\mathbf{q}_l^L| \cdot |\mathbf{P}^L|)$ определяется полярным углом вылета θ_l^L фиксированной в L -системе частицы q_l .

Выражения (50) и (51) представляют собой запись законов сохранения полной энергии и импульса системы частиц, участвующих в реакциях с $n = 3$, и их решения относительно величин q_{j0}^l и q_j^l (q_{k0}^l и q_k^l) в виде функций угловой переменной x_j^l (x_k^l) и фиксированных параметров R_{l0}^L и R_l^L имеют следующий вид

$$q_{j0}^{l(\pm)}(x_j^l) = \frac{1}{2(R_{l0}^2 - R_l^2 x_j^{l2})} \left\{ [(R_{l0}^2 - R_l^2) + (m_j^2 - m_k^2)] R_{l0} \pm R_l x_j^l \times \right. \\ \left. \times \sqrt{[(R_{l0}^2 - R_l^2) + (m_j^2 - m_k^2)]^2 - 4m_j^2(R_{l0}^2 - R_l^2 x_j^{l2})} \right\}; \quad (53)$$

$$q_j^{l(\pm)}(x_j^l) = \frac{1}{2(R_{l0}^2 - R_l^2 x_j^{l2})} \times \\ \times \left\{ [(R_{l0}^2 - R_l^2) + (m_j^2 - m_k^2)] R_l x_j^l \pm R_{l0} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{[(R_{l0}^2 - R_l^2) + (m_j^2 - m_k^2)]^2 - 4m_j^2(R_{l0}^2 - R_l^2 x_j^{l2})} \right\}, \quad (54)$$

где угловые переменные x_j^l , x_k^l связаны соотношениями $R_l = q_j^l x_j^l + q_k^l x_k^l$ и $R_{l0} = q_{j0}^l + q_{k0}^l$ и где верхний индекс L для простоты записи опущен. Графически ситуация в R_l^L -системе изображена на рис. 3, правила для знаков (+) и (−) — в (29) и (32).

Легко убедиться, что R_l^L - и L -системы связаны друг с другом преобразованием пространственного поворота на угол ε_l в плоскости векторов \mathbf{P}^L , \mathbf{q}_l^L и \mathbf{R}_l^L , который определяется выражением

$$\cos \varepsilon_l = (\mathbf{R}_l^L \cdot \mathbf{P}^L) / (|\mathbf{R}_l^L| \cdot |\mathbf{P}^L|) = \frac{1}{R_l^L} (P^L - q_l^L x_l^L), \quad (55)$$

где величины R_l^L и x_l^L определены в (52).

Для простоты обозначим $x = x_{j,k}^l = \cos \theta_{j,k}^l$, $y = \cos \varphi_{j,k}^l$ и $x' = x_{j,k}^L = \cos \theta_{j,k}^L$, $y' = \cos \varphi_{j,k}^L$, где θ и φ — полярный

и азимутальный углы. В принятых обозначениях преобразования перехода $L \rightleftharpoons R_l^L$ имеют вид:

а) $(L \rightarrow R_l^L)$ —переход от переменных в L -системе к переменным в R_l^L -системе

$$x = x' \cos \varepsilon_l - \sin \varepsilon_l \sqrt{1 - x'^2} \cdot y'; \quad (56)$$

$$y = \{1 - (x' \cos \varepsilon_l - \sin \varepsilon_l \sqrt{1 - x'^2} \cdot y')^2\}^{-1/2} \times \\ \times (x' \sin \varepsilon_l + \cos \varepsilon_l \sqrt{1 - x'^2} \cdot y'); \quad (57)$$

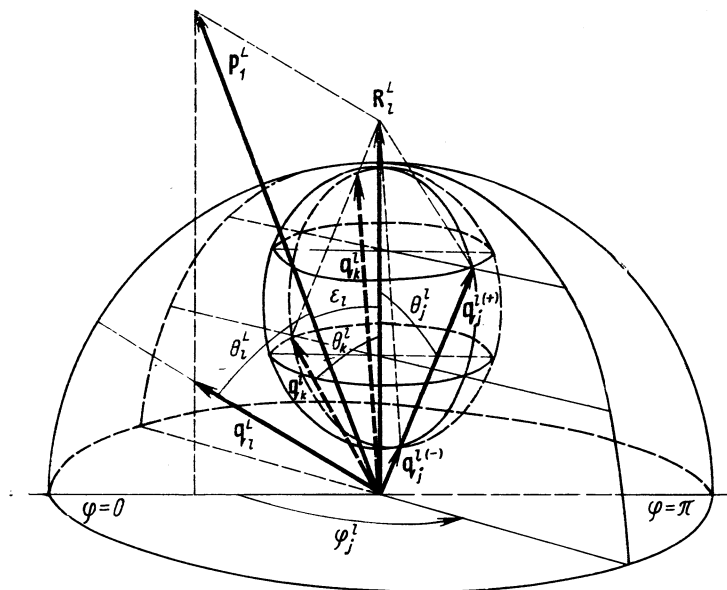


Рис. 3. Типичное расположение 3-векторов частиц, участвующих в реакции $p_1 + p_2 \rightarrow q_j + q_k + q_l$, и отсчет их углов вылета в R_l^L -системе. Случай неподвижной частицы «мишени» p_2 ($p_2^L = 0$) и одинаковых масс покоя частиц q_j и q_k , $m_j = m_k$.

б) $(R_l^L \rightarrow L)$ —переход от переменных в R_l^L -системе к переменным в L -системе

$$x' = x \cos \varepsilon_l + \sin \varepsilon_l \sqrt{1 - x^2} \cdot y; \quad (58)$$

$$y' = \{1 - (x \cos \varepsilon_l + \sin \varepsilon_l \sqrt{1 - x^2} \cdot y)^2\}^{-1/2} \times \\ \times (-x \sin \varepsilon_l + \cos \varepsilon_l \sqrt{1 - x^2} \cdot y). \quad (59)$$

Подставляя преобразование (56) в (53) и (54), убеждаемся, что в L -системе выражения для $q_{j0}^{L(\pm)}$ и $q_j^{L(\pm)}$ имеют вид функций от пере-

менных x_j^L и φ_j^L . Очевидно, что именно в R_l^L -системе имеет место азимутальная симметрия, проявляющаяся в выражениях (53) и (54) в виде отсутствия зависимости от переменной азимутального угла. Выделение направления вектора R_l^L является не только удобным приемом — его наличие отражается в физической картине распределения конечных частиц по величинам их энергий и углов вылета. Именно в эксперименте на совпадения при фиксированных кинематических величинах, например частицы q_l , детектор частицы q_j (или q_k), вращаемый по азимутальному углу φ_j^l (φ_k^l) вокруг вектора R_l^L при фиксированном значении переменной полярного угла x_j^l (x_k^l), при любой величине азимутального угла φ_j^l (φ_k^l) будет регистрировать одну и ту же величину кинетической энергии $T_j^{l(\pm)}(x_j^l)$ ($T_k^{l(\pm)}(x_k^l)$), равную определяемой из выражения (53). Как это следует из (33) и (33'), плотность фазового объема таких конечных состояний (событий) — постоянная величина.

Выражения (50)—(59) записаны для того случая, когда в начале фиксируются кинематические величины частицы q_l и тем самым фиксируется вектор R_l^L . Циклической перестановкой индексов j, k, l получаются остальные две возможности. Возможность введения трех векторов R_l^L, R_k^L, R_j^L отражает, как нетрудно понять, три возможности классификации одного и того же полного набора конечных состояний (событий) в реакциях с $n = 3$.

Для R_l^L -систем инварианты (39)—(40) и (4) следует расписывать через кинематические величины так, чтобы отсчет полярных углов частиц q_j и q_k (для примера вначале фиксирована частица q_l) производился от направления 3-вектора $R_l^L = P^L - q_l^L$, выбираемого в качестве оси сферической системы координат. В частности, в R_l^L -системе в случае неподвижной частицы p_2 ($p_2^L = 0$): а) инвариант W^2 фиксируется кинематическими величинами частиц начального канала p_1 и p_2 и имеет вид (42), т.е.

$$W^2 = (M_1 + M_2)^2 + 2M_2 T; \tag{42'}$$

б) инварианты, фиксируемые заданием кинематических величин частицы q_l

$$\left. \begin{aligned} \omega_{jk}^2 &= (p_1 + p_2 - q_l)^2 = R_{l0}^2 - R_l^2 = W^2 + m_l^2 - \\ &\quad - 2(p_1 + p_2) q_l = W^2 + m_l^2 - 2(M_2 + p_{l0}^L) q_{l0}^L + \\ &\quad + 2p_1^L q_l^L x_l^L = m_l^2 + (M_1 + M_2)^2 + 2M_2(m_l + T + T_l^L) - \\ &\quad - 2(M_1 + T)(m_l + T_l^L) + 2\sqrt{T(T + 2M_1)} \times \\ &\quad \times \sqrt{T_l^L(T_l^L + 2m_l)} \cdot x_l^L; \\ t_{l2}^2 &= -(q_l - p_2)^2 = -(m_l^2 + M_2^2) + 2M_2 q_{l0}^L; \\ t_{l1}^2 &= -(q_l - p_1)^2 = \\ &= [W^2 - (m_l^2 + M_1^2 + M_2^2) - t_{l2}^2 - \omega_{jk}^2]; \end{aligned} \right\} \tag{60}$$

в) инварианты, зависящие от кинематических величин частицы q_j (индекс j выбран для определенности, так как с таким же правом можно взять и индекс k)

$$\left. \begin{aligned}
 \omega_{j_l}^2 &= (q_j + q_l)^2 = m_j^2 + m_l^2 + 2(q_{l_0}^L q_{j_0}^l - \\
 &\quad - q_l^L q_j^l \cdot x_{lj}^l) = m_j^2 + m_l^2 + 2q_{l_0}^L q_{j_0}^l (x_j^l) - \\
 &\quad - 2q_l^L q_j^l (x_j^l) \frac{1}{R_l^L} \{(p_1^L x_l^L - q_l^L) \cdot x_j^l + \\
 &\quad + p_1^L \sqrt{1 - x_l^{L^2}} \sqrt{1 - x_j^{l^2}} \cdot \cos \varphi_{lj}^l\}; \\
 t_{j_2}^2 &= -(q_j - p_2)^2 = -(m_j^2 + M_2^2) + 2M_2 \cdot q_{j_0}^l (x_j^l); \\
 \omega_{k_l}^2 &= (q_k + q_l)^2 = [W^2 + (m_j^2 + m_k^2 + m_l^2) - \omega_{j_k}^2] - \omega_{j_l}^2; \\
 t_{j_1}^2 &= -(q_j - p_1)^2 = [-(2m_j^2 + m_k^2 + m_l^2 + M_1^2 + M_2^2) + \\
 &\quad + \omega_{j_k}^2] + \omega_{j_l}^2 - t_{j_2}^2; \\
 t_{k_2}^2 &= -(q_k - p_2)^2 = [W^2 - (m_j^2 + m_k^2 + m_l^2 + \\
 &\quad + M_1^2 + 2M_2^2) - t_{l_2}^2] - t_{j_2}^2; \\
 t_{k_1}^2 &= -(q_k - p_1)^2 = [(m_j^2 + m_l^2 + M_2^2) + \\
 &\quad + t_{l_2}^2] - \omega_{j_l}^2 + t_{j_2}^2.
 \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Здесь инварианты W^2 , $\omega_{j_k}^2$, $t_{l_2}^2$, $\omega_{j_l}^2$, $t_{j_2}^2$ удобно выбрать в качестве фундаментального набора. Инварианты $\omega_{k_l}^2$, $t_{k_2}^2$, $t_{k_1}^2$, $t_{j_1}^2$, $t_{l_1}^2$ выражаются через инварианты фундаментального набора и могут использоваться всюду, где это окажется удобным; они составляют вспомогательный набор.

Кинематические величины конечных частиц в R_f^L -системах выражаются следующим образом.

1. Неподвижная частица мишени p_2 ($p_2^L = 0$). Кинетические энергии и абсолютные величины 3-импульсов частиц q_f ($f = j, k, l$) представляются, как и в L -системе, выражениями (43).

Косинусы углов вылета частиц q_j (q_k), q_l (q_j), q_k (q_l), задаваемые по отношению к направлению соответствующего вектора R_l^L , R_k^L , R_j^L , следуют из рассмотрения инвариантов $q_j \cdot \mathcal{R}_l$ ($q_k \cdot \mathcal{R}_l$), $q_l \cdot \mathcal{R}_k$ ($q_j \cdot \mathcal{R}_k$), $q_k \cdot \mathcal{R}_j$ ($q_l \cdot \mathcal{R}_j$) и даются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned}
 x_j^l &= \frac{1}{2R_l^L q_j^l} [2R_{l_0}^L q_{j_0}^l - (z^2 + m_j^2 - m_k^2)] = \\
 (j \longleftrightarrow k) & \\
 &= \frac{1}{R_l^L q_j^l} [R_{l_0}^L \cdot q_{j_0}^l - z \cdot q_{j_0}^D];
 \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

$$\left. \begin{aligned}
 x_i^k &= \frac{1}{2R_k^L q_i^k} [2R_{k0}^L q_{i0}^k - \\
 (l \longleftrightarrow j) & \\
 - (\omega^2 + m_i^2 - m_j^2)] &= \frac{1}{R_k^L q_i^k} [R_{k0}^L \cdot q_{i0}^k - \omega \cdot q_{i0}^Q]; \\
 x_k^j &= \frac{1}{2R_j^L q_k^j} [2R_{j0}^L q_{k0}^j - (u^2 + m_k^2 - m_l^2)] = \\
 (k \longleftrightarrow l) & \\
 &= \frac{1}{R_j^L q_k^j} [R_{j0}^L \cdot q_{k0}^j - u \cdot q_{k0}^P],
 \end{aligned} \right\}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_{f0}^L &= p_{10}^L + M_2 - q_{f0}^L; \\
 R_f^L &= |R_f^L| = |\mathbf{p}_1^L - \mathbf{q}_f^L| = \\
 &= \sqrt{\mathbf{p}_1^{L2} + \mathbf{q}_f^{L2} - 2p_1^L q_f^L x_f^L},
 \end{aligned} \quad (63)$$

а выражения для q_{j0}^D , q_{i0}^Q и q_{k0}^P даются ниже в (74), (81) и (88).

2. Встречные пучки ($\mathbf{p}_1^L \neq 0$, $\mathbf{p}_2^L \neq 0$). В этом случае инварианты (39) и (40) должны быть расписаны, в отличие от (42'), (60) и (61), с учетом $\mathbf{p}_2^L \neq 0$ для движущегося пучка частиц p_2 . Соотношения (43) теперь не имеют места, что означает невозможность выразить кинетические энергии конечных частиц через отдельные инварианты из наборов (39) и (40). Однако выражения (62) для углов вылета конечных частиц справедливы и теперь, если в них полагать при $f = j, k, l$

$$\begin{aligned}
 \hat{R}_{f0}^L &= p_{10}^L + p_{20}^L - q_{f0}^L; \quad \hat{R}_f^L = |\hat{\mathbf{R}}_f^L| = \\
 &= |\mathbf{P}^L - \mathbf{q}_f^L| = \sqrt{\mathbf{P}^{L2} + \mathbf{q}_f^{L2} - 2P^L q_f^L \hat{x}_f^L},
 \end{aligned} \quad (64)$$

где

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_f^L &= (\mathbf{q}_f^L \cdot \mathbf{P}^L) / (|\mathbf{q}_f^L| \cdot |\mathbf{P}^L|) = \\
 &= (p_1^L x_{1f}^L + p_2^L x_{2f}^L) / \sqrt{\mathbf{p}_1^{L2} + \mathbf{p}_2^{L2} + 2p_1^L p_2^L x_{12}^L}
 \end{aligned}$$

и $x_{if}^L = (\mathbf{q}_f^L \cdot \mathbf{p}_i^L) / (|\mathbf{q}_f^L| \cdot |\mathbf{p}_i^L|)$ определяют величины косинусов углов вылета частицы q_f по отношению к векторам \mathbf{P}^L и \mathbf{p}_i^L ($i = 1, 2$).

б) *B-система (барицентрическая) или R_f^B -системы* ($f = j, k, l$) — система общего центра масс двух начальных (n конечных) частиц, реализуемая системой отчета, движущейся относительно L -системы со скоростью $\beta^B = \mathbf{P}^L / P_0^L$ ($\beta^B \parallel \mathbf{P}^L$), и определяемая очевидным условием (в преобразовании Лоренца (2) следует поло-

жить $\beta = \beta^B$, $A = PL$, $A_0 = P_0^L$, $A' = P^B$):

$$\begin{aligned} P^B &= p_1^B + p_2^B = q_j^B + q_k^B + q_l^B = \\ &= Q^B = 0, \quad R_f^B = P^B - q_f^B = -q_f^B. \end{aligned} \quad (65)$$

Из (65) следует, что B -система относится к классу систем отсчета с 3-вектором $R_f \neq 0$ и для конечного канала включает три R_f^B -системы ($f = j, k, l$), характеризующиеся следующими 3-векторами и их абсолютными величинами

$$\begin{aligned} R_l^B &= P^B - q_l^B = q_j^B + q_k^B = -q_l^B, \\ R_l^B &= |R_l^B| = |-q_l^B| = q_l^B, \end{aligned} \quad (66)$$

где индексы j, k, l , образуя циклическую перестановку, обеспечивают получение из (66) трех 3-векторов R_l^B, R_k^B, R_j^B , не равных нулю всегда, кроме частных случаев $q_f^B = 0$ ($f = j, k, l$) соответственно. Таким образом, в B -системе полезно выделять три сферические системы координат, оси которых совпадают с векторами R_l^B, R_k^B, R_j^B и каждая из которых оказывается удобной, если вначале фиксируются кинематические величины частицы с таким же индексом.

Кинематические величины частиц, участвующих в реакциях (4) с $n = 3$, в B -системе определяются следующими выражениями.

Полные энергии и абсолютные величины 3-импульсов начальных частиц p_1 и p_2 :

$$\begin{aligned} p_{10}^B &= \frac{1}{2W} (W^2 + M_1^2 - M_2^2), \quad p_{20}^B = \frac{1}{2W} (W^2 + M_2^2 - M_1^2); \\ p_i^B &= \{p_{i0}^{B2} - M_i^2\}^{1/2}, \quad p_1^B = p_2^B = p^B. \end{aligned} \quad (67)$$

Полные энергии и абсолютные величины 3-импульсов конечных частиц q_f ($f = j, k, l$) (выполнить циклические перестановки индексов l, k, j):

$$\begin{aligned} q_{l0}^B &= \frac{1}{2W} (W^2 + m_l^2 - \omega_{jk}^2), \quad q_l^B = \{q_{l0}^{B2} - m_l^2\}^{1/2}; \quad q_{j0}^B + q_{k0}^B = \\ &= W - q_{l0}^B = R_{l0}^B. \end{aligned} \quad (68)$$

Углы вылета частиц q_f ($f = l, k, j$) по отношению к вектору P_i^B ($i = 1, 2$):

$$\cos \theta_{if}^B = \frac{1}{2p_i^B q_f^B} [2p_{i0}^B q_{f0}^B - (M_i^2 + m_f^2) - t_{if}^2], \quad \cos \theta_{2f}^B = -\cos \theta_{1f}^B. \quad (69)$$

Углы разлета пар конечных частиц (выполнить циклические перестановки индексов j, k, l):

$$\cos \theta_{lj}^B = \frac{1}{2q_l^B q_j^B} [2q_{l0}^B q_{j0}^B + (m_l^2 + m_j^2) - \omega_{lj}^2]. \quad (70)$$

Выделение, например, R_l^B -системы означает, что а) вначале фиксированы кинематические величины q_{l0}^B и \mathbf{q}_l^B частицы q_l и тем самым фиксирован 4-вектор $\mathcal{R}_l^B = \{R_{l0}^B, \mathbf{R}_l^B\}$ с компонентами \mathbf{R}_l^B и R_{l0}^B [см. (66) и (68)] в B -системе, имеющими вид $R_{l0}^B = W - q_{l0}^B = q_{j0}^B + q_{k0}^B$, $\mathbf{R}_l^B = -\mathbf{q}_l^B = \mathbf{q}_j^B + \mathbf{q}_k^B$; б) направление 3-вектора $\mathbf{R}_l^B = -\mathbf{q}_l^B$ выбирается в качестве оси, от которой отсчитываются полярные углы θ_j^B и θ_k^B частиц q_j и q_k в сферической системе координат; азимутальные углы φ_j^B и φ_k^B частиц q_j и q_k отсчитываются в плоскости, перпендикулярной к 3-вектору \mathbf{R}_l^B .

Таким образом, в R_l^B -системе вследствие аналогии с R_l^L -системой выражения для $q_{l0}^{B(\pm)}$ (x_j^B), $q_j^{B(\pm)}$ (x_j^B) имеют вид (53) и (54), в которых следует только выполнить замены: $R_{l0} \rightarrow R_{l0}^B$, $R_l \rightarrow R_l^B$, $x_j^l \rightarrow x_j^B$ при $x_j^B = \cos \theta_j^B = (\mathbf{q}_j^B \cdot \mathbf{R}_l^B) / (|\mathbf{q}_j^B| \cdot |\mathbf{R}_l^B|) = -(\mathbf{q}_j^B \cdot \mathbf{q}_l^B) / (|\mathbf{q}_j^B| \cdot |\mathbf{q}_l^B|)$.

Ситуация в B -системе графически изображена на рис. 4. Следует отметить, что кинематическое описание в B -системе с помощью введения R_f^B -систем является естественным приемом, обеспечивающим единообразную классификацию наиболее употребительных систем отсчета. Качественное отличие кинематических картин в конечном и начальном каналах не должно вызывать недоумений, если учитывать, что для начального канала B -система есть обычная система центра масс двух частиц, в то время как для конечного канала — с.ц.м. трех частиц.

В случае встречных пучков, которые состоят из частиц одинаковых масс покоя, ускоренных до одинаковых энергий и движущихся точно навстречу друг другу, т. е. если

$$M_1 = M_2 = M, \quad p_{10}^L = p_{20}^L = p_0^L, \quad \mathbf{P}^L = \mathbf{p}_1^L + \mathbf{p}_2^L = 0, \\ p_1^L = p_2^L = p^L = \sqrt{p_0^{L2} - M^2},$$

то в л. с. воспроизводится физическая ситуация, эквивалентная B -системе с тем условием, что во всех вышеприведенных формулах для B -системы в соответствии с (46) необходимо полагать $W^2 \rightarrow \hat{W}_+^2 = 4p_0^{L2}$. Ясно, что в этом случае ситуация в R_f^B -системах становится экспериментально наблюдаемой.

Системы отсчета с 3-вектором $\mathbf{R}_f^S = 0$ ($S = D, Q, P$) — системы центра масс пар частиц q_j и q_k , q_l и q_j , q_k и q_l при $f = l, k, j$.

в) D -система^L — система центра масс частиц q_j и q_k , реализуемая системой отсчета, движущейся относительно R_l^L -системы со скоростью $\beta^D = \mathbf{R}_l^L/R_{l0}^L$ ($\beta^D \parallel \mathbf{R}_l^L$), для которой вектор 3-импульса под-

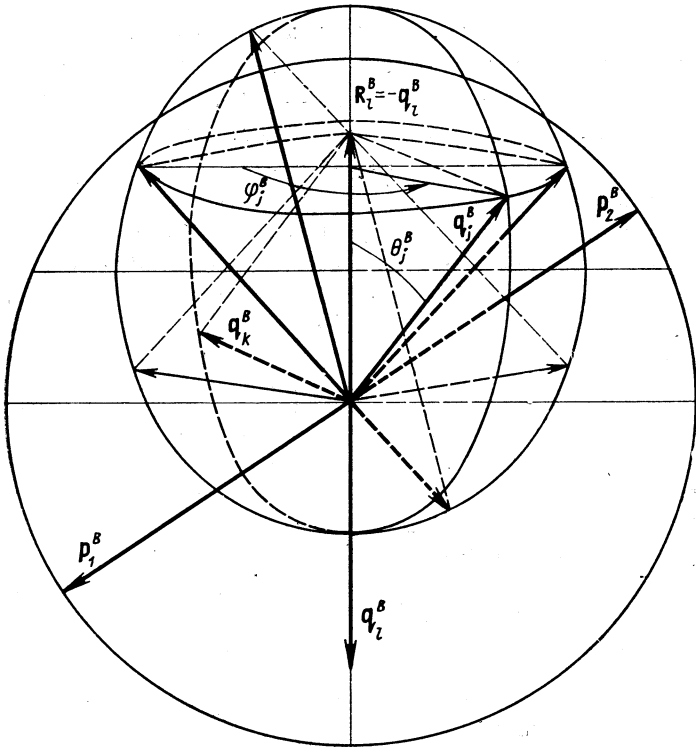


Рис. 4. Расположение 3-векторов частиц, участвующих в реакции $p_1 + p_2 \rightarrow q_j + q_k + q_l$, и отсчет их углов вылета в случае варианта B -системы $-R_l^B$ -системы, в которой в качестве оси сферической системы координат принимается направление 3-вектора $\mathbf{R}_l^B = -\mathbf{q}_l^B$.

Изображен случай, когда допустим интервал $-1 \leq x_{jk}^B \leq +1$ для полярных углов вылета θ_{jk}^B ($x_{jk}^B = \cos \theta_{jk}^B$) частиц q_i и q_k с одинаковыми массами покоя, $m_j = m_k$.

системы частиц q_j и q_k равен нулю (в преобразовании Лоренца (2) следует положить $\beta = \beta^D$, $\mathbf{A} = \mathbf{R}_l^L$, $\mathbf{A}_0 = \mathbf{R}_{l0}^L$, $\mathbf{A}' = \mathbf{R}_l^D$, т. е.

$$\mathbf{R}_l^D = \mathbf{q}_j^D + \mathbf{q}_k^D = \mathbf{P}^D - \mathbf{q}_l^D = 0, \quad \mathbf{P}^D = \mathbf{p}_1^D + \mathbf{p}_2^D = \mathbf{q}_l^D. \quad (71)$$

Полные энергии и абсолютные величины 3-импульсов начальных частиц p_1 и p_2 :

$$p_{10}^D = \frac{1}{2z} (z^2 + M_1^2 + \bar{r}^2) = \frac{1}{2z} [W^2 - (m_l^2 + M_2^2) - r^2],$$

$$p_1^D = |\mathbf{p}_1^D| = \{p_{10}^{D2} - M_1^2\}^{1/2}; \quad (72)$$

$$p_{20}^D = \frac{1}{2z} (z^2 + M_2^2 + r^2) = \frac{1}{2z} [W^2 - (m_l^2 + M_1^2) - \bar{r}^2],$$

$$p_2^D = |\mathbf{p}_2^D| = \{p_{20}^{D2} - M_2^2\}^{1/2}. \quad (73)$$

Полные энергии и абсолютные величины 3-импульсов конечных частиц q_j , q_k , q_l :

$$q_{j0}^D = \frac{1}{2z} (z^2 + m_j^2 - m_k^2), \quad q_j^D = |\mathbf{q}_j^D| = \{q_{j0}^{D2} - m_j^2\}^{1/2}; \quad (74)$$

$$q_{k0}^D = \frac{1}{2z} (z^2 + m_k^2 - m_j^2), \quad q_k^D = |\mathbf{q}_k^D| = \{q_{k0}^{D2} - m_k^2\}^{1/2} = q_j^D = q^D; \quad (75)$$

$$q_{l0}^D = \frac{1}{2z} (W^2 - m_l^2 - z^2), \quad q_l^D = |\mathbf{q}_l^D| = \{q_{l0}^{D2} - m_l^2\}^{1/2}. \quad (76)$$

Угол вылета частицы q_f ($f = j, k, l$) относительно направления 3-вектора \mathbf{p}_i^D ($i = 1, 2$):

$$x_{if}^D = \cos \theta_{if}^D = \frac{1}{2p_i^D q_f^D} [2p_{i0}^D q_{f0}^D - (m_f^2 + M_i^2) - t_{f_i}^2]. \quad (77)$$

г) *Q-система* — система центра масс частиц q_l и q_j , реализуемая системой отсчета, движущейся относительно R_k^L -системы со скоростью $\beta^Q = \mathbf{R}_k^L / R_{k0}^L$ ($\beta^Q \parallel \mathbf{R}_k^L$), для которой вектор 3-импульса подсистемы частиц q_l и q_j равен нулю (в преобразовании Лоренца (2) следует положить $\beta = \beta^Q$, $\mathbf{A} = \mathbf{R}_k^L$, $A_0 = R_{k0}^L$, $\mathbf{A}' = \mathbf{R}_k^Q$), т. е.

$$\mathbf{R}_k^Q = \mathbf{q}_l^Q + \mathbf{q}_j^Q = \mathbf{P}^Q - \mathbf{q}_k^Q = 0, \quad \mathbf{P}^Q = \mathbf{p}_1^Q + \mathbf{p}_2^Q = \mathbf{q}_k^Q. \quad (78)$$

Полные энергии и абсолютные величины 3-импульсов начальных частиц p_1 и p_2 :

$$p_{10}^Q = \frac{1}{2\omega} (\omega^2 + M_1^2 + \Delta^2) = \frac{1}{2\omega} [W^2 - (m_k^2 + M_2^2) - \bar{\Delta}^2],$$

$$p_1^Q = |\mathbf{p}_1^Q| = \{p_{10}^{Q2} - M_1^2\}^{1/2}; \quad (79)$$

$$p_{20}^Q = \frac{1}{2\omega} (\omega^2 + M_2^2 + \bar{\Delta}^2) = \frac{1}{2\omega} [W^2 - (m_k^2 + M_1^2) - \Delta^2],$$

$$p_2^Q = |\mathbf{p}_2^Q| = \{p_{20}^{Q2} - M_2^2\}^{1/2}. \quad (80)$$

Полные энергии и абсолютные величины 3-импульсов конечных частиц q_l , q_j , q_k :

$$q_{l0}^Q = \frac{1}{2\omega} (\omega^2 + m_l^2 - m_j^2), \quad q_l^Q = |\mathbf{q}_l^Q| = \{q_{l0}^{Q2} - m_l^2\}^{1/2}; \quad (81)$$

$$q_{j0}^Q = \frac{1}{2\omega} (\omega^2 + m_j^2 - m_l^2), \quad q_j^Q = |\mathbf{q}_j^Q| = \{q_{j0}^{Q2} - m_j^2\}^{1/2} = q_l^Q = q^Q; \quad (82)$$

$$q_{k0}^Q = \frac{1}{2\omega} (W^2 - m_k^2 - \omega^2), \quad q_k^Q = |\mathbf{q}_k^Q| = \{q_{k0}^{Q2} - m_k^2\}^{1/2}. \quad (83)$$

Угол вылета частицы q_f ($f = j, k, l$) относительно направления 3-вектора \mathbf{p}_i^Q ($i = 1, 2$):

$$x_{ij}^Q = \cos \theta_{ij}^Q = \frac{1}{2p_i^Q q_f^Q} [2p_{i0}^Q q_{f0}^Q - (m_f^2 + M_i^2) - t_{fi}^2]. \quad (84)$$

д) *P-система* — система центра масс частиц q_k и q_l , реализуемая системой отсчета, движущейся относительно R_j^L -системы со скоростью $\beta^P = \mathbf{R}_j^L / R_{j0}^L$ ($\beta^P \parallel \mathbf{R}_j^L$), для которой вектор 3-импульса подсистемы частиц q_k и q_l равен нулю (в преобразовании Лоренца (2) следует положить $\beta = \beta^P$, $\mathbf{A} = \mathbf{R}_j^L$, $\mathbf{A}_0 = \mathbf{R}_{j0}^L$, $\mathbf{A}' = \mathbf{R}_j^P$), т. е.

$$\mathbf{R}_j^P = \mathbf{q}_k^P + \mathbf{q}_l^P = \mathbf{P}^P - \mathbf{q}_j^P = 0, \quad \mathbf{P}^P = \mathbf{p}_1^P + \mathbf{p}_2^P = \mathbf{q}_j^P. \quad (85)$$

Полные энергии и абсолютные величины 3-импульсов начальных частиц p_1 и p_2 :

$$p_{10}^P = \frac{1}{2u} (u^2 + M_1^2 + \bar{t}^2) = \frac{1}{2u} [W^2 - (m_j^2 + M_2^2) - t^2],$$

$$p_1^P = |\mathbf{p}_1^P| = \{p_{10}^{P2} - M_1^2\}^{1/2}; \quad (86)$$

$$p_{20}^P = \frac{1}{2u} (u^2 + M_2^2 + t^2) = \frac{1}{2u} [W^2 - (m_j^2 + M_1^2) - \bar{t}^2],$$

$$p_2^P = |\mathbf{p}_2^P| = \{p_{20}^{P2} - M_2^2\}^{1/2}. \quad (87)$$

Полные энергии и абсолютные величины 3-импульсов конечных частиц q_k , q_l , q_j :

$$q_{k0}^P = \frac{1}{2u} (u^2 + m_k^2 - m_l^2), \quad q_k^P = |\mathbf{q}_k^P| = \{q_{k0}^{P2} - m_k^2\}^{1/2}; \quad (88)$$

$$q_{l0}^P = \frac{1}{2u} (u^2 + m_l^2 - m_k^2), \quad q_l^P = |\mathbf{q}_l^P| = \{q_{l0}^{P2} - m_l^2\}^{1/2} = q_k^P = q^P; \quad (89)$$

$$q_{j0}^P = \frac{1}{2u} (W^2 - m_j^2 - u^2), \quad q_j^P = |\mathbf{q}_j^P| = \{q_{j0}^{P2} - m_j^2\}^{1/2}. \quad (90)$$

Углы вылета частиц q_f ($f = j, k, l$) относительно направления 3-вектора \mathbf{p}_i^P ($i = 1, 2$):

$$x_{ij}^P = \cos \theta_{ij}^P = \frac{1}{2p_i^P q_f^P} [2p_{i0}^P q_{f0}^P - (m_f^2 + M_i^2) - t_{fi}^2]. \quad (91)$$

Полученные выражения для кинематических величин в B -, D -, Q - и P -системах позволяют вычислить их, исходя из заданных в некоторой системе отсчета инвариантов (39) и (40). В L - и R_f^L -системах эти инварианты в случае неподвижной мишени приведены в (42)—(44) и (60)—(61) соответственно. Ситуация в D -, Q -, P -системах графически изображена на рис. 5.

Связь кинематических величин в системах отсчета с $R_f \neq 0$ и $R_f = 0$

Энергия и импульс частиц в системах отсчета с любым вектором R_f . Классификация наиболее употребительных систем отсчета в зависимости от величины возникающего в них 3-вектора $R_f = P - q_f$ помимо этих систем отсчета охватывает и множество других R_f -систем, величины $|R_f^S|$ в которых лежат в промежутке $|R_f^L| > |R_f^S| > 0$ *. Хотя в практике описания реакций (1) эти системы отсчета обычно не используются, их наличие отражается фактом выделения 4-вектора \mathcal{R} с компонентами (22) и (22').

Покажем, что выражения (25) и (26) для величин $q_{f0}^{S(\pm)}(x_f^S)$ и $q_f^{S(\pm)}(x_f^S)$ заключают в себе непрерывный переход от систем отсчета с $R_f \neq 0$

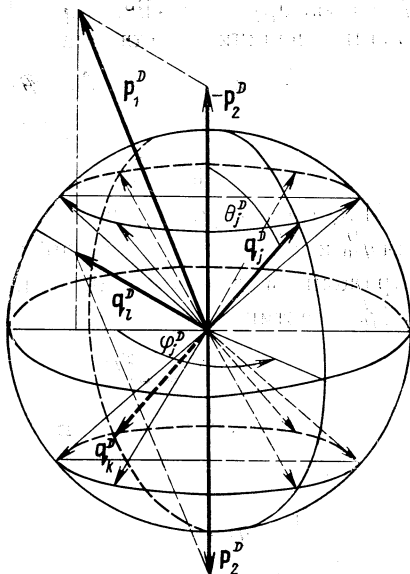


Рис. 5. Расположение 3-векторов частиц, участвующих в реакции $p_1 + p_2 \rightarrow q_j + q_k + q_l$, и отсчет их углов вылета в D -системе. С учетом необходимых перестановок конечных частиц положение в Q - и P -системах аналогичное изображенному.

* Множество R_f^S -систем, отвечающих интервалу $R_f^L \geq R_f^S \geq 0$, представляет системы отсчета, движущиеся со скоростями $0 \leq \beta_f^S \leq R_f^L/R_{f0}^L$ относительно L -системы по направлению вектора R_f^L , где $\beta_f^S = 0$ отвечает R_f^L -системам (L -системе) и $\beta_f^S = R_f^L/R_{f0}^L - D$ -, Q -, P -системам при $f = l, k, j$. Другое множество систем отсчета отвечает интервалу $R_f^L \geq R_f^S \geq R_f^B$ и представляет системы отсчета, движущиеся со скоростями $0 \leq \beta_f^S \leq P^L/P_0^L$ относительно L -системы по направлению вектора P^L , где $\beta_f^S = P^L/P_0^L$ отвечает B -системе. Для обоих указанных множеств систем отсчета выражения для величин $q_{f0}^{S(\pm)}(x_f^S)$ и $q_f^{S(\pm)}(x_f^S)$ имеют одинаковый вид (25) и (26).

к системам отсчета с $\mathbf{R}_f = 0$. Фиксирование 4-вектора \mathcal{R}_l с указанными компонентами R_{l0}^S и \mathbf{R}_l^S означает, что в R_l -системе зафиксированы полная (кинетическая) энергия q_{l0}^S ($T_l^S = q_{l0}^S - m_l$) частицы q_l и угол ее вылета θ_l по отношению к вектору \mathbf{P}^S , т. е. $x_{Pl}^S = \cos \theta_{Pl}^S = (\mathbf{q}_l^S \cdot \mathbf{P}^S) / (|\mathbf{q}_l^S| \cdot |\mathbf{P}^S|)$. Это также означает фиксирование величины инварианта полной энергии частиц q_k и q_j

$$\begin{aligned} \omega_{jk}^2 &= z^2 = (q_j + q_k)^2 = \mathcal{R}_l^2 = R_{l0}^{S2} - \mathbf{R}_l^{S2} = (\mathcal{F} - q_l)^2 = \\ &= W^2 + m_l^2 - 2(P_0^S q_{l0}^S - |\mathbf{P}^S| |\mathbf{q}_l^S| x_{Pl}^S) = \\ &= (P_0^S - q_{l0}^S)^2 - (\mathbf{P}^{S2} + \mathbf{q}_l^{S2} - 2|\mathbf{P}^S| |\mathbf{q}_l^S| x_{Pl}^S). \end{aligned} \quad (92)$$

Подставляя (92) в (25) и (26) и учитывая затем выражения (74) для q_{j0}^D и q_j^D , в случае реакций (1) с $n = 3$ приходим к следующим выражениям для величин полных энергий q_{j0}^l (q_{k0}^l) и импульсов q_j^l (q_k^l) частиц q_j (q_k)

$$\begin{aligned} q_{j0}^{l(\pm)}(x_j^l) &= [\omega_{jk}^2 + R_l^2 (1 - x_j^{l2})]^{-1} \times \\ &\times |\omega_{jk} q_{j0}^D \sqrt{\omega_{jk}^2 + R_l^2 \pm R_l x_j^l \sqrt{\omega_{jk}^2 q_j^{D2} - m_j^2 R_l^2 (1 - x_j^{l2})}}|; \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} q_j^{l(\pm)}(x_j^l) &= [\omega_{jk}^2 + R_l^2 (1 - x_j^{l2})]^{-1} \times \\ &\times |\omega_{jk} q_{j0}^D R_l x_j^l \pm \sqrt{\omega_{jk}^2 + R_l^2} \sqrt{\omega_{jk}^2 q_j^{D2} - m_j^2 R_l^2 (1 - x_j^{l2})}|, \end{aligned} \quad (94)$$

где $x_j^l = \cos \theta_j^l = (\mathbf{q}_j^l \cdot \mathbf{R}_l) / (|\mathbf{q}_j^l| \cdot |\mathbf{R}_l|)$ означает переменную полярного угла θ_j^l частицы q_j , определенного относительно вектора \mathbf{R}_l (для простоты верхние индексы S у R_l^S опущены и у величин $q_{j0}^{S(\pm)}$, $q_j^{S(\pm)}$, x_j^S заменены на индекс l для удобства выполнения циклических перестановок).

При использовании выражений (93) и (94) следует учитывать следующее: а) если выполняется условие (29), с учетом (74) и (92) принимающее вид

$$R_l \geq \frac{\omega_{jk}}{m_j} q_j^D, \quad (95)$$

то имеется предельный угол вылета $\theta_j^{\text{пр}}$ частицы q_j , определяемый выражением (30)

$$\begin{aligned} A_j^l = \cos \theta_j^{\text{пр}} &= \frac{1}{2m_j R_l} \left| \sqrt{4m_j^2 R_{l0}^2 - [(R_{l0}^2 - R_l^2) + (m_j^2 - m_k^2)]^2} \right| = \\ &= \left| \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{jk} q_j^D}{m_j R_l} \right)^2} \right|, \end{aligned} \quad (96)$$

вследствие чего для любых углов вылета θ_j^l ($x_j^l = \cos \theta_j^l$), лежащих в интервале

$$0 \leq \theta_j^l \leq \arccos A_j^l, \quad +1 \geq x_j \geq A_j, \quad (97)$$

необходимо в (93) и (94) брать знаки (+) и (-), поскольку при каждом угле θ_j^l в интервале (97) частицы q_j сорта j вылетают с энергиями $q_{j0}^{l(+)}(x_j^l), q_{j0}^{l(-)}(x_j^l)$; условие (95) должно быть отдельно применено к частице q_k заменой $j \rightleftharpoons k$; б) если выполняется условие

$$0 \leq R_l < \frac{\omega_{jk}}{m_j} q_j^D, \tag{98}$$

то предельный угол отсутствует и допустимы все углы вылета частицы q_j во всем физическом интервале, $0 \leq \theta_j^l \leq \pi$ ($+1 \geq x_j^l \geq -1$); в (93) и (94) нужно брать только знак (+), если $x_j^l = \cos \theta_j^l$ определяется со знаком во всем интервале углов θ_j^l , либо оставить знаки (\pm), но для x_j^l брать его абсолютную величину $|x_j^l|$, причем знак (+) должен относиться к интервалу $+1 \geq x_j^l \geq 0$, а знак (-) — к интервалу $0 \geq x_j^l \geq -1$ (это означает однозначность решения для $q_{j0}^l(x_j^l)$ в зависимости от угла θ_j^l).

Легко видеть, что выражения (93) и (94) справедливы для любых величин R_l^S , лежащих в интервале $R_l^L \geq R_l^S \geq 0$, причем при $R_l^S = R_l^L$ они автоматически приводят к (53) и (54) в R_l^L -системе, а при $R_l^S = 0$ — к выражениям (74) и (75) для $q_{j0}^D(q_j^D)$ и $q_{k0}^D(q_k^D)$ в D -системе. Таким образом, выражения (93) и (94) с учетом требований, вытекающих из условий (95) и (98), имеют место как в системах отсчета с $\mathbf{R}_j^S \neq 0$, так и в системах отсчета с $\mathbf{R}_j^S = 0$. При этом в D -системе ($\mathbf{R}_l^S = 0$) величины $q_{j0}^D(q_{k0}^D)$ не зависят от углов вылета $\theta_j^D(\theta_k^D)$, т. е. $q_{j0}^D(q_{k0}^D)$ и $x_j^D = \cos \theta_j^D(x_k^D = \cos \theta_k^D = -\cos \theta_j^D)$ становятся независимыми переменными, что является отличительным свойством систем центра масс двух частиц. Зависимость величин $q_{j0}^{(\pm)}(x_j^l)$ от угловой переменной x_j^l для случаев а) и б) графически изображена на рис. 6.

Важно отметить, что выражения (92)–(98) и получаемые из них циклической перестановкой индексов j, k, l справедливы для любых исходных условий столкновения начальных частиц p_1 и p_2 в лабораторной системе — как в случае неподвижной мишени, так и в случае произвольных встречных пучков.

Преобразования угловых переменных при переходах в любые системы отсчета можно получить с помощью инвариантов наборов (39), (40) и (4). Например, выражения (44), (69) и (77), (84), (91) для угловой переменной x_{if} в L -, B - и D -, Q -, P -системах отсчета, приравненные попарно (при одном и том же значении t_i^2) обеспечивают преобразования угловой переменной x_{if} при переходах между указанными системами отсчета. При этом ясно, что речь идет только об углах, определенных относительно 3-векторов частиц, участвующих в рассматриваемой реакции столкновения,

или их любых линейных комбинаций. Более широкий класс преобразований угловых переменных, определяемых относительно любого выбранного направления в пространстве, можно получить только с помощью преобразований Лоренца в их явном виде (2)

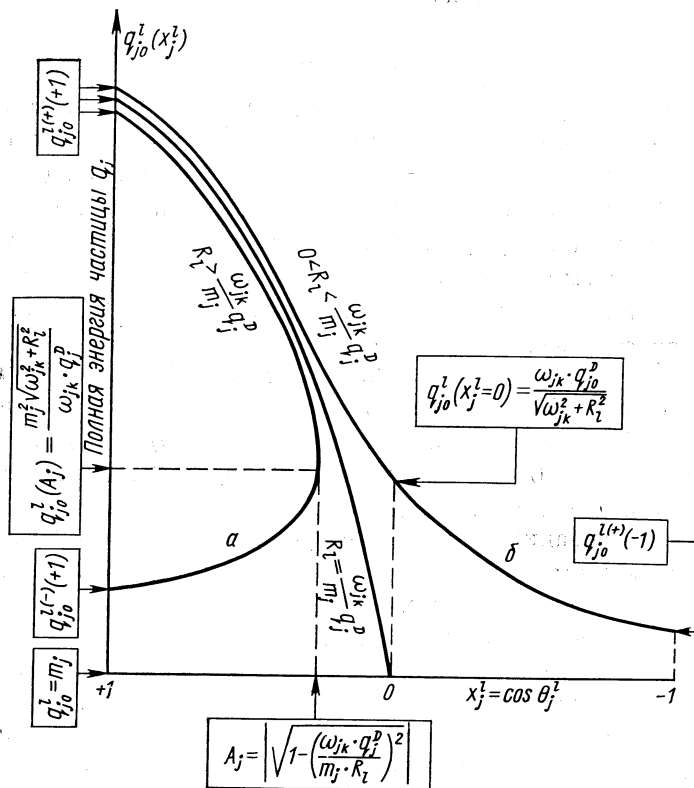


Рис. 6. Зависимость полной энергии $q_{j0}^L(x_j^L)$ от угловой переменной $x_j^L = \cos \theta_j^L$ в произвольных R_L^S -системах отсчета [см. (93)].

и (3), причем в данном случае необходимо знать относительную скорость $\beta^{S'}$ рассматриваемых систем отсчета S и S' .

Поскольку преобразования угловых переменных с помощью кинематических инвариантов очевидны, приведем пример преобразований Лоренца для случая перехода между системами отсчета с $R_L^S \neq 0$ и $R_L^{S'} = 0$ для множества R_L^S -систем, отвечающих интервалу $|R_L^L| \geq |R_L^S| \geq 0$ и движущихся со скоростями $0 \leq \beta_j^S \leq \leq R_L^L / R_{L0}^L$ относительно L -системы по направлению 3-вектора R^L , т. е. $\beta_j^S \parallel R^L$. Этот пример полезен также потому, что при переходах $(R_L^S \neq 0) \Leftrightarrow (R_L^{S'} = 0)$ преобразования угловых переменных

нельзя получить с помощью казалось бы удобного для этой цели инварианта $q_j \cdot \mathcal{R}$, имеющего вид

$$q_j \cdot \mathcal{R} = R_{l0}^S q_{j0}^S - R_l^S q_j^S x_j^S = R_{l0}^L q_{j0}^L - R_l^L q_j^L x_j^L = \omega_{jk} \cdot q_{j0}^D \quad (99)$$

и представляющего интерес для рассмотрения переходов между любыми R_l^S -системами с $\mathbf{R}_l^S \neq 0$.

Заменив обозначения систем отсчета $S (S') \rightarrow R_l^S (D)$, опустив индекс S -системы и учитывая, что $\beta = \mathbf{R}_l/R_{l0}$ есть скорость движения D -системы ($\mathbf{R}_l = 0$) относительно R_l -системы ($\mathbf{R}_l \neq 0$), подставляем в (2) и (3) следующие величины:

$$A_0 (A'_0) = q_{j0}^l (q_{j0}^D), \quad \mathbf{A} (\mathbf{A}') = \mathbf{q}_j^l (q_j^D), \quad \beta = \mathbf{R}_l/R_{l0}, \quad 1 - \beta^2 = \omega_{jk}^2/R_{l0}^2, \\ 1 - \sqrt{1 - \beta^2} = (R_{l0} - \omega_{jk})/R_{l0}, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = R_{l0}/\omega_{jk}.$$

В результате получаем следующие преобразования кинематических величин частицы $q_j (q_k)$:

$(R_l \rightarrow D)$ — преобразование кинематических величин частицы $q_j (q_k)$ при переходе из произвольной R_l -системы в D -систему

$$(j \leftrightarrow k) \left\{ \begin{aligned} x_j^D &= \frac{1}{q_j^D \omega_{jk}} [R_{l0} q_j^l (x_j^l) x_j^l - R_l q_{j0}^l (x_j^l)]; & (100) \\ q_{j0}^D &= \frac{1}{\omega_{jk}} [R_{l0} q_{j0}^l (x_j^l) - R_l q_j^l (x_j^l) x_j^l], \quad q_j^D = \sqrt{q_{j0}^{D2} - m_j^2}, & (101) \end{aligned} \right.$$

где $q_{j0}^l (x_j^l)$ и $q_j^l (x_j^l)$ должны быть заданы выражениями (93) и (94). $(D \rightarrow R_l)$ — преобразование кинематических величин частицы $q_j (q_k)$ при переходе из D -системы в произвольную R_l -систему

$$(j \leftrightarrow k) \left\{ \begin{aligned} x_j^l &= \frac{1}{q_j^l \omega_{jk}} [R_{l0} q_j^D x_j^D + R_l q_{j0}^D]; & (102) \\ q_{j0}^l &= \frac{1}{\omega_{jk}} [R_{l0} q_{j0}^D + R_l q_j^D x_j^D], \quad q_j^l = \sqrt{q_{j0}^{l2} - m_j^2}, & (103) \end{aligned} \right.$$

где q_{j0}^D задано выражением (74) с учетом обозначения $z = \omega_{jk}$. В (100)–(103) угловые переменные

$$x_j^D = \cos \theta_j^D = (\mathbf{q}_j^D \cdot \mathbf{R}_l^L) / (|\mathbf{q}_j^D| \cdot |\mathbf{R}_l^L|) \quad \text{и} \quad x_j^l = \cos \theta_j^l = (\mathbf{q}_j^l \cdot \mathbf{R}_l^L) / (|\mathbf{q}_j^l| \cdot |\mathbf{R}_l^L|)$$

определены относительно направления вектора \mathbf{R}_l^L в лабораторной системе.

Преобразованиям (100)–(103) подвергаются только переменные полярных углов. Азимутальные углы преобразованиям не подвергаются, и при переходах в различные системы сохраняется тождественное соответствие азимутальных углов, т. е. $\varphi_{j,k}^l \equiv \varphi_{j,k}^D$.

Подставив (103) в (102), после несложных преобразований получим ($D \rightarrow R_l$)

$$x_j^l = (R_l q_{j0}^D + \sqrt{\omega_{jk}^2 + R_l^2 q_j^D x_j^D}) \times \\ \times [(R_l q_{j0}^D + \sqrt{\omega_{jk}^2 + R_l^2 q_j^D x_j^D})^2 + \omega_{jk}^2 q_j^{D2} (1 - x_j^{D2})]^{-1/2}. \quad (104)$$

Остальные преобразования ($Q \rightleftharpoons R_k$) и ($P \rightleftharpoons R_j$) получаются из (100)—(104) циклической перестановкой индексов l, k, j .

Легко видеть, что в (100)—(104) при $R_l = 0$ всюду имеем $x_j^l = x_j^D$ и $q_{j0}^l = q_{j0}^D$.

При заданной величине переменной x_j^D в D -системе ($R_l = 0$) выражение (104) определяет величину x_j^l в (93) и (94) для вычисления величин $q_{j0}^l(x_j^l)$ и $q_j^l(x_j^l)$ в системах с $R_l \neq 0$.

Преобразования (100)—(104) в случае неподвижной мишени легко получить, используя только инварианты. Кратко этот способ заключается в следующем. Рассмотрим инвариант $q_j \cdot p_2$ в R_l^L - и D -системах, определив переменную в D -системе как $x_j^D = -(q_j^D \cdot p_2^D) / (|q_j^D| \cdot |p_2^D|)$. Учитывая соотношения $p_{20}^D = M_2 R_l^L / \omega_{jk}$ и $p_2^D = M_2 R_l^L / \omega_{jk}$, вытекающие из инварианта $p_2 \cdot \mathcal{R}_l$ для случая неподвижной частицы p_2 , и выражение для q_{j0}^D из (99), приходим к (100) и (101). Подставляя в (62) соотношение $q_{j0}^l = \frac{1}{\omega_{jk}} [R_l q_{j0}^D + R_l q_j^D x_j^D]$, получаемое из инварианта $q_j \cdot p_2$ и означающее искомое преобразование (103), находим искомое преобразование (102). В общем случае любых условий столкновения все необходимые преобразования угловых переменных могут быть получены рассмотрением удобных для этой цели инвариантов, например, $q_l \cdot q_j$, $q_l \cdot q_k$, $q_j \cdot q_k$ и т. д.

Экстремальные значения кинематических величин

Интервалы изменения инвариантов полных энергий. Важной частью кинематического анализа реакций столкновения с $n = 3$ является нахождение экстремальных (минимальных и максимальных) значений кинематических величин конечных частиц. Решение этой задачи основано на учете очевидного требования, предъявляемого к системе частиц и заключающегося в том, что законы сохранения энергии и импульса должны быть удовлетворены при физических значениях энергий, импульсов и углов разлета любой пары частиц. Это требование формулируется в виде двух условий:

1) энергии лежат в физической области: полная энергия любой частицы в любой системе отсчета должна быть положительна и ее величина должна быть не меньше ее массы покоя;

2) углы разлета лежат в физической области: косинус угла между векторами 3-импульсов любой пары частиц в любой системе отсчета не может выходить за пределы физического интервала $(+1, -1)$.

Далее необходимо использовать характерное свойство любой системы центра масс системы (подсистемы) частиц, которое гласит: полную энергию всей рассматриваемой системы (подсистемы) частиц можно представить в виде эквивалентной эффективной массы некоторой фиктивной частицы. В применении к реакциям с $n = 3$ это означает, что инварианты полных энергий в соответствующих системах центра масс могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} W^2 &= (q_{j0}^B + q_{k0}^B + q_{l0}^B) = M_{jkl}^{*2}; \\ \omega_{jk}^2 &= (q_{j0}^D + q_{k0}^D)^2 = m_{jk}^{*2}; \\ \omega_{jl}^2 &= (q_{j0}^Q + q_{l0}^Q)^2 = m_{jl}^{*2}; \\ \omega_{kl}^2 &= (q_{k0}^P + q_{l0}^P)^2 = m_{kl}^{*2}, \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

где M_{jkl}^* , m_{jk}^* , m_{jl}^* , m_{kl}^* — эффективные массы системы и подсистем частиц с указанными индексами в B -, D -, Q -, P -системах соответственно. Это положение совместно с требованием 1), примененное ко всей системе из любого числа частиц или к любым ее подсистемам, рассматриваемым в их системах центра масс, приводит к следующему выводу: минимальное значение инварианта квадрата полной энергии системы (подсистемы) частиц, рассматриваемого в ее системе центра масс, равно квадрату суммы масс покоя частиц этой системы (подсистемы). Применяя полученное правило к инвариантам в (105), получаем их минимальные значения

$$\begin{aligned} W_{\min}^2 &= (m_j + m_k + m_l)^2; & (\omega_{jk}^2)_{\min} &= (m_j + m_k)^2; \\ (\omega_{jl}^2)_{\min} &= (m_j + m_l)^2; & (\omega_{kl}^2)_{\min} &= (m_k + m_l)^2. \end{aligned} \quad (106)$$

Применяя условие 1) к W_{\min}^2 , находим, что в B -системе минимальная величина полной энергии каждой конечной частицы равна ее массе покоя, т.е.

$$q_{j0}^B_{\min} = m_j; \quad q_{k0}^B_{\min} = m_k; \quad q_{l0}^B_{\min} = m_l. \quad (107)$$

Используя (107) и общее выражение (68) для q_{l0}^B , получаем максимальные значения величин инвариантов полных энергий подсистем из двух частиц (циклически переставить j, k, l):

$$(\omega_{jk}^2)_{\max} = (W - m_l)^2. \quad (108)$$

Объединив (106) и (108), найдем интервалы изменения инвариантов полных энергий подсистем из двух частиц в реакциях с $n = 3$

$$(m_j + m_k)^2 \leq \omega_{jk}^2 \leq (W - m_l)^2. \quad (109)$$

Из (109) следуют важные утверждения:

а) предельные значения инвариантов полных энергий не зависят от системы отсчета;

б) в реакциях с тремя конечными частицами, максимальные значения энергии одной из конечных частиц должны определяться из общего выражения для инварианта полной энергии двух остальных частиц, приравненного минимальному значению этого инварианта.

Экстремальные значения кинетических энергий конечных частиц в L -системе. Для практики экспериментального исследования реакций с $n = 3$ исключительный интерес представляет их кинематическая картина в лабораторной системе. В частности, необходимо знать допустимые интервалы кинетических энергий каждой из конечных частиц, т.е. необходимо располагать выражениями для экстремальных величин кинетических энергий той или иной конечной частицы в виде функций угла ее вылета в L -системе.

В соответствии с установленными правилами, чтобы получить в L -системе экстремальные кинетические энергии $T_{l \text{ ext}}^L$ частицы q_l , необходимо инвариант квадрата полных энергий двух других частиц q_j и q_k , $\omega_{jk}^2 = (q_j + q_l)^2 = (p_1 + p_2 - q_l)^2$, приравнять его минимальному значению [см. (108)]

$$(\omega_{jk}^2)_{\text{мин}} = (p_1 + p_2 - q_{l \text{ ext}})^2 = (m_j + m_k)^2 \quad (110)$$

и разрешить вытекающее из (110) уравнение

$$\begin{aligned} (\omega_{jk}^*)^2 = (\omega_{jk}^2)_{\text{мин}} = W^2 + m_l^2 - 2(p_{10}^L + p_{20}^L) q_{l0 \text{ ext}}^L + \\ + 2(\mathbf{p}_1^L + \mathbf{p}_2^L) \mathbf{q}_{l \text{ ext}}^L \end{aligned} \quad (111)$$

относительно искомой величины $T_{l \text{ ext}}^L = q_{l0 \text{ ext}}^L - m_l$.

Для случая неподвижной мишени, состоящей из частиц p_2 ($p_2^L = 0$), обозначим: $M_I = M_1 + M_2$, $M_F = m_j + m_k + m_l$ — суммы масс частиц начального и конечного каналов; $x_l = x_l^L = \cos \theta_l^L = (\mathbf{q}_l^L \cdot \mathbf{p}_1^L) / (|\mathbf{q}_l^L| |\mathbf{p}_1^L|)$ — косинус угла вылета θ_l^L частицы q_l относительно направления вектора 3-импульса \mathbf{p}_1^L начальной частицы p_1 ; $a_l = 1/2 [W^2 + m_l^2 - (\omega_{jk}^*)^2]$, где $(\omega_{jk}^*)^2 = (m_j + m_k)^2$; $b = p_{10}^L + M_2 = M_I + T$, $p_{10}^L = M_1 + T$, $p_1^L = p_1^{L2} = T(T + 2M_1)$, $p_1 x_l = p_1^L x_l^L$. В принятых обозначениях уравнение (111), приведенное к квадратному уравнению относительно $q_{l0 \text{ ext}}^L$, принимает вид

$$(b^2 - p_1^2 x_l^2) q_{l0 \text{ ext}}^{L2} - 2a_l b q_{l0 \text{ ext}}^L + (a_l^2 + m_l^2 p_1^2 x_l^2) = 0, \quad (112)$$

решение которого для $q_{l0 \text{ ext}}^L$ имеет вид

$$q_{l0 \text{ ext}}^{L(\pm)}(x_l) = \frac{1}{(b^2 - p_1^2 x_l^2)} \{a_l b \pm p_1 x_l \sqrt{a_l^2 - m_l^2 (b^2 - p_1^2 x_l^2)}\}, \quad (113)$$

из которого получаем искомое выражение для экстремальной кинетической энергии $\tau^{(\pm)} = T_{l \text{ ext}}^{L(\pm)} = q_{l0 \text{ ext}}^{L(\pm)} - m_l$ частицы q_l :

$$\tau^{(\pm)}(x_l) = T_{l \text{ ext}}^{L(\pm)}(x_l) = \frac{1}{(b^2 - p_1^2 x_l^2)} \times \\ \times \{ [a_l b - m_l (b^2 - p_1^2 x_l^2)] \pm p_1 x_l \sqrt{a_l^2 - m_l^2 (b^2 - p_1^2 x_l^2)} \}. \quad (114)$$

Для перехода в (114) к случаю встречных пучков начальных частиц p_1 и p_2 ($p_1^L \neq 0$, $p_2^L \neq 0$; угол столкновения θ_{12}^L — произвольный) в (112)–(114) следует выполнить замены:

$$W^2 \rightarrow \hat{W}^2 = (p_1 + p_2)^2 = M_1^2 + M_2^2 - 2(p_{10}^L p_{20}^L - p_1^L p_2^L x_{12}^L),$$

где $x_{12}^L = \cos \theta_{12}^L = (\mathbf{p}_1^L \cdot \mathbf{p}_2^L) / (|\mathbf{p}_1^L| \cdot |\mathbf{p}_2^L|)$;

$$a_l \rightarrow \hat{a}_l = 1/2 [\hat{W}^2 + m_l^2 - (\hat{\omega}_{jk}^*)^2],$$

где $(\hat{\omega}_{jk}^*)^2 = (m_j + m_k)^2$;

$$b \rightarrow \hat{b} = p_{10}^L + p_{20}^L = M_1 + T_1^L + T_2^L;$$

$$p_1^L \rightarrow P^L = |\mathbf{P}^L| = |\mathbf{p}_1^L + \mathbf{p}_2^L| = \sqrt{p_1^{L2} + p_2^{L2} + 2p_1^L p_2^L x_{12}^L};$$

$$p_1^{L2} = T_1^L (T_1^L + 2M_1); \quad p_2^{L2} = T_2^L (T_2^L + 2M_2);$$

$$x_l \rightarrow \hat{x}_l = (\mathbf{q}_l^L \cdot \mathbf{P}^L) / (|\mathbf{q}_l^L| \cdot |\mathbf{P}^L|) = \\ = (p_1^L x_{1l}^L + p_2^L x_{2l}^L) / \sqrt{p_1^{L2} + p_2^{L2} + 2p_1^L p_2^L x_{12}^L},$$

здесь

$$x_{il}^L = \cos \theta_{il}^L = (\mathbf{q}_l^L \cdot \mathbf{p}_i^L) / (|\mathbf{q}_l^L| \cdot |\mathbf{p}_i^L|)$$

— косинус угла вылета частицы q_l по отношению к вектору 3-импульса \mathbf{p}_i^L начальной частицы p_i ($i = 1, 2$).

Полученное выражение (114) помимо того, что оно определяет экстремальные кинетические энергии $\tau^{(\pm)}(x_f)$ любой конечной частицы q_f ($f = l, k, j$) [выполнить циклические перестановки индексов l, k, j в (114), учитывая запись a_l через $(\hat{\omega}_{jk}^*)^2$], заключает в себе дополнительную важную информацию о кинематической картине в L -системе, анализ которой выполняется сразу же после получения выражения (114).

Условие для существования в L -системе предельных углов вылета конечных частиц в реакциях с $n = 3$. Вследствие того что в (114) содержится подкоренное выражение, очевидное требование вещественности величины $\tau^{(\pm)}(x_l)$ налагает условие

$$a_l^2 - m_l^2 (b^2 - p_1^2 x_l^2) \geq 0, \quad (115)$$

при знаке равенства в котором получаем следующее выражение для предельного угла вылета $\theta_{l \text{ пр}}^L$ частицы q_l относительно направления 3-вектора \mathbf{p}_1^L в случае неподвижной частицы p_2 ($\mathbf{p}_2^L = 0$):

$$A_l = x_{l \text{ пр}}^L = \cos \theta_{l \text{ пр}}^L = \frac{1}{m_l p_1} \sqrt{m_l^2 b^2 - a_l^2}, \quad \theta_{l \text{ пр}}^L = \arccos A_l. \quad (116)$$

Из (115) в свою очередь следует, что

а) если $m_l b - a_l > 0$, то предельный угол θ_l^L существует и определяется выражением (116); для допустимых углов вылета частицы q_l имеется условие $x_l^L > 0$ ($\theta_l^L < \pi/2$), т. е. допустимые углы θ_l^L лежат в интервале

$$0 \leq \theta_l^L \leq \theta_l^{L\text{пр}}, \quad +1 \geq x_l^L \geq A_l; \quad (117)$$

б) если $m_l b - a_l < 0$, то предельный угол отсутствует и допустимы все углы в интервале

$$0 \leq \theta_l^L \leq \pi, \quad +1 \geq x_l^L \geq -1; \quad (118)$$

в) если $m_l b - a_l = 0$, то это означает, что $A_l = x_l^L = 0$ ($\theta_l^L = \pi/2$), т. е. $m_l b = a_l$ является условием для достижения в L -системе угла вылета $\theta_l^L = 90^\circ$ и допустимые углы θ_l^L лежат в интервале

$$0 \leq \theta_l^L \leq \pi/2, \quad +1 \geq x_l^L \geq 0. \quad (119)$$

Как легко убедиться, из (114) следует, что в этом случае $\tau^{(\pm)}(x_l^L = 0) = 0$, т. е. при $\theta_l^L = 90^\circ$ кинетическая энергия частицы q_l равна нулю.

Условие (115) для случая встречных пучков следует из выражения (114), записанного с помощью необходимых замен, указанных в предыдущем разделе.

Пороговая энергия для заданного угла вылета в L -системе конечных частиц в реакциях с $n=3$. Условие $m_l b - a_l = 0$, обеспечивающее интервал $0 \leq \theta_l^L \leq \pi/2$ для углов вылета частицы q_l в L -системе, одновременно определяет кинетическую энергию T начальной частицы p_1 (частица p_2 неподвижна, $p_2^L = 0$), необходимую для достижения угла вылета $\theta_l^L = 90^\circ$, величина которой определяется после подстановки a_l и b в их явном виде и

$$\begin{aligned} T(\pi/2) = T(x_l^L = 0) &= \frac{1}{2(M_2 - m_l)} [(\omega_{jk}^*)^2 - (M_I - m_l)^2] = \\ &= \frac{1}{2(M_2 - m_l)} [(M_F - m_l)^2 - (M_I - m_l)^2] = \\ &= \frac{1}{2(M_2 - m_l)} (M_F - M_I) [(M_F + M_I) - 2m_l]. \end{aligned} \quad (120)$$

Полученная величина $T(\pi/2)$ имеет смысл энергии порога для вылета частицы q_l под углом $\theta_l^L = 90^\circ$.

Интересно также установить величину начальной энергии T , при которой предельный угол $\theta_l^L = 0^\circ$ ($x_l^L = +1$). Подставив

в (115) $x_l^{L_{\text{пр}}} = +1$, получим

$$\begin{aligned}
 W^2(x_l^{L_{\text{пр}}} = +1) &= (\omega_{jk}^* + m_l)^2 = (m_j + m_k + m_l)^2 = W_{\text{мин}}^2, \\
 T(x_l^{L_{\text{пр}}} = +1) &= T_{\text{пор}}(0^\circ) = \frac{1}{2M_2} [(\omega_{jk}^* + m_l)^2 - M_I^2] = \\
 &= \frac{1}{2M_2} (M_F^2 - M_I^2). \tag{121}
 \end{aligned}$$

Очевидно, что условие $W^2 = W_{\text{мин}}^2 = (m_j + m_k + m_l)^2$ есть условие для определения абсолютного порога эндотермической ($M_F > M_I$) реакции с $n = 3$, а выражение (121) для $T_{\text{пор}}(0^\circ)$ определяет величину кинетической энергии начальной частицы p_1 в L -системе, необходимую для начала протекания эндотермической реакции с $n = 3$.

Далее, при условиях $M_F > M_I$ и $M_2 > m_l$ имеем

$$\begin{aligned}
 T_{\text{пор}}(\pi/2) - T_{\text{пор}}(0^\circ) &= \frac{m_l(M_F - M_I)}{2M_2(M_2 - m_l)} [M_F - (M_2 - M_I)] > 0, \\
 T_{\text{пор}}(\pi/2) &> T_{\text{пор}}(0^\circ),
 \end{aligned}$$

откуда следует, что интервалу кинетических энергий T начальной частицы p_1 :

$$\begin{aligned}
 &\left\{ T_{\text{пор}}(0^\circ) = \frac{1}{2M_2} (M_F^2 - M_I^2) \right\} \leq T \leq \\
 &\leq \left\{ \frac{1}{2(M_2 - m_l)} (M_F - M_I) [(M_F + M_I) - 2m_l] = T_{\text{пор}}(\pi/2) \right\}
 \end{aligned}$$

соответствует интервал предельных углов вылета конечной частицы $0^\circ \leq \theta_l^{L_{\text{пр}}} \leq 90^\circ$ ($+1 \geq x_l^{L_{\text{пр}}} \geq 0$), причем в этом интервале предельный угол $\theta_l^{L_{\text{пр}}}$ в виде функции кинетической энергии T определяется выражением (116). Помимо этого, из формулы (116) получаем выражение для начальной кинетической энергии T в виде функции предельного угла $\theta_l^{L_{\text{пр}}}$:

$$\begin{aligned}
 T_{\text{пор}}(x_l) &= \frac{1}{\varepsilon} [\xi + \sqrt{\xi^2 - \varepsilon \cdot \nu}] = \\
 &= \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \xi + m_l \sqrt{\frac{(M_2 M_1 - c_l)^2 + x_l^2 [(2M_2 M_1 - c_l) c_l + m_l^2 (M_I^2 - 2M_1 M_I + M_I^2 x_l^2)]}{+ m_l^2 (M_I^2 - 2M_1 M_I + M_I^2 x_l^2)}} \right\}, \tag{122}
 \end{aligned}$$

где $\varepsilon = M_2^2 - m_l^2 (1 - x_l^2)$; $\xi = -M_2 c_l + m_l (M_I - M_1 x_l^2)$;

$$\nu = c_l^2 - m_l^2 M_I^2;$$

$$c_l = \frac{1}{2} [M_I^2 + m_l^2 - (\omega_{jk}^*)^2]; \quad x_l = \cos \theta_l^{L_{\text{пр}}}.$$

Величина $T_{\text{пор}}(x_l)$, очевидно, означает пороговую кинетическую энергию частицы p_1 , необходимую для вылета частицы q_l

под углом θ_l^L ($x_l = x_l^L = \cos \theta_l^L$) в L -системе. Легко убедиться, что из (122) при $x_l^L = +1$ ($\theta_l^L = 0^\circ$) следует выражение (124) для абсолютного порога $T_{\text{пор}}(0^\circ)$, а при $x_l^L = 0$ ($\theta_l^L = 90^\circ$) — выражение (120) для пороговой энергии $T_{\text{пор}}(\pi/2)$, необходимой для вылета частицы q_l под углом $\theta_l^L = 90^\circ$.

В случае произвольных встречных пучков кинематическая картина в L -системе становится сложнее, в результате чего формулы (120)—(122) теперь не имеют места. Кинематический анализ, подобный изложенному, необходимо выполнять, исходя из условия (115) с заменами, полагающимися для использования (114) в случае встречных пучков. Условия вида а)—с) и в этом случае имеют силу, и если выполняется условие вида а), то предельные углы должны определяться по формуле (116), где $a_l \rightarrow \hat{a}_l$, $b \rightarrow \hat{b}$, $p_1 \rightarrow P = |p_1^L + p_2^L|$. Формулу для абсолютного порога в этом случае можно получить, если решить уравнение

$$(W^2)_{\text{мин}} = M_F^2 = M_1^2 + M_2^2 + 2(p_{10}^L p_{20}^L - p_1^L p_2^L x_{12}^L)$$

и определить $T_{1\text{пор}}^L = f(T_2^L, x_{12}^L)$ или $T_{2\text{пор}}^L = f(T_1^L, x_{12}^L)$; выражение такого вида дано в работе [9] и здесь не приводится за недостатком места.

Зависимость максимальной и минимальной кинетических энергий конечных частиц от их угла вылета в L -системе и кинетической энергии T начальной частицы p_1 . Подведем итог анализа кинематической картины допустимых интервалов углов вылета и кинетических энергий конечной частицы q_l в реакциях с $n = 3$. Результат анализа сводится к указаниям, как следует пользоваться выражением (114) для $\tau^{(\pm)}(x_l^L)$ в разных областях кинетических энергий T начальной частицы p_1 и углов вылета θ_l^L ($x_l^L = \cos \theta_l^L$) конечной частицы q_l , который для практически важного случая эндотермических реакций ($Q < 0$) при условии $m_l \leq M_2$ состоит в следующем:

1) в интервале кинетических энергий T начальной частицы p_1

$$\left\{ T_{\text{пор}}(0^\circ) = \frac{1}{2M_2} (M_F^2 - M_1^2) \right\} \leq T \leq \\ \leq \left\{ \frac{1}{2(M_2 - m_l)} (M_F - M_l) [(M_F + M_l) - 2m_l] = T_{\text{пор}}(\pi/2) \right\} \quad (123)$$

конечная частица q_l может вылетать в интервале углов θ_l^L

$$0 \leq \theta_l^L \leq \arccos A_l(T); \quad +1 \geq x_l^L \geq \left\{ \frac{1}{m_l p_1} \left| \sqrt{m_l^2 b^2 - a_l^2} \right| = A_l(T) \right\}, \quad (124)$$

имея при каждом угле внутри этого интервала спектр кинетических энергий $T_l^L(x_l^L)$, заключенный в интервале

$$\tau^{(-)}(x_l^L) = T_{l\text{мин}}^L(x_l^L) \leq T_l^L(x_l^L) \leq T_{l\text{макс}}^L(x_l^L) = \tau^{(+)}(x_l^L), \quad (125)$$

где $T_l^L(\text{макс}) (x_l^L) = T_l^{L(\pm)}(x_l^L) = \tau^{(\pm)}(x_l^L)$ определены выражением (114) и означают максимальную и минимальную кинетические энергии конечной частицы q_l ;

2) для кинетических энергий T в интервале

$$T > T_{\text{пор}}(\pi/2) = \frac{1}{2(M_2 - m_l)} (M_F - M_I) [(M_F + M_I) - 2m_l] \quad (126)$$

ограничение на углы вылета отсутствует — частица q_l вылетает под всеми углами в физическом интервале

$$0 \leq \theta_l^L \leq \pi, \quad +1 \geq x_l^L \geq -1. \quad (127)$$

Начиная с кинетической энергии $T = T_{\text{пор}}(\pi/2)$, частица q_l приобретает возможность вылетать с минимальной кинетической энергией равной нулю, $T_l^L = 0$, при любых углах ее вылета и спектр ее кинетических энергий при любом угле θ_l^L ($x_l^L = \cos \theta_l^L$) заключен в интервале

$$0 \leq T_l^L(x_l^L) \leq T_{l \text{ макс}}^L(x_l^L) = \tau^{(+)}(x_l^L). \quad (128)$$

В этом случае в (114) решение со знаком (—) следует отбросить, если x_l^L определен со знаком во всем физическом интервале (+1, —1); однако если в (114) полагать $x_l^L = |x_l^L|$, т. е. во всем физическом интервале брать модуль величины x_l^L , то (—) решение в (114) следует использовать для углов задней полусферы $\pi/2 \leq \theta_l^L \leq \pi$ ($0 \geq x_l^L \geq -1$);

3) из выражения (114) при подстановке в него (116), $x_l^{\text{пр}} = A_l(T)$ следует выражение кинетической энергии T_l^* частицы q_l , приобретаемой ею при предельном угле вылета, в виде функции от T

$$T_l^*(T) = m_l(m_l b - a_l)/a_l, \quad (129)$$

которое имеет силу в интервале $T_{\text{пор}}(0^\circ) \leq T \leq T_{\text{пор}}(\pi/2)$ и аналитически переходит в выражение для максимальной кинетической энергии частицы q_l при угле ее вылета $\theta_l^L = 90^\circ$ ($x_l^L = 0$) и начальных кинетических энергиях $T \geq T_{\text{пор}}(\pi/2)$

$$T_{l \text{ макс}}^L(x_l^L = 0, T) = (a_l - m_l b)/b, \quad (130)$$

проходя при $T = T_{\text{пор}}(\pi/2)$ через точку $T_l^L = 0$.

Отметим, что через точку $T_l^L = 0$ при $T = T_{\text{пор}}(\pi/2)$ проходят также все кривые ветвей решений со знаком (—) в (114), $\tau^{(-)}(x_l^L)$, которые в области (123), $T_{\text{пор}}(0^\circ) \leq T \leq T_{\text{пор}}(\pi/2)$, означают отличные от нуля минимальные кинетические энергии частицы q_l , $\tau^{(-)}(x_l^L) > 0$, а в области (126), $T \geq T_{\text{пор}}(\pi/2)$ —

максимальные кинетические энергии частицы q_l , достигаемые ею при дополнительном угле $\pi - \theta_l^L$, $\tau^{(+)}(\pi - \theta_l^L) = \tau^{(-)}(\theta_l^L)$.

Для наглядности качественное поведение кривых экстремальных кинетических энергий частицы q_l в случае $Q < 0$ ($M_F > M_I$) изображено на рис. 7 и 8.

В зависимости от величины Q реакции и произвола в величинах масс покоя участвующих частиц в реакциях с $n = 3$ для интерва-

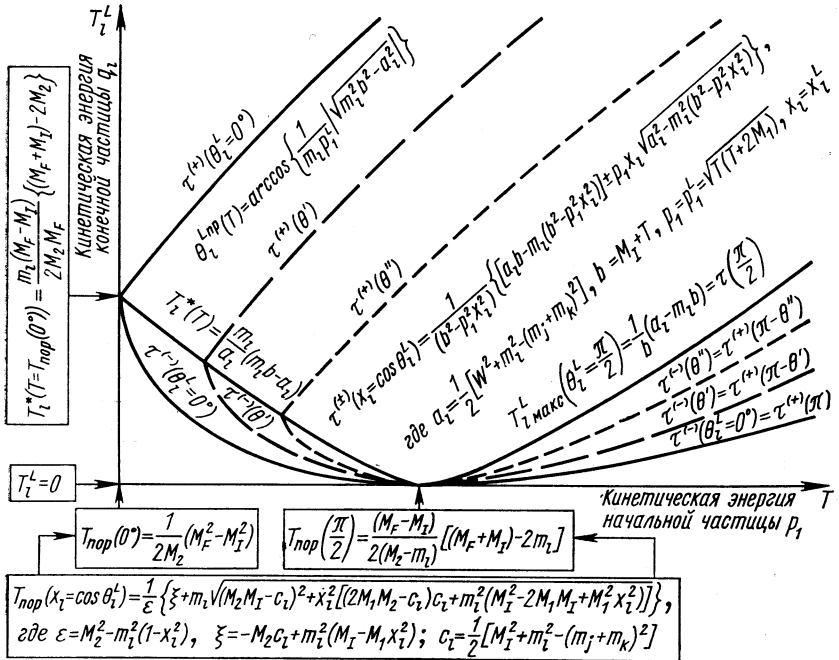


Рис. 7. Зависимость экстремальных кинетических энергий $\tau^{(\pm)}(T, \theta_l^L)$ конечной частицы q_l от угла ее вылета θ_l^L в L -системе и кинетической энергии T начальной частицы p_1 .

Реакция $p_1 + p_2 \rightarrow q_j + q_k + q_l$ в случае $Q < 0$ ($M_F > M_I$) при $m_l < M_2$.

лов значений их кинематических переменных получаем следующую классификацию.

1. Случай $Q < 0$ ($M_F > M_I$). Реакция эндотермическая — имеет порог и протекает начиная с порогового значения начальной энергии T , определяемого выражением (121). В зависимости от соотношения величин масс частиц имеют место следующие характерные случаи:

а) $m_l < M_2$, т.е. масса конечной частицы q_l меньше массы частицы мишени p_2 . В этом случае реализуется ситуация, схема-

тически изображенная на рис. 7. В интервале начальной кинетической энергии частицы p_1 , $T_{\text{пор}}(0^\circ) \leq T \leq T_{\text{пор}}(\pi/2)$, частицы q_l имеют предельный угол вылета, определяемый выражением (116); спектр их кинетических энергий лежит в интервале $\tau^{(-)}(x_l^L) \leq T_l^L \leq \tau^{(+)}(x_l^L)$ и допустимые углы лежат в интервале $0^\circ \leq \theta_l^L \leq \arccos A_l(T)$, $+1 \geq x_l^L \geq A_l(T)$.

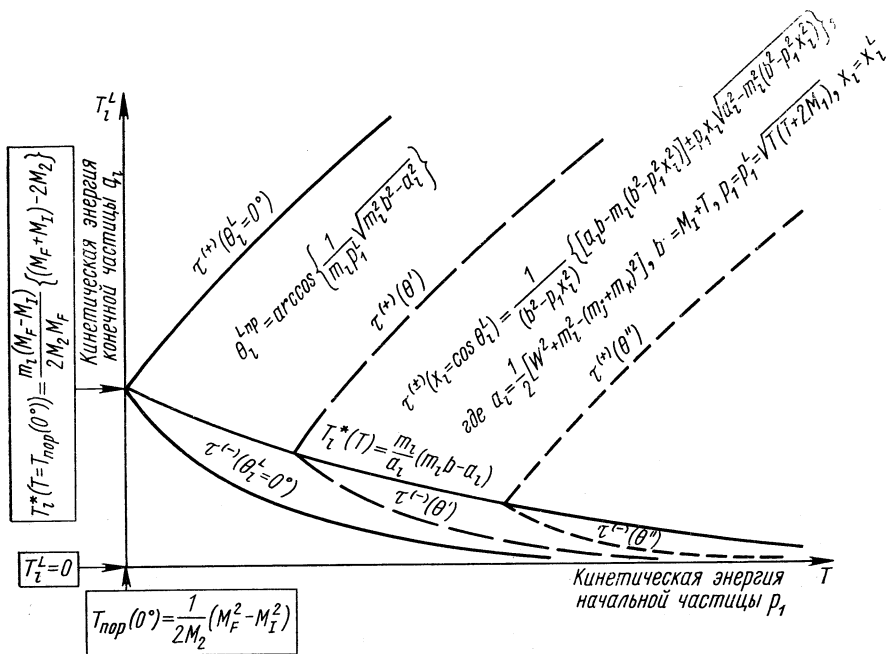


Рис. 8. Зависимость экстремальных кинетических энергий $\tau^{(\pm)}(T, \theta_l^L)$ конечной частицы q_l от угла ее вылета θ_l^L в L -системе и кинетической энергии T начальной частицы p_1 .
 Реакция $p_1 + p_2 \rightarrow q_j + q_k + q_l$ в случае $Q < 0$ ($M_F > M_l$) при $m_l \geq M_2$.

При кинетических энергиях частицы p_1 в интервале $T > T_{\text{пор}}(\pi/2)$ предельный угол отсутствует и частицы q_l вылетают под любыми углами в физическом интервале $0 \leq \theta_l^L \leq \pi$, $+1 \geq x_l^L \geq -1$; спектр их кинетических энергий заключен в интервале $0 \leq T_l^L \leq \tau^{(+)}(x_l^L)$;

б) $m_l = M_2$, т. е. масса конечной частицы q_l точно равна массе частицы мишени p_2 . В этом случае [см. формулу (120)] $T_{\text{пор}}(\pi/2) \rightarrow \infty$, в результате чего частица q_l при любой величине начальной кинетической энергии T частицы p_1 не может достичь

угла вылета $\theta_l^{Lпр} = 90^\circ$ (т.к. $\theta_l^{Lпр} < 90^\circ$), а также минимальной кинетической энергии $T_l^L = 0$, т.е. при любых величинах T для частиц q_l всегда имеют место ограничения $\theta_l^L < 90^\circ$, $T_{l\text{ мин}}^L(x_l^L) = \tau^{(-)}(x_l^L) > 0$; спектр их кинетических энергий заключен в интервале $\tau^{(-)}(x_l^L) \leq T \leq \tau^{(+)}(x_l^L)$. Поведение всех характерных кривых изображено на рис. 8;

в) $m_l > M_2$. В этом случае в эндотермических реакциях с $n = 3$ всегда существует предельный угол вылета у конечной частицы q_l , т.е. при любых энергиях T выполняется условие $m_l b - a_l > 0$. Поведение всех характерных кривых подобно случаю б) и схематично изображено на рис. 8.

2. Случай $Q > 0$ ($M_I > M_F$) [9, 17]. Реакция экзотермическая — порога реакции не существует и она протекает практически при любых кинетических энергиях T .

а) $m_l < M_2$. Конечные частицы q_l вылетают под всеми углами в интервале $0^\circ \leq \theta_l^L \leq \pi$, $+1 \geq x_l^L \geq -1$ с кинетическими энергиями в интервале $0 \leq T_l^L \leq \tau^{(+)}(x_l^L)$;

б) $m_l \geq M_2$. В этом случае в интервале начальных кинетических энергий $0 \leq T < T_{\text{пор}}(\pi/2)$ разрешен весь физический интервал углов вылета, $0^\circ \leq \theta_l^L \leq \pi$, $+1 > x_l^L \geq -1$; кинетические энергии конечных частиц q_l заключены в интервале $0 \leq T_l^L \leq \tau^{(+)}(x_l^L)$. Для начальных энергий $T \geq T_{\text{пор}}(\pi/2)$ возникают предельные углы вылета у частиц q_l и спектр их кинетических энергий заключен в интервале $\tau^{(-)}(x_l^L) \leq T_l^L \leq \tau^{(+)}(x_l^L)$.

Изложенная в данном разделе схема кинематического анализа включает основные практически важные этапы кинематического описания реакций столкновения с тремя частицами в конечном канале, и ее применение требует предварительного знания только масс покоя участвующих частиц.

3. ФАЗОВЫЕ ОБЪЕМЫ КОНЕЧНЫХ СОСТОЯНИЙ В РЕАКЦИЯХ ТИПА $p_1 + p_2 \rightarrow q_j + q_k + q_l$

Интегральное представление фазового объема K-порядка

Для реакций с $n = 3$ исходное выражение для фазового объема η -порядка в возможном для него интервале $0 \leq \eta \leq K$, где $K = 3 \cdot 3 - 4 = 5$, следует из общего выражения (33) при $n = 3$:

$$d^5\Phi_{ij}^{S_l(\pm)} = c \frac{1}{F} \{ \rho^{(\pm)}(x_j^l) dx_j^l d\varphi_j^l \} \{ q_l^S dq_{l0}^S dx_l^S d\varphi_l^S \}, \quad (131)$$

$(j \leftrightarrow k)$

где функция $\rho^{(\pm)}(x_j^l)$, определенная в (28), для реакций с $n = 3$ с учетом выражений (93) и (94) для $q_{j0}^{l(\pm)}(x_j^l)$ и $q_j^{l(\pm)}(x_j^l)$ принимает

ВИД

$$\begin{aligned} \rho^{(\pm)}(x_j^l) &= [q_j^{l(\pm)}(x_j^l)]^2 \{ |R_{l0} q_j^{l(\pm)}(x_j^l) - R_l q_{j0}^{l(\pm)}(x_j^l) x_j^l| \}^{-1} = \\ &= [q_j^{l(\pm)}(x_j^l)]^2 \{ | \sqrt{V_{jk}^2 q_j^{D2} - m_j^2 R_l^2 (1 - x_j^2)} | \}^{-1}. \end{aligned} \quad (132)$$

Выражение (131) представляет собой фазовый объем максимального, $K = 5$, порядка дифференциальности, сопоставляемый идеально кинематически полному эксперименту для реакций с $n = 3$, в котором регистрируются на совпадения конечные частицы с индексами l и j (или k), причем у частицы с индексом l фиксируются ее кинематические величины $q_{l0}^S, x_l^S = \cos \theta_l^S, \varphi_l^S$ и у частицы с индексом j (или k) — $x_j^l = \cos \theta_j^l$ и φ_j^l (или $x_k^l = \cos \theta_k^l$ и φ_k^l) в их бесконечно малых промежутках $dq_{l0}^S, dx_l^S, d\varphi_l^S$ и $dx_k^l, d\varphi_k^l$ соответственно. Здесь S означает произвольную систему отсчета; верхний индекс l соответствует произвольной R_Γ -системе.

Реально осуществимый кинематический полный эксперимент отличается от идеального тем, что выделяемые интервалы всех пяти кинематических переменных $q_{l0}^S, x_l^S, \varphi_l^S$ и x_j^l, φ_j^l (x_k^l, φ_k^l) имеют хотя и малые, но вполне конечные размеры.

Корректная процедура выделения динамической информации из экспериментальных данных описана выше [см. формулы (18), (19) и (35), (36)], и для дальнейшего изложения важно требование использовать при сравнении с экспериментом теоретические величины, интегральные по малой, но конечной области всех независимых кинематических переменных, выделяемой в кинематически полном эксперименте. Пятикратное интегрирование можно выполнить только численно, и для (131) [с учетом (132)] следует указать необходимую математическую процедуру численного интегрирования, соответствующую условиям реально осуществимого кинематически полного эксперимента.

Таким образом, чтобы выделить в соответствии с (35) и (36) динамическую информацию из экспериментальных данных, необходимо использовать интегральную форму, получаемую из (131) и имеющую вид

$$\begin{aligned} \Delta^5 \Phi_{lj}^{Sl(\pm)} &= c \frac{1}{F} \int_{\varphi_l}^{\varphi_l''} d\varphi_l^S \int_{x_j^l}^{x_j^{l''}} dx_j^S \int_{q_{l0}^S}^{q_{l0}^{S''}} dq_{l0}^S \sqrt{q_{l0}^{S2} - m_l^2} \times \\ &\times \int_{x_j^l}^{x_j^{l''}} \rho^{(\pm)}(x_j^l) dx_j^l \int_{\varphi_j^l}^{\varphi_j^{l''}} d\varphi_j^l, \end{aligned} \quad (133)$$

где интегрирование ведется по малым, но конечным интервалам:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_j^l &= \varphi_j'' - \varphi_j', & \Delta x_j^l &= x_j' - x_j, & \Delta q_{i_0}^S &= q_{i_0}'' - q_{i_0}', \\ \Delta x_i^S &= x_i'' - x_i', & \Delta\varphi_i^S &= \varphi_i'' - \varphi_i',\end{aligned}$$

причем, как легко убедиться, пределы переменных частицы j зависят от значений переменных частицы l .

Структура дифференциала $d^5\Phi_{lj}^{S_l(\pm)}$, который является релятивистским инвариантом, такова, что сомножители, относящиеся к частицам l и j , заключенные в фигурные скобки в правой части (131), по отдельности являются релятивистскими инвариантами и, следовательно, могут вычисляться независимо в любых системах отсчета. Последнее утверждение относится и к интегральной форме (133). Используя это обстоятельство для интегрирования по x_j^l в (133) в системах отсчета с $R_l \neq 0$ и $R_l = 0$ (D -система), легко находим первообразную

$$\begin{aligned}F(x_j^l) &= \int \rho(x_j^l) dx_j^l = \frac{q_j^D}{\omega_{jk}} \int dx_j^D = \frac{q_j^D}{\omega_{jk}} x_j^D = \\ &= \frac{1}{R_l} \left[q_{j_0}^l(x_j^l) - \frac{R_{l_0}}{\omega_{jk}} q_{j_0}^D \right],\end{aligned}\quad (134)$$

где учтено, что в D -системе ($R_l = 0$) из (132) следует $\rho^D = q_j^D/\omega_{jk} = \text{const}$ и что связь x_j^D и $q_{j_0}^D(x_j^l)$ дается соотношением (103). Замечая, что $R_{l_0} q_{j_0}^D/(R_l \omega_{jk}) = \text{const}$ и не зависит от x_j^l , и выделяя области (+) и (-) решений, получаем другое выражение для первообразной

$$F^{(\pm)}(x_j^l) = \int \rho^{(\pm)}(x_j^l) dx_j^l = (\pm) \left[\frac{1}{R_l} q_{j_0}^{l(\pm)}(x_j^l) \right],\quad (135)$$

использование которого при вычислениях удобнее, чем (134). Непосредственное вычисление неопределенного интеграла для подынтегральной функции (132) приводит именно к первообразной (135) (см. приложение 2 работы [22]).

Первообразная фазового объема, соответствующая сумме фазовых объемов для (+) и (-) функций $q_{j_0}^{l(\pm)}(x_j^l)$ частицы q_j , следует из (135) с учетом (93):

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x_j^l) &= F^{(+)}(x_j^l) - F^{(-)}(x_j^l) = \frac{1}{R_l} [q_{j_0}^{l(+)}(x_j^l) - q_{j_0}^{l(-)}(x_j^l)] = \\ &= \frac{2x_j^l}{[\omega_{jk}^2 + R_l^2(1 - x_j^{l2})]} \sqrt{\omega_{jk}^2 q_j^{D2} - m_j^2 R_l^2 (1 - x_j^{l2})}.\end{aligned}\quad (136)$$

Последующие интегрирования (либо нахождение первообразных) не удается выполнить аналитически, и их выполняют численно.

С учетом первообразной (135) интегральное представление для фазового объема порядка $K = 5$ для реакций с $n = 3$ имеет вид

$$\Delta^5 \Phi_{ij}^{Sl(\pm)} = c \frac{1}{F} \int_{\varphi_i^l}^{\varphi_i^r} d\varphi_i^S \int_{x_i^l}^{x_i^r} dx_i^S \int_{q_{i0}^l}^{q_{i0}^r} V \sqrt{q_{i0}^{S2} - m_i^2} \times \\ \times \left\{ (\pm) \frac{1}{R_i} q_{j0}^{l(\pm)}(x_j^l) \Big|_{x_j^l}^{x_j^r} \varphi_j^l \Big|_{\varphi_j^l}^{\varphi_j^r} \right\} dq_{i0}^S. \quad (137)$$

Фазовый объем состояний одной конечной частицы

Фазовый объем $\eta = 3$ порядка дифференциальности, соответствующий регистрации только одной частицы конечного канала, например частицы q_l , с ее кинематическими величинами q_{i0}^S , x_i^S , φ_i^S в произвольной системе отсчета S следует из (137) после выполнения интегрирований по x_j^l и φ_j^l в их полных допустимых интервалах для сумм (+) и (-) ветвей. Эти два интегрирования легко выполняются с помощью первообразной (136), а именно

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi_j^l \int_{x_{j\text{мин}}(\pm)}^{+1} \sum \rho^{(\pm)}(x_j^l) dx_j^l = 2\pi \tilde{F}(x_j^l) \Big|_{x_{j\text{мин}}}^{+1} = \\ = \frac{2\pi \cdot 2x_j^l}{[\omega_{jk}^2 + R_l^2(1 - x_j^{l2})]} V \sqrt{\omega_{jk}^2 q_j^{D2} - m_j^2 R_l^2(1 - x_j^{l2})} \Big|_{x_{j\text{мин}}}^{+1} = 4\pi \frac{q_j^D}{\omega_{jk}}, \quad (138)$$

где для произвольных R_l -систем необходимо иметь в виду, что а) $x_{j\text{мин}} = A_j^D = (m_j R_l)^{-1} | \sqrt{m_j^2 R_l^2 - \omega_{jk}^2 \cdot q_j^{D2}} |$ [см. (96)] при $R_l \geq (m_j)^{-1} \omega_{jk} \cdot q_j^D$; б) $x_{j\text{мин}} = 0$ при $0 \leq R_l \leq (m_j)^{-1} \omega_{jk} \cdot q_j^D$.

Учитывая (138), получаем следующее выражение для искомого фазового объема

$$d^3 \Phi_l^S = c \frac{1}{F} \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi_j^l \int_{x_{j\text{мин}}(\pm)}^{+1} \sum \rho^{(\pm)}(x_j^l) dx_j^l \right\} q_l^S dq_{i0}^S dx_i^S d\varphi_i^S = \\ = \frac{c}{F} \{q_l^S J\} dq_{i0}^S dx_i^S d\varphi_i^S = 4\pi \frac{c}{F} \left\{ q_l^S \frac{q_j^D}{\omega_{jk}} \right\} dq_{i0}^S dx_i^S d\varphi_i^S, \quad (139)$$

которое имеет место для любых систем отсчета S .

Для любых конечных малых интервалов $\Delta q_{i0}^S = q_{i0}^r - q_{i0}^l$, $\Delta x_i^S = x_i^r - x_i^l$, $\Delta \varphi_i^S = \varphi_i^r - \varphi_i^l$, удовлетворяющих условиям $\Delta q_{i0}^S \leq q_{i0}^S$, $\Delta x_i^S \ll 1$ (при отсутствии поляризацій величина интервала $\Delta \varphi_i^S$ может быть любой в пределах $0 \leq \Delta \varphi_i^S \leq 2\pi$), учитывая их независимость друг от друга и применяя теорему

о среднем, получаем (приближенное) выражение

$$\Delta^3 \Phi_l^S \approx 4\pi \frac{c}{F} \left\{ q_l^S \frac{q_j^D}{\omega_{jk}} \right\}_{Av} \Delta q_{l0}^S \Delta x_l^S \Delta \Phi_l^S, \quad (140)$$

где символ Av означает усреднение по малым интервалам Δq_{l0}^S , Δx_l^S и $\Delta \Phi_l^S$. Для указанных интервалов можно построить отношение

$$\Delta^3 \Phi_l^S / (\Delta q_{l0}^S \Delta x_l^S \Delta \Phi_l^S) \approx 4\pi \frac{c}{F} \left\{ q_l^S \frac{q_j^D}{\omega_{jk}} \right\}_{Av}, \quad (141)$$

величина которого воспроизводит среднюю по области $\Delta^3 D_l^S = \Delta q_{l0}^S \cdot \Delta x_l^S \cdot \Delta \Phi_l^S$ величину плотности фазового объема ($d^3 \Phi_j^S / dq_{l0}^S \cdot dx_l^S \cdot d\Phi_l^S = \phi(q_{l0}^S, x_l^S, \Phi_l^S)$), описывающую кинематический вклад в плотность состояний частицы q_l .

Экспериментально измеренная величина дифференциального сечения $\Delta^3 \sigma_l^{\text{экс}}$ (или $\Delta^3 \sigma_l^{\text{экс}} / \Delta q_{l0}^S \cdot \Delta x_l^S \cdot \Delta \Phi_l^S$), отнесенная к величине фазового объема (140) (или плотности фазового объема (141)), дает усредненный по малым интервалам переменных частицы q_l и проинтегрированный по всему интервалу изменения переменных частицы q_j (q_k) квадрат матричного элемента реакции с $n = 3$, а именно:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^3 \sigma_l^{\text{экс}}}{\Delta^3 \Phi_l^{\text{теор}}} &= \left(\frac{\Delta^3 \sigma_l^{\text{экс}}}{\Delta q_{l0}^S \Delta x_l^S \Delta \Phi_l^S} \right) / \left(\frac{\Delta^3 \Phi_l^{\text{теор}}}{\Delta q_{l0}^S \Delta x_l^S \Delta \Phi_l^S} \right) \approx \\ &\approx \left(\frac{\Delta^3 \sigma_l^{\text{экс}}}{\Delta q_{l0}^S \Delta x_l^S \Delta \Phi_l^S} \right) \left[4\pi \frac{c}{F} \left\{ q_l^S \frac{q_j^D}{\omega_{jk}} \right\}_{Av} \right]^{-1} \approx \\ &\approx \frac{x_j, \Phi_j}{\left\{ \sum_{\text{спин}} |\mathcal{M}_{fi}(q_{l0}^S, x_l^S)|^2 \right\}_{Av}}, \end{aligned} \quad (142)$$

где верхняя черта означает интегрирование в допустимых интервалах переменных x_j и Φ_j частицы q_j .

Использование выражения (142) позволяет извлекать из экспериментальных данных, получаемых при регистрации частицы q_l в интервалах ее кинематических переменных Δq_{l0}^S , Δx_l^S и $\Delta \Phi_l^S$, сведения о динамике реакций (1) с $n = 3$ в виде проинтегрированного в допустимых интервалах изменения переменных x_j и Φ_j частицы q_j квадрата матричного элемента в зависимости от величин переменных q_{l0}^S и x_l^S частицы q_l^S . При этом подразумевается, что для переменных q_{l0}^S и x_l^S соблюдены ограничения, диктуемые законами сохранения энергии и импульса.

Приведем также выражения для плотностей фазовых объемов частицы q_l , соответствующих измерениям ее энергетического и углового распределений, наряду с выражением для полного фазового объема реакций (1) с $n = 3$, которые следуют из (139) в результате необходимого числа интегрирований.

Плотность фазового объема энергетического спектра частиц q_l :

$$\begin{aligned} \phi(T_l^S) &= \frac{d\Phi_l^S}{dq_{l0}^S} = \int_{x_{l\text{ мин}}^S}^{+1} \left(\frac{d^2\Phi_l^S}{dq_{l0}^S dx_l^S} \right) dx_l^S = \\ &= 2\pi \cdot 4\pi \frac{c}{F} \int_{x_{l\text{ мин}}^S}^{+1} \left\{ q_l^S \frac{q_j^D}{\omega_{jk}} \right\} dx_l^S, \end{aligned} \quad (143)$$

где для $S = L$ величина $x_{l\text{ мин}}^L$ определяется на основе анализа, изложенного выше, а для $S = B, D$ всегда имеет место $x_{l\text{ мин}}^{B, D} = -1$.

Плотность фазового объема углового распределения частиц q_l :

$$\begin{aligned} \phi(x_l^S) &= \frac{d\Phi_l^S}{dx_l^S} = \int_{q_{l0\text{ мин}}^S(x_l^S)}^{q_{l0\text{ макс}}^S(x_l^S)} \left(\frac{d^2\Phi_l^S}{dq_{l0}^S dx_l^S} \right) dq_{l0}^S = \\ &= 2\pi \cdot 4\pi \frac{c}{F} \int_{q_{l0\text{ мин}}^S(x_l^S)}^{q_{l0\text{ макс}}^S(x_l^S)} \left\{ q_l^S \frac{q_j^D}{\omega_{jk}} \right\} dq_{l0}^S, \end{aligned} \quad (144)$$

где $q_{l0(\text{макс})}^L(x_l^L) = q_{l0(\pm)}^L(x_l^L)$ для $S = L$ определяется выражением (113) [или (114), если интегрирование выполнять по $T_{l0}^L = q_{l0}^L - m_l$]; для $S = B, D$ $q_{l0\text{ макс}}^B$ и $q_{l0\text{ макс}}^D$ величины определяются при условии $\omega_{jk}^2 \rightarrow (\omega_{jk}^2)_{\text{мин}} = (m_j + m_k)^2$ из (68) и (76) соответственно, а $q_{l0\text{ мин}}^B = q_{l0\text{ мин}}^D = m_l$.

Полный фазовый объем Φ^{tot} , сопоставляемый полному сечению реакции σ^{tot} , определяется выражениями

$$\begin{aligned} \Phi^{\text{tot}}(W) &= \int_{x_{l\text{ мин}}^S}^{+1} dx_l^S \int_{q_{l0\text{ мин}}^S(x_l^S)}^{q_{l0\text{ макс}}^S(x_l^S)} \left(\frac{d^2\Phi_l^S}{dq_{l0}^S dx_l^S} \right) dq_{l0}^S = \\ &= 2\pi \cdot 4\pi \cdot \frac{c}{F} \int_{x_{l\text{ мин}}^S}^{+1} dx_l^S \int_{q_{l0\text{ мин}}^S(x_l^S)}^{q_{l0\text{ макс}}^S(x_l^S)} \left\{ q_l^S \frac{q_j^D}{\omega_{jk}} \right\} dq_{l0}^S, \end{aligned} \quad (145)$$

причем его величина есть релятивистский инвариант.

Фазовый объем, соответствующий кинематически полному эксперименту для реакций с $n = 3$

Главной задачей экспериментального исследования реакций с $n = 3$ является постановка кинематически полного эксперимента, накопление экспериментальных данных максимального, $K = 5$, порядка дифференциальности и выделение из них на основе соотношений (35) и (36) динамической информации в виде экспериментально измеренного квадрата матричного элемента $\sum_{\text{спи.л}} |\mathcal{M}_{fi}(z_1, z_2, \dots, z_K)|^2$ как функции всех пяти независимых кинематических переменных z_1, z_2, \dots, z_K (или x_1, x_2, \dots, x_K). Кинематически полный эксперимент в общих чертах описан выше.

Переходя к описанию реально осуществимого кинематически полного эксперимента в лабораторной системе, следует учитывать следующее:

1) угловые переменные x_i^L и φ_i^L частицы q_i фиксируются всегда в L -системе и их интервалы Δx_i^L и $\Delta \varphi_i^L$ желательно ориентировать по линиям координатной сетки ее сферической системы;

2) угловые переменные x_j и φ_j могут фиксироваться как в R_i^L , так и в L -системе, при этом их взаимная связь определяется соотношениями (56)–(59).

Учитывая наличие азимутальной симметрии в R_i^L -системе и разделение переменных x_j^i и φ_j^i в (131), представляется желательным осуществлять фиксирование их интервалов Δx_j^i и $\Delta \varphi_j^i$ именно в R_i^L -системе. Однако практическое осуществление такой фиксации вследствие наличия интервалов Δq_i^L и Δx_i^L , приводящих к «подвижности» в пространстве вектора \mathbf{R}_i^L (величина и направление вектора \mathbf{R}_i^L зависят от вектора \mathbf{q}_i^L , т. е. от q_{i0}^L и x_i^L, φ_i^L), чрезвычайно затруднительно. Это означает, что в реально осуществимом кинематически полном эксперименте кинематические переменные обеих частиц q_i и q_j проще фиксировать в L -системе.

Такое положение приводит к следующим осложнениям при вычислении фазовых объемов вида (133):

а) подынтегральная функция $\rho^{(\pm)}(x_j^i)$ в L -системе зависит в соответствии с (56) от переменных x_j^i, φ_j^i и φ_i^L и имеет вид *

$$\rho^{(\pm)}(x_j^i, \varphi_j^i; \varphi_i^L) = [q_j^{L(\pm)}(x_j^i, \varphi_j^i; \varphi_i^L)]^2 \times \\ \times \{ | \sqrt{\omega_{jk}^2 q_j^{D2} - m_j^2 R_i^2 [1 - (x_j^i \cos \varepsilon_i - \sin \varepsilon_i \sqrt{1 - x_j^{L2} \cos(\varphi_j^i - \varphi_i^L)})^2]} | \}^{-1}, \quad (146)$$

* В преобразованиях (56) — (59) отсчет азимутального угла φ_j^L выполнялся от плоскости, для которой принималось $\varphi_i^L = 0$. В случае произвольных значений угла φ_i^L в (56) — (59) необходимо выполнить замену: $\varphi_j^L \rightarrow (\varphi_j^L - \varphi_i^L)$, т. е. всюду полагать $y' = \cos(\varphi_j^L - \varphi_i^L)$.

где $q_j^{L(\pm)}(x_j^L, \varphi_j^L; \varphi_l^L)$ задается выражением (94) при $x_l^L = x_j^L \cos \varepsilon_l - \sin \varepsilon_l \sqrt{1 - x_j^{L2}} \cos(\varphi_j^L - \varphi_l^L)$, как этого требует преобразование (56) с учетом того, что $y' = \cos(\varphi_j^L - \varphi_l^L)$;

б) интегрирования по x_j^L и φ_j^L выполняются по правилам двойного интегрирования с подынтегральной функцией (146), зависящей от этих переменных;

в) если в R_l -системе существует предельное значение $x_j^L = A_j$, определяемое из (96), то предельный угол θ_j^{Lnp} в L -системе также существует и является функцией¹ азимутальных углов φ_j^L и φ_l^L частиц q_j и q_l ; он определяется из (56) при $x = A_j$, $x' = D_j$, $y' = \varphi_j^L - \varphi_l^L$ и выражение для него имеет вид

$$D_j(\varphi_j^L - \varphi_l^L) = \cos \theta_j^{Lnp} = \frac{A_j \cos \varepsilon_l + \sin \varepsilon_l \cdot \cos(\varphi_j^L - \varphi_l^L) \sqrt{(\cos^2 \varepsilon_l + \sin^2 \varepsilon_l \cdot \cos^2(\varphi_j^L - \varphi_l^L)) - A_j^2}}{\cos^2 \varepsilon_l + \sin^2 \varepsilon_l \cdot \cos^2(\varphi_j^L - \varphi_l^L)}. \quad (147)$$

В результате для фазового объема $K = 5$ порядка дифференциальности, соответствующего кинематически полному эксперименту в L -системе для реакций с $n = 3$, получаем выражение

$$\Delta^5 \Phi_{(j \leftrightarrow k)}^{LL(\pm)} = c \frac{1}{F} \int_{\varphi_l^L}^{\varphi_j^L} d\varphi_l^L \int_{x_l^L}^{x_j^L} dx_l^L \int_{q_{l0}^L}^{q_{j0}^L} dq_{l0}^L \sqrt{q_{l0}^{L2} - m_l^2} \times \\ \times \int_{\varphi_j^L}^{\varphi_l^L} d\varphi_j^L \int_{x_j^L}^{x_l^L} \rho^{(\pm)}(x_j^L, \varphi_j^L; q_{l0}^L, x_l^L \varphi_l^L) dx_j^L. \quad (148)$$

где в случае, когда интервалы угловых переменных ориентированы по линиям сферической координатной сетки в L -системе, все пределы интегрирования не зависят друг от друга. Расположение регистрирующих приборов, соответствующее кинематически полному эксперименту в L -системе, изображено на рис. 9.

Постановка кинематически полного эксперимента требует соблюдения ряда условий и ограничений. Во-первых, необходимо, чтобы интервалы измеряемых кинематических переменных частиц q_l и q_j удовлетворяли условиям

$$\Delta q_{l0}^L \ll \bar{q}_{l0}^L, \Delta x_l^L \ll 1, \Delta \varphi_l^L \ll \pi; \Delta x_j^L \ll 1, \Delta \varphi_j^L \ll \pi. \quad (149)$$

В случае, когда регистрирующий прибор имеет достаточно малые размеры Δh и Δl (см. рис. 9), для выделяемых им угловых интервалов имеют место соотношения $\Delta x \approx \Delta h/r$ и $\Delta \varphi \approx \Delta l/(r \cdot \sin \theta^L)$, где r — расстояние от мишени (точки столкновения начальных

частиц p_1 и p_2) до места расположения прибора. Тогда условия (149) для размеров регистрирующих приборов частиц q_l и q_j принимают вид

$$\Delta q_{l0}^L \ll \bar{q}_{l0}^L, \Delta h_l \ll r_l, \Delta l_l \ll \pi r_l \sin \theta_l^L; \Delta h_j \ll r_j, \Delta l_j \ll \pi r_j \sin \theta_j^L; \quad (150)$$

$$\Delta x_l^L \approx \Delta h_l / r_l, \Delta \varphi_l^L \approx \Delta l_l / (r_l \sin \theta_l^L); \Delta x_j^L \approx \Delta h_j / r_j,$$

$$\Delta \varphi_j^L \approx \Delta l_j / (r_j \sin \theta_j^L). \quad (151)$$

При выполнении условий (150) соотношения (151) могут использоваться для определения пределов интегрирования в (148),

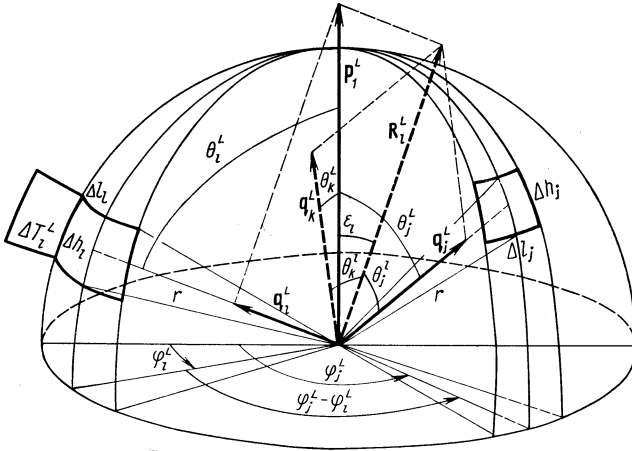


Рис. 9. Схема кинематически полного эксперимента в L -системе в случае реакций $p_1 + p_2 \rightarrow q_j + q_k + q_l$. Счетчик частиц q_l , имеющий линейные размеры Δl_l и Δh_l , регистрирует их кинетические энергии в интервале $T_l^L, T_l^L + \Delta T_l^L$. Счетчик частиц q_j , имеющий линейные размеры Δl_j и Δh_j , регистрирует факт пролета частиц q_j в выделяемом им телесном угле. Регистрация частиц q_l и q_j производится в схеме совпадений. На рисунке $r_l = r_j = r$.

поскольку $\Delta q_{l0}^L = q_{l0}'' - q_{l0}'$, $\Delta x_l^L = x_l'' - x_l'$, $\Delta \varphi_l^L = \varphi_l'' - \varphi_l'$, $\Delta x_j^L = x_j'' - x_j'$, $\Delta \varphi_j^L = \varphi_j'' - \varphi_j'$. Во-вторых, кинематически полный эксперимент предполагает прохождение допустимых в L -системе интервалов полярных углов θ_j^L ($x_j^L = \cos \theta_j^L$) и азимутальных углов φ_j^L частицы q_j при любых допустимых фиксированных величинах кинематических переменных q_{l0}^L, x_l^L и φ_l^L частицы q_l . Наиболее доступный способ пройти интервалы переменных x_j^L и φ_j^L состоит в том, что при каждом последовательно фиксируемом

значении переменной x_j^L прибор, фиксирующий кинематические величины x_j^L и φ_j^L , вращают по азимутальному углу φ_j^L в пределах его допустимых значений. Тогда для фиксированного значения x_j^L при условии, что в R_l^L -системе существует предельное значение $x_j^L = A_j$ [см. (96)], допустимые азимутальные углы φ_j^L лежат в интервале

$$\left\{ \arccos \frac{x_j^L \cos \varepsilon_l - A_j}{\sin \varepsilon_l \sqrt{1 - x_j^{L2}}} \right\} =$$

$$= (\varphi_j^L - \varphi_l^L)^{np} \leq (\varphi_j^L - \varphi_l^L) \leq \pi, \quad (152)$$

где для величин углов $(\varphi_j^L - \varphi_l^L) = \pi + \alpha > \pi$ следует использовать (152) для углов $\pi - \alpha$; величины фиксируемой переменной x_j^L могут лежать в интервале $D_j (\pi) \leq x_j^L \leq +1$. Из (152) следует, что только для величин x_j^L в интервале $D_j (0) \leq x_j^L \leq +1$ допустим весь интервал азимутальных углов $0 \leq (\varphi_j^L - \varphi_l^L) \leq 2\pi$ (рис. 10). В случае, когда предельный угол (96) отсутствует и допустимы все значения полярных углов θ_j^L в интервале $+1 \geq x_j^L \geq -1$, предельный угол (147) также отсутствует, условие (152) не существует и допустимы все азимутальные углы $0 \leq (\varphi_j^L - \varphi_l^L) \leq 2\pi$. В-третьих, в случае существования предельного

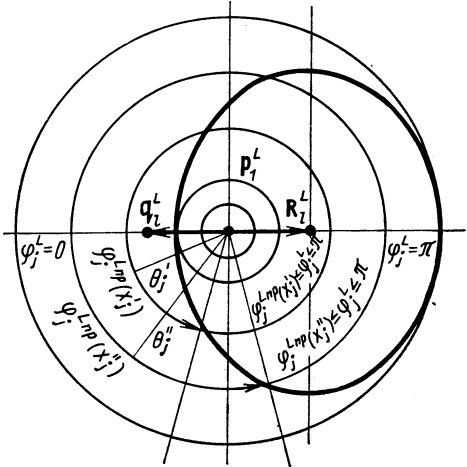


Рис. 10. Интервалы допустимых азимутальных углов (152) в L -системе, в которых могут регистрироваться частицы q_j в случае наличия у нее предельного полярного угла A_j (96) в R_l^L -системе и соответствующих предельных полярных углов D_j (147) в L -системе (жирная кривая эллипса).

На рисунке изображена ситуация рис. 3 в плоскости, перпендикулярной вектору p_l^L , направленному на зрителя. Счетчик частицы q_j вращается по азимутальному углу φ_j^L при фиксированных полярных углах $\theta_j^{L'}$, $\theta_j^{L''}$, ...

... ($x_j^L = \cos \theta_j^{L'}$, $x_j^L = \cos \theta_j^{L''}$...), которые могут лежать в интервале

$$0 \leq \theta_j^L \leq \arccos A_j + \varepsilon_l \quad [\cos(\theta_j^L)^{np} + \varepsilon_l] \leq x_j^L \leq +1.$$

На чертеже азимутальный угол φ_l^L частицы q_l совпадает с $\varphi_j^L = 0$.

угла (96) при подходе к предельному углу (147) [ему соответствует предельный азимутальный угол, определяемый из (152)] необходимо или убедиться, что счетчик частиц q_j полностью находится в кинематически разрешенной области, или при вычислениях фазового объема в (148) учитывать только ту часть выделяемой счетчиком области, которая кинематически разре-

шена. В-четвертых, при размещении счетчика частиц q_i (q_j) под весьма малым углом θ_i^L (θ_j^L) к направлению оси L -системы (вектор \mathbf{p}_1^L в случае неподвижной частицы p_2 и вектор $\mathbf{P}^L = \mathbf{p}_1^L + \mathbf{p}_2^L$ в случае встречных пучков) в соответствии с (151) выделяется большой интервал азимутальных углов φ_i^L (φ_j^L). Эта ситуация не удовлетворяет условиям (149) и кинематически полный эксперимент практически неосуществим вследствие понижения порядка дифференциальности [в (148) это соответствует интегрированию по интервалу $\Delta\varphi_i^L$ ($\Delta\varphi_j^L$) $\approx 2\pi$].

Из перечисленного видно, что кинематически полный эксперимент предъявляет весьма сложный комплекс требований к размерам и разрешающей способности регистрирующих приборов, которые должны быть удовлетворены при различных допустимых средних значениях пяти независимых кинематических переменных, фиксируемых в реакции с $n = 3$. Полный набор экспериментальных данных, которые следует получить в условиях кинематически полного эксперимента, должен представлять достаточно гладкую зависимость величин $\Delta^5\sigma_{ij}^{LL(\pm)\text{эк}}(q_{i0}^L, x_i^L, \varphi_i^L; x_j^L, \varphi_j^L)$ от всех пяти независимых кинематических переменных $q_{i0}^L, x_i^L, \varphi_i^L; x_j^L, \varphi_j^L$.

В результате экспериментально измеряемые в условиях кинематически полного эксперимента величины дифференциальных сечений $\Delta^5\sigma_{ij}^{LL(\pm)\text{эк}}$ и соответствующие им величины фазовых объемов $\Delta^5\Phi_{ij}^{LL(\pm)\text{теор}}$, вычисляемые по (148) с учетом ограничений (149)—(152), при подстановке в выражения (35) и (36) обеспечивают получение динамической информации в виде квадрата матричного элемента $\sum_{\text{спин}} |\mathcal{M}_{fi}(q_{i0}^L, x_i^L, \varphi_i^L; x_j^L, \varphi_j^L)|^2$ реакций с $n = 3$.

При использовании выражений (35) и (36) возникает практически важный вопрос о возможности замены вида

$$\Delta^5\Phi = \int \dots \int_{\Delta^5D} d^5\Phi = \int \dots \int \left(\frac{d^5\Phi}{d^5D} \right) d^5D \rightarrow \left(\frac{d^5\Phi}{d^5D} \right)_{Av} \Delta^5D, \quad (153)$$

где в соответствии с выражениями (131) и (146) в L -системе обозначено

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^5\Phi}{d^5D} \right)_{Av} &= \left(\frac{d^5\Phi_{ij}^{LL(\pm)}}{dq_{i0}^L dx_i^L d\varphi_i^L dx_j^L d\varphi_j^L} \right)_{Av} = \\ &= c \frac{1}{F} \{q_i^L \rho^{(\pm)}(q_{i0}^L, x_i^L, \varphi_i^L; x_j^L, \varphi_j^L)\}_{Av} \end{aligned} \quad (154)$$

и символ Av означает среднее по области Δ^5D . Ответ состоит в том, что в случае, когда в L -системе выполнены условия (149)—(151)

и малая область $\Delta^5 D$ может быть с большой точностью представлена в факторизованном виде:

$$\Delta^5 D = \int_{q_{l0}''}^{q_{l0}'} dq_{l0}^L \int_{x_i''}^{x_i'} dx_i^L \int_{\varphi_l''}^{\varphi_l'} d\varphi_l^L \int_{x_j''}^{x_j'} dx_j^L \int_{\varphi_j''}^{\varphi_j'} d\varphi_j^L \approx \Delta q_{l0}^L \Delta x_i^L \Delta \varphi_l^L \Delta x_j^L \Delta \varphi_j^L, \quad (155)$$

фазовый объем 5-порядка, соответствующий кинематически полному эксперименту, можно вычислить приближенно по формуле

$$(\Delta^5 \Phi_{ij}^{LL(\pm)})_{\text{прибл}} \approx c \frac{1}{F} \{ \bar{q}_{l0}^L, \bar{x}_i^L, \bar{\varphi}_l^L; \bar{x}_j^L, \bar{\varphi}_j^L \}_{Av} \times (\Delta q_{l0}^L \Delta x_i^L \Delta \varphi_l^L \Delta x_j^L \Delta \varphi_j^L), \quad (156)$$

где $\rho^{(\pm)}$ определяется формулой (146) в некоторой точке $\bar{x} = \{ \bar{q}_{l0}^L, \bar{x}_i^L, \bar{\varphi}_l^L; \bar{x}_j^L, \bar{\varphi}_j^L \}$ внутри пятимерной малой области (155); средняя по области $\Delta^5 D$ плотность фазового объема 5-порядка вычисляется по формуле

$$\left(\frac{d^5 \Phi_{ij}^{LL(\pm)}}{dq_{l0}^L dx_i^L d\varphi_l^L dx_j^L d\varphi_j^L} \right)_{Av} = \frac{\Delta^5 \Phi_{ij}^{LL(\pm)}}{\Delta q_{l0}^L \Delta x_i^L \Delta \varphi_l^L \Delta x_j^L \Delta \varphi_j^L} \approx \approx \frac{c}{F} \bar{q}_{l0}^L \rho^{(\pm)} (\bar{q}_{l0}^L, \bar{x}_i^L, \bar{\varphi}_l^L; \bar{x}_j^L, \bar{\varphi}_j^L), \quad (157)$$

где приближенное равенство имеет место в случае, когда используется выражение (156) для $\Delta^5 \Phi_{ij}^{LL(\pm)}$.

Точность вычислений по формуле (156) устанавливается непосредственными вычислениями по формуле (148). Без этой предварительной оценки точности формулу (156) нельзя с уверенностью использовать для выделения динамической информации. В частности, в случае существования предельного угла (147) функция (146) при значении предельного угла обращается в бесконечность, что означает неприменимость формулы (156) вблизи значения предельного угла (147). В этом случае обязательна формула (148). Использование точной формулы (148) рекомендуется в любом случае, однако трудность ее применения состоит в том, что пятикратный интеграл не имеет простого аналитического выражения и его приходится вычислять численно.

Преобразования плотностей дифференциальных сечений (функций σ -распределений)

Плотность дифференциального сечения K -порядка (функция σ -распределения K -порядка) определена в общем случае выражением (27'). Для реакций с $n = 3$ функции распределений порядков $0 < \eta \leq 5$ получают исходя из выражения (27'). Функция σ -рас-

$$\begin{aligned}
 & \text{пределения 5-порядка } f_{\sigma}^5 = p_{10} p_{20} (n_1 n_2 F)^{-1} \cdot f_{\sigma}^5 \\
 & f_{\sigma}(-q_{10}^S, x_i^S, \varphi_i^S; x_j^S, \varphi_j^S) = (d^5 \sigma_{ij}^{Sl(\pm)} / dq_{10}^S dx_i^S d\varphi_i^S dx_j^S d\varphi_j^S) = \\
 & = (d^5 \Phi_{ij}^{Sl(\pm)} / dq_{10}^S dx_i^S d\varphi_i^S dx_j^S d\varphi_j^S) \sum_{\text{спин}} |\mathcal{M}_{fi}(q_{10}^S, x_i^S, \varphi_i^S; x_j^S, \varphi_j^S)|^2 = \\
 & \quad = c \frac{1}{F} q_i^S \rho^{(\pm)}(x_j^S, \varphi_j^S; q_{10}^S, x_i^S, \varphi_i^S) \times \\
 & \quad \times \sum_{\text{спин}} |\mathcal{M}_{fi}(q_{10}^S, x_i^S, \varphi_i^S; x_j^S, \varphi_j^S)|^2, \quad (158)
 \end{aligned}$$

где $(d^5 \Phi_{ij}^{Sl(\pm)} / dq_{10}^S dx_i^S d\varphi_i^S dx_j^S d\varphi_j^S)$ — плотность фазового объема 5-порядка, определяемая выражением (131), а $\sum_{\text{спин}} |\mathcal{M}_{fi}(q_{10}^S, x_i^S, \varphi_i^S; x_j^S, \varphi_j^S)|^2$ — релятивистски инвариантный квадрат матричного элемента реакции с $n = 3$.

Поскольку дифференциальное сечение $d^5 \sigma_{ij}^{Sl(\pm)}$ и дифференциалы $q_i^S dq_{10}^S dx_i^S d\varphi_i^S, \rho^{(\pm)}(x_j^S, \varphi_j^S; q_{10}^S, x_i^S, \varphi_i^S) dx_j^S d\varphi_j^S$ по отдельности являются релятивистскими инвариантами, функция распределения $f_{\sigma}(q_{10}^S, x_i^S, \varphi_i^S; x_j^S, \varphi_j^S)$, определенная выражением (158), не является релятивистским инвариантом и при переходах в различные системы отсчета подвергается преобразованиям, которые задаются якобианами преобразований независимых кинематических переменных. Функцию распределения можно определить и инвариантным образом, для чего необходимо в (158) выполнить переход от неинвариантных независимых кинематических переменных к независимым кинематическим инвариантам. Указанные выше преобразования имеют практический интерес, если известна функция распределения хотя бы в одной системе отсчета. Так, корректно выполненный кинематически полный эксперимент позволяет в принципе получить экспериментальные значения функции распределения в L -системе вида

$$f_{\sigma}^{\text{экс}}(\bar{q}_{10}^L, \bar{x}_i^L, \bar{\varphi}_i^L; \bar{x}_j^L, \bar{\varphi}_j^L) = (d^5 \sigma_{ij}^{LL(\pm)} / dq_{10}^L dx_i^L d\varphi_i^L dx_j^L d\varphi_j^L)_{Av}^{\text{экс}}.$$

Располагая экспериментальными данными о функции распределения 5-порядка в L -системе, обычно ставят вопрос о виде функций распределений в других системах отсчета и о виде инвариантной функции распределения, не зависящей от системы отсчета.

Искомые преобразования легче установить, если с помощью соотношений (56) и (57) выполнить преобразование кинематических переменных частицы q_j из L -системы в R_i^L -систему. Легко убедиться, что якобиан этого преобразования равен единице, т. е. $dx_j^L d\varphi_j^L = dx_j^L d\varphi_j^L$ и, следовательно, имеет место равенство

$f_{\sigma}(q_{l_0}^L, x_l^L, \varphi_l^L; x_j^l, \varphi_j^l) = f_{\sigma}(q_{l_0}^L, x_l^L, \varphi_l^L; x_j^L, \varphi_j^L)$. Это преобразование полезно тем, что при дальнейших преобразованиях можно использовать свойство азимутальной симметрии в R_l^S -системах для частицы q_j при учете инвариантности азимутального угла.

Якобиан преобразований функции распределения 5-порядка, заданной через неинвариантные кинематические переменные, следует из учета инвариантности дифференциалов $q_l dq_{l_0} dx_l d\varphi_l$ и $\rho^{(\pm)} dx_j d\varphi_j$. В результате, преобразования функции распределения 5-порядка при переходе из L -системы для частицы q_l и R_l^L -системы для частицы q_j в любую R_l^S -систему имеют вид

$$f_{\sigma}(q_{l_0}^S, x_l^S, \varphi_l^S; x_j^S, \varphi_j^S) = \frac{q_l^S}{q_l^L} \cdot \frac{\rho(x_j^S; q_{l_0}^S, x_l^S)}{\rho(x_j^L; q_{l_0}^L, x_l^L)} f_{\sigma}(q_{l_0}^L, x_l^L, \varphi_l^L; x_j^l, \varphi_j^l), \quad (159)$$

где функция $\rho^{(\pm)}(x_j^S, \varphi_j^S; q_{l_0}^S, x_l^S, \varphi_l^S)$ * в любой R_l^S -системе задана выражением (132), связь угловых переменных x_j частицы q_j находится с помощью инварианта $q_j \cdot \mathcal{R}_l$, $q_{l_0}^S$ и x_l^S могут быть вычислены на основе рассмотрения удобных для этой цели кинематических инвариантов t_{li}^2 . Например, функция распределения 5-порядка в D -системе следует из (159) с учетом (132) в D -системе:

$$f_{\sigma}(q_{l_0}^D, x_l^D, \varphi_l^D; x_j^D, \varphi_j^D) = \frac{q_l^D}{q_l^L} \cdot \frac{q_j^D (\omega_{jk})^{-1}}{\rho(x_j^L; q_{l_0}^L, x_l^L)} f_{\sigma}(q_{l_0}^L, x_l^L, \varphi_l^L; x_j^l, \varphi_j^l), \quad (160)$$

где величины q_j^D и q_l^D определяются из (74) и (76); связь x_j^D и x_j^l следует из (100) или (102); величина x_l^D следует из рассмотрения инварианта $t_{l_2}^2$ (или $t_{l_1}^2$) в L - и D -системах [см. (60)]; $\varphi_j^D \equiv \varphi_j^l$, $\varphi_l^D \equiv \varphi_l^l$.

Инвариантную функцию распределения 5-порядка находят вычислением якобиана перехода от неинвариантных независимых переменных к независимым кинематическим инвариантам. В частности, если в результате кинематически полного эксперимента получена функция распределения $f_{\sigma}(q_{l_0}^L, x_l^L, \varphi_l^L; x_j^l, \varphi_j^l)$, то должен быть найден якобиан перехода от переменных $q_{l_0}^L, x_l^L, \varphi_l^L; x_j^l, \varphi_j^l$ к независимым инвариантам $\omega_{jk}^2, t_{li}^2, \omega_{jl}^2, t_{ji}^2$, определенным в (60)–(62); при этом инвариант W^2 можно считать фиксирован-

* Здесь в явном виде указана зависимость от переменных $q_{l_0}^S$ и x_l^S , входящих в выражения для $R_{l_0}^S$ и R_l^S , которые рассматривались фиксированными параметрами.

ным. Найдем искомый якобиан для случая неподвижной мишени ($p_2^L = 0$, $F = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2} = M_2 p_1^L$): а) используя выражения (60) для инварианта ω_{jk}^2 и для t_{li}^2 , находим

$$\begin{aligned} d\omega_{jk}^2 dt_{li}^2 &= \left| \frac{\partial \omega_{jk}^2}{\partial q_{l0}^L} \cdot \frac{\partial t_{li}^2}{\partial x_l^L} - \frac{\partial \omega_{jk}^2}{\partial x_l^L} \cdot \frac{\partial t_{li}^2}{\partial q_{l0}^L} \right| dq_{l0}^L dx_l^L = \\ &= 4M_2 p_1^L q_l^L dq_{l0}^L dx_l^L = 4F q_l^L dq_{l0}^L dx_l^L; \end{aligned} \quad (161)$$

б) используя выражения (61) для инварианта ω_{jl}^2 и для t_{ji}^2 , находим

$$\begin{aligned} d\omega_{jl}^2 \cdot dt_{ji}^2 &= \left| \frac{\partial \omega_{jl}^2}{\partial \varphi_{jl}^L} \cdot \frac{\partial t_{ji}^2}{\partial x_j^L} - \frac{\partial \omega_{jl}^2}{\partial x_j^L} \cdot \frac{\partial t_{ji}^2}{\partial \varphi_{jl}^L} \right| dx_j^L \cdot d\varphi_{jl}^L = \\ &= \{4F \cdot q_l^L \sqrt{1 - x_l^{L2}} \cdot \sqrt{1 - x_j^{L2}} q_j^L(x_j^L) \cdot \rho(x_j^L) \cdot \sin \varphi_{jl}^L\} dx_j^L \cdot d\varphi_{jl}^L, \end{aligned} \quad (162)$$

где при вычислении производные $\partial t_{j1}^2 / \partial x_j^L$, $\partial t_{j1}^2 / \partial \varphi_{jl}^L$ и $\partial t_{j2}^2 / \partial x_j^L$ следует представить в виде $\frac{\partial t_{j1}^2}{\partial x_j^L} = \frac{\partial \omega_{j1}^2}{\partial x_j^L} - \frac{\partial t_{j2}^2}{\partial x_j^L}$, $\frac{\partial t_{j1}^2}{\partial \varphi_{jl}^L} = \frac{\partial \omega_{j1}^2}{\partial \varphi_{jl}^L} - \frac{\partial t_{j2}^2}{\partial \varphi_{jl}^L}$, $\frac{\partial t_{j2}^2}{\partial x_j^L} = \frac{\partial t_{j2}^2}{\partial q_{j0}^L} \cdot \frac{dq_{j0}^L}{dx_j^L}$ соответственно, и затем учесть, что $\frac{\partial t_{j2}^2}{\partial \varphi_{jl}^L} = 0$ и из выражения (154) следует

$$(dq_{j0}^L(x_j^L)/dx_j^L) = R_l^L \rho(x_j^L). \quad (163)$$

В результате, учитывая, что $d\varphi_{jl}^L = d\varphi_j^L$ ($\varphi_{jl}^L = \varphi_j^L - \varphi_l^L$), получаем преобразование к инвариантным переменным в виде

$$\begin{aligned} d\omega_{jk}^2 dt_{li}^2 d\omega_{jl}^2 dt_{ji}^2 &= \\ &= \{16F^2 q_l^{L2} \sqrt{1 - x_l^{L2}} \sqrt{1 - x_j^{L2}} q_j^L(x_j^L) \rho(x_j^L) \sin \varphi_{jl}^L\} \times \\ &\quad \times dq_{l0}^L dx_l^L dx_j^L d\varphi_j^L, \end{aligned} \quad (164)$$

где выражение в фигурных скобках есть искомый якобиан, $i = 1, 2$. Таким образом инвариантная функция распределения 5-го порядка задается выражением

$$\begin{aligned} f_\sigma(\omega_{jk}^2, t_{li}^2, \varphi_l^S, \omega_{jl}^2, t_{ji}^2) &= \\ &= \{16F^2 q_l^{L2} \sqrt{1 - x_l^{L2}} \sqrt{1 - x_j^{L2}} q_j^L(x_j^L) \rho(x_j^L) \sin \varphi_{jl}^L\}^{-1} \times \\ &\quad \times f_\sigma(q_{l0}^L, x_l^L, \varphi_l^L; x_j^L, \varphi_j^L), \end{aligned} \quad (165)$$

при $x_j^l = x_j^L \cos \varepsilon_l - \sin \varepsilon_l \sqrt{1 - x_j^{L2}} \cos(\varphi_j^L - \varphi_l^L)$, где

$$\cos \varphi_{jl}^l = \cos(\varphi_j^l - \varphi_l^l) = \left[p_1 \sqrt{1 - x_l^{L2}} \sqrt{1 - x_j^{L2}} \right]^{-1} \times \\ \times \{ R_l^L x_{jl}^L - (p_l^L x_l^L - q_l^L) x_j^l \}$$

при $x_{jl}^L = x_l^L x_j^L + \sqrt{1 - x_l^{L2}} \sqrt{1 - x_j^{L2}} \cos(\varphi_j^L - \varphi_l^L)$

следует из рассмотрения инварианта ω_{jl}^2 [см. (61)] в R_l^L - и L -системах отсчета, величины $q_j^l(x_j^l)$ и $\rho(x_j^l)$ определяются выражениями (94) и (132) соответственно, $\varphi_l^S \equiv \varphi_l^l$.

Располагая экспериментальными значениями функции распределения 5-порядка $f_{\sigma}^{\text{ЭК}}(q_{l0}^L, x_l^L, \varphi_l^L; x_j^l, \varphi_j^l) = (d^5 \sigma_{lj}^L / dq_{l0}^L dx_l^L d\varphi_l^L \times dx_j^l d\varphi_j^l)^{\text{ЭК}}$, получаемыми в кинематически полном эксперименте, с помощью соотношения (165) вычисляют соответствующие значения инвариантной функции распределения 5-порядка:

$$f_{\sigma}^{\text{ЭК}}(\omega_{jk}^2, t_{ii}^2, \varphi_l^S, \omega_{ji}^2, t_{ji}^2) = (d^5 \sigma_{ij}^{SS} / d\omega_{jk}^2 dt_{ii}^2 d\varphi_l^S d\omega_{ji}^2 dt_{ji}^2)^{\text{ЭК}},$$

где S — любая инерциальная система отсчета, к которой можно отнести полученные значения.

Сравнивая выражения (165) и (158), для квадрата матричного элемента реакции с $n = 3$ в виде функции независимых кинематических инвариантов получаем выражение

$$\sum_{\text{спин}} | \mathcal{M}_{ji}(\omega_{jk}^2, t_{ii}^2, \varphi_l^S, \omega_{ji}^2, t_{ji}^2) |^2 = \\ = \left\{ c \frac{1}{F} q_l^L \rho(x_j^l) \right\}^{-1} f_{\sigma}(q_{l0}^L, x_l^L, \varphi_l^L; x_j^l, \varphi_j^l) = \\ = \frac{1}{c} \{ 16F^3 q_l^L \sqrt{1 - x_l^{L2}} \sqrt{1 - x_j^{L2}} q_j^l(x_j^l) \sin \varphi_{jl}^l \} \times \\ \times f_{\sigma}(\omega_{jk}^2, t_{ii}^2, \varphi_l^S, \omega_{ji}^2, t_{ji}^2). \tag{166}$$

Инвариантная функция распределения 3-порядка $f_{\sigma}(\omega_{jk}^2, t_{ii}^2, \varphi_l^S) = (d^3 \sigma_l^S / d\omega_{jk}^2 dt_{ii}^2 d\varphi_l^S)$ следует из заданной в L -системе функции распределения $f_{\sigma}(q_{l0}^L, x_l^L, \varphi_l^L) = (d^3 \sigma_l^L / dq_{l0}^L dx_l^L d\varphi_l^L)$ с учетом преобразования (161) и имеет вид

$$f_{\sigma}(\omega_{jk}^2, t_{ji}^2, \varphi_l^S) = (4F q_l^L)^{-1} f_{\sigma}(q_{l0}^L, x_l^L, \varphi_l^L). \tag{167}$$

Для квадрата матричного элемента, усредненного по полным допустимым интервалам изменения инвариантов ω_{ji}^2 и t_{ji}^2 , в виде

функции от переменных ω_{jk}^2 , t_{li}^2 и φ_l^S с учетом (142) получаем выражение

$$\sum_{\text{спин}} |\mathcal{M}_{fi}(\omega_{jk}^2, t_{li}^2, \varphi_l^S)|^2 = \left[4\pi \frac{c}{F} q_l^L \frac{q_j^D}{\omega_{jk}} \right]^{-1} f_{\sigma}(q_{l_0}^L, x_l^L, \varphi_l^L) = \\ = \left(\frac{1}{\pi c} F^2 \frac{\omega_{jk}}{q_j^D} \right) f_{\sigma}(\omega_{jk}^2, t_{li}^2, \varphi_l^S). \quad (168)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вопросы релятивистской кинематики реакций столкновения с $n = 3$ и кинематический анализ экспериментальных данных для получения сведений о динамике указанных реакций еще не рассмотрены всесторонне и в исчерпывающем объеме, удовлетворяющем запросы экспериментального исследования. Данная статья представляет собой попытку изложить широкий круг кинематических вопросов, решение которых неизбежно и необходимо, в особенности при экспериментальном исследовании реакций с $n = 3$. Предложенная схема рассмотрения кинематики реакций с $n = 3$ изложена в общедоступном виде с соблюдением всех требований, необходимых в релятивистском описании, ранее наиболее полно примененном в работе [20].

Кинематика реакций столкновения последовательно рассмотрена для случая неподвижной мишени. В общем случае произвольных встречных пучков рассмотрены наиболее важные аспекты. Полное рассмотрение общего случая представляет весьма сложную задачу, обсуждение которой выходит за рамки данной статьи.

Автор глубоко благодарен Э. Феррари, Н. А. Черникову, А. М. Балдину, В. Г. Кадышевскому, Г. И. Колерову, Г. И. Копылову, П. С. Исаеву, С. М. Биленькому, К. О. Оганесяну и В. Т. Ипполитову за критические замечания, полезные советы и интерес к его работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ferrari E., Selleri F. Nuovo cimento, 1963, v. 27, p. 1450.
2. Сусленко В. К., Кочкин В. И. Сообщения ОИЯИ P2-5572, 1971.
3. Cochan D.R.F. e.a. Phys. Rev. D, 1972, v. 6, p. 3085.
4. Olsson M. G., Yodh G. B. Phys. Rev., 1966, v. 145, p. 1309.
5. Исаев П. С. ЭЧАЯ, 1973, т. 4, вып. 3, с. 731—772.
6. Jacob G., Maris Th A. J. Rev. Mod. Phys., 1973, v. 45, pp. 6—21; Riou M., Ruhla Ch. Prog. Nucl. Phys., 1970, v. 11, p. 195—222.
7. Brückmann H. e.a. Nucl. Phys. A., 1970, v. 157, p. 209.
8. Gottschalk B., Kannenberg S. L. Phys. Rev., C, 1970, v. 2, p. 24.
9. Балдин А. М. и др. Кинематика ядерных реакций. М., Атомиздат, 1968.
10. Hagedorn R. Relativistic Kinematics. Benjamin N. A. Inc., New York — Amsterdam, 1963.

11. Williams W. S. C. *An Introduction to Elementary Particles*. 1st edition, Academic Press, N.Y. and Lond., 1961, p. 356-378; 2nd edition, Academic Press, N.Y. and Lond., 1971, p. 488-504.
12. Michalowicz A. *Cinématique des réactions nucléaires*. Dunod, Paris, 1964.
13. Челлен Г. *Физика элементарных частиц*. Пер. с англ. М., «Наука», 1966.
14. Werbroeck A. *Relativistic Kinematics*. In: *Kinematics and Multiparticle Systems*. Ed. by M. Nicolić, Gordon and Breach, N.Y.— London — Paris, 1968.
15. Иден Р. *Соударения элементарных частиц при высоких энергиях*. Пер. с англ. М., «Наука», 1970.
16. Копылов Г. И. *Основы кинематики резонансов*. М., «Наука», 1970.
17. Dedrick K. G. *Rev. Mod. Phys.*, 1962, v. 34, p. 429.
18. Ohlsen G. G. *Nucl. Instrum. and Methods*, 1965, v. 37, p. 240.
19. Черников Н. А. *ЭЧАЯ*, 1973, т. 4, вып. 3, с. 773—810.
20. Ferrari E., Selleri F. *Suppl. Nuovo cimento*, 1962, v. 24, p. 453.
21. Сусленко В. К. *Препринт ОИЯИ 2-4380*, 1969.
22. Сусленко В. К. *Препринт ОИЯИ P2-4917*, 1970.
23. D'Angelo S. e. a. *Nucl. Instrum. and Methods*, 1972, v. 103, p. 197.
24. Muirhead H. *The Physics of Elementary Particles*. Pergamon Press, Oxford, London, Edinburg, New York, Paris, Frankfurt, 1965.
25. Биленький С. М. *Введение в диаграммную технику Фейнмана*. М., Атомиздат, 1971, гл. VI.
26. Иваненко Д., Соколов А. *Классическая теория поля*. М.— Л., Гостехиздат 1949, стр. 28—32.