«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1975, том 6, вып. 3.

УДК 539.12.01

СВОЙСТВА АМПЛИТУДЫ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД ПРИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ И КОНЕЧНЫХ ЭНЕРГИЯХ

Ю. С. Вернов
Институт ядерных исследований
АН СССР, Москва

Дан обзор свойств амплитуды упругого рассеяния вперед, вытекающих из аналитичности в E-плоскости, унитарности и кроссинг-симметрии. Рассмотрена связь между фазой и модулем для симметричной амплитуды и для отношения амплитуд частицы и античастицы при конечных и асимптотических энергиях.

The properties of the elastic forward scattering amplitude due to analyticity in the E-plane, unitarity and crossing symmetry are reviewed. The relationship between the phase and the moduls for the symmetric amplitude and for the ratio of the particle and antiparticle amplitudes at finite and asymptotic energies is considered.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее важных следствий из постулатов аксиоматической теории рассеяния являются дисперсионные соотношения [1]. Они означают, что есть связь между реальной и мнимой частями амплитуды рассеяния. Эта связь проявляется в том, что существует зависимость между поведением отношения реальной части амплитуды к мнимой и поведением ее модуля. Указанная зависимость интенсивно исследовалась в течение последних 10 лет. Начало этому направлению было положено работами Меймана [2] и Хури и Киношиты [3]. В работе Меймана были найдены асимптотические ограничения на антисимметричную амплитуду, зависящие от отношения реальной и мнимой частей этой амплитуды.

В работе Хури и Киношиты было доказано, что известное неравенство Фруассара [4]

$$|f(E)| \leqslant CE(\ln E)^2 \qquad (1)$$

можно улучшить для весьма широкого класса поведения отношения реальной части амплитуды к мнимой. Здесь C — некоторая константа. В обзоре все неопределенные константы обозначены C; $f(E) = f_+(E) + f_-(E)$, $f_\pm(E)$ — амплитуды упругого рассеяния вперед частицы и античастицы; E — энергия в лабораторной системе. Рассматриваются амплитуды с вычтенными полюсными членами. Результаты Хури и Киношиты были затем усилены в работах [5]. Ограничениям такого типа посвящен ряд исследований [6—12].

Не останавливаясь на результатах отдельных работ, рассмотрим основные неравенства, полученные в рамках указанного направления.

1. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Прежде всего отметим, что все неравенства, о которых пойдет речь ниже,— следствия только общих принципов теории (см. разд. 2).

Если существуют некоторые ограничения на осцилляции амплитуды рассеяния (18), то они справедливы для всех асимптотических энергий. В противном случае они выполнены на бесконечной последовательности энергий E_i ($E_i \to \infty$ при $i \to \infty$). Доказательство этих неравенств будет дано ниже.

Один из основных результатов рассматриваемого направления состоит в том, что полное сечение может возрастать, стремиться к постоянному пределу или падать слабее, чем степенным образом, только в том случае, когда амплитуда рассеяния асимптотически чисто мнима хотя бы на последовательности энергий, т. е. когда существует последовательность E_i, такая, что $|\xi(E_i)| \to \infty$, $E_i \to \infty$, где $\xi(E) \equiv \operatorname{Im} f(E)/\operatorname{Re} f(E)$. Если же $|\xi(E)|$ при $E \to \infty$ ограничено некоторой константой, то сечение падает степенным образом, причем показатель степени определяется величиной этой константы. Если

$$|\xi(E)| \leqslant \operatorname{ctg} \pi\alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant 1/2, \tag{2}$$

то

$$|f(E)| \leqslant CE^{1-2\alpha}, \quad \operatorname{Re} f(E) < 0; \tag{3}$$

$$|f(E)| \leqslant CE^{-2\beta}, \quad \operatorname{Re} f(E) > 0, \tag{3'}$$

где константа β определена условием:

$$|\xi(E)| \geqslant \operatorname{tg} \pi\beta, \quad 0 \leqslant \beta < 1/2. \tag{4}$$

Неравенства (3) и (3′) показывают, что поведение $f(E)$ очень сильно зависит от знака $\operatorname{Re} f(E)$. Для целого ряда процессов из условия (2) вытекает, что $\operatorname{Re} f(E) < 0$ при $E \to \infty$. Действительно, например, для πp-рассеяния из анализа экспериментальных данных при низких энергиях можно прийти к выводу, что [13—15]:

$$\max_{E\to\infty} |f(E)| \geqslant C. \tag{5}$$

Поэтому неравенство (3′) не может иметь места (случай, когда $\beta = 0$, требует отдельного рассмотрения, более тонкий анализ показывает [15], что и в этом случае $\mathrm{Re}\, f(E) < 0$).

Сильная зависимость поведения $f(E)$ от знака $\xi(E)$, установленная пока для частного случая, когда $|\xi(E)|$ удовлетворяет неравенству (2), носит, в действительности, общий характер. Оказывается, что если $\mathrm{Re}\, f(E)$ имеет определенный знак в асимптотике, то при $E \to \infty$ сечение может неограниченно возрастать только в том случае, когда $\xi(E) > 0$. Согласно предыдущему, при этом $\xi(E) \to 0$ $(E \to \infty)$. При $\xi(E) > 0$ сечение может также становиться асимптотически постоянным, при этом полное сечение $\sigma(E)$ подходит снизу к своему пределу. Если же $\xi(E) < 0$, то сечение или асимптотически постоянно (подход осуществляется сверху), или неограниченно падает.

Рассмотрим теперь асимптотически чисто мнимую амплитуду. В этом случае поведение $f(E)$, естественно, зависит от характера стремления $\xi(E)$ к бесконечности. В рассматриваемом случае $f(E)$ имеет вид

$$f(E) = \mathrm{i}E\varphi(E)\, f(0), \tag{6}$$

где функция $\varphi(E)$ удовлетворяет двойному неравенству

$$E^{-\varepsilon} < |\varphi(E)| < E^{\varepsilon} \quad \text{при } E \to \infty \tag{7}$$

$\varepsilon > 0$ произвольно мало.

Запишем $\xi(E)$ в виде

$$\xi(E) = \mathrm{ctg}\, \pi\tilde{\gamma}(E), \quad \tilde{\gamma}(E) \to 0 \quad \text{при } E \to \infty. \tag{8}$$

Можно доказать (см. разд. 6), что в этом случае *

$$|\varphi(E)| = [1 + \varepsilon(E)] \exp 2 \int_1^E \frac{dE'\tilde{\gamma}(E')}{E'}\,; \quad \varepsilon(E) \to 0 \text{ при } E \to \infty. \tag{9}$$

Поэтому если $\tilde{\gamma}(E)$ удовлетворяет двойному неравенству

$$\psi_1(E) < \tilde{\gamma}(E) < \psi_2(E), \tag{10}$$

где $\psi_1(E)$ и $\psi_2(E)$ — некоторые заданные функции, то

$$(1-\varepsilon) \exp 2 \int_1^E \frac{dE'\psi_1(E')}{E'} < |\varphi(E)| < (1+\varepsilon)\, 2 \int_1^E \frac{dE'\psi_2(E')}{E'}. \tag{11}$$

---

* Точнее, это равенство написано для $\varphi(\overline{E})$, где $\overline{E}$ — некоторая точка интервала $(E, \nu E)$, число ν можно взять произвольно близким к единице.

Рассмотрим основные следствия из неравенства (11). Прежде всего отметим, что из неравенства Фруассара (1) и из (11) вытекает следующее асимптотическое ограничение на $\xi(E)$:

$$\xi(E_i) > \ln E_i/(\pi+\varepsilon), \quad \text{если} \quad \xi(E) > 0, \tag{12}$$

где E_i — некоторая последовательность асимптотических энергий. Действительно, в противоположном случае $[\xi(E) < \ln E/(\pi+\varepsilon)]$ левая часть двойного неравенства (11) противоречит ограничению Фруассара.

Неравенство (12) получено при дополнительном предположении $|\xi(E)| \to \infty$, однако можно убедиться в том, что оно носит самый общий характер. Из ограничения (12) вытекает, что $\operatorname{Re} f(E)$ при $E \to \infty$ удовлетворяет более сильному неравенству, чем (1):

$$\operatorname{Re} f(E_i) \leqslant CE_i \ln E_i. \tag{1'}$$

Случай, когда $\xi(E) \sim \ln E/\pi$, соответствует $f(E) \sim CE(\ln E)^2$. Это поведение $\xi(E)$ является единственным, при котором нельзя улучшить неравенство Фруассара. Если $\xi(E) \geqslant a \ln E$, где $a \geqslant 1/\pi$, то из (11) вытекает:

$$|f(E)| \leqslant |f(0)|\, E (\ln E)^{2/a\pi}. \tag{13}$$

Поскольку в неравенстве (13) a может быть произвольно большим, то в случае $\xi(E)/\ln E \to \infty$ при $E \to \infty$

$$|f(E)| \leqslant CE(\ln E)^{\varepsilon}.$$

Из неравенства (11) легко также получить: если

$$\frac{\xi(E)}{\ln E \ln\ln E \ldots \underbrace{\ln \ldots \ln}_{m\ \text{раз}} E} \to \infty,$$

то

$$|f(E)| \leqslant CE(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{m\ \text{раз}} E)^{\varepsilon}. \tag{14}$$

Предположение о постоянстве полного сечения при $E \to \infty$, по крайней мере до последнего времени, было самым распространенным в различных теоретических схемах. Из равенства (9) и (8) вытекает, что $\sigma(E) \to \text{const}$ при $E \to \infty$, если сходится $\int\limits_1^\infty dE'/[\xi(E')\,E']$.

Достаточным условием сходимости этого интеграла, очевидно, является неравенство

$$|\xi(E)| > C \ln E \ln\ln E \ldots (\ln \ldots \ln E)^{1+\varepsilon}.$$

Из неравенства (9) непосредственно вытекает сделанное ранее утверждение: если $\xi(E) > 0$ при $E \to \infty$, то $\sigma(E)$ неограниченно возрастает или стремится к константе, а если $\xi(E) < 0$, то $\sigma(E)$ или неограниченно падает, или стремится к константе. Из равенства (9) также видно, что подход к постоянному пределу осуществляется сверху при $\xi(E) < 0$ и снизу при $\xi(E) > 0$.

Рассмотрим еще несколько неравенств. Из (11) вытекает, что если $|\xi(E)| \leqslant a \ln E$, $a < 1/\pi$ (при этом, согласно (12), $\xi(E) < 0$), то

$$|f(E)| \leqslant E(\ln E)^{-2/a\pi}|f(0)|. \tag{15}$$

Из (15) следует: если $|\xi(E)|/\ln E \to 0$, то $|f(E)| \leqslant CE(\ln E)^{-\lambda}$, где $\lambda > 0$ произвольно велико. Рассмотрены ограничения сверху на $|f(E)|$.

Перейдем к ограничениям снизу. Если $\xi(E)$ удовлетворяет условию (4) и выполнено неравенство (5), то:

$$|f(E)| \geqslant CE^{2\beta}. \tag{16}$$

Из неравенств (16) и (3) непосредственно следует, что если

$$\lim_{E\to\infty} \xi(E) = \operatorname{tg} \pi\beta; \quad -1/2 \leqslant \beta \leqslant 1/2,$$

то при $E \to \infty$

$$f(E) = \varphi(E) E^{-2\beta},$$

где $\varphi(E)$ удовлетворяет условию (7).

Из двойного неравенства (11) следует: если

$$|\xi(E)| > a \ln E \quad (\xi(E) < 0),$$

то

$$|f(E)| > |f(0)| E/(\ln E)^{2/\pi a}. \tag{17}$$

Следовательно, если $\xi(E)$ растет быстрее, чем $\ln E$, т. е. если $|\xi(E)|/\ln E \to \infty$, то

$$|f(E)| > CE/(\ln E)^{\varepsilon}. \tag{17'}$$

Уже упоминалось, что рассматриваемые неравенства выполнены при всех асимптотических энергиях, только если существуют ограничения на возможные осцилляции $f(E)$. Приведем пример такого ограничения. Пусть при $E \to \infty$ в любом интервале $(E, \nu E)$ $f(E)$ удовлетворяет условию

$$N_1(\nu) < |f(E_2)/f(E_1)| < N_2(\nu), \tag{18}$$

где E_2 и E_1 — любые точки интервала $(E, \nu E)$; $N_1(\nu)$ и $N_2(\nu)$ — произвольные числа.

Все выписанные выше неравенства справедливы, если условие (18) выполнено, причем при выводе ограничений сверху используется только правая часть двойного неравенства (18), а при выводе ограничений снизу — левая.

Отметим, что условию (18) удовлетворяют такие осциллирующие функции, как

$E^{\beta}(\ln E)^{\gamma}(\ln\ln E)^{\delta}\ldots(\ln\ldots\ln E)^{\lambda}(a+b\sin\ln E)$; $b<a$; β, γ, $\delta\ldots\lambda$ — произвольные числа.

Условие (18) является не только достаточным, но и необходимым. Более точно при выводе ограничений сверху (снизу) должно выполняться условие $|f(E')/f(\bar{E})|<N_2(\nu)$ $(|f(E')/f(\bar{\bar{E}})|>N_1(\nu))$, где $\bar{E}$, $\bar{\bar{E}}$ — некоторые «средние» точки интервала $(E, \nu E)$ (см. разд. 6).

Часто предполагается, что $f(E)$ при высоких энергиях имеет вид

$$f(E)=CE^{\beta}(\ln E)^{\gamma}(\ln\ln E)^{\delta}\ldots(\ln\ldots\ln E)^{\lambda}, \tag{19}$$

где β, γ, δ, ..., λ — константы.

В этом случае $f(E)$ удовлетворяет существенно более сильному условию, чем (18), а именно:

$$f(\varkappa E)/f(E)\to N(\varkappa)\quad \text{при}\quad E\to\infty; \tag{20}$$

здесь $\varkappa$ — любое число. Класс функций, удовлетворяющих (20), шире, чем класс функций, имеющих представление (19).

Все сформулированные выше результаты носят асимптотический характер. Естественно, возникает вопрос, а существуют ли аналогичные неравенства при конечных энергиях? При этом, поскольку у нас нет никаких параметров, выделяющих ту или иную область энергий, то под конечными понимаем произвольные физические энергии.

В написанных выше неравенствах предполагалось, что накладываемые условия на $\xi(E)$ справедливы при всех достаточно больших энергиях. Очевидно, что интересно рассмотреть ограничения, возникающие из условий на $\xi(E)$ не на бесконечном, а на конечном интервале энергий. Желательно и условия на осцилляции вводить также на конечном интервале.

Рассмотренные выше неравенства охватывали довольно широкий круг поведения $\xi(E)$. Однако, разумеется, можно изучать следствия и из других условий на $\xi(E)$. Поэтому важно иметь метод, который единым образом описывал бы различные условия на $\xi(E)$ и был бы пригоден для извлечения следствий из любого ограничения на $\xi(E)$.

Таким образом, приходим к задаче исследовать связь между отношением реальной части амплитуды рассеяния к мнимой и самой амплитудой при произвольных физических энергиях. Эта задача была рассмотрена в работе Ю. С. Вернова и М. Н. Мнацакановой [12], в которой были найдены ограничения на $f(E)$ при любых энергиях.

Возможность распространения асимптотических результатов на произвольные энергии оказалась тесно связанной с аналитичностью логарифма амплитуды рассеяния. Эта аналитичность позволяет исследовать связь между фазой и модулем амплитуды рассеяния. Поскольку фаза однозначно определяется отношением реальной части амплитуды к мнимой, то, изучая логарифмы амплитуды, можно получить рассмотренные выше ограничения и их аналоги при конечных энергиях.

Однако информация, получаемая при изучении логарифма амплитуды рассеяния, не сводится к неравенствам рассматриваемого типа. Дело в том, что изучение связи между фазой и модулем приводит к установлению нового типа ограничений. Это ограничения на поведение функции $f(E)/f(0)$. Оказалось, что существуют ограничения на рост и падение этой функции, справедливые при произвольном поведении $\xi(E)$.

Представляет интерес также изучение $\ln[f_+(E)/f_-(E)]$. Оно позволяет установить, что отношение дифференциальных сечений частицы и античастицы и разность фаз $f_+(E)$ и $f_-(E)$ амплитуд связаны при любых энергиях. Следствием этого является существование ограничения на поведение $|f_+(E)/f_-(E)|$ при произвольных энергиях [16] — аналога хорошо известного асимптотического результата [17—19]: $|f_+(E)/f_-(E)| \to 1$ при $E \to \infty$ (отвлекаемся от усложнений, связанных с осцилляциями).

В настоящем обзоре единым образом будут рассмотрены ограничения на симметричную амплитуду рассеяния $f(E)$ и на отношение амплитуд $f_+(E)/f_-(E)$ при асимптотических и произвольных энергиях (см. ниже). Так как это описание связано с использованием логарифма амплитуды рассеяния, изучим свойства этой функции (см. разд. 3 и 4). Самый существенный результат состоит в том, что из амплитуды рассеяния можно построить функции, логарифмы которых удовлетворяют обычным дисперсионным соотношениям. Чтобы убедиться в этом, необходимо прежде всего исследовать нули амплитуды рассеяния в области аналитичности, т. е. в комплексной плоскости и между разрезами.

Исследование логарифма амплитуды рассеяния открывает новые возможности для изучения свойств амплитуды, поскольку ее фаза, т. е. $\operatorname{Im}\ln f(E)$, удовлетворяет следующему неравенству, вытекающему из аналитичности и унитарности: $0 \leqslant \operatorname{Im}\ln f(E) \leqslant \pi$. Вывод этого неравенства дан в разд. 4.

В разд. 5 доказаны интегральные соотношения, с помощью которых будут получены перечисленные выше ограничения и их аналоги при конечных энергиях. При рассмотрении не предполагалось существование каких-либо условий на возможные осцилляции $f(E)$. Поэтому нам приходится рассматривать не саму амплитуду, а интегралы от нее. Существенно, что можно использовать интегралы по конечному интервалу энергий $(E, \nu E)$, где E — любое. В принципе ограничения получаются для интервала произвольной величины, однако если $\nu - 1 \ll 1$, то ограничения неэффективны, поскольку входящие в них константы (они зависят от ν) велики (см. разд. 6). Это обстоятельство отражает принципиальную необходимость ограничения осцилляций $f(E)$ в том случае, когда рассматривается $f(E)$, а не интеграл от нее.

В обзоре обсуждается проблема осцилляций (см. разд. 7). Доказано, что некоторые условия на $\xi(E)$ приводят к ограничению осцилляций $f(E)$, что позволяет получать ограничения на интегралы от $f(E)$ по малому промежутку энергий. В разд. 9 рассмотрена связь различных интегралов от реальной и мнимой частей амплитуды рассеяния.

2. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ОГРАНИЧЕНИЕ СНИЗУ НА АМПЛИТУДУ РАССЕЯНИЯ

Предположим, что:

1) амплитуда рассеяния — аналитическая функция переменной E всюду в комплексной плоскости, исключая разрезы $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$. Напомним, что рассматриваются амплитуды с вычтенными полюсными членами. За единицу выбрана энергия начала физической области, в случае πp-рассеяния $1 = m_\pi$;

2) выполнено условие «действительности»:

$$f_\pm(E^*) = f_\pm^*(E); \tag{21}$$

3) амплитуда рассеяния удовлетворяет требованию кроссинг-симметрии:

$$f_\pm(-E^*) = f_\mp^*(E); \tag{22}$$

4) рост амплитуды рассеяния в асимптотике ограничен условием:

$$f_\pm(E)/E^2 \to 0, \quad E \to \infty. \tag{23}$$

С помощью теоремы Фрагмена — Линделефа [20] легко убедиться в том, что (23) эквивалентно условию:

$$f_\pm(E)/|E|^2 \to 0, \quad |E| \to \infty, \tag{23'}$$

если только $|f(E)| < \exp \varepsilon |E|$, $|E| \to \infty$. Последнее неравенство будет предполагаться всегда выполненным. Отметим, что для вывода ограничений при конечных энергиях достаточно условия (23), при асимптотических энергиях неравенство Фруассара (1) существенно используется;

5) мнимая часть амплитуды рассеяния на правом разрезе неотрицательна:

$$\operatorname{Im} f_{\pm}(E) \geqslant 0, \quad E \geqslant 1. \tag{24}$$

Неравенство (24), как известно, является следствием унитарности.

Рассмотрим процессы, амплитуды которых не имеют нефизической области. Первое следствие условий 1—5, которое будет получено,— это ограничение снизу на амплитуду рассеяния. Оно приобретает существенное значение при изучении нулей амплитуды рассеяния. Такие ограничения были получены в работах [13, 14], а затем уточнены в работах [21, 22].

Приведем простой вывод необходимого нам неравенства. А именно, докажем, что

$$\max_{E \to \infty} |f(E) E^2| > C. \tag{25}$$

Предположим противное, что $f(E) E^2 \to 0$ при $E \to \infty$. Рассматривая $\int\limits_{C_1} f(E') E' dE'$ (рис. 1)

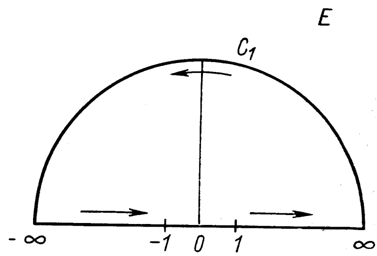

Рис. 1.

и учитывая условие кроссинг-симметрии $f(-E + i0) = f^*(E + i0)$ и тот факт, что, согласно теореме Фрагмена — Линделефа, $f(E) E^2 \to 0$ ($|E| \to \infty$) всюду в верхней полуплоскости, получаем $\int\limits_1^\infty \operatorname{Im} f(E') E' dE' = 0$.

Последнее равенство, очевидно, противоречит унитарности (24). Неравенство (25) доказано.

3. НУЛИ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

Ограничение на число нулей амплитуды рассеяния было впервые получено в работе Джина и Мартена [13]. В работе Джина и Макдауэлла [7] найдена связь между пороговым поведением амплитуды и числом ее нулей. Под нулями амплитуды рассеяния понимаются нули в области аналитичности. В дальнейшем эти вопросы изучались в работах [16, 23]. Здесь будем в основном следовать работе [16], однако вопрос будет рассмотрен подробнее и без использования техники функций Херглотца. Не будем делать никаких предположений о нулях амплитуды рассеяния на разрезе, а будем исходить только из сформулированных выше (условия 1—5) свойств амплитуды рассеяния.

Рассмотрим сначала симметричную амплитуду. Докажем, что у $f(E)$ не может быть больше двух нулей. Очевидно, что вследствие (21), (22) число нулей у $f(E)$ четно. Сначала предположим, что у $f(E)$ — четыре действительных нуля в точках α, β, $-\alpha$, $-\beta$. Запишем $f(E)$ в виде

$$f(E)=(E^2-\alpha^2)(E^2-\beta^2)\varphi(E). \qquad (26)$$

Подчеркнем, что здесь и в других аналогичных случаях предполагается, что у амплитуды рассеяния помимо выделенных может быть любое число других нулей.

Легко видеть, что $\varphi(E)$ удовлетворяет тем же условиям 1—5, что и $f(E)$. Но в таком случае для $\varphi(E)$ должно быть справедливо неравенство (25): $\max\limits_{E\to\infty} |\varphi(E)E^2| > C$. С другой стороны, согласно (26) и (23):

$$\max_{E\to\infty}\varphi(E)E^2=\max_{E\to\infty}\frac{f(E)}{E^2}\to 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что у $f(E)$ не может быть четырех действительных нулей.

Совершенно аналогичным образом легко убедиться в том, что у $f(E)$ не может быть двух действительных и двух мнимых или четырех мнимых нулей. Если же у $f(E)$ есть нуль в комплексной точке R, то, согласно (21), (22), у $f(E)$ есть нули также в точках R^*, $-R$, $-R^*$. Записав $f(E)$ в виде

$$f(E)=(E-R)(E-R^*)(E+R)(E+R^*)\varphi(E), \qquad (27)$$

убеждаемся в том, что и в этом случае $\varphi(E)$ удовлетворяет условиям 1—5. Это позволяет провести прежнее доказательство и убедиться в том, что у $f(E)$ не может быть нуля в комплексной плоскости. Итак, доказано, что у $f(E)$ может быть не больше двух нулей.

Теперь покажем, что если $f(1)<0$, то у $f(E)$ нет нулей. Действительно, пусть у $f(E)$ есть два действительных нуля: α и $-\alpha$. Запишем $f(E)$ в виде

$$f(E)=(E^2-\alpha^2)\varphi(E). \qquad (28)$$

Выразим $\varphi(E)$ через дисперсионный интеграл

$$\varphi(E)=\frac{2}{\pi}\int_1^\infty\frac{dE'E'\,\mathrm{Im}\,\varphi(E')}{E'^2-E^2}. \qquad (29)$$

Согласно (29) и (24),

$$\varphi(0)=\frac{2}{\pi}\int_1^\infty\frac{dE'\,\mathrm{Im}\,\varphi(E')}{E'}>0. \qquad (29')$$

Учитывая (29'), получаем, что в рассматриваемом случае $f(1)>0$. Этот результат не изменится, если у $f(E)$ мнимые, а не действительные нули. Итак, если $f(1)<0$, то у $f(E)$ нет нулей. Если же $f(1)>0$, то у $f(E)$ может быть как два нуля, так и ни одного.

Отметим, что $f(E)$ имеет комплексные или действительные нули в зависимости от знака $f(0)$. А именно, если $f(0)<0$, то у $f(E)$

могут быть только действительные нули. Для этого предположим, что у $f(E)$ есть нули в точках $i\alpha$ и $-i\alpha$, и запишем $f(E)$ в виде

$$f(E)=(E^2+\alpha^2)\,\varphi(E). \tag{28'}$$

Очевидно, что $\varphi(E)$ удовлетворяет соотношению (29) и $\varphi(0)>0$. Но тогда и $f(0)>0$.

Рассмотрим теперь нули $f_+(E)$- и $f_-(E)$-амплитуд. Докажем, что у $f_\pm(E)$-амплитуд, так же как и у $f(E)$, может быть не больше двух нулей. Доказательство снова проведем от противного. Ограничимся случаем трех действительных нулей, поскольку остальные случаи рассматриваются аналогично. Пусть $f_+(E)$ имеет нули в точках α, β, γ; соответственно $f_-(E)$ — в точках $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$. Запишем $f_+(E)$-амплитуды в виде

$$f_\pm(E)=(E\mp\alpha)(E\mp\beta)(E\mp\gamma)\,\varphi_\pm(E). \tag{30}$$

Легко видеть (22), что функции $\varphi_\pm(E)$ удовлетворяют следующему условию кроссинг-симметрии:

$$\varphi_\pm(-E^*)=-\varphi^*_\mp(E). \tag{31}$$

Учитывая (31), легко доказать, что

$$\max_{E\to\infty}|\varphi_+(E)\,E|>C. \tag{32}$$

Это доказывается аналогично неравенству (25).

Предположим $\varphi_+(E)\,E\to 0$ при $E\to\infty$, тогда, рассматривая $\int\limits_{C_1}\varphi_+(E')\,dE'$ и учитывая (31), приходим к равенству

$$\int\limits_1^\infty[\operatorname{Im}\varphi_+(E')+\operatorname{Im}\varphi_-(E')]\,dE'=0,$$

которое очевидным образом противоречит унитарности (24). Неравенство (32) доказано.

Согласно (30), (23)

$$\max_{E\to\infty}\varphi_+(E)\,E=\max_{E\to\infty}\frac{f_+(E)}{E^2}\to 0,$$

приходим к выводу, что у $f_\pm(E)$-амплитуд не может быть трех действительных нулей. Аналогично можно убедиться в том, что у $f_\pm(E)$ не может быть одного действительного и двух мнимых или комплексных нулей, или четырех нулей в комплексной плоскости.

Докажем теперь, что у $f_\pm(E)$ нет нулей, если $f_\pm(1)<0$. Для доказательства рассмотрим случай, когда у $f_\pm(E)$-амплитуд два нуля, и найдем, что тогда $f_\pm(1)>0$. Снова ограничимся случаем двух действительных нулей. Пусть $f_+(E)$ ($f_-(E)$) имеет нули в точках α, β ($-\alpha$, $-\beta$). Запишем $f_\pm(E)$ в виде

$$f_\pm(E)=(E\mp\alpha)(E\mp\beta)\,\varphi_\pm(E). \tag{33}$$

Легко видеть, что $\varphi_{\pm}(E)$ удовлетворяют следующему дисперсионному представлению:

$$\varphi_{\pm}(E)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\varphi_{\pm}(E')\,dE'}{E'-E}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\varphi_{\mp}(E')\,dE'}{E'+E}. \tag{34}$$

Из (34) следует, что $\varphi_{\pm}(0)>0$, поскольку, согласно (23) и (33), $\operatorname{Im}\varphi_{\pm}(E)\geqslant 0$. Учитывая, что $\varphi_{\pm}(E)$ не имеет нулей, получаем $f_{\pm}(1)>0$.

Итак, если $f_{\pm}(1)<0$, то у $f_{\pm}(E)$-амплитуд нет нулей. Если $f_{\pm}(1)>0$, то $f_{\pm}(E)$ имеют либо два нуля, либо ни одного. Если $f_{\pm}(E)$ на пороге имеют разные знаки, то у $f_{\pm}(E)$ есть один действительный нуль. Существование такого нуля непосредственно вытекает из кроссинг-симметрии. Этот нуль единственный, поскольку у $f_{\pm}(E)$ может быть не больше двух нулей. Как и в симметричном случае, у $f_{\pm}(E)$ могут быть только действительные нули, если $f_{\pm}(0)<0$. Действительно, если у $f_{+}(E)$ есть нули в точках R и R^*, то

$$f_{+}(E)=(E-R)(E-R^*)\,\varphi_{+}(E) \tag{35}$$

и $f_{+}(0)=|R|^2\,\varphi_{+}(0)$. Далее обычным способом доказываем, что $\varphi_{+}(0)>0$.

4. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ЛОГАРИФМА АМПЛИТУДЫ

Согласно полученным результатам, из $f_{\pm}(E)$-амплитуд можно строить функции, не имеющие нулей. Такими функциями будут, например, функции $\varphi_{\pm}(E)$. Другая возможность состоит в том, чтобы рассматривать функции $\tilde{f}_{\pm}(E)\equiv f_{\pm}(E)-A$, где $A>0$ — любое число, удовлетворяющее условию: $A>\max\begin{Bmatrix}f_{+}(1)\\ f_{-}(1)\end{Bmatrix}$ [соответственно $\tilde{f}(E)=f(E)-A$, где $A\geqslant f(1)$].

Рассмотрим именно эти функции, поскольку в реальных случаях, например πp-рассеяния, при высоких энергиях $\tilde{f}_{\pm}(E)$ практически не отличаются от $f_{\pm}(E)$. Ниже, если специально не оговорено противное, под $f_{\pm}(E)$ будем понимать $\tilde{f}_{\pm}(E)$.

Докажем теперь, что из аналитичности и унитарности вытекают ограничения на фазу $f(E)$. Рассмотрим дисперсионное соотношение

$$f(E)=f(0)+\frac{2E^2}{\pi}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dE'\operatorname{Im}f(E')}{E'(E'^2-E^2)}. \tag{36}$$

Согласно этому выражению,

$$\operatorname{Im}\left(\frac{f(E)}{E}\right)=-\frac{f(0)\sin\varphi}{|E|}+$$
$$+\frac{\operatorname{Im}E}{\pi}\int\limits_1^\infty\frac{dE'\operatorname{Im}f(E')}{E'}\left\{\frac{1}{(E'-\operatorname{Re}E)^2+(\operatorname{Im}E)^2}+\frac{1}{(E'+\operatorname{Re}E)^2+(\operatorname{Im}E)^2}\right\}. \tag{37}$$

Учитывая $f(0)<0$ [согласно (36), если $f(1)\leqslant 0$, то $f(0)<0$], получаем $\operatorname{Im}(f(E)/E)>0$, если $\operatorname{Im}E>0$. Следовательно,

$$\varphi+2\pi n\leqslant\delta(|E|\exp(i\varphi))\leqslant\pi+\varphi+2\pi n,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, \tag{38}$$

где $\delta(E)\equiv\operatorname{Im}\ln f(E)$; n — некоторое целое число, появление которого связано с неоднозначностью в определении фазы.

Поскольку $\ln f(E)$ аналитичен в той же области, что и $f(E)$, то $\delta(E)$ — непрерывная функция E. Поэтому n одно и то же для всех E. Можно положить $n=0$, поскольку физические результаты не зависят от n. Тогда

$$\varphi\leqslant\delta(|E|\exp(i\varphi))\leqslant\pi+\varphi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi; \tag{38а}$$
$$0\leqslant\delta(E)\leqslant\pi,\quad E>0. \tag{38б}$$

Аналогичным образом можно доказать, что и фаза каждой из амплитуд $f_+(E)$ и $f_-(E)$ удовлетворяет неравенствам (38а), (38б). Согласно (37), $\operatorname{Im}(f(E)/E)<0$ в нижней полуплоскости. Учитывая, что $\delta(1)=\pi$, имеем

$$\pi\leqslant\delta(E-i0)\leqslant 2\pi.$$

Нам удобнее рассматривать функцию $\hat f(E)=\exp(-i\pi)f(E)$, поскольку $\ln\hat f(E)$ удовлетворяет тем же условиям «действительности» и кроссинг-симметрии, что и $f(E)$:

$$\ln\hat f(E^*)=\ln^*\hat f(E); \tag{21'}$$
$$\ln\hat f(-E^*)=\ln^*\hat f(E). \tag{22'}$$

Ниже под $f(E)$ подразумевается $\hat f(E)$ [под $f_\pm(E)$ функции $\hat f_\pm(E)\equiv\exp(-i\pi)f_\pm(E)$]. Очевидно, что фаза $\hat f(E)$ удовлетворяет неравенству

$$-\pi\leqslant\delta(E)\leqslant 0. \tag{38в}$$

Теперь докажем, что для $\ln f(E)$ справедливо обычное дисперсионное соотношение. Для этого выведем ограничение снизу на $f(E)$, справедливое для любого комплексного E.

Из равенства (37) легко получить

$$\operatorname{Im}(f(E)/E)>A\operatorname{Im}E/|E^2|, \tag{39}$$

где

$$A=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1}^{|E|}\frac{dE'\,\mathrm{Im}\,f(E')}{E'}.$$

Следовательно,

$$|f(E)|>A\,\mathrm{Im}\,E/|E|; \tag{40}$$

$$\ln|f(E)|<b(E)\,|\ln\mathrm{Im}\,E|; \tag{41}$$

здесь $b(E)$ регулярна при $\mathrm{Im}\,E\to 0$.

Теперь обычным образом можно выразить $\ln f(E)$ через интеграл по дисперсионному контуру C_2 (рис. 2):

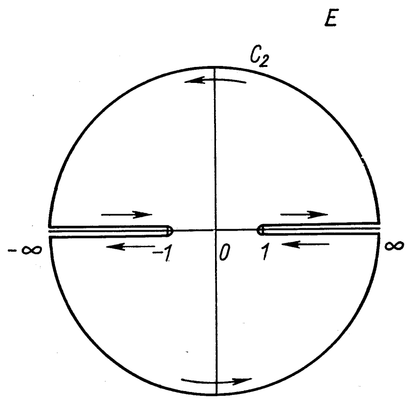

Рис. 2.

$$\ln\left(\frac{f(E)}{f(0)}\right)=\frac{E^2}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{\ln f(E')\,dE'}{E'^2(E'-E)}. \tag{42}$$

Учитывая неравенства (41) и (38а), легко получить, что интеграл по большому кругу равен нулю.

Докажем теперь, что независимо от характера возможных нулей $f(E)$ на разрезе можно в соотношении (42) совершить предельный переход $\mathrm{Im}\,E'\to 0$. Рассмотрим только интегралы по правому разрезу, поскольку левый разрез рассматривается аналогично. Учитывая (21′), запишем

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dE'\ln f(E'+i\varepsilon)}{(E'+i\varepsilon)^2(E'+i\varepsilon-E)}-\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\ln f(E'-i\varepsilon)\,dE'}{(E'-i\varepsilon)^2(E'-i\varepsilon-E)}=$$

$$=2\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dE'\delta(E'+i\varepsilon)}{E'^2(E'-E)}-2i\varepsilon\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dE'\,\mathrm{Re}\ln f(E'+i\varepsilon)}{E'^2(E'-E)}\left[\frac{2}{E'}+\frac{1}{E'-E}\right]. \tag{43}$$

Пользуясь неравенствами (41) и (38а), получаем, что второй интеграл в (43) стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$. Осталось доказать, что

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dE'\delta(E'+i\varepsilon)}{E'^2(E'-E)}\to\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dE'\delta(E')}{E'^2(E'-E)},\quad \varepsilon\to 0.$$

Этот предел существует, так как $\delta(E'+i\varepsilon)\to\delta(E')$ всюду, исключая точки, в которых $f(E)=0$. Однако множество нулей

$f(E)$ на границе является множеством меры нуль [24]. Учитывая, что в любой окрестности нуля $f(E)$ фаза $f(E)$ удовлетворяет неравенству (38а), приходим к выводу: вклад таких точек в интеграл равен нулю.

Таким образом доказано, что $\ln f(E)$ удовлетворяет дисперсионному соотношению

$$\ln \frac{f(E)}{f(0)} = \frac{2E^2}{\pi} \int_1^\infty \frac{dE' \delta(E')}{E'(E'^2 - E^2)}. \tag{44}$$

5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Получим равенства, связывающие различные интегралы от реальной и мнимой частей амплитуды рассеяния и от фазы и модуля амплитуды. Поскольку соотношения такого рода представляют интерес и независимо от рассматриваемых здесь задач, найдем их для некоторой функции $\chi(E)$, удовлетворяющей соотношению типа дисперсионного. Поэтому найденные соотношения могут применяться к любой четной или нечетной комбинации амплитуд, логарифмов амплитуд, обратной амплитуде и т. п. Такие соотношения были получены в работе [25], некоторые равенства такого типа — в работах [12, 26—28].

Пусть $\chi(E)$ удовлетворяет следующему представлению:

$$\chi(E) = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{dE' \eta(E')}{E'^2 - E^2} \quad (E\text{ — комплексное}), \tag{45}$$

где

$$\eta(E) = E \lim_{\varepsilon \to +0} \operatorname{Im} \chi(E + i\varepsilon).$$

При действительных E равенство (45) принимает вид

$$\operatorname{Re} \chi(E) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_1^\infty \frac{\eta(E')\, dE'}{E'^2 - E^2}. \tag{46}$$

Здесь $\mathcal{P}$ означает, что интеграл понимается в смысле главного значения.

Пусть $\psi(E)$ — некоторая функция, действительная при положительных E. Дополнительные условия, которым должна удовлетворять $\psi(E)$, будут сформулированы ниже. Рассмотрим $\int_{E_1}^{E_2} dE' \operatorname{Re} \chi(E') \psi(E')$, где $E_1 > 0$ и $E_2 > 0$ — произвольные энергии. Воспользовавшись (46), получим

$$\int_{E_1}^{E_2} dE' \operatorname{Re} \chi(E') \psi(E') = \frac{2}{\pi} \int_{E_1}^{E_2} dE' \psi(E') \mathcal{P} \int_1^{\infty} \frac{dE'' \eta(E'')}{E''^2 - E'^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} dE' \eta(E') \mathcal{P} \int_{E_1}^{E_2} \frac{dE'' \psi(E'')}{E'^2 - E''^2}. \tag{47}$$

Законность проведенного в (47) изменения порядка интегрирования нуждается в обосновании, поскольку интеграл в (46) существует в смысле главного значения. Докажем, что равенство (47) справедливо при весьма либеральных требованиях к $\psi(E)$.

Рассмотрим для этого

$$\int_{\widetilde{E}_1}^{\widetilde{E}_2} dE' \overline{\chi}(E') \psi(E'),$$

где $\widetilde{E}_1 = E_1 + ia$, $\widetilde{E}_2 = E_2 + ia$; $\overline{\chi}(E)$ удовлетворяет представлению

$$\overline{\chi}(E) = \frac{2}{\pi} \int_1^{\overline{E}} \frac{dE' \eta(E')}{E'^2 - E^2}; \tag{48}$$

$\overline{E}$ — некоторое положительное число. Очевидно, что

$$\int_{\widetilde{E}_1}^{\widetilde{E}_2} dE' \overline{\chi}(E') \psi(E') = \frac{2}{\pi} \int_1^{\overline{E}} dE' \eta(E') \int_{\widetilde{E}_1}^{\widetilde{E}_2} \frac{dE'' \psi(E'')}{E'^2 - E''^2}. \tag{49}$$

Достаточным условием справедливости равенства (49) при любом $a > 0$ является непрерывность функций $\overline{\chi}(E)$ и $\overline{\psi}(E)$.

Перейдем к пределу $a = 0$. Предел слева существует, если есть $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \psi(E + i\varepsilon)$. Условием существования предела справа является существование $\int_{E_1}^{E_2} dE'' \psi(E'')/(E'^2 - E''^2)$ в смысле главного значения. Последнее заведомо имеет место, если $\psi(E)$ удовлетворяет условию Гельдера.

Осталось перейти к пределу $\overline{E} \to \infty$. Легко видеть, что это можно сделать, и таким образом приходим к соотношению (47).

6. ОГРАНИЧЕНИЯ НА $f(E)$ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЭНЕРГИЯХ

Теперь можно приступить к решению сформулированной в разд. 1 задачи: получить при произвольных энергиях ограничения, вытекающие из существования связи между фазой и модулем амплитуды рассеяния.

Выберем $\psi(E) \equiv 1$. Проведя элементарное интегрирование и взяв в качестве $\chi(E)$ функцию $(1/E^2)\ln[f(E)/f(0)]$, придем к соотношению

$$\operatorname{Re} B(E) = \int_E^{\nu E} \ln\left|\frac{f(E')}{f(0)}\right| \frac{dE'}{E'^2} = \int_1^{\infty} \frac{dE'\gamma(E')}{E'^2} \ln\left|\frac{E'+E}{E'-E}\,\frac{E'-\nu E}{E'+\nu E}\right|, \quad (50)$$

где $E_1 \equiv E$; $E_2 \equiv \nu E$; $\gamma(E) \equiv -\frac{\delta(E)}{\pi}$; $B(E) \equiv \int_E^{\nu E} \ln\frac{f(E')}{f(0)}\frac{dE'}{E'^2}$.

Согласно (38б), $0 \leqslant \gamma(E) \leqslant 1$. Сначала рассмотрим следствия из следующего ограничения на фазу:

$$\gamma_1 \leqslant \gamma(E) \leqslant \gamma_2; \quad E_1 \leqslant E \leqslant E_2; \quad 0 < \gamma_{1,2} < 1, \quad (51)$$

где E_1 и E_2 — произвольные энергии. Будем также считать, что $\gamma(E)$ известна при $E < E_1$. При $E > E_2$ не имеем никакой информации о поведении $\gamma(E)$. Двойное неравенство (51) является распространением на конечные энергии асимптотических условий (2) и (4). При $E_1 = 1$, $E_2 \to \infty$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$ оно переходит в (38в).

Будем считать, что $E > E_1$, так как обычно если известна $\gamma(E)$, то известна и $f(E)$. Легко видеть, что поскольку $\gamma(E') \geqslant 0$, подынтегральное выражение меняет знак, когда $E' = \mu E$, $\mu = \sqrt{\nu}$. Получим неравенства только при $E_2 > \mu E$, так как противоположный случай рассматривается точно так же. Пользуясь теоремой о среднем и учитывая (51), приходим к очевидным неравенствам:

$$\operatorname{Re} B(E) \leqslant A(E_1)/E + \gamma_2 I(E_1, \mu E) + \gamma_1 I(\mu E, E_2); \quad (52)$$

$$\operatorname{Re} B(E) \geqslant A(E_1)/E + \gamma_1 I(E_1, \mu E) + \gamma_2 I(\mu E, E_2) + I(E_2, \infty), \quad (53)$$

где

$$A(E_1) \equiv E \int_1^{E_1} \frac{dE'\gamma(E')}{E'^2} \ln\left|\frac{E'+E}{E'-E}\,\frac{E'-\nu E}{E'+\nu E}\right|$$

и функция $I(a, b)$ определена с помощью теоремы о среднем:

$$\int_a^b \frac{dE'\gamma(E')}{E'^2} \ln\left|\frac{E'+E}{E'-E}\,\frac{E'-\nu E}{E'+\nu E}\right| = \gamma(E_{\text{ср}})\, I(a, b).$$

Нам осталось вычислить $I(a, b)$. Элементарное интегрирование дает

$$I(a, b) = [\Pi(b) - \Pi(a)]/E, \tag{54}$$

где

$$\Pi(x) = 2\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\ln x - \frac{E}{x}\ln\left|\frac{x+E}{x-E}\,\frac{x-\nu E}{x+\nu E}\right| - \\ - \ln|x^2 - E^2| + \frac{1}{\nu}\ln|x^2 - \nu^2 E^2|. \tag{55}$$

Легко видеть, что

$$\Pi(\mu E) = \ln\nu - (1 - 1/\nu)\ln(\nu - 1). \tag{56}$$

Получаемые неравенства приобретают более простой вид, если положить

$$f(E)/f(0) = (E^2 - 1)^{\gamma_i}\varphi_i(E), \quad i = 1,\ 2 \tag{57}$$

[$\gamma_{1,\,2}$ те же самые, что и в (51)]; $\varphi_2(E)$ используем при получении ограничений сверху, $\varphi_1(E)$ — снизу.

Нетрудно вычислить, что

$$\int_E^{\nu E}\ln\left|\frac{f(E')}{f(0)}\right|\frac{dE'}{E'^2} = \ln|\varphi_i(\overline{E}^{(i)})|\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) + \gamma_i\Pi(1); \tag{58}$$

$$E \leqslant \overline{E}^{(i)} \leqslant \nu E.$$

Учитывая (54), (55) и (58), приходим к неравенствам:

$$\ln|\varphi_2(\overline{E}^{(2)})| \leqslant \frac{\nu}{\nu - 1}\,[A(E_1) + (\gamma_2 - \gamma_1)\Pi(\mu E) + \\ + \gamma_1\Pi(E_2) + \gamma_2(\Pi(1) - \Pi(E_1))]; \tag{59}$$

$$\ln|\varphi_1(\overline{E}^{(1)})| \geqslant \frac{\nu}{\nu - 1}\,[A(E_1) + (\gamma_1 - \gamma_2)\Pi(\mu E) + \\ + (\gamma_2 - 1)\Pi(E_2) + \gamma_1(\Pi(1) - \Pi(E_1))]. \tag{60}$$

Из формулы (55) легко получить, что если $x/E < 1$, то

$$\Pi(x) = -2\ln E + \frac{2}{\nu}\ln(\nu E) - 2\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) + \\ + 2\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(1 - \frac{1}{\nu^{2n+1}}\right)\left(\frac{x}{E}\right)^{2n}, \tag{55$'$}$$

а если $x/\nu E > 1$, то

$$\Pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}\left(\frac{E}{x}\right)^{2n}(\nu^{2n-1} - 1). \tag{55$''$}$$

Подставляя (55′) в неравенства (59), (60), находим, что

$$\ln|\varphi_2(\overline{E}^{(2)})| \leqslant \frac{\nu}{\nu-1}[\widetilde{A}_2(E_1)+(\gamma_2-\gamma_1)\Pi(\mu E)+ \\ +\gamma_1\Pi(E_2)+\gamma_2 r(E_1, E)]; \qquad (59')$$

$$\ln|\varphi_1(\overline{E}^{(1)})| \geqslant \frac{\nu}{\nu-1}[\widetilde{A}_1(E_1)+(\gamma_1-\gamma_2)\Pi(\mu E)+ \\ +(\gamma_2-1)\Pi(E_2)+\gamma_1 r(E_1, E)], \qquad (60')$$

где

$$\widetilde{A}_i(E_1)=A(E_1)-2\gamma_i\frac{\nu-1}{\nu}\ln E_1;$$

$$r(E_1, E)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(1-\frac{1}{\nu^{2n+1}}\right)\left(\frac{1-E_1^{2n}}{E^{2n}}\right).$$

Из полученных неравенств (59′), (60′) легко заключить, что $\varphi_i(E)$ при всех E ограничены константами, зависящими только от ν. Эти неравенства являются конечноэнергетическими аналогами асимптотических ограничений (3), (3′), (16) и переходят в них при $E\to\infty$. [Совершая предельный переход $E\to\infty$, необходимо учесть неравенство Фруассара (1).] Подчеркнем, что полученные таким предельным переходом неравенства уже не содержат неопределенных констант.

Найденные ограничения показывают, что при всех энергиях существует тесная связь между фазой и модулем амплитуды рассеяния. Согласно (57), (59′), (60′), если $\operatorname{Re} f(E)>0$ $(\gamma(E)>1/2)$, то $f(E)$ «в среднем» растет быстрее, чем первая степень E; если $\operatorname{Re} f(E)<0$ $(\gamma(E)<1/2)$ — то медленнее, чем E; случай, когда $f(E)\sim E$ соответствует чисто мнимой амплитуде. Здесь речь идет о реальной части $f(E)$, а не $\hat{f}(E)=\exp(-i\pi)f(E)$.

Рассмотрим теперь ограничения, вытекающие только из основных принципов теории. Положив в (59′), (60′) $\gamma_1=0$, $\gamma_2=1$, $E_1=1$, $E_2\to\infty$, получим следующие неравенства:

$$|f(\overline{E})|\leqslant|f(0)|(\overline{E}^2-1)\frac{\nu^{\nu/(\nu-1)}}{\nu-1},\quad E\leqslant\overline{E}\leqslant\nu E; \qquad (61)$$

$$|f(\overline{\overline{E}})|\geqslant|f(0)|\frac{\nu-1}{\nu^{\nu/(\nu-1)}},\quad E\leqslant\overline{\overline{E}}\leqslant\nu E. \qquad (62)$$

Неравенства (61), (62) показывают, что в любой теории, в которой амплитуда рассеяния удовлетворяет условиям 1—5, невозможен рост амплитуды рассеяния более быстрый, чем E^2 на достаточно большом интервале энергий. Кроме того, функция $f(E)$ — — $f(1)$ в «среднем» при всех энергиях ограничена снизу константой, не зависящей от E. [Если $f(1)\leqslant 0$, то последнее утверждение применимо непосредственно к $f(E)$.]

Отметим, что если в случае сильных взаимодействий экспериментально наблюдаемый рост амплитуды рассеяния существенно ниже его верхней границы (61), то для слабых взаимодействий, например для упругого νe-рассеяния, неравенство (61) практически насыщается.

Подчеркнем, что в рамках используемых предположений нельзя усилить полученные неравенства, исключая, может быть, случай $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$, поскольку всегда возможен случай, когда $\gamma_{\text{ср}}$ в интервале $(E_1, \mu E - \varepsilon)$ равно γ_2, (γ_1), а $\gamma_{\text{ср}}$ — в интервале $(\mu E + \varepsilon, E_2)$ равно γ_1 (γ_2). Значения $\gamma_{\text{ср}} = 0$ и $\gamma_{\text{ср}} = 1$, разумеется, противоречат унитарности, однако при конечных энергиях у нас нет ограничения, запрещающего $\gamma(E)$ принимать значения, близкие к единице или нулю.

Рассмотрим теперь следствия из других ограничений на $\gamma(E)$. Подчеркнем, что рассматриваемым методом легко изучить следствия из практически произвольного условия на $\gamma(E)$, поскольку задача сводится к оценке интегралов. Предположим, что $\gamma(E)$ имеет вид

$$\gamma(E) = \gamma + \tilde{\gamma}(E), \tag{63}$$

где γ — константа; $\tilde{\gamma}(E) \to 0$ при $E \to \infty$.

Учитывая легко проверяемое равенство

$$\ln(E^2 - 1) = -2E^2 \int_1^\infty \frac{dE'}{E'(E'^2 - E^2)}, \tag{64}$$

получаем, что

$$f(E) = f(0)(E^2 - 1)^\gamma \varphi(E), \tag{65}$$

где функция $\varphi(E)$ удовлетворяет дисперсионному соотношению

$$\ln \varphi(E) = -2E^2 \int_1^\infty \frac{dE'\tilde{\gamma}(E')}{E'(E'^2 - E^2)}, \tag{66}$$

а, следовательно [см. (50)], и равенству

$$\int_E^{\nu E} \ln|\varphi(E')| \frac{dE'}{E'^2} = \ln|\varphi(\bar{E})| \frac{1}{E} \frac{\nu - 1}{\nu} =$$

$$= \int_1^\infty \frac{\tilde{\gamma}(E')}{E'} \ln\left| \frac{E' + E}{E' - E} \frac{E' - \nu E}{E' + \nu E} \right| dE'. \tag{67}$$

Представим

$$\ln|\varphi(\bar{E})| = 2\int_1^E \frac{dE'\tilde{\gamma}(E')}{E'} + D(E) \tag{68}$$

и рассмотрим свойства функции $D(E)$.

Используя (67) и условие (63), легко показать, что $D(E)$ ограничена при всех E константой, а при $E \to \infty$ $D(E) \to 0$ при любом фиксированном ν. [Последнее утверждение доказывается при помощи рассуждений, аналогичных использованным при выводе формулы (73).] Поэтому второй член в (68) несуществен при асимптотических энергиях.

Учитывая очевидную связь между $\xi(E)$ и $\gamma(E)$, легко найти: если $|\xi(E)| \to \infty$ при $E \to \infty$ ($\gamma = 1/2$), то равенство (68) совпадает с (9). Таким образом, все неравенства, вытекающие из (9), доказаны. Очевидно, не представляет трудностей найти и их конечноэнергетические аналоги.

7. ПРОБЛЕМА ОСЦИЛЛЯЦИЙ

Как уже подчеркивалось, рассматривается не сама $f(E)$, а интеграл от нее, чтобы не ограничивать возможные осцилляции $f(E)$.

Рассмотрим теперь трудности, связанные с осцилляциями, подробней. Неравенства (59) и (60) при $\nu \to 1$ имеют вид:

$$|\varphi_2(\bar{E}^{(2)})| \leqslant \left(\frac{e}{\nu-1}\right)^{\gamma_2-\gamma_1}; \tag{69}$$

$$|\varphi_1(\bar{E}^{(1)})| \geqslant \left(\frac{\nu-1}{e}\right)^{\gamma_2-\gamma_1}. \tag{70}$$

Неравенства (69) и (70) становятся неэффективными при $\nu \to 1$. Это обстоятельство показывает, что условия на осцилляции $\gamma(E)$ необходимы, если надо получить неравенства для $f(E)$ в любой точке интервала $(E, \nu E)$. Вместе с тем из соотношения (50) и формул (55), (55′), (55″) видно, что существенное значение приобретают осцилляции $\gamma(E')$ лишь при энергиях порядка E.

Поведение же $\gamma(E')$ при $E' \ll E$ и $E' \gg \nu E$ может быть произвольным. Поэтому если известно, что осцилляции $\gamma(E')$ ограничены в некотором достаточно большом интервале энергий, то это позволяет получить ограничения на $f(E)$ внутри этого интервала независимо от характера ее осцилляций в других областях. Вместо условия на осцилляции $\gamma(E)$ можно ввести условие на осцилляции $|f(E)|$. Последнее должно быть выполнено только в интервале $(E, \nu E)$, например достаточно предполагать, что в этом интервале справедливо условие (18). Тогда из неравенств (61), (62) получаем следующие неравенства для $f(E')$:

$$\left\{N_2(\nu)\,\frac{\nu^{\nu/(\nu-1)}}{\nu-1}\right\}^{-1} \leqslant |f(E')| \leqslant \frac{\nu^2E^2-1}{N_1(\nu)}\,\frac{\nu^{\nu/(\nu-1)}}{\nu-1}, \tag{71}$$

где E' — любая точка интервала $(E, \nu E)$. Согласно формулам (69), (70), при $\gamma_2 - \gamma_1 \ll 1$ можно рассматривать ν, близкие к единице.

В асимптотике уже убедились в том, что, если $\gamma(E)$ удовлетворяет условию (63), то ν можно взять произвольно близким к единице (ν фиксировано).

Сейчас покажем, что справедлив более сильный результат: если

$$\nu = 1 + \Delta(E), \quad \Delta(E) \to 0, \quad \widetilde{\gamma}(E') \ln \Delta(E) \to 0, \quad E \to \infty, \tag{72}$$

где E' — любая точка интервала $(\varkappa E, \varkappa^{-1}\nu E)$, то для такого ν по-прежнему выполнено соотношение (68).

Для доказательства заметим, что вследствие (63) независимо от величины ν имеет место соотношение

$$\ln|\varphi(\overline{E})| = 2\int_1^E \frac{dE'\widetilde{\gamma}(E')}{E'} +$$

$$+\frac{\nu E}{\nu-1}\int_{\varkappa E}^{\varkappa^{-1}\nu E} \frac{dE'\widetilde{\gamma}(E')}{E'^2} \ln\left|\frac{E'+E}{E'-E}\,\frac{E'-\nu E}{E'+\nu E}\right| + \varepsilon(E), \tag{73}$$

$$\varepsilon(E) \to 0 \quad \text{при} \quad E \to \infty, \quad \varkappa < 1.$$

Действительно, разобьем промежуток интегрирования в (67) на три: $(1, \varkappa E)$, $(\varkappa E, \varkappa^{-1}\nu E)$, $(\varkappa^{-1}\nu E, \infty)$. Оценим интеграл по первому промежутку:

$$\int_1^{\varkappa E} \frac{dE'\widetilde{\gamma}(E')}{E'^2} \ln\left|\frac{E'+E}{E'-E}\,\frac{E'-\nu E}{E'+\nu E}\right| = 2\,\frac{\nu-1}{\nu E}\int_1^{\varkappa E}\frac{dE'\widetilde{\gamma}(E')}{E'} +$$

$$+\int_1^{\varkappa E}\frac{dE'\widetilde{\gamma}(E')}{E'^2}\cdot 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{E'}{E}\right)^{2n+1}\frac{1}{2n+1}\left[1-\frac{1}{\nu^{2n+1}}\right]. \tag{74}$$

Легко видеть, что при $E \to \infty$ второй интеграл в (74) имеет вид $(\nu - 1)\,\varepsilon(E)/(\nu E)$.

Для доказательства разобьем промежуток интегрирования рассматриваемого интеграла на два: $(1, \widetilde{\varepsilon}(E)E)$ и $(\widetilde{\varepsilon}(E)E, \varkappa E)$, где при $E \to \infty$ $\widetilde{\varepsilon}(E) \to 0$, $\widetilde{\varepsilon}(E)E \to \infty$. Простая оценка показывает, что первый интеграл $\sim\widetilde{\varepsilon}^2(E)(\nu-1)/(E\nu)$ при любом поведении $\widetilde{\gamma}(E)$. Для оценки второго интеграла надо учесть, что $\widetilde{\gamma}(E) \to 0$ при $E \to \infty$. Требуемая малость интеграла по интервалу $(\varkappa^{-1}\nu E, \infty)$ непосредственно вытекает из формулы (55) и условия (63).

При написании равенства (73) также учитывалось, что

$$\int_{\varkappa E}^{E} dE'\,\frac{\widetilde{\gamma}(E')}{E'} \to 0 \quad \text{при} \quad E \to \infty.$$

Соотношение (73) доказано.

Воспользовавшись формулами (55), (55′), (55″), (56) и теоремой о среднем, получим

$$\ln|\varphi(\bar{E})| = 2\int_1^E \frac{dE'\tilde{\gamma}(E')}{E'} + [\gamma(E_{\text{ср}}^{(2)}) - \gamma(E_{\text{ср}}^{(1)})]\ln(\nu-1) + \varepsilon(E), \tag{73′}$$

$$\varkappa E \leqslant E_{\text{ср}}^{(1)} \leqslant \mu E, \quad \mu E \leqslant E_{\text{ср}}^{(2)} \leqslant \varkappa^{-1}\nu E.$$

Из равенства (73′) непосредственно вытекает требуемый результат.

Продемонстрируем теперь, что в некоторых случаях интервал $(E, \nu E)$ может быть сделан крайне малым. Пусть $\tilde{\gamma}(E)\ln E \to 0$. Последнее условие (при $\gamma = 1/2$) эквивалентно требованию $|\xi(E)|/\ln E \to \infty$. Докажем, что в этом случае равенство (68) справедливо, если даже $\nu = 1 + 1/E^{n+1}$, $n > 0$ — любое.

Для доказательства достаточно заметить, что в рассматриваемом случае $\tilde{\gamma}(E')\ln E \to 0$, где E' — любая точка интервала $(\varkappa E, \varkappa^{-1}\nu E)$. Таким образом, если $|\xi(E)| > C\ln E\ln\ln E \ldots$ $\ldots (\ln\ldots\ln E)^{1+\varepsilon}$ (см. разд. 1), то полное сечение, усредненное по интервалу $(E, E + 1/E^n)$, $n > 0$ — любое, стремится в асимптотике к постоянному пределу.

8. ОГРАНИЧЕНИЯ НА ОТНОШЕНИЕ АМПЛИТУД ЧАСТИЦЫ И АНТИЧАСТИЦЫ

Свойства функции $f_+(E)/f_-(E)$ изучим, воспользовавшись, как и при рассмотрении $f(E)$, удобным интегральным соотношением. Прежде всего заметим, что дисперсионное соотношение для $\ln(f_+(E)/f_-(E))$ можно обосновать так же, как и дисперсионное соотношение для $\ln f(E)$ (см. разд. 4). Как известно, оно имеет вид

$$\ln\frac{f_+(E)}{f_-(E)} = \frac{2E}{\pi}\int_1^\infty \frac{dE'\delta^-(E')}{E'^2 - E^2}. \tag{75}$$

(Напомним, что под $f_\pm(E)$ понимаются введенные ранее функции $\tilde{f}_\pm(E)$, не имеющие нулей.)

Поскольку функция $\ln[f_+(E)/f_-(E)]/E$ удовлетворяет представлению (45), то для нее справедливо соотношение (47). Взяв в этом соотношении $\psi(E) \equiv 1$ и проведя элементарное интегрирование, получим

$$\operatorname{Re} B_a(E) = \int_E^{\nu E}\frac{dE'}{E'}\ln\left|\frac{f_+(E')}{f_-(E')}\right| = \int_1^\infty \frac{dE'\gamma^-(E')}{E'}\ln\left|\frac{E'+E}{E'-E}\,\frac{E'-\nu E}{E'+\nu E}\right|, \tag{76}$$

где $\gamma_-(E) \equiv -\delta^-(E)/\pi$; $B_a(E) \equiv \int_E^{\nu E}\frac{dE'}{E'}\ln\frac{f_+(E')}{f_-(E')}$.

Как уже отмечалось, неравенство (38в) остается справедливым и для фазы каждой из амплитуд $f_{\pm}(E)$. Для доказательства достаточно выразить $\operatorname{Im}(f_{\pm}(E)/E)$ через дисперсионный интеграл, аналогично формуле (37) для $\operatorname{Im}(f(E)/E)$. В результате получим, что $\operatorname{Im}(f_{\pm}(E)/E) > 0$, если $\operatorname{Im} E > 0$ и, следовательно, неравенство (38), а значит и (38в), справедливо для $\delta_{\pm}(E)$. Таким образом,

$$-1 \leqslant \gamma^{-}(E) \leqslant 1. \tag{77}$$

Теперь найдем ограничения на $\operatorname{Re} B_a(E)$, вытекающие из неравенства (77) и из других ограничений на $\gamma^{-}(E)$. Предположим, что в интервале (E_1, E_2), где E_1 и E_2 — произвольные энергии, $\gamma^{-}(E')$ удовлетворяет условию:

$$\gamma_1 \leqslant \gamma^{-}(E') \leqslant \gamma_2, \quad -1 \leqslant \gamma_{1,2} \leqslant 1. \tag{78}$$

В интервале $(1, E_1)$ $\gamma^{-}(E)$ известна, а в интервале (E_2, ∞) $\gamma^{-}(E)$ — произвольная функция, удовлетворяющая (77).

Рассмотрим случай $E > E_1$, $E_2 > \mu E$, где $\mu = \sqrt{\nu}$ (см. разд. 6). Воспользовавшись теоремой о среднем, получим следующие неравенства:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} B_a(E) \leqslant A_a(E_1) + \gamma_2 I_a(E_1, \mu E) + \\ + \gamma_1 I_a(\mu E, E_2) - I_a(E_2, \infty);\end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} B_a(E) \geqslant A_a(E_1) + \gamma_1 I_a(E_1, \mu E) + \\ + \gamma_2 I_a(E_2, \mu E) + I_a(E_2, \infty),\end{aligned} \tag{80}$$

где

$$A_a(E_1) \equiv \int_1^{E_1} \frac{dE'\gamma^{-}(E')}{E'} \ln\left|\frac{E'+E}{E'-E}\,\frac{E'-\nu E}{E'+\nu E}\right|;$$

$$I_a(a, b) = \int_a^b \frac{dE'}{E'} \ln\left|\frac{E'+E}{E'-E}\,\frac{E'-\nu E}{E'+\nu E}\right|.$$

Нам осталось вычислить $I_a(a, b)$. Заметим, что

$$I_a(a, b) = \Phi(a/E, b/E) - \Phi(a/\nu E, b/\nu E), \tag{81}$$

где

$$\Phi(x_1, x_2) \equiv \int_{x_1}^{x_2} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \frac{dx}{x}, \quad x_2 > x_1.$$

Функция $\Phi(x_1, x_2)$ легко вычисляются при произвольных значениях x_1 и x_2. В результате получаем:

$$\Phi(x_1, x_2) = K(x_2) - K(x_1), \quad x_2 < 1, \tag{82}$$

$$\Phi(x_1, x_2) = \pi^2/2 - K(x_1) - K(1/x_2), \quad x_1 < 1, \quad x_2 > 1; \tag{83}$$

$$\Phi(x_1, x_2) = K(1/x_1) - K(1/x_2), \quad x_1 > 1; \tag{84}$$

$$K(x) \equiv 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}/(2n+1)^2.$$

Найденные неравенства имеют более простой вид, если записать $f(E)$ в виде

$$f(E)=[(E-1)/(E+1)]^{\gamma_i}\,\varphi_a^{(i)}(E); \tag{85}$$

$i=2$ используем при получении ограничений сверху, $i=1$ — снизу. Учитывая непосредственно проверяемое равенство

$$\ln[(E+1)/(E-1)]=2E\int\limits_1^\infty dE'/(E'^2-E^2), \tag{86}$$

видим, что $\varphi_a^{(i)}(E)$ удовлетворяет дисперсионному соотношению (75), если в последнем сделать замену $\delta^-(E')\to\delta^-(E')+\pi\gamma_i$.

Аналогично

$$\int\limits_E^{\nu E}\frac{dE'}{E'}\ln|\varphi_a^{(i)}(E')|=\ln|\varphi_a^{(i)}(\bar E)|\ln\nu$$

удовлетворяет соотношению (76), если $\gamma^-(E')$ заменить на $\gamma^-(E')-\gamma_i$.

Поступая так же, как при выводе неравенств (79), (80) и учитывая формулы (82)—(84), приходим к неравенствам:

$$\ln|\varphi_a^{(2)}(\bar E^{(2)})|\leqslant\frac{1}{\ln\nu}\left\{A_a^{(2)}(E_1)+(\gamma_2-\gamma_1)\left[\frac{\pi^2}{2}-2K\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+(1+\gamma_1)\left[K\left(\frac{\nu E}{E_2}\right)-K\left(\frac{E}{E_2}\right)\right]\right\}; \tag{87}$$

$$\ln|\varphi_a^{(1)}(\bar E^{(1)})|\geqslant\frac{1}{\ln\nu}\left\{A_a^{(1)}(E_1)+(\gamma_1-\gamma_2)\left[\frac{\pi^2}{2}-2K\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+(1-\gamma_2)\left[K\left(\frac{E}{E_2}\right)-K\left(\frac{\nu E}{E_2}\right)\right]\right\}, \tag{88}$$

где

$$A_a^{(i)}(E_1)\equiv\int\limits_1^{E_1}\frac{dE'\,[\gamma^-(E')-\gamma_i]}{E'}\ln\left|\frac{E'+E}{E'-E}\,\frac{E'-\nu E}{E'+\nu E}\right|.$$

В частном случае $\nu\gg1$, $\nu E/E_2\ll1$ неравенства (87), (88) принимают вид:

$$\ln|\varphi_a^{(2)}(\bar E^{(2)})|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\ln\nu}\left[A_a^{(2)}(E_1)+(\gamma_2-\gamma_1)\left(\frac{\pi^2}{2}-\frac{4}{\sqrt{\nu}}\right)+\frac{2(1+\gamma_1)\nu E}{E_2}\right]; \tag{87'}$$

$$\ln|\varphi_a^{(1)}(\bar E^{(1)})|\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{\ln\nu}\left[A_a^{(1)}(E_1)+(\gamma_1-\gamma_2)\left(\frac{\pi^2}{2}-\frac{4}{\sqrt{\nu}}\right)-\frac{2(1-\gamma_2)\nu E}{E_2}\right]. \tag{88'}$$

Отметим, что, согласно (77),

$$A_a^{(i)}(E_1) < 4E_1/E, \qquad \text{если } E_1/E \ll 1.$$

Из неравенств (87), (88) следует, что если разность фаз $f_+(E)$ и $f_-(E)$ мала на достаточно большом интервале (E_1, E_2), то внутри этого интервала $|f_+(E)/f_-(E)| \approx 1$.

Разность фаз функций $f_+(E)$ и $f_-(E)$, в частности, будет мала в том случае, если $|\operatorname{Re} f_\pm(E)/\operatorname{Im} f_\pm(E)| \ll 1$. Именно эта ситуация, как известно, осуществляется для $\pi^\pm p$-рассеяния при энергии в несколько десятков гигаэлектронвольт.

Чтобы получить ограничения на $f_+(E)/f_-(E)$, вытекающие только из аналитичности и унитарности, т. е. из неравенства (77), необходимо в формулах (87), (88) положить $E_1 = 1$, $E_2 \to \infty$, $\gamma_2 = 1$, $\gamma_1 = -1$. В результате имеем

$$\ln|\varphi_a^{(2)}(\bar{E}^{(2)})| \leqslant \frac{1}{\ln\nu}\left(\pi^2 - \frac{8}{\sqrt{\nu}}\right), \qquad \nu \gg 1; \tag{87''}$$

$$\ln|\varphi_a^{(1)}(\bar{E}^{(1)})| \geqslant -\frac{1}{\ln\nu}\left(\pi^2 - \frac{8}{\sqrt{\nu}}\right), \qquad \nu \gg 1. \tag{88''}$$

Из неравенств (87″), (88″) непосредственно вытекает, что при $E \to \infty$ существует последовательность E_i, такая, что $|f_+(E_i)/f_-(E_i)| \to 1$ при $E_i \to \infty$. Эти ограничения на $\varphi_a^{(i)}(E)$, как и неравенства (61), (62), зависят только от ν, но не от E. Аналогичным образом можно получать следствия и из других условий на разность фаз $f_+(E)$- и $f_-(E)$-амплитуд. Рассмотрим одно из них (для простоты ограничимся асимптотическим случаем).

Пусть при $E \to \infty$ $\gamma^-(E)$ удовлетворяет двойному неравенству:

$$C_2/E^{\alpha_2} \leqslant \gamma^-(E) \leqslant C_1/E^{\alpha_1}, \qquad 0 < \alpha_{1,2} < 1. \tag{89}$$

Используя соотношение (76), легко получить, что тогда справедливы ограничения:

$$\left|\frac{f_+(\bar{E})}{f_-(\bar{E})}\right| \leqslant 1 + \frac{\tilde{C}_1}{(\ln\nu)\,E^{\alpha_1}} + \frac{\tilde{C}_2}{(\ln\nu)\,E^{\alpha_2}} + O\left(\frac{1}{E^{\alpha_1}}\right) + O\left(\frac{1}{E^{\alpha_2}}\right); \tag{90}$$

$$\left|\frac{f_+(\bar{\bar{E}})}{f_-(\bar{\bar{E}})}\right| \geqslant 1 + \frac{\tilde{C}_2}{(\ln\nu)\,E^{\alpha_2}} + \frac{\tilde{C}_1}{(\ln\nu)\,E^{\alpha_1}} + O\left(\frac{1}{E^{\alpha_1}}\right) + O\left(\frac{1}{E^{\alpha_2}}\right), \tag{91}$$

$$E \leqslant \bar{E} \leqslant \nu E, \qquad E \leqslant \bar{\bar{E}} \leqslant \nu E,$$

где

$$\tilde{C}_1 = C_1 \int_0^{\sqrt{\nu}} \frac{dy}{y^{1+\alpha_1}} \ln\left|\frac{1+y}{1-y}\,\frac{y-\nu}{y+\nu}\right|;$$

$$\tilde{C}_2 = C_2 \int_{\sqrt{\nu}}^{\infty} \frac{dy}{y^{1+\alpha_2}} \ln\left|\frac{1+y}{1-y}\,\frac{y-\nu}{y+\nu}\right|; \quad O\left(\frac{1}{E^{\alpha_i}}\right) E^{\alpha_i} \to 0, \text{ при } E \to \infty.$$

Константы $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ легко оцениваются.

Рассмотрим только случай $\nu - 1 \ll 1$, поскольку в данном случае эффективные ограничения получаются и при ν, близком к единице.

Сохраняя при $\nu \to 1$ только основной член, получаем

$$\widetilde{C}_1 = -C_1 A; \quad \widetilde{C}_2 = C_2 A; \quad A = \int\limits_{1/\sqrt{\nu}}^{\sqrt{\nu}} \ln|1-y|\,dy.$$

Этот интеграл вычисляется элементарно:

$$\widetilde{C}_1 = -C_1 \ln\nu \ln(\nu - 1); \quad \widetilde{C}_2 = C_2 \ln\nu \ln(\nu - 1).$$

Из формулы ясно, что если $\nu = 1 + 1/E^n$, $n > 0$, то ограничения (90), (91) примут вид:

$$|f_+(\overline{E})/f_-(\overline{E})| \leqslant 1 + nC_1 \ln E/E^{\alpha_1} - nC_2 \ln E/E^{\alpha_2} + \\ + O(1/E^{\alpha_1}) + O(1/E^{\alpha_2}); \tag{90'}$$

$$|f_+(\overline{\overline{E}})/f_-(\overline{\overline{E}})| \geqslant 1 + nC_1 \ln E/E^{\alpha_1} - nC_2 \ln E/E^{\alpha_2} + \\ + O(1/E^{\alpha_1}) + O(1/E^{\alpha_2}). \tag{91'}$$

Заканчивая изучение связи между фазой и модулем функций $f(E)$ и $f_+(E)/f_-(E)$, отметим: существование рассматривавшихся интегралов от $\ln f(E)$ и $\ln|f_+(E)/f_-(E)|$ по разрезу накладывает некоторое ограничение на характер возможных нулей $f(E)$ $(f_\pm(E))$ на разрезе. Однако, в действительности, все полученные ограничения не зависят от предположения о существовании этих интегралов.

Чтобы убедиться в этом, достаточно вместо $f(E)$ рассматривать функцию:

$$\overline{f}(E) \equiv \frac{1}{\ln\widetilde{\nu}} \int\limits_{E}^{\widetilde{\nu}E} \frac{dE' f(E')}{E'},$$

где $\widetilde{\nu}$ берется произвольно близким к единице. Очевидно, если $\widetilde{\nu} - 1$ достаточно мало, то при произвольных конечных энергиях $\overline{f}(E)$ экспериментально не отличима от $f(E)$. С другой стороны, $\overline{f}(E)$ не имеет нулей на разрезе.

Действительно, $\operatorname{Im}\overline{f}(E) = 0$ в том и только в том случае, если $\operatorname{Im} f(E') = 0$ всюду в интервале $(E, \widetilde{\nu}E)$. Однако в этом случае и $f(E') = 0$ всюду в интервале $(E, \widetilde{\nu}E)$. Последнее утверждение непосредственно вытекает из унитарности, в чем легко убедиться, рассмотрев разложение $f(E)$ по полиномам Лежандра. Учитывая, что множество нулей $f(E)$ на разрезе есть множество меры нуль, получим: если $f(E') = 0$ на интервале $(E, \widetilde{\nu}E)$, то $f(E) \equiv 0$.

Итак, убедились, что $\bar{f}(E)$ не имеет нулей на разрезе. Очевидно, $\bar{f}(E)$ удовлетворяет тем же условиям 1—5, которые предполагались для $f(E)$ (см. разд. 2). Следовательно, для $\bar{f}(E)$ справедливы все соотношения и ограничения, полученные для $f(E)$.

9. СВЯЗЬ ИНТЕГРАЛОВ ОТ РЕАЛЬНОЙ И МНИМОЙ ЧАСТЕЙ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

Из сформулированных в разд. 2 свойств амплитуды рассеяния вытекает [30] равенство ряда интегралов от реальной и мнимой частей амплитуды рассеяния по разрезу. Эти равенства, в частности, позволяют установить знак некоторых интегралов от реальной части. Приведем одно из них:

$$\sqrt{1+a^2}\int_1^\infty \frac{dE'\,[\operatorname{Re} f(E')-f(0)]}{E'\sqrt{E'^2-1}\,(E'^2+a^2)}=$$

$$=\int_1^\infty \frac{dE'\,\operatorname{Im} f(E')}{E'\,(E'^2+a^2)}; \qquad a\geqslant 0 \text{ — любое.} \tag{92}$$

Из соотношения (92) и унитарности (24) непосредственно следует:

$$\int_1^\infty \frac{dE'\,[\operatorname{Re} f(E')-f(0)]}{E'\sqrt{E'^2-1}\,(E'^2+a^2)}>0.$$

Поскольку a в (92) — произвольное число, то соотношение (92) можно продифференцировать по a любое число раз. Отметим, что равенство (92) связывает сравнительно медленно сходящийся интеграл от мнимой части амплитуды со сходящимся быстрее интегралом от реальной части. Поэтому его можно использовать для получения информации о поведении $\operatorname{Im} f(E)$ в недоступной пока эксперименту области энергий.

Соотношения типа (92) позволяют установить связь между асимптотикой амплитуды рассеяния и знаками ряда интегралов от ее реальной части, а именно [30]:

1) если $f(E)/E\to 0$, то справедливо равенство:

$$\int_1^\infty \frac{dE'\operatorname{Re} f(E')}{E'^2+a^2}=-\frac{1}{\pi}\int_1^\infty dE'\,\frac{\operatorname{Im} f(E')}{E'^2+a^2}\ln\frac{E'+1}{E'-1}-$$

$$-\frac{2a^2}{\pi}\varphi(a)\int_1^\infty \frac{dE'\,\operatorname{Im} f(E')}{E'\,(E'^2+a^2)}+\varphi(a)\,f(0), \tag{93}$$

где

$$\varphi(a)\equiv[\pi/2-\operatorname{arctg}(1/a)]/a.$$

Из (93) вытекает, что если $f(0) \leqslant 0$, то

$$\int_1^\infty dE' \frac{\operatorname{Re} f(E')}{E'^2 + a^2} < 0.$$

Из (36) следует, что условие $f(0) \leqslant 0$ довольно либерально (как известно, оно выполнено для πp-рассеяния). Кроме того, это условие достаточное, но не необходимое.

При $a = 0$ соотношение (93) принимает наиболее простой вид:

$$\int_1^\infty \frac{dE' \operatorname{Re} f(E')}{E'^2} = f(0) - \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{dE' \operatorname{Im} f(E')}{E'^2} \ln \frac{E'+1}{E'-1}; \tag{93'}$$

2) пусть существует $\lim\limits_{E\to\infty} [f(E)/E] = i\sigma_\infty/4\pi$, тогда

$$\sigma_\infty = 8 \int_1^\infty \frac{dE' \operatorname{Re} f(E')}{E'^2} + \frac{8}{\pi} \int_1^\infty \frac{dE' \operatorname{Im} f(E')}{E'^2} \ln \frac{E'+1}{E'-1} - 8f(0) \tag{94}$$

или

$$\sigma_\infty = 8 \int_1^\infty dE' \frac{\operatorname{Re} f(E') - f(0)}{E' \sqrt{E'^2 - 1}}. \tag{95}$$

Соотношения (94), (95) показывают: если полное сечение постоянно при сверхвысоких энергиях, то его предельное значение тесно связано с асимптотикой реальной части.

Действительно, интеграл от $\operatorname{Im} f(E)$ в (94) сходится быстрее, чем интеграл от $\operatorname{Re} f(E)$, $f(0)$ также определяется значениями $f(E)$, прежде всего в области низких энергий (36);

3) $f(E)/E \to \infty$. В этом случае удобно рассматривать обратную амплитуду. Чтобы $f(E)$ не имела нулей при $f(1) > 0$, под $f(E)$ понимаем $f(E) - A$, $A \geqslant f(1)$ (см. разд. 3). Получающееся соотношение

$$\int_1^\infty \frac{dE' \operatorname{Re} f(E')}{|f(E')|^2} = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{dE' \operatorname{Im} f(E')}{|f(E')|^2} \ln \frac{E'+1}{E'-1} \tag{96}$$

показывает, что

$$\int_1^\infty \frac{dE' \operatorname{Re} f(E')}{|f(E')|^2} > 0.$$

Рассматривая обратную амплитуду в случае, когда $f(E)$ удовлетворяет несколько более сильному ограничению снизу, чем (5), а именно: $|f(E)| \to \infty$ при $E \to \infty$, приходим к равенству:

$$\int^\infty \frac{dE' \operatorname{Re} f(E')}{|f(E')|^2 E' \sqrt{E'^2 - 1}} = - \int_1^\infty \frac{dE' \operatorname{Im} f(E')}{E' |f(E')|^2}, \tag{97}$$

из которого следует, что

$$\int_1^\infty \frac{dE' \operatorname{Re} f(E')}{E' \, |f(E')|^2 \sqrt{E'^2-1}} < 0.$$

В заключение рассмотрим вопрос, в какой мере приведенные в этом обзоре результаты можно распространить на процессы, амплитуды которых имеют нефизическую область, и на неравные нулю переданные импульсы. Если $f(E)$ имеет нефизическую область, то дисперсионное соотношение имеет вид

$$f(E) = f(0) + \frac{2E^2}{\pi} \int_\alpha^\infty \frac{dE' \operatorname{Im} f(E')}{E'(E'^2-E^2)}, \tag{36'}$$

где $\alpha < 1$ (за единицу выбрана энергия начала физической области). Очевидно, если взять функцию

$$f(E) - \frac{2E^2}{\pi} \int_\alpha^1 \frac{dE' \operatorname{Im} f(E')}{E'(E'^2-E^2)} \equiv \Phi(E),$$

то она уже не имеет нефизической области и, следовательно, к ней полностью применимо проведенное рассмотрение. При достаточно больших E

$$-\frac{2E^2}{\pi} \int_\alpha^1 \frac{dE' \operatorname{Im} f(E')}{E'(E'^2-E^2)} \approx \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dE' \operatorname{Im} f(E')}{E'}.$$

Учитывая, что в реальных случаях $f(E)$ растет, при высоких энергиях $\Phi(E)$ мало отличается от $f(E)$.

Таким образом, при больших E полученные результаты распространяются на процессы, амплитуды рассеяния которых имеют нефизическую область. Рассмотрим теперь $f(E, p)$, где p — переданный импульс.

Если $p > 0$ (p находится внутри области аналитичности — эллипса Мартена [31]), то, поскольку $f(E, p)/E^2 \to 0$ при $E \to \infty$ [32], все результаты при конечных энергиях остаются справедливыми и для таких p (см. разд. 2). При асимптотических энергиях, разумеется, надо учесть, что неравенство Фруассара (1) заменяется новым условием.

Если $p < 0$, то уже нельзя утверждать, что $\operatorname{Im} f(E, p) > 0$ (исключая область крайне малых p). Поэтому на такие p непосредственно распространить полученные результаты нельзя, однако для тех p, при которых $\operatorname{Im} f(E, p) > 0$, все предыдущее рассмотрение остается справедливым.

Приношу глубокую благодарность М. Н. Мнацакановой за плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К.** Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., Физматгиз, 1958.
2. **Мейман Н. Н.** ЖЭТФ, 1962, т. 43, с. 2247.
3. **Khuri N. N., Kinoshita T.** Phys. Rev. B, 1965, v. 137, p. 720.
4. **Froissart M.** Phys. Rev., 1961, v. 123, p. 1053.
5. **Вернов Ю. С.** ЖЭТФ, 1966, т. 50, с. 672; 1967, т. 53, с. 191.
6. **Khuri N. N., Kinoshita T.** Phys. Rev. B, 1965, v. 140, p. 706.
7. **Jin Y. S., Mcdowel S. W.** Phys. Rev. B, 1965, v. 138, p. 1279.
8. **Вернов Ю. С.** Исследования по ядерной физике. М., «Наука», 1971; «Ядерная физика», 1969, т. 10, с. 176.
9. **Ломсадзе Ю. М., Контрош Е. Э., Токарь С. С.** УФЖ, 1969, т. 14, с. 30.
10. **Волков Г. Г.** Препринт ИФВЭ 71-8, Серпухов, 1971.
11. **Wit R.** Phys. Lett., 1965, v. 15, p. 350; TPJU-20/65 Jagellonian University Cracov, Poland.
12. **Вернов Ю. С., Мнацаканова М. Н.** ТМФ, 1972, т. 10, с. 33.
13. **Jin Y. S., Martin A.** Phys. Rev. B, 1964, v. 135, p. 1369.
14. **Sugawara M.** Phys. Rev. Lett., 1965, v. 14, p. 336.
15. **Вернов Ю. С.** ТМФ, 1973, т. 17, с. 199.
16. **Вернов Ю. С.** ТМФ, 1970, т. 4, с. 3.
17. **Логунов А. А. и др.** ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 1079.
18. **Мейман Н. Н.** ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 1039.
19. **Van Hove L.** Phys. Lett., 1963, v. 5, p. 252.
20. **Евграфов М. А.** Аналитические функции. М., «Наука», 1965.
21. **Wit R.** Acta Physica Polonica, 1965, v. 28, p. 295.
22. **Kinoshita T.** Phys. Rev., 1967, v. 154, p. 1438.
23. **Wit R.** Acta Physica Polonica, 1965, v. 28, p. 865.
24. **Маркушевич А. И.** Теория аналитических функций. М., «Наука», 1967.
25. **Вернов Ю. С.** ТМФ, 1974, т. 21, № 2.
26. **Khuri N. N., Kinoshita T.** Phys. Rev. Lett., 1965, v. 14, p. 84.
27. **Martin A.** Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 76.
28. **Mnatsakanova M. N., Popova A. M., Vernov Yu. S.** Phys. Lett. B, 1972, v. 40, p. 174.
29. **Мусхелишвили Н. Н.** Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
30. **Мнацаканова М. Н.** ТМФ, 1973, т. 14, с. 192.
31. **Martin A.** Nuovo Cimento, 1966, v. 42, p. 930.
32. **Jin Y. S., Martin A.** Phys. Rev. B, 1964, v. 135, p. 1375.