«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1976, ТОМ 7, ВЫП. 1

УДК 539.182

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ И ПАРТОНЫ

В. Л. Гинзбург,
В. И. Манько

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР, Москва

В течение многих лет проводятся исследования релятивистских волновых уравнений с внутренними степенями свободы (внутренними переменными). В большинстве случаев такие уравнения обладают «дефектными» решениями, но известны также уравнения с дополнительными условиями, обладающие спектром масс, не встречающим особых возражений. С другой стороны, однако, введение взаимодействия в такие уравнения затруднительно. В связи с возможным, в принципе, описанием партонной модели с помощью упомянутых уравнений мы приведем имеющиеся данные о релятивистских уравнениях с внутренними переменными.

During many years the relativistic wave equations with inner degrees of freedom (inner variables) have been investigated. In the most cases such equations possess the defect solutions but there are known equations with auxiliary conditions whose mass spectrum is good enough. From the other side the introducing in these equations of interaction is a difficult problem. We present here a review of the situation with relativistic wave equations with inner variables in connection with the possibility to use these equations for describing some parton models.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование релятивистских волновых уравнений с определенным, и при этом конечным, значением спина было начато в 1926—1928 гг. Клейном и некоторыми другими авторами [1] для частицы со спином нуль и работами Дирака [2] для частицы со спином 1/2. Затем рассматривались уравнения для частиц с более высокими спинами [3—8] и с несколькими значениями массы и спина [9—14]. Первое бесконечно-компонентное релятивистское уравнение со спектром масс было получено в 1932 г. Майораной [15] (эта работа длительное время оставалась малоизвестной и практически недоступной). В 1947 г. была опубликована работа И. Е. Тамма и одного из авторов [16], в которой для описания частиц со спектром масс и спинов использовались внутренние переменные и рассматривалась волновая функция типа $\Psi(x_\mu, u_\mu)$, где в простейшем случае Ψ — скаляр; x_μ — координаты частицы ($\mu = 0, 1, 2, 3$) и u_μ — 4-вектор, отвечающий внутренним степеням свободы. Такой подход в значительной мере эквивалентен билокальной теории [17], в которой u_μ имеет смысл разности между координатами $x_\mu^{(1)}$ и $x_\mu^{(2)}$ двух связанных частиц, образующих одну наблюдаемую частицу.

К настоящему времени релятивистские волновые уравнения с высшими спинами и уравнения с внутренними степенями свободы помимо указанных работ рассмотрены также и в других статьях [18—46]. Для рассмотрения этого вопроса можно использовать и матричное представление (вместо введения новых 4-переменных типа u_μ); наиболее существенна не форма записи, а применение бесконечномерных представлений группы Лоренца (и других групп) или конечномерных, но неприводимых представлений этой группы с несколькими значениями спина частиц. Уравнения для частиц с определенным спином, но большим 0 и 1/2, оказываются довольно сложными и обладают спецификой. Поэтому изучению таких частиц с высшими спинами, равными 1, 3/2, 2 и т. д. в последние годы уделялось немало внимания (см., например, работы [47—52]).

Если говорить о физике, то стимулом для исследования релятивистских уравнений с внутренними степенями свободы было стремление решить проблему спектра масс, другими словами, получить некоторое уравнение, которое определяет возможные значения масс и всех квантовых чисел, отвечающих наблюдаемым элементарным частицам или отдельным их семействам. По-видимому, такая программа может иметь решение лишь в том случае, если взаимодействие частицы, описываемой обсуждаемыми уравнениями, со всеми полями является достаточно слабым. Только при таком условии спектр масс исходного невозмущенного уравнения может иметь какое-то реальное значение, подобно тому как вычисление уровней в атоме имеет смысл только при достаточно малых их ширине и сдвиге, которые обусловлены взаимодействием, не учитываемым в рассматриваемом приближении.

Теория релятивистских волновых уравнений с внутренними степенями свободы не привела, по крайней мере до настоящего времени, к каким-либо конкретным или хотя бы достаточно многообещающим результатам. Вместе с тем в последние годы вновь усилился интерес к пространственно-временному описанию структуры элементарных частиц в связи с вопросом о внутренней симметрии частиц, с кварковой моделью адронов [53—56] и с моделью партонов [56]. Возникающие при этом вопросы частично родственны проблематике, возникающей при изучении релятивистских уравнений с внутренними степенями свободы. Поэтому нам и представляется уместным остановиться на таких уравнениях.

1. НЕКОТОРЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ СО СПЕКТРОМ МАСС

Для того чтобы проиллюстрировать имеющиеся возможности и возникающие затруднения, приведем известные примеры релятивистских волновых уравнений со спектром масс.

Будем считать, что частица описывается скалярной волновой функцией $\Psi(x_\mu, u_\mu)$. Исходя из модели, обобщающей модель нерелятивистского волчка на релятивистский случай, подчиним эту функцию следующему уравнению [16]:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\, \partial x^\mu} - \varkappa^2 + \frac{\beta}{2} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu}\right] \Psi = 0, \tag{1}$$

где $M_{\mu\nu} = u_\mu \partial/\partial u^\nu - u_\nu \partial/\partial u_\mu$; β и $\varkappa$ — некоторые постоянные, причем β аналогична моменту инерции волчка. Чтобы решить в этом случае уравнение (1), необходимо разделить переменные x_μ и u_μ, а волновую функцию $\Psi(x_\mu, u_\mu)$ факторизовать:

$$\Psi(x_\mu; u_\mu) = \Psi(x_\mu)\, \Phi(u_\mu). \tag{2}$$

При этом функция $\Phi(u_\mu)$ является собственной для оператора

$$L\Phi = M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \Phi/2 = \lambda \Phi. \tag{3}$$

Тогда функция $\Psi(x_\mu)$ подчиняется уравнению

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\, \partial x^\mu} - \varkappa^2 + \lambda\beta\right] \Psi(x_\mu) = 0. \tag{4}$$

Состоянию с определенной массой отвечает решение этого уравнения, имеющее следующий вид:

$$\Psi(x_\mu) = \mathrm{const}\, \exp(-imt). \tag{5}$$

Это отвечает переходу в систему покоя (импульс $\mathbf{p} = 0$), причем для массы частицы получаем

$$m^2 = \varkappa^2 - \beta\lambda. \tag{6}$$

Таким образом, спектр масс, описываемый уравнением (1), задается собственным значением инвариантного оператора L. В уравнении (1) 4-вектор u_μ выбирается пространственно-подобным. Этот выбор обусловливается желанием иметь дискретный спектр значений λ, а тем самым и дискретный спектр масс (6). Легко показать, переходя к сферическим координатам на однополостном гиперболоиде:

$$\left.\begin{aligned} &u_0 = r\,\mathrm{sh}\,\Psi; \quad u_1 = r\,\mathrm{ch}\,\Psi \sin\theta \cos\varphi; \\ &u_2 = r\,\mathrm{ch}\,\Psi \sin\theta \sin\varphi; \quad u_3 = r\,\mathrm{ch}\,\Psi \cos\theta; \\ &r^2 = \mathbf{u}^2 - u_0^2; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$-\infty < \Psi < \infty; \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi; \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

что оператор L задается в дифференциальной форме следующим выражением:

$$L = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2\Psi}\frac{\partial}{\partial\Psi}\left(\operatorname{ch}^2\Psi\frac{\partial}{\partial\Psi}\right) + \frac{\Delta_{\theta,\varphi}}{\operatorname{ch}^2\Psi}, \tag{8}$$

где $\Delta_{\theta,\varphi}$ — угловая часть 3-оператора Лапласа:

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{9}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^2}{\partial u_\mu\,\partial u^\mu} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{L}{r^2}. \tag{10}$$

Если искать только решения уравнения на собственные значения (3), обладающие конечной нормой, т. е. квадратично-интегрируемые на однополостном гиперболоиде, то получится дискретный спектр λ. Действительно, переменные Ψ и θ, φ разделяются, т. е. функцию $\Phi(\Psi, \theta, \varphi)$ можно факторизовать:

$$\varphi(\Psi, \theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi)\, R(\Psi). \tag{11}$$

Здесь $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — обычные сферические функции; функция $R(\Psi)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2\Psi}\frac{\partial}{\partial\Psi}\left(\operatorname{ch}^2\Psi\frac{\partial}{\partial\Psi}\right) + \frac{l(l+1)}{\operatorname{ch}^2\Psi} + \lambda\right] R(\Psi) = 0. \tag{12}$$

Нормированным решением этого уравнения являются полиномы Лежандра $P_l^j(\operatorname{th}\Psi)$, где j — целое число. Введем новую переменную и функцию

$$z = \operatorname{th}\Psi; \quad P = \sqrt{1-z^2}\, R. \tag{13}$$

Тогда уравнение (12) перепишется в следующем виде:

$$(1-z^2)\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2z\frac{\partial P}{\partial z} + l(l+1)P + \frac{\lambda-1}{1-z^2}P = 0. \tag{14}$$

Это стандартное уравнение для функции Лежандра [56]. Оно имеет в качестве нормируемых решений полиномы Лежандра $P_l^j(z)$, где l и j — целые числа. Полиномы нормированы следующим образом:

$$\int_{-1}^{1} |P_l^j(z)|^2\, dz = \frac{2}{(2l+1)}\frac{(j+l)!}{(j-l)!}. \tag{15}$$

Собственное значение λ дискретно и связано с числом j:

$$\lambda = 1 - j^2; \quad j = 1, 2, 3, \ldots \tag{16}$$

При этом число l пробегает значения $l = j, j+1, j+2\ldots$ Переменная r не входит в конечные формулы, поскольку выбирается функция на однополостном гиперболоиде, так что $\partial\Psi/\partial r = 0$. Пространственно-подобный вектор u_μ означает, что необходимо выбирать $r^2 = \mathbf{uu} - \mathbf{u}_0^2 > 0$.

Если взять времениподобный вектор u_μ, то уравнение на собственные значения массы не будет иметь нормируемые решения и существует только непрерывный спектр масс [16]. В случае пространственно-подобного вектора u_μ также необходимо учитывать [57] и непрерывную часть спектра оператора L. Дело в том, что этот оператор подобен гамильтониану для атома водорода, обладающего непрерывным и дискретным спектром энергий. Собственные функции дискретного спектра нормируемы, непрерывного спектра — ненормируемы. Но если работать в гильбертовом пространстве квадратично-интегрируемых функций, необходимо учитывать весь спектр (как дискретную, так и непрерывную его часть), чтобы иметь полную в этом пространстве систему функций. Вместе с тем можно выбирать из такого пространства подпространство, в котором полной будет система функций, принадлежащих только дискретному спектру.

Полученный результат ясен и на групповом языке. Дело в том, что массовый оператор L является оператором Казимира $C_1 = M_{\mu\nu}M^{\mu\nu}/2$ [16, 12]. Второй оператор Казимира $C_2 = -i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}M^{\mu\nu}M^{\rho\sigma}/2$. Спектр операторов Казимира для неприводимых представлений группы Лоренца хорошо известен (см., например, работы [12, 16, 58]):

$$\lambda_1 \equiv \lambda = -(j^2-1)+\alpha^2; \qquad (17)$$
$$\lambda_2 = -\alpha j.$$

Здесь j — целое или полуцелое; α — положительное действительное число. В случае реализации $M_{\mu\nu} = u_\mu\partial/\partial u^\nu - u_\nu\partial/\partial u^\mu$ на однополостном гиперболоиде (1), если требовать квадратичной интегрируемости собственных функций оператора L, то число $\alpha = 0$ и j — целое число. Для пространственно-подобного вектора u_μ задача о собственных значениях операторов Казимира эквивалентна задаче о построении полной системы функций на однополостном гиперболоиде, т. е. на однородном многообразии, задаваемом стационарной группой вектора (0, 1, 0, 0). Это та же задача, что и при разложении квазирегулярного представления на однородном многообразии на неприводимые составляющие. Для двухполостного гиперболоида (времениподобный вектор u_μ, стационарная подгруппа вектора 1, 0, 0, 0) задача была решена в работе [58], для однополостного гиперболоида — в работе [59] и подробнее рассмотрена в работе [57].

Обсудим теперь полученный спектр масс. Как видно из формул (6) и (17), квадрат массы дискретен, но каждое значение бесконечнократно вырождено по числу l и по $m = l_z$ — проекции момента на ось z (масса состояния зависит только от числа j). Такие состояния можно трактовать как состояния с неопределенным спином (спектр масс обладает тем свойством, что при заданном числе j масса не зависит от спина, причем имеется бесконечнократное вырождение).

Бесконечнократное вырождение можно устранить, если наложим следующее релятивистски инвариантное дополнительное условие:

$$\left[M_{\mu\sigma}M^{\rho\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\,\partial x^\rho}-(j_0+1)\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\,\partial x^\mu}\right]\Psi(x_\mu,\ u_\mu)=0, \qquad (18)$$

где j_0 — фиксированное число. При переходе в систему покоя получаем условие

$$[M_{0\sigma}M^{0\sigma}-(j_0+1)]\,\Psi(x_\mu,\ u_\mu)=0. \qquad (19)$$

Отсюда видно, что на числа l и j дополнительным условием (19) накладывается следующая связь: $l^2+l+j^2-j_0=0$, $l\geqslant j$, $j\neq 0$. При целых l и j это соотношение имеет решения только для целых j_0. Таким образом, дополнительное условие (18) снимает бесконечнократное вырождение спектра масс по числу l.

Можно найти также спектр масс, соответствующий релятивистскому уравнению, в котором имеются смешанные члены, зависящие от координат центра инерции x_μ и внутренних координат u_μ:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\,\partial x^\mu}-\varkappa^2+\frac{1}{2}\beta M_{\mu\nu}M^{\mu\nu}+\varepsilon M_{\mu\sigma}M^{\rho\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\,\partial x^\rho}\right]\Psi(x_\mu,\ u_\mu)=0. \qquad (20)$$

Для энергии покоя [решение типа $\exp(-imt)$] из этого уравнения получаем

$$m^2=[\varkappa^2-\beta(\alpha^2-j^2+1)]/[1+\varepsilon(l^2+l-j^2+\alpha^2+1)]. \qquad (21)$$

При этом опять рассматриваются только собственные функции, имеющие единичную норму.

Релятивистское уравнение (1) построили, отправляясь от физической модели волчка или релятивистского ротатора. Релятивистские уравнения с непрерывными внутренними переменными строились и на основе модели релятивистского осциллятора [17, 18].

Конкретно в работе [17] масса в уравнении типа Клейна — Гордона $[\partial^2/\partial x_\mu\partial x^\mu-\varkappa^2]\,\Psi=0$ заменяется следующим скалярным оператором, зависящим от внутренних переменных:

$$\hat{\varkappa}^2=\lambda^2[-\partial^2/\partial u_\mu\,\partial u^\mu+u_\mu u^\mu/\lambda^4]^2/2, \qquad (22)$$

где λ — константа с размерностью длины. Волновая функция $\Psi(x_\mu,\ u_\mu)$ в этом случае опять факторизуется. Для множителя, зависящего только от внутренних переменных, находим следующую собственную функцию:

$$\Psi^{n_1 n_2 n_3 n_0} = H_{n_1}(u_1/\lambda)\, H_{n_2}(u_2/\lambda)\, H_{n_3}(u_3/\lambda)\, H_{n_0}(u_0/\lambda) \exp\left[-(u_0^2 + \mathbf{u}^2)/2\lambda^2\right] \tag{23}$$

обладающую единичной нормой (здесь H_n — полиномы Эрмита). Спектр масс, отвечающий массовому оператору (22), имеет вид

$$m^{n_1 n_2 n_3 n_0} = \left(\sqrt{2}/\lambda\right)(n_1 + n_2 + n_3 - n_0 + 1). \tag{24}$$

Здесь n_0, n_1, n_2, n_3 — целые неотрицательные числа.

Спектр масс (24) содержит нулевую массу покоя и бесконечнократно вырожден, поскольку знак перед n_0 отрицателен (число n_0 отвечает квантовому числу колебаний по оси времени). Аналогично случаю волчка можно устранить бесконечное вырождение с помощью уравнения со смешанными членами, когда внутренние координаты и координаты центра инерции тривиальным образом не отделяются. Рассмотрим, например, уравнение

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x^\mu} - \lambda^2 \left[-\frac{\partial^2}{\partial u_\mu \partial u^\mu} + u_\mu u^\mu/\lambda^4 \right]^2 \Big/ 2 + \right.$$
$$\left. + \varepsilon\lambda^2 \left[-(\partial^2/\partial x_\mu \partial u^\mu)^2 + (u_\mu \partial/\partial x_\mu)^2/\lambda^4 \right] \right\} \Psi = 0, \tag{25}$$

которое имеет следующий спектр масс:

$$m^{n_1 n_2 n_3 n_0} = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \frac{(n_1 + n_2 + n_3 - n_0 + 1)}{[1 - 2\varepsilon(n_0 + 1/2)]^{1/2}}. \tag{26}$$

При этом накладывается условие нормируемости собственной функции в пространстве внутренних переменных u_μ. Рассмотрение ведется для времениподобного вектора импульса $p_0^2 > \mathbf{p}^2$ и совершается переход в систему покоя $\mathbf{p} = 0$. Подбором параметра ε можно исключить большие значения n_0, так как иначе появляется мнимая масса. Об использовании такого требования речь пойдет ниже. Но в работе [17] оно принимается, причем для примера положено $\varepsilon = 1/2$. Тогда

$$m^{n_1 n_2 n_3 n_0} = 2(n_1 + n_2 + n_3 + 1)/\lambda \tag{27}$$

и бесконечное вырождение снимается.

Уравнения (25) можно несколько модифицировать [19, 20]:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x^\mu} - \varkappa^2 - \frac{\lambda^2}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial u_\mu \partial u^\mu} + \frac{1}{\lambda^4} u_\mu u^\mu \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \varepsilon\lambda^2 \left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial u^\mu} \right)^2 + \frac{1}{\lambda^4} \left(u_\mu \frac{\partial}{\partial u_\mu} \right)^2 \right] \right\} \Psi = 0. \tag{28}$$

При этом, если $\varkappa \neq 0$, устраняется решение с $p_\mu = 0$, так как получается следующий спектр масс:

$$m^2 = \frac{\varkappa^2 + 2(n_1 + n_2 + n_3 - n_0 + 1)^2/\lambda^2}{1 - 2\varepsilon(n_0 + 1/2)}. \tag{29}$$

В зависимости от знака коэффициента ε здесь, как и в (21), или имеется падающая ветвь спектра $m \to 0$, или возникает мнимая масса. Ряд уравнений осцилляторного типа был предложен М. А. Марковым [18]. Первое из этих уравнений для биспинора $\Psi(p_\mu, u_\mu)$, где $\Psi(p_\mu, u_\mu)$ — фурье-компонента волновой функции $\Psi(x_\mu, u_\mu)$, таково:

$$\left\{\gamma_\mu p_\mu + \varkappa + a\left[-\frac{\partial^2}{\partial u_\mu\, \partial u^\mu} + u_\mu u^\mu + 2\,\frac{(p_\mu \partial/\partial u_\mu)^2 - (p_\mu u^\mu)^2}{p_\mu p^\mu}\right]\right\}\Psi = 0. \tag{30}$$

В системе покоя $\mathbf{p} = 0$ массовый оператор имеет в этом случае вид гамильтониана для 4-осциллятора с одинаковыми знаками для всех четырех осцилляторов:

$$\hat{m} = \varkappa + a\,[\mathbf{u}^2 + u_0^2 - \partial^2/\partial u_0^2 - \partial^2/\partial \mathbf{u}^2], \tag{31}$$

откуда следует спектр масс

$$m^{n_1 n_2 n_3 n_0} = \varkappa + 2a(n_1 + n_2 + n_3 + n_0 + 2). \tag{32}$$

Основное состояние $n_1 = n_2 = n_3 = n_0 = 0$ при этом не вырождено. Для описания частиц с целым спином в работе [18] предложено аналогичное уравнение

$$\left\{p_\mu p^\mu + \varkappa^2 + a^2\left[-\frac{\partial^2}{\partial u_\mu\, \partial u^\mu} + u_\mu u^\mu + 2\,\frac{(p_\mu \partial/\partial u_\mu)^2 - (p_\mu u^\mu)^2}{p_\mu p^\mu}\right]\right\}\Psi = 0. \tag{33}$$

Поскольку в уравнениях (30) и (33) квадрат 4-импульса стоит в знаменателе, по существу происходит переход к уравнениям более высокого порядка по производным $\partial/\partial x_\mu$. Бесконечное вырождение в спектре масс (24) связано с наличием отрицательного члена n_0. Чтобы релятивистски инвариантным образом «запретить» колебания по оси времени, т. е. положить $n_0 = 0$, в работе [18] была предложена следующая система уравнений для функции Ψ:

$$\left\{\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \varkappa + a\left[-\frac{\partial^2}{\partial u_\mu\, \partial u^\mu} + u_\mu u^\mu\right]\right\}\Psi = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(u_\mu - \frac{\partial}{\partial u^\mu}\right)\Psi = 0. \tag{34}$$

В системе покоя $\mathbf{p} = 0$ второе из этих уравнений, которое будем называть дополнительным условием, принимает вид

$$(u_0 + \partial/\partial u_0)\,\Psi = 0. \tag{35}$$

Оператор $(u_0 + \partial/\partial u_0)$ — оператор уничтожения, который, действуя на соответственную функцию основного состояния осциллятора, дает нуль. Поэтому из всех решений, отвечающих первому уравнению (34), остаются только решения следующего вида:

$$\Psi_{n_1 n_2 n_3} = H_{n_1}(u_1) H_{n_2}(u_2) H_{n_3}(u_3) \exp[-(\mathbf{u}^2 + u_0^2)], \tag{36}$$

являющиеся решениями обоих уравнений (34). В произвольной системе координат нормированное основное состояние системы описывается следующей функцией:

$$\Psi_0 = \exp\{(p^\mu u_\mu)^2/(p_\mu p^\mu) - u_\mu u^\mu/2\}/\pi. \tag{37}$$

После того как начал интенсивно разрабатываться групповой подход в теории элементарных частиц, приведший к классификации элементарных частиц на основе унитарной SU_3-группы [53], теория релятивистских уравнений с внутренними переменными получила дальнейшее развитие [21—23]. Именно в рамках тех же уравнений типа (1) или (34) стали учитываться свойства симметрии, играющие роль внутренней симметрии и связанные с внутренними квантовыми числами элементарных частиц. Проиллюстрируем это на примере осцилляторной релятивистской модели [23].

Для частиц с полуцелым спином используем следующее уравнение:

$$\left\{\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \varkappa + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} b_i \left(-\frac{\partial^2}{\partial u_\mu^i\, \partial u^{\mu,\, i}} + u_\mu^i u^{\mu,\, i}\right)\right\}\Psi = 0. \tag{38}$$

Здесь u_μ^i $(i = 1, 2, \ldots, r)$; $u^{\mu,\, i} \equiv u_i^\mu$ — совокупность r 4-векторов. В дальнейшем r выберем равным трем. Этот выбор связан с тем фактом, что 3-осциллятор обладает U_3-симметрией. Поэтому введение трех релятивистских 4-осцилляторов позволяет учесть как релятивистскую инвариантность, так и свойства унитарной SU_3-группы. Параметры b_i принимают значения частот. Физическим образом, в какой-то мере соответствующим выбранной модели, является система («капля»), колеблющаяся около положения равновесия [23]. Именно эти колебания описываются внутренними переменными — 4-векторами u_μ^i. Для того же, чтобы не было бесконечнократного вырождения уровней, наложим на волновую функцию дополнительные условия (34):

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(u_\mu^i - \frac{\partial}{\partial u^{\mu,\, i}}\right)\Psi = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{39}$$

Волновая функция, удовлетворяющая системе уравнений (38), (39), факторизуется:

$$\Psi(x_\mu, u_\mu^i) = \{\exp[-\mathrm{i}(Et - \mathbf{pr})]\}\,\Psi(u_\mu^i). \tag{40}$$

Перейдем в систему покоя $\mathbf{p} = 0$. При этом функция φ является собственной для массового оператора:

$$\left[\varkappa + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} b_i \left(-\frac{\partial^2}{\partial u^i_\mu \, \partial u^{\mu,\, i}} + u^i_\mu u^{\mu,\, i}\right)\right]\varphi = \lambda\varphi \tag{41}$$

и удовлетворяет условиям

$$(u^i_0 + \partial/\partial u^i_0)\,\varphi = 0. \tag{42}$$

Собственные значения для масс покоя имеют следующий вид ($r = 3$):

$$m = \varkappa + 2\sum_{i=1}^{3} b_i\,(n^i_1 + n^i_2 + n^i_3 + 1). \tag{43}$$

Здесь n^i_1, n^i_2, n^i_3 — целые неотрицательные числа. Условие (42) приводит к равенству нулю чисел колебаний для временных координат осцилляторов, т. е. $n^i_0 = 0$. Следует обратить внимание на тот факт, что частоты b_i в (43) различны, т. е. каждый из трех осцилляторов обладает своей собственной частотой. Это существенно уменьшает степень вырождения уровней. Модель трех релятивистских осцилляторов отражает, в частности, некоторые свойства кварковой модели, в рамках которой барионы строятся из трех кварков. Кроме того, осцилляторная модель позволяет сделать еще и другие важные заключения о природе внутренних квантовых чисел элементарных частиц, таких, как гиперзаряд и изоспин. Это связано с возможностью классифицировать состояния, отвечающие внутренним возбуждениям системы, с помощью унитарной группы. Рассмотрим следующие операторы:

$$a^i_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u^i_\alpha + \frac{\partial}{\partial u^{\alpha,\, i}}\right); \quad a^{i+}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u^i_\alpha - \frac{\partial}{\partial u^{\alpha,\, i}}\right). \tag{44}$$

Построим из операторов a^i_α, a^{i+}_α генераторы U_3-группы $T_{ij} = a^{\alpha,\, i+}\, a_{\alpha,\, j}$. Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям инфинитезимальных операторов U_3-группы и коммутируют с массовым оператором. Следовательно, решения волнового уравнения (38) можно классифицировать с помощью квантовых чисел U_3-группы. Кроме того, можно из операторов a^i_α, a^{j+}_α построить оператор момента количества движения, связанный с переменными u^i_α:

$$M_{\alpha,\,\beta} = -\mathrm{i}\sum_{i=1}^{3}(a^{i+}_\alpha a^i_\beta - a^{i+}_\beta a^i_\alpha).$$

Операторы T_{ij} и $M_{\alpha\beta}$ коммутируют между собой и с массовым оператором; следовательно, решения волнового уравнения (38) можно классифицировать с помощью внутренних и пространственных квантовых чисел. Физически (но, разумеется, в рамках данной модели) это означает, что внутренние квантовые числа, такие, как гиперзаряд и изоспин, связаны с колебательными возбуждениями осцилляторов, составляющих элементарную частицу.

Операторы гиперзаряда Y, третьей проекции изоспина T_3 и оператора квадрата изоспина T^2 связаны с генераторами U_3-группы следующим образом

$$\left.\begin{aligned} Y &= 2(T_{33}-T_{11})/3+(T_{22}-T_{33})/3; \\ T_3 &= (T_{33}-T_{22})/2; \\ T^2 &= (T_{12}T_{21}+T_{21}T_{12})/2+T_3^2. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Оператор проекции момента количества движения M_z задается формулой

$$M_z = -\mathrm{i}\sum_{i=1}^{3}(a_1^{i+}a_2^i - a_2^{i+}a_1^i). \tag{46}$$

Оператор квадрата орбитального момента количества движения имеет вид $M^2 = M_{12}^2 + M_{23}^2 + M_{31}^2$. Операторы M^2, M_z коммутируют с операторами (45). На групповом языке можно сказать, что состояния с заданными квантовыми числами принадлежат одному неприводимому представлению U (9)-группы. Если бы учитывались колебания по оси времени для каждого из трех релятивистских осцилляторов, необходимо было бы использовать неприводимое представление некомпактной U (9,3)-группы. Условие (39) приводит к переходу к U (9)-группе.

Подчеркнем, что состояния, принадлежащие одному неприводимому представлению U (9)-группы, не обладают одинаковой массой в связи с различием частот осцилляторов. Таким образом, группа служит в данном случае в качестве динамической [60], или группы неинвариантности [61], или алгебры, генерирующей спектр [62]. Эти понятия часто связывают с бесконечномерными представлениями некомпактных групп. В данной задаче в одном представлении компактной U (9)-группы неинвариантности объединено конечное число состояний с разными массами. Неприводимое представление U (9)-группы задается старшим весом, для рассматриваемого осциллятора этот вес определяется главным квантовым числом $N = \sum\limits_{i=1}^{3} n_1^i + n_2^i + n_3^i$.

Определим значения спиновых моментов для некоторых нижних уровней. Для этого сначала сузим представление U (9)-группы на U (3)$\otimes U$ (3)-группу, а затем полученные представления сузим на U (3) $\otimes O$ (3)-группу. Получим следующий результат. Мультиплет со старшим весом (000 000 000), отвечающий случаю $N = 0$, есть унитарный синглет с моментом нуль. Мультиплет (100 000 000), отвечающий $N = 1$, имеет размерность девять и представляет собой триплет кварков с моментом единица. Следующий мультиплет с $N = 2$ и размерностью 45 имеет следующий состав: $(N = 2) = (6,5) + (6,1) + (3,3)$. Здесь использованы обычные обозначения: в правой части в скобках слева стоит индекс мультиплета SU_3-группы, а справа значение $2l + 1$, где l — момент.

Следующий уровень с размерностью 165 имеет состав: $(N = 3) = (10,7) + (10,3) + (8,5) + (8,3) + (1,1)$. Этому уровню принадлежат два унитарных октета с орбитальными моментами 1 и 2 и два декаплета с моментами 1 и 3, а также унитарный синглет с моментом нуль. Из приведенных результатов видно, что релятивистское уравнение, основанное на осцилляторной модели, имеет кваркоподобные решения и решения, обладающие правильными свойствами относительно унитарной группы. При этом нижние уровни отвечают кваркам, а при $N = 3$ появляются октет и декаплет *.

В работах Дирака [26] построен ряд релятивистских уравнений на основе введения дополнительных внутренних переменных u_a $(a = 1,2)$. Одно из этих уравнений особенно интересно тем, что внешне весьма походит на обычное уравнение Дирака, однако в качестве решений оно не имеет состояний с отрицательными энергиями. Внутренние переменные в этом уравнении Дирака являются двухмерным осциллятором, причем это уравнение с «зацепленными» внутренними переменными и переменными, отвечающими координатам центра инерции. В этом отношении соответствующее уравнение [26] родственно, например, уравнениям (18), (20). Однако внутренние переменные u_a не являются 4-вектором относительно группы Лоренца, а преобразуются вместе со своими производными по другому представлению, что делает само уравнение несколько необычным. Однокомпонентная функция $\Psi(x_\mu, u_1, u_2)$ зависит от шести переменных. Уравнение для нее пишется следующим образом:

$$(\partial/\partial x_0 + \alpha\partial/\partial \mathbf{x} + \beta)\, q\Psi = 0. \tag{47}$$

Здесь q (как и везде в настоящей статье $\hbar = c = 1$)

$$q = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ -\mathrm{i}\,\partial/\partial u_1 \\ -\mathrm{i}\,\partial/\partial u_2 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

* Развитию осцилляторной модели недавно был посвящен ряд статей (см. статью Dy, Kim and Noz. «Nuovo cimentoA», 1973, v. 13, 1089 и ссылки в ней).

Компоненты q_a удовлетворяют соотношению коммутации

$$[q_a q_b] = \mathrm{i}\beta_{ab}.$$

Четырехэлементные матрицы β, α имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}&\beta=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix};\ \alpha_1=-\begin{pmatrix}0&\sigma_z\\\sigma_z&0\end{pmatrix};\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0&\sigma_x\\\sigma_x&0\end{pmatrix};\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix};\\&1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix};\ \sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix};\ \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\qquad(49)$$

и действуют в (47) на 4-столбец $q\Psi$.

Матрицы β, α_1, α_2, α_3 в (49) антикоммутируют друг с другом, причем $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = -\beta^2 = -1$. Таким образом, для одной функции Ψ имеем четыре уравнения. Уравнение (47) является, с одной стороны, уравнением с дополнительными условиями и, с другой, уравнением со смешанными членами. Внутренние переменные u_a и $\partial/\partial u_a$ умножаются на производные по координатам центра инерции $\partial/\partial x_\mu$. Система (47) оказывается совместной, причем условие совместности имеет вид (положено $\varkappa^2 = 1$)

$$(\partial^2/\partial x_\mu\, \partial x^\mu - 1)\,\Psi = 0.$$

Для релятивистской инвариантности системы (47) необходимо следующее правило инфинитезимального преобразования столбца q при переходе из одной системы отсчета в другую:

$$\left.\begin{aligned}&q' = (1-\mathrm{i}W/2)\,q\,(1+\mathrm{i}W/2);\\&W_{ab} = q_a\,[\omega^{\rho\sigma}\alpha_\rho\beta\alpha_\sigma/4]\,q_b\end{aligned}\right\},\qquad(50)$$

где $\omega^{\rho\sigma}$ — инфинитезимальная матрица лоренцевского поворота. Рассмотрим теперь решения уравнения (47) в системе покоя. Вследствие релятивистской инвариантности по этим решениям легко восстановить и решение с неравным нулю импульсом. Решения ищутся в виде плоских волн типа $\exp(-\mathrm{i}p^\mu x_\mu)\,\varphi\,(u_a,\ p^\alpha)$. Общий случай сводится к решениям такого вида с помощью интегрального преобразования Фурье. В случае $\mathbf{p} = 0$ уравнения (47) для плоских волн можно записать следующим образом:

$$(p_0 u_1 + \partial/\partial u_1)\,\Psi = 0;\quad (p_0 u_2 + \partial/\partial u_2)\,\Psi = 0.\qquad(51)$$

Уравнения (51) имеют нормированное решение только при $p_0 = 1$. Поэтому второе решение уравнения Клейна — Гордона $p^2 = 1$, а именно решение $p_0 = -1$ исключается условием нормировки. При $\mathbf{p} = 0$ имеем

$$\Psi\,(x_\mu,\ u_1,\ u_2) = \pi^{-1/2}\exp(-\mathrm{i}p^\mu x_\mu)\times$$
$$+\exp\left\{\left[-\frac{1}{2}(u_1^2+u_2^2)+\mathrm{i}p_1(u_1^2-u_2^2)-2\mathrm{i}p_2u_1u_2\right]\Big/(p_0+p_3)\right\}.\qquad(52)$$

Таким образом, введением внутренних переменных (двух осцилляторов) Дираку удалось построить релятивистски инвариантное уравнение, у которого решение, выбранное в обычном виде плоской волны, удовлетворяет условию нормировки по внутренним переменным только при одном знаке энергии. Хотя это уравнение Дирака и не описывает, по-видимому, какой-либо реальный физический объект, а двум внутренним переменным u_a трудно дать наглядную интерпретацию (в отличие от уравнений (1), (34) и некоторых других), тем не менее это уравнение интересно с методической точки зрения и заслуживает дальнейшего изучения. То же можно сказать и о некоторых других уравнениях с внутренними переменными.

Выше было приведено лишь некоторое число примеров, иллюстрирующих тип рассматриваемых уравнений. Разумеется, можно построить и другие примеры [35, 37, 41]. Ограничимся, однако, лишь замечанием, что вместо векторов u_μ можно использовать различные другие релятивистские переменные, например тензоры $S_{\mu\nu}$ и т. п. Кроме того, внутреннее пространство не обязательно, видимо, считать псевдоевклидовым, но можно также рассматривать риманово внутреннее пространство. К сожалению, все эти возможные обобщения практически еще не использовались.

2. ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СПЕКТРОМ МАСС

Все известные уравнения с внутренними переменными обладают теми или иными недостатками или их использование сталкивается с еще не преодоленными трудностями. Речь идет или о физически неприемлемом спектре масс, или о появлении решений с мнимыми массами или сверхсветовыми скоростями (пространственно-подобный вектор p_μ). В случае же использования дополнительных условий остается неясным, как ввести взаимодействие с другими полями, в частности с электромагнитным.

Появление мнимых масс и сверхсветовых скоростей может иметь место уже для конечномерных уравнений. Так, уже для уравнения $(\partial^2/\partial x_\mu, \partial x^\mu + \varkappa^2)\,\Psi = 0$ получаем $E^2 = -\varkappa^2 + \mathbf{p}^2$. Поэтому в системе покоя $\mathbf{p} = 0$, $E = \pm i\varkappa$ (мнимые массы), а при $\mathbf{p}^2 > \varkappa^2$ появляются пространственно-подобные решения (скорость $|\mathbf{v}| = |\partial E/\partial \mathbf{p}| = |\mathbf{p}/\sqrt{\mathbf{p}^2 - \varkappa^2}| > 1$, т. е. частица движется со сверхсветовой скоростью). В то же время, как хорошо известно, уравнение $(\partial^2/\partial x_\mu \partial x^\mu - \varkappa^2)\,\Psi = 0$ таких «дефектных» решений не имеет. Впрочем, сверхсветовые решения довольно широко обсуждаются (речь идет о тахионах), но в силу известных трудностей, связанных с требованием причинности, возможность их использования крайне проблематична. Что касается решений с мнимыми массами, то иногда их просто отбрасывают. Но так поступать нельзя, ибо наличие решений с мнимыми массами свидетельствует о какой-то неустойчивости и соответствующие уравнения применять невозможно (по крайней мере без какой-то перенормировки, перестройки и т. п.).

Среди рассмотренных выше уравнений встречаются разные случаи. Так, спектр (21) при $\beta > 0$ и $\varepsilon > 0$ (и $\alpha = 0$, как это автоматически имеет место при использовании внутренних переменных u_μ) имеет точку сгущения при массе $m = 0$. Если же $\beta > 0$, но $\varepsilon < 0$, то появляются мнимые массы. Спектр (26) в зависимости от знака ε или имеет падающую ветвь ($m \to 0$), или приводит к появлению мнимых масс. Кроме того, спектр (26) содержит массу $m = 0$ — это имеет место, если $n_1 + n_2 + n_3 - n_0 + 1 = 0$. Такого решения уже нет для спектра (29); в этом случае нет и пространственно-подобных решений даже при наличии решений с мнимой массой [19, 20].

Уравнение Майораны $(\Gamma_\mu p^\mu + \varkappa)\,\Psi = 0$, $\Gamma_0 = \sum_{i=1}^{2} a_i^+ a_i + 1$, как было показано [15, 24], имеет как пространственно-подобные (сверхсветовые), так и светоподобные (масса $m = 0$) решения. Спектр масс этого уравнения падающий $m^2 = \varkappa^2/\,(s + 1/2)^2$. Для полноты системы функций необходимы все ветви решений, что строго доказано в работе [46]. Приведем еще примеры уравнений [21] более сложного вида, основанные на некомпактной 0 (4,2)-группе симметрии атома водорода и имеющие по этой причине водородоподобные спектры масс. Пусть имеются генераторы представления алгебры Ли 0 (4,2)-группы следующего вида:

$$\left.\begin{aligned}
&M_{ij} = \varepsilon_{ijk}\,(a^+\sigma_k a + b^+\sigma b)/2;\quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3;\\
&M_{4i} = (a^+\sigma_i a - b^+\sigma_i b)/2;\quad M_{40} = -\mathrm{i}\,(a^+Cb^+ + bCa)/2;\\
&M_{0i} = (a^+\sigma_i Cb^+ - bC\sigma_i a)/2;\\
&M_{5i} = -(a^+\sigma_i Cb^+ + bC\sigma_i a)/2;\quad M_{50} = (a^+a + b^+b + 2)/2;\\
&M_{54} = (a^+Cb^+ - bCa)/2;\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}\right\}. \tag{53}$$

Здесь σ_i — обычные матрицы Паули, выражение типа $a^+\sigma_k a$ понимается как $\sum_{i,\ j=1}^{2} a_i^+\,(\sigma_k)_{ij} a_j$. Поскольку 0 (4,2)-группа в качестве подгруппы содержит 0 (3,1)-группу Лоренца, то среди генераторов есть лоренц-векторы и скаляры. Поэтому, выбирая их, можно построить ряд уравнений, например $[\Gamma_\mu p^\mu + (S - \alpha)\,k]\,\Psi = 0$, где k и α — константы; $\Gamma_\mu = (2M_{54}, 2M_{0i})$, $S = 2M_{50}$ со спектром $m = \pm k\,[1 - 4\alpha^2/\,(N + 2)^2]$, или при другом выборе ($\Gamma_\mu = 2M_{5\mu}$, $S = 2M_{54}$) имеем спектр масс

$m = |k| (1 + \alpha^2/N^2)^{1/2} \operatorname{sgn}(k\alpha)$. Такого рода уравнений на основе генераторов (53) можно построить довольно много, их особенность — возможность описывать растущие до некоторого предела водородоподобные спектры масс. У этих решений также встречаются пространственно- и светоподобные ветви спектра энергий.

Мы склонны думать, что уравнения, имеющие сверхсветовые решения или (и) решения с мнимыми массами непосредственно, т. е. просто отбрасывая упомянутые решения и оставляя только «хорошие», использовать нельзя. Впрочем, с полной уверенностью подобное заключение можно сделать только в результате анализа соответствующих уравнений с учетом взаимодействия.

Хорошим (растущим, небесконечно вырожденным) спектром типа (43) и отсутствием «дефектных» решений обладают уравнения (34), (38) и (39). Однако это достигается введением дополнительных условий. В результате одна функция, например функция $\Psi(x_\mu, u_\mu)$, удовлетворяет двум уравнениям. Поскольку такая система уравнений имеет при этом нетривиальные решения, то не видно оснований возражать против ее использования. Но как ввести в эти уравнения взаимодействие с какими-либо полями? На примере уравнений со спином 3/2, 2 и т. д. хорошо известно [6—8], что введение взаимодействия, например, с электромагнитным полем заменой $\partial/\partial x_\mu \to \partial/\partial x_\mu - ieA^\mu$ в самих уравнениях является недопустимым приемом. Взаимодействие легко ввести, если найти функцию Лагранжа, из которой получается рассматриваемая система. Но для уравнений с внутренними переменными и дополнительными условиями найти функцию Лагранжа еще не удалось и в математике не известен регулярный метод решения подобной задачи*. Построение и анализ уравнений с внутренними переменными еще недостаточно исследованы — неясно, каковы потенциальные возможности в отношении спектров, введе-

* Устранение возникающих затруднений, как нам кажется в настоящее время (но до детального исследования вопроса), могло бы заключаться в переходе от выражения—$\partial^2/\partial u_\mu \partial u^\mu + u_\mu u^\mu$ в (22), (34), (38) к выражениям типа—$\partial^2/\partial u_\mu \partial u^\mu + u_\mu u^\mu + \delta^2 (u_\mu u^\mu)^2$ и более сложным. Не исключено, что таким образом удастся обеспечить отсутствие плохих решений и без введения дополнительных условий.

Замечания при корректуре

Как удалось показать, спектр масс N релятивистских осцилляторов (N — любое число) невозможно сделать дискретным и конечнократно вырожденным с помощью введения взаимодействия осцилляторов типа

$$V = \sum_{i,j=1}^{K} u_\mu^i u^{\mu,j} A_{ij} + B_{ij} u_\mu^i \frac{\partial}{\partial u_\mu^j} + C_{ij} \frac{\partial}{\partial u_\mu^i} \frac{\partial}{\partial u^{\mu,j}}.$$

Таким образом в гармоническом приближении, без введения дополнительных условий, спектр масс релятивистских осцилляторов либо непрерывен, либо дискретен, но бесконечнократно вырожден и не ограничен снизу.

ния взаимодействия, полноты системы решений, допустимости или недопустимости использовать различные решения или уравнения и т. п.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Какое отношение могут иметь рассмотренные уравнения к партонной модели? Эти уравнения содержат переменные (например, переменные u_μ), которые приобретают или могут приобретать роль координат каких-то внутренних «конституентов» (партонов), составляющих частицу (протон). При этом партоны в свободном состоянии существовать не могут, и, таким образом, наиболее характерная и нетривиальная особенность партонов и кварков оказывается учтенной автоматически. С другой стороны, на основе обсуждаемых уравнений еще не были получены даже простые выводы, вытекающие из представления о свободных партонах или кварках. Следовательно, вопрос о связи релятивистских волновых уравнений с внутренними степенями свободы с партонной моделью остается совершенно открытым. Тем не менее, наверное, вполне оправдано дальнейшее исследование уравнений с внутренними переменными, в частности с целью выяснения целого ряда все еще не ясных вопросов. Именно с целью содействовать таким исследованиям и была написана настоящая статья.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Klein O.** «Z. Phys.», 1926, v. 37, p. 895; **Gordon W.** «Z. Phys.», 1926, v. 40, p. 117; v. 40, p. 121; **Fock V. A.** «Z. Phys.», 1926, v. 38, p. 242; v. 39, p. 226.
2. **Dirac P. A. M.** «Proc. Roy. Soc. A», 1928, v. 117, p. 610.
3. **Proca A.** «Comptes Rend.», 1936, v. 202, p. 1490.
4. **Duffin R. J.** «Phys. Rev.», 1938, v. 54, p. 1114.
5. **Kemmer N.** «Proc. Roy. Soc. A», 1939, v. 173, p. 91.
6. **Fierz M., Pauli W.** «Proc. Roy. Soc. A», 1939, v. 173, p. 211.
7. **Rarita W., Schwinger J.** «Phys. Rev.», 1941, v. 60, p. 61.
8. **Гинзбург В. Л.** «ЖЭТФ», 1942, т. 12, с. 425; «J. Phys. USSR», 1943, v. 7, p. 115.
9. **Гинзбург В. Л.** «ЖЭТФ», 1943, т. 13, с. 33; «J. Phys. USSR», 1944, v. 8, p. 33; Phys. Rev., 1943, v. 61, p. 1.
10. **Bhabha H. J.** «Rev. Mod. Phys.», 1949, v. 21, p. 451.
11. **Harish-Chandra.** «Phys. Rev.», 1947, 71, p. 793; «Proc. Roy. Soc. A», 1947, v. 192, p. 195.
12. **Гельфанд И. М., Яглом А. М.** «ЖЭТФ», 1948, т. 18, с. 703, 1096, 1105.
13. **Файнберг В. Я.** «ЖЭТФ», 1953, т. 25, с. 636, 644.
14. **Фрадкин Е. С.** «ЖЭТФ», 1950, т. 20, с. 27.
15. **Majorana E.** «Nuovo cimento», 1932, v. 9, p. 335.
16. **Гинзбург В. Л., Тамм И. Е.** «ЖЭТФ», 1947, т. 17, с. 227.
17. **Yukawa H.** «Phys. Rev.», 1950, v. 77, p. 219; 1953, v. 91, p. 415.
18. **Марков М. А.** «Докл. АН СССР», 1955, т. 51, с. 101; «Nuovo cimento Suppl.», 1956, v. 3, p. 760.
19. **Ginzburg V. L.** «Acta Phys. Polon.», 1955, v. 15, p. 163.

20. **Гинзбург В. Л., Силин В. П.** «ЖЭТФ», 1954, т. 27, с. 116.
21. **Nambu Y.** «Progr. Theor. Phys. Suppl.», 1966, v. 37, p. 38, 368; «Phys. Rev.», 1967, v. 160, p. 1171.
22. **Takabayashi T.** «Nuovo cimento», 1964, v. 33, p. 668.
23. **Гинзбург В. Л., Манько В. И.** «Ядерная физика», т. 2, с. 1103; «Nucl. Phys.», 1965, v. 74, p. 577.
24. **Fradkin D. M.** «Amer. J. Phys.», 1966, 34, p. 214.
25. **Sudarshan E. C. G., Mukunda N.** «Phys. Rev. D», 1970, v. 1, p. 571.
26. **Dirac R. A. M.** «Proc. Roy. Soc. A», 1972, v. 322, p. 435; 1972, v. 328, p. 1.
27. **Barut A. O., Duru I. H.** Preprint IC/72/116 TRIEST, 1972.
28. **Feldman G., Matthews P. T.** «Phys. Rev.», 1967, v. 154, p. 1241.
29. **Barut A. O., Kleinert H.** «Phys. Rev.», 1967, v. 157, p. 1180.
30. **Abers E., Grodsky I. T., Norton R. E.** «Phys. Rev.», 1967, v. 159, p. 1222.
31. **Cocho G. e.a.** «Phys. Rev.», 1967, v. 162, p. 1662.
32. **Biedenharn L. C., Giovannini A.** «Nuovo cimento», 1967, v. 51, p. 870.
33. **Hwa R. C.** «Nuovo cimento A», 1967, v. 51, p. 1133.
34. **Ruhl W.** «Comm. Math. Phys.», 1967, v. 6, p. 312.
35. **Hermann R.** «Phys. Rev.», 1968, 167, p. 1318.
36. **Chang S. J., O'Raifeartiaigh L.** «Phys. Rev.», 1968, v. 170, p. 1316; 1968, v. 171, p. 1587.
37. **Fronsdal C.** «Phys. Rev.», 1968, v. 171, p. 1811; 1969, v. 182, p. 1564.
38. **Bisiacchi G., Budini P., Calucci G.** «Phys. Rev.», 1968, v. 172, p. 1508.
39. **Grodsky T., Streater R. F.** «Phys. Rev. Lett.», 1968, v. 20, p. 695.
40. **Rosen S. P.** «Progr. Theor. Phys.», 1968, v. 40, p. 178.
41. **Nambu Y., Rosen S. P.** «Progr. Theor. Phys.», 1968, v. 40, p. 1151.
42. **Gyuk I., Umezawa H.** «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 22, p. 972; «Phys. Rev. D», 1971, v. 3, p. 893.
43. **Комар А. А., Сладь Л. М.** «ТМФ», 1969, т. 1, с. 50.
44. **Itzykson C., Kadyshevsky V. D., Todorov I. T.** «Phys. Rev. D», 1970, v. 1, p. 2823.
45. **Chodos A.** «Phys. Rev. D», 1970, v. 1, p. 2937.
46. **Mukunda N.** «Phys. Rev.», 1969, v. 183, p. 1486.
47. **Krase L. D., Pao L., Good R. H.** «Phys. Rev. D», 1971, v. 3, p. 1275.
48. **Shamaly A., Capri A. Z.** «Ann. Phys.», 1972, v. 74, p. 503.
49. **Biedenharn L. C., Han M. Y.** «Phys. Rev. D», 1972, v. 6, p. 500.
50. **Velo C., Zwanziger D.** «Phys. Rev.», 1969, v. 186, p. 1337; 1969, v. 188, p. 2218.
51. **Capri A. Z.** «Phys. Rev.», 1969, v. 187, p. 1811.
52. **Хриплович И. Б.** «Ядерная физика», 1972, т. 16, с. 823.
53. **Gell-Mann M.** «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 8, p. 214.
54. **Zweig G.** Preprint CERN, 1964; **Боголюбов Н. Н.** «ЭЧАЯ», 1972, т. 3, вып. 1, с. 144.
55. **Feynman R.** «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 23, p. 1415.
56. **Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.** Курс современного анализа. Пер. с англ. М., Физматгиз, 1963.
57. **Кузнецов Г. И.** «ЖЭТФ», 1968, т. 54, с. 1756.
58. **Виленкин Н. Я., Смородинский Я. А.** «ЖЭТФ», 1964, т. 46, с. 1793.
59. **Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.** Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М., Физматгиз, 1962.
60. **Barut A. O.** «Phys. Rev. B», 1964, v. 135, p. 839.
61. **Mukunda N., O'Raifeartaigh L., Sudarshan E.** «Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 15, p. 1041.
62. **Dothan Y., Gell-Mann M., Ne'eman Y.** «Phys. Lett.», 1965, v. 17, p. 148.