«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1976, ТОМ 7, ВЫП. 1

УДК 519.4

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ

А. Н. Лезнов,
М. В. Савельев

Институт физики высоких энергий,
Серпухов

В обзоре дается компактное изложение основных результатов теории представлений полупростых групп Ли, полученных на основе асимптотического метода (для некомпактных групп) и универсальной параметризации компактных групп, в удобном для физических приложений виде.

The compact treatment of the basic results of semisimple Lie group representation theory are given in the present review. This results are obtained on the base of asymptotical method (for noncompact groups) and universal parametrization of their maximal compact subgroups, and presented in the form convinient for physical applications.

ВВЕДЕНИЕ

Групповые методы исследования составляют неотъемлемую часть математического аппарата современной теоретической физики. Ясность и относительная простота теоретико-группового подхода (в тех случаях, когда соответствующий математический аппарат развит достаточно полно), а главное, его адекватность рассматриваемым проблемам, которые связаны с основными закономерностями физических процессов, выражающихся в различного рода симметриях, выделяют его и ставят на особое место среди других методов исследования.

Следует отметить, что развитие теории представлений групп, в особенности некомпактных, в значительной степени было стимулировано насущными потребностями физических исследований. Область использования теории групп в теоретической физике весьма многогранна: физика твердого тела, теория относительности, классическая электродинамика, нерелятивистская квантовая механика, релятивистская квантовая теория поля и т. д. (см., например, работы [1]). При этом спектр адекватных соответствующим физическим системам групп столь же обширен и простирается от простейших конечных групп до бесконечномерных, изучение которых находится на начальной стадии развития.

Широкое применение в теоретической физике, в особенности в физике элементарных частиц, получили полупростые некомпактные группы Ли [2]. Однако эффективное использование этих групп осложняется следующими важными обстоятельствами. Во-первых, теория представлений некомпактных групп не достигла, с математической точки зрения, той степени законченности, которая характерна для компактных групп. Во-вторых, что не менее существенно, многие уже полученные в этой области результаты сформулированы в такой форме и терминах, которые не всегда удобны для использования в физических приложениях. В методическом отношении изучение математических результатов теории представлений полупростых групп Ли в значительной степени затруднено тем, что при выводе и конкретных построениях тех или иных основных характеристик для различных групп используются зачастую разные методы.

Настоящий обзор представляет собой компактное изложение некоторых результатов теории представлений полупростых групп Ли, полученных на основе асимптотического метода [20, 27, 40—43]. Основная идея метода заимствована из физики. Как хорошо известно, наиболее проста кинематика частиц нулевой массы, чему с групповой точки зрения соответствуют бесконечно большие значения гиперболического угла поворота. Реджевское поведение амплитуды потенциального рассеяния является следствием степенной (экспоненциальной) асимптотики функций Лежандра (матричных элементов некомпактной $SU(1,1)$-группы) по энергии [3]. Оказывается, что отмеченные свойства носят общий характер: асимптотика матричных элементов произвольной полупростой группы Ли экспоненциальна в области бесконечно больших значений некомпактных параметров, и задачу построения неприводимых представлений этих групп можно связать с их асимптотическими свойствами.

В настоящем обзоре будем стремиться сформулировать полученные результаты в наиболее общей форме, в которой, как это ни парадоксально, они принимают наиболее простой и единообразный вид. Учитывая то обстоятельство, что данный обзор предназначен для физиков, предпочтем простоту и наглядность изложения материала строгости ряда математических формулировок и доказательств. Ввиду того, что построение неприводимых представлений и основных характеристик полупростых групп Ли проводится в рамках единого метода, нецелесообразно приводить здесь другие подходы и основанные на них результаты, которые можно найти в многочисленных обзорах и монографиях по этой теме (см., например, работы [4—8]).

Основной упор в обзоре делается на задачах теории представлений, чаще всего встречающихся в физических приложениях: построение алгебр неприводимых представлений, отыскание их операторов Казимира, вопросы гармонического анализа на полупростых группах, нахождение матричных элементов конечных преобразований в определенном базисе и глобальных характеристик представлений.

Приведем здесь же разделы теоретической физики, в которых указанные аспекты теории представлений находят применение. Одно из основных направлений использования теории представлений в физике частиц — спектроскопия, т. е. классификация элементарных частиц по унитарным и неунитарным представлениям некоторой группы (см., например, работы [2, 9]). При этом соображения физического характера выделяют то или иное представление (или целый класс) и позволяют установить соответствие между параметрами представления и потенциальными кандидатами в них, обладающими вполне определенными квантовыми числами, элементарными частицами.

В различных областях теоретической физики встречается задача нахождения инвариантных операторов Казимира, построенных из генераторов некоторой группы, адекватной рассматриваемой физической системе. Достаточно указать их значение в квантово-механических расчетах при классификации многочастичных состояний, определении энергетических уровней атомов и ядер [1, 9, 10], при выводе массовых формул для элементарных частиц [2, 11] и т. д. В совокупности с квантовыми числами представлений эти операторы образуют полный набор взаимокоммутирующих операторов, отвечающих наблюдаемым. Знание явного вида операторов, образующих алгебру произвольного операторно неприводимого представления группы, оказывается полезным при конкретных реализациях алгебраических подходов в теории поля.

Широкое применение в физических приложениях получил гармонический анализ на группе (или на однородных пространствах с данной группой движения [2, 12]). Задача разложения квадратично интегрируемой функции на группе, в роли которой чаще всего выступает амплитуда процесса, требует знания явных выражений для меры Планшереля представлений основных серий и матричных элементов конечных преобразований. В некоторых задачах квантовой механики и теории поля [13] удобно проводить разложение соответствующих величин не по матричным элементам, а по производящим функциям, имеющим зачастую более наглядную аналитическую структуру и простые свойства. В некоторых случаях достаточную информацию об отдельных свойствах физической системы несет формулировка теоремы Планшереля через характеры представлений соответствующих групп, в которой зависимость от квантовых чисел просуммирована.

Следует отметить также и менее простую, но интересную аналогию характеров неприводимых представлений и ядер эрмитовых форм и переплетающих операторов с величинами типа функций Грина [14]. По-видимому, не случайно то обстоятельство, что характеры неприводимых представлений группы Пуанкаре имеют некоторые формальные свойства, общие с функциями Грина свободных полей, в частности сингулярное поведение на световом конусе [15].

Техника проекционных операторов получила большое применение в задачах классификации атомных и ядерных уровней [16]. Приведенная в настоящей работе универсальная параметризация групповых элементов, по нашему мнению, может оказаться полезной при изучении аналитических свойств физических величин, содержащих разложения по полной системе промежуточных состояний.

Наиболее простой и компактный вид полученные в настоящем обзоре результаты имеют в базисе Картане — Вейля, который тесно связан с корневой техникой, позволяющей рассматривать единообразно все полупростые группы. В физических приложениях более привычным является тензорный базис, в котором всякий раз приходится учитывать специфику тензорной структуры соответствующей группы. Окончательные результаты для каждого типа классических комплексных групп и их действительных форм приведены в таблицах.

1. РЕАЛИЗАЦИЯ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБР ПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ. ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Обозначения и определения. Наиболее впечатляющие результаты структурной теории полупростых алгебр и групп Ли связаны с инвариантной корневой формулировкой и восходят к классическим работам Киллинга, Картана и Вейля. Идея о возможности единообразной классификации и описания основных свойств и характеристик всех полупростых алгебр и групп Ли классификацией ассоциированных систем корней и инвариантной корневой формы записи оказала чрезвычайно плодотворное воздействие на развитие этих объектов. Не останавливаясь на изложении основных понятий и результатов теории полупростых алгебр и групп Ли, полученных в рамках инвариантной корневой техники (см., например, работы [4—7]), введем здесь лишь необходимые в дальнейшем обозначения и определения:

G — произвольная полупростая группа Ли;
$\mathcal{K}$ — максимальная компактная подгруппа в G;
$\mathcal{A}$ — максимальная некомпактная абелева подгруппа в G;
S — централизатор $\mathcal{A}$ в $\mathcal{K}$;
W_B — группа Вейля, отвечающая группе $B = \{G, \mathcal{K}, S\ldots\}$;

$\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G;
$\mathfrak{h}$ — картановская подалгебра $\mathfrak{g}$;
r_B (ζ_B) — ранг (размерность) группы $B = \{G, \mathcal{K}, \mathcal{A}, S\}$;
R — система корней $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$;
n — число положительных корней;
ρ_0 — полусумма положительных корней;
$X_{\pm\alpha}$ — элементы корневого пространства α-го корня, $\alpha \in R$;
h_i — образующие $\mathfrak{h}$, отвечающие простым корням π_i; $1 \leqslant i \leqslant r$.

В базисе Картана — Вейля элементы $X_{\pm\alpha}$ и h_i удовлетворяют соотношениям:

$$[X_\alpha, X_\beta]_- = \begin{cases} N_{\alpha\beta}X_{\alpha+\beta}, & \alpha+\beta \in R; \\ 0, & \alpha+\beta \neq 0, \ \alpha+\beta \notin R; \\ h_\alpha, & \alpha+\beta = 0; \end{cases} \qquad [h_i, h_j]_- = 0; \tag{1}$$

$$[h_i, X_{\pm\alpha}]_- = \pm\,\alpha(h_i)\,X_{\pm\alpha};$$

причем для компактных корней $X_\alpha^+ = X_{-\alpha}$, $h_i^+ = h_i$, где $+$ — символ эрмитового сопряжения ($*$ и T — комплексное сопряжение и транспонирование соответственно). Элементы $X_{\pm\alpha}$ и h_i, образующие полный набор Y_μ, $\mu = \pm\alpha$, i, можно нормировать соотношениями

$$\mathrm{Sp}\, X_\alpha X_\beta = \delta_{\alpha+\beta,\,0}; \qquad \mathrm{Sp}\, h_i h_j = \delta_{ij}; \qquad \mathrm{Sp}\, X_\alpha h_i = 0 \tag{2}$$

в определенном базисе, т. е. $\mathrm{Sp}\, Y_\mu Y^\nu = \delta_\mu^\nu$.

В дальнейшем в тех случаях, когда будет нужно выделить комплексные группы и их действительные формы, символу соответствующей группы приписываются индексы C и R^i соответственно. Действительная форма G^{R_i} комплексной полупростой группы G^C определяется заданием матрицы σ инволютивного автоморфизма, причем при сужении $\mathcal{K}^C$ на $\mathcal{K}^{R_i}$ элементы X_α переходят в $\mathrm{X}_\alpha = X_\alpha + \sigma X_\alpha \sigma$.

Сводка основных характеристик полупростых групп Ли приведена в табл. 1.

Генераторы полупростых групп Ли. Проблема построения конструктивной теории представлений алгебр Ли как важного самостоятельного раздела современной математики, так и мощного инструмента исследования теоретико-групповых задач, основанного на их линеаризации, в рамках инфинитезимального подхода требует знания явных выражений для их образующих в некоторой параметризации. При этом эффективность использования инфинитезимального подхода и реализация его преимуществ по сравнению с глобальным при получении конкретных результатов зависят от степени сложности параметрических зависимостей генераторов рассматриваемых алгебр.

Таблица 1

$G = \mathcal{K}\mathcal{A}\mathcal{K}$	r_G	ζ_G	$\sigma(X)$	$\mathcal{K}$	$r_{\mathcal{K}}$	$\zeta_{\mathcal{K}}$
$L(n, C)$ A	$2n$	$2n^2$	—	$U(n)$	n	n^2
$L(n, R)$ A_{I}	n	n^2	$\sigma(X) = X^*$	$O(n)$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$U^*(2n)$ A_{II}	$2n$	$4n^2$	$\sigma(X) = J_n X^* J_n^{-1}$	$\mathrm{Sp}(2n)$	n	$n(1+2n)$
$U(p, q)$ A_{III} $p \geqslant q$, $p+q=n$	n	n^2	$\sigma(X) = -J_{pq} X^+ J_{pq}$	$U(p) \otimes U(q)$	n	p^2+q^2
$O(n, C)$ B, D	$2[n/2]$	$n(n-1)$	—	$O(n)$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$O^*(2n)$ D_{III}	n	$n(2n-1)$	$\sigma(X) = J_n X^* J_n^{-1}$	$U(n)$	n	n^2

Элемент $T(\tau)$	$r_{\mathcal{A}}$	S	r_S	ζ_S
$\exp\tau$	n	$\underbrace{U(1)\otimes\ldots\otimes U(1)}_{n}$	n	n
$\exp\tau$	n	$\underbrace{Z_2\otimes\ldots\ldots\otimes Z_2}_{n}$	—	—
$\begin{pmatrix}\exp\tau & 0\\ 0 & \exp\tau\end{pmatrix}$	n	$\underbrace{SU(2)\otimes\ldots\ldots\otimes SU(2)}_{n}$	n	$3n$
$\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\tau & \operatorname{sh}\tau\\ \operatorname{sh}\tau & \operatorname{ch}\tau\end{pmatrix}$	q	$U(p-q)\otimes$ $\otimes\underbrace{U(1)\otimes\ldots\otimes U(1)}_{q}$	p	$(p-q)^2+q$
$\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\tau & i\operatorname{sh}\tau\\ -i\operatorname{sh}\tau & \operatorname{ch}\tau\end{pmatrix}$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\underbrace{U(1)\otimes\ldots\ldots\otimes U(1)}_{[n/2]}$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\left[\frac{n}{2}\right]$
$\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\tau & i\operatorname{sh}\tau & 0 & 0\\ -i\operatorname{sh}\tau & \operatorname{ch}\tau & 0 & 0\\ 0 & 0 & \operatorname{ch}\tau & -i\operatorname{sh}\tau\\ 0 & 0 & i\operatorname{sh}\tau & \operatorname{ch}\tau\end{pmatrix}$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\underbrace{SU(2)\otimes\ldots\ldots\otimes SU(2)}_{k}$, $n=2k$	k	$3k$
		$\underbrace{SU(2)\otimes\ldots\ldots\otimes SU(2)}_{k}\otimes$ $\otimes U(1),\ n=2k+1$	$k+1$	$3k+1$

$G=$ $=\mathcal{K}\mathcal{A}\mathcal{K}$	r_G	ζ_G	$\sigma(X)$	$\mathcal{K}$	$r_{\mathcal{K}}$	$\zeta_{\mathcal{K}}$
$O(p, q)$ $p+q=n$, $p\geqslant q$ BDI	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\sigma(X)=$ $=J_{pq}X^*J_{pq}$	$O(p)\otimes O(p)$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\frac{p(p-1)}{2}+$ $+\frac{q(q-1)}{2}$
$\mathrm{Sp}(2n, C)$ C	$2n$	$2n(1+2n)$	—	$\mathrm{Sp}(2n)$	n	$n(1+2n)$
$\mathrm{Sp}(2n, R)$ CI	n	$n(1+2n)$	$\sigma(X)=X^*$	$U(n)$	n	n^2
$\mathrm{Sp}(2p, 2q)$ $p\geqslant q$, $p+q=n$ $C\,II$	n	$n(1+2n)$	$\sigma(X)=$ $=-I_{pq}X^+I_{pq}$	$\mathrm{Sp}(2p)\otimes$ $\otimes\,\mathrm{Sp}(2q)$	n	$p(2p+1)+$ $+q(2q+1)$

Примечание. В таблице используются следующие обозначения:

$$J_{pq}=\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix};\quad J_n=\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix};\quad I_{pq}=\begin{pmatrix} +I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_q \end{pmatrix};$$

Исходным пунктом при нахождении явных выражений для образующих групповой алгебры является выбор той или иной параметризации элементов соответствующей группы. Использование с этой целью разложения Картана предоставляет естественную возможность исследовать основные характеристики некомпактных полупростых групп Ли, исходя из известных результатов для компактного случая, и в то же время, как будет видно из дальнейшего, выявить определенное единообразие окончательных формул для компактного и некомпактного случаев.

Следует отметить, что использование параметризации рассматриваемых некомпактных групп через их максимальные компактные подгруппы не является необходимым для общего исследования представлений и для формулировки и применения излагаемого далее асимптотического метода.

Каждый элемент g в группе G, исключая множество меньшей размерности, параметризуется разложением Картана

$$g=k_1T(\tau)k_2;\quad k_{1,2}\in\mathcal{K};\quad T(\tau)\in A, \tag{3}$$

Продолжение табл. 1

Элемент $T(\tau)$	$r_{\mathscr{A}}$	S	r_S	ζ_S
$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\tau & \operatorname{sh}\tau \\ \operatorname{sh}\tau & \operatorname{ch}\tau \end{pmatrix}$	q	$O(p-q)\otimes \underbrace{\otimes Z_2\otimes \ldots\ldots \otimes Z_2}_{q}$	$\left[\frac{p-q}{2}\right]$	$\frac{(p-q)(p-q-1)}{2}$
$\begin{pmatrix} \exp\tau & 0 \\ 0 & \exp(-\tau) \end{pmatrix}$	n	$\underbrace{U(1)\otimes \ldots\ldots \otimes U(1)}_{n}$	n	n
$\begin{pmatrix} \exp\tau & 0 \\ 0 & \exp(-\tau) \end{pmatrix}$	n	$\underbrace{Z_2\otimes \ldots\ldots \otimes Z_2}_{n}$	—	—
$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\tau & \operatorname{sh}\tau & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\tau & \operatorname{ch}\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ch}\tau & \operatorname{sh}\tau \\ 0 & 0 & \operatorname{sh}\tau & \operatorname{ch}\tau \end{pmatrix}$	q	$\operatorname{Sp}(2p-2q)\otimes \underbrace{\otimes \operatorname{Sp}(2)\otimes \ldots \otimes \operatorname{Sp}(2)}_{q}$	p	$(p-q)\times \times(2p-2q+1)+ +3q$

$$I_n \equiv \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

которое является однозначным в предположении, что связанные с централизатором параметры из k_2 (k_1) включены в k_1 (k_2). Тогда основное групповое соотношение $\delta g = -F_\varepsilon g\delta\varepsilon$ перепишется в виде

$$k_1^{-1}\delta k_1 + \delta T\cdot T^{-1} + T\delta k_2 k_2^{-1}T^{-1} = S\delta\varepsilon;\quad S = -k_1^{-1}F_\varepsilon k_1, \tag{4}$$

где F_ε — некоторый касательный инфинитезимальный оператор; $\delta\varepsilon$ — параметр этого преобразования.

Инфинитезимальный оператор левого регулярного представления, отвечающий касательному преобразованию F_ε, определяется формулой

$$\hat{F}_\varepsilon = \sum_{\alpha,\beta} \dot{\omega}_{\alpha\beta}\hat{\hat{\mathscr{K}}}{}^{\alpha\beta}_{(1)} + \sum_k \dot{\tau}_k\cdot\partial/\partial\tau_k + \sum_{\alpha,\beta}\dot{\Omega}_{\alpha\beta}\hat{\mathscr{K}}{}^{(2)}_{\alpha,\beta}, \tag{5}$$

производные $\dot{\omega} = k_1^{-1}\dot{k}_1$, $\dot{\Omega} = \dot{k}_2 k_2^{-1}$, $\dot{\tau} = \dot{T}T^{-1}$ $(\delta T = \dot{T}\delta\varepsilon,\ \delta k_{1,2} = \dot{k}_{1,2}\delta\varepsilon,\ \dot{\omega}^+ = -\dot{\omega},\ \dot{\Omega}^+ = -\dot{\Omega})$ групповых параметров, входящие в которую, находятся из системы уравнения (4). Через $\hat{\mathscr{K}}^{\alpha\beta}_{(1)}$ ($\hat{\mathscr{K}}^{(2)}_{\alpha\beta}$) обозначены инфинитезимальные операторы правого (левого) регулярного представления $\mathscr{K}$; $(\dot{T}T^{-1})_{kl} = \delta_{kl}\dot{\tau}_l$. Аналогичным образом определяются операторы $\hat{F}_\varepsilon$ для правого регулярного представления группы G, которые выражаются через $\hat{\mathscr{K}}^{(1)}_{\alpha\beta}$ и $\hat{\mathscr{K}}^{\alpha\beta}_{(2)}$.

В базисе Картана — Вейля для произвольной полупростой группы Ли единообразным способом можно получить инвариантную корневую форму записи операторов групповой алгебры. Начнем со случая комплексной полупростой группы Ли G^C, касательные операторы F и Φ для которой (отвечающие компактным $\hat{F}$ и некомпактным $\hat{\Phi}$ генераторам соответственно) выражаются $X_{\pm\alpha}$ и h_i следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} F^\varepsilon_\alpha = i^{\varepsilon-1} X_\alpha - (-i)^{\varepsilon-1} X_{-\alpha};\ \Phi^\varepsilon_\alpha = i^\varepsilon X_\alpha + (-i)^\varepsilon X_{-\alpha}; \\ F_s = ih_s;\ \Phi_s = h_s;\ \varepsilon = 1,\ 2. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Используя разложения

$$M = \sum_\mu m_\mu Y_\mu;\ M \equiv \{\dot{\omega},\ \dot{\Omega},\ S\};\ \dot{\tau} = \sum_i \dot{\tau}_i h_i;$$

$$m_\mu = \operatorname{Sp} MY^\mu;\ \mu = \{\pm\alpha,\ i\}$$

и соотношение $\exp\left(\sum_i \tau_i h_i\right) X_\alpha \exp\left(-\sum_i \tau_i h_i\right) = X_\alpha \exp \alpha(\tau)$, вытекающие из формул (1) и (2), перепишем систему (4) в виде

$$\sum_{\alpha \gtrless 0} (\dot{\omega}_\alpha + \dot{\Omega}_\alpha \exp[\alpha(\tau)] - S_\alpha) X_\alpha + \sum_i (\dot{\omega}_i + \dot{\Omega}_i + \dot{\tau}_i - S_i) h_i = 0. \qquad (7)$$

Решения последней системы:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}_\alpha &= -\frac{\exp[\alpha(\tau)]\, S^+_{-\alpha} + \exp[-\alpha(\tau)]\, S_\alpha}{2 \operatorname{sh} \alpha(\tau)}; \\ \dot{\Omega}_\alpha &= \frac{S^+_{-\alpha} + S_\alpha}{2 \operatorname{sh} \alpha(\tau)}; \\ \dot{\tau}_i &= (S^+_i + S_i)/2;\ \dot{\omega}_i + \dot{\Omega}_i = -(S^+_i - S_i)/2 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

являются тривиальным следствием соотношений (2). Следует отметить, что все $\alpha(\tau)$ отличны от нуля, так как в противном случае существовал бы перестановочный с $\mathfrak{h}$ элемент X_α.

Полученные выражения для генераторов имеют весьма сложную аналитическую зависимость от групповых параметров k_1, k_2, τ. Однако, как нетрудно убедиться, формулы (8) значительно упрощаются в асимптотической области бесконечно больших значений некомпактных параметров τ: величины $\dot{\Omega}$ обращаются в нуль, а зависимость от параметров τ в $\dot{\omega}$ пропадает. При этом функциональная зависимость генераторов $\hat{F}_\varepsilon$ ($\hat{F}_\varepsilon$) от параметров k_2 (k_1) отсутствует, а τ_i входят в них лишь в виде тривиальных производных $\partial/\partial\tau_i$. Это обстоятельство легло в основу асимптотического метода построения представлений полупростых групп Ли, суть которого заключается в переходе в генераторах сдвига на некомпактной группе к асимптотическим значениям некомпактных параметров. В этой связи представляется полезным упомянуть об интересной аналогии между данным методом и потенциальной теорией рассеяния. Хорошо известно (см., например, работу [3]), что вся необходимая информация динамического характера потенциальной теории заложена в S-матрице, которая является отношением функций Иоста — предэкспоненциальных множителей в асимптотическом выражении для шредингеровской волновой функции. В теории представлений некомпактных полупростых групп Ли имеет место аналогичная ситуация, причем роль функций Иоста играют главные члены асимптотического разложения матричного элемента соответствующего представления.

Таким образом, в асимптотической области некомпактные инфинитезимальные операторы $\hat{\Phi}$ левого регулярного представления комплексной полупростой группы Ли G^C имеют вид

$$\hat{\Phi}^C = \sum_\alpha \dot{\omega}_\alpha^{(a)} \hat{\tilde{X}}^\alpha + \sum_i (\dot{\tau}_i \partial/\partial\tau_i + \dot{\omega}_i \hat{\tilde{h}}^i); \quad \omega_\alpha^{(a)} = -\theta(\alpha) S^+_{-\alpha} + \theta(-\alpha) S_\alpha, \tag{9}$$

где $\hat{\tilde{X}}^\alpha$ и $\hat{\tilde{h}}^i$ — генераторы правых сдвигов на $\mathcal{K}^C$, отвечающие компактному элементу X_α корневого пространства и образующей h_i подалгебры $\mathfrak{h}$ соответственно. Компактные инфинитезимальные операторы $\hat{F}$ группы G совпадают с генераторами $\hat{Y}_\mu$ левых сдвигов на $\mathcal{K}$ безотносительно к предельной процедуре и в соответствии с (8) (что, впрочем, и так очевидно) связаны с генераторами $\hat{\tilde{Y}}^\nu$ правых сдвигов на $\mathcal{K}$ матрицей присоединенного представления:

$$\hat{Y}_\mu = -\sum_\nu \mathrm{Sp}\,(k^{-1} Y_\mu k Y^\nu)\, \hat{\tilde{Y}}^\nu. \tag{10}$$

Заметим, что если рассматривать действие последнего соотношения на старший вектор веса $\{l\}$ по отношению к величинам с тильдой, то формула (10) примет следующий вид:

$$-\hat{Y}_\mu = \sum_i \mathrm{Sp}\,(k^{-1} Y_\mu k h^i)\, l_i + \sum_{\alpha>0} \mathrm{Sp}\,(k^{-1} Y_\mu k X_\alpha)\, \hat{\tilde{X}}^{-\alpha}. \tag{11}$$

Инфинитезимальные операторы правого регулярного представления группы G выражаются формулой, аналогичной (9), с очевидной заменой k_1 на k_2 и $\hat{\hat{X}}^\alpha$, $\hat{\hat{h}}^i$ на $\hat{X}_\alpha$, $\hat{h}_i$. Ввиду очевидной коммутативности операторов $\partial/\partial\tau_i$ и $\hat{\hat{h}}^i$ со всеми генераторами левых сдвигов на G^C их можно заменить на C-числовые параметры ρ_i и s_i, характеризующие представления построенной групповой алгебры. В дальнейшем понадобятся инфинитезимальные операторы $\hat{F}_\pm = (\hat{F} \pm i\hat{\Phi})/2$, для которых имеет место следующая простая формула:

$$\hat{F}_\pm = \pm \sum_i \mathrm{Sp}\,(k^{-1}Fkh_i)\frac{\rho_i \pm s_i}{2} + \sum_{\alpha>0} \mathrm{Sp}\,(k^{-1}FkX_{\pm\alpha})\,\hat{\hat{X}}^{\mp\alpha}. \tag{12}$$

Подчеркнем, что полученные выражения для генераторов справедливы, как вытекает из их построения, не только для комплексных классических серий, но и для особых картановских групп G_2, F_4, E_6, E_7, E_8.

Непосредственным расчетом, аналогичным проведенному выше, нетрудно убедиться в том, что генераторы действительной формы G^{R_i} комплексной полупростой группы Ли G^C получаются из генераторов последней сужением $\mathcal{K}^C$ на $\mathcal{K}^{R_i}$. При этом в качестве параметров, определяющих построенные представления алгебры $\mathfrak{g}^{R_i}$, удобно, как и в комплексном случае, выбрать собственные значения ρ_i операторов $\partial/\partial\tau_i$, $1 \leqslant i \leqslant r_{\mathcal{A}}$ и веса $\{s\}$ неприводимых представлений подгруппы S. Получаемые таким образом генераторы действительной формы в асимптотической области имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}^{R_i} = \sum_{i=1}^{r_{\mathcal{A}}} \mathrm{Sp}\,(k^{-1}Fkh_i)\,\rho_i + \sum_{\xi=1}^{r_s} \mathrm{Sp}\,(k^{-1}Fkh_i)\,s_i - \\ - \sum_\alpha \varepsilon(\alpha)\,\mathrm{Sp}\,(k^{-1}FkX_\alpha)\,\hat{\hat{X}}^{-\alpha}.\end{aligned} \tag{13}$$

Из сравнения выражений (9), (11) и (13) следует, что генераторы комплексной полупростой группы Ли получаются из соответствующих генераторов компактной группы простой заменой старших весов l_i произвольными комплексными числами $(\rho_i \pm s_i)/2$, тогда как генераторы действительной формы — последующим сужением на максимальную компактную подгруппу данной действительной формы.

Отметим, что до тех пор, пока представления не конкретизированы, т. е. от них не требуется псевдоунитарности, унитарности и т. д., параметры $\{\rho\}$ являются произвольными комплексными числами. Наложение требования псевдоунитарности и унитарности приводит к ограничениям на вещественные и мнимые части этих параметров. Ввиду того, что построенные генераторы (9) и (13) — суть операторы сдвига на пространстве квадратично интегрируемых функций, заданных на максимальной компактной под-

Таблица 2

G	Инфинитезимальные операторы	$k\in\mathcal{K}$
$L(n, C)$	$\Phi_{ij}=-\sum_{1}^{n} n_i^{*k} n_j^k\,\partial/\partial\tau_k+\sum_{k,\,l}\operatorname{sgn}(l-k)\, n_i^{*k} n_j^l\,\widetilde{F}^{kl}$	$n\in U(n)$
$L(n, R)$	$\Phi_{ij}=-\sum_{1}^{n} n_i^{k} n_j^k\,\partial/\partial\tau_k+\sum_{k,\,l}\operatorname{sgn}(l-k)\, n_i^{k} n_j^l\,\widetilde{F}^{kl}$	$n\in O(n)$
$U^*(2n)$	$\Phi_{ij}=-\sum_{-n}^{n}\left[k,\ i;\ {k \atop j}\right]\partial/\partial\tau_k+$ $+1/2\sum_{\lvert k\rvert,\,\lvert l\rvert}+\operatorname{sgn}(\lvert l\rvert-\lvert k\rvert)\left[k,\ i;\ {l \atop j}\right]\widetilde{F}^k_l;\ \left[k,\ i;\ {l \atop j}\right]\equiv$ $\equiv n_{ki}n_j^l-n_{kj}n_i^l$	$n\in\mathrm{Sp}(2n)$
$U(p, q)$ $p\geqslant q$	$\Phi^{\mu}_{\alpha j}=i^{\mu-1}A_{\alpha j}-(-i)^{\mu-1}B_{\alpha j};\ \mu=1,\ 2;\ 1\leqslant\alpha\leqslant p;$ $1\leqslant j\leqslant q$ $A_{\alpha j}=-1/2\sum_{1}^{q} p_\alpha^{*k} q_j^k\,(\partial/\partial\tau_k+\mathcal{F}^{kk}-\widetilde{Q}^{kk})-$ $-\sum_{p\geqslant\beta>l\geqslant 1} p_\alpha^{*\beta} q_j^l\,\mathcal{F}^{\beta l}+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant q} p_\alpha^{*k} q_j^l\,\widetilde{Q}^{kl},\ B_{\alpha j}=A^*_{\alpha j}$	$p\in U(p)$ $q\in U(q)$
$O(n, C)$	$n=2k$ $\Phi^{2k}_{ij}=\sum_{1}^{k}\left[{2\alpha \atop i};\ {2\alpha \atop j}\right]\partial/\partial\tau_{2\alpha}+$ $+\sum_{\alpha>\beta}\left\{\left[{2\beta-1 \atop i};\ {2\alpha \atop j}\right]\widetilde{F}^{2\beta-1,\,2\alpha}+\right.$ $+\left[{2\beta \atop i};\ {2\alpha-1 \atop j}\right]\widetilde{F}^{2\beta-1,\,2\alpha-1}-$ $-\left[{2\beta-1 \atop i};\ {2\alpha-1 \atop j}\right]\widetilde{F}^{2\beta,\,2\alpha-1}-$ $\left.-\left[{2\beta-1 \atop i};\ {2\alpha \atop j}\right]\widetilde{F}^{2\beta,\,2\alpha}\right\}$	$n\in O(n)$

Продолжение табл. 2

G		Инфинитезимальные операторы	$k \in \mathscr{K}$
$O(n, C)$	$n=2k+1$	$\Phi_{ij}^{2k+1}=\Phi_{ij}^{2k}+\sum\limits_{\alpha}\left\{\left[{2\alpha \atop i};\ {2k \atop j}\right]\widetilde{F}^{2\alpha-1,\,2k}-\left[{2\alpha-1 \atop i};\ {2k+1 \atop j}\right]\widetilde{F}^{2\alpha,\,2k+1}\right\}$; $\left[{\theta \atop i};\ {\varphi \atop j}\right]=n_i^\theta n_j^\varphi-n_i^\varphi n_j^\theta$	$n \in O(n)$
$O^*(2n)$	$n=2k$	$\Phi_{ij}^{2k}=\sum\limits_{1}^{k}\left[{2\alpha-1 \atop i};\ {2\alpha \atop j}\right](\partial/\partial\tau_{2\alpha}-i\widetilde{F}^{2\alpha-1,\,2\alpha-1}-\mathrm{i}\widetilde{F}^{2\alpha,\,2\alpha})-\mathrm{i}\sum\limits_{\alpha>\beta}\left\{\left[{2\alpha \atop i};\ {2\beta \atop j}\right]\widetilde{F}^{2\alpha-1,\,2\beta-1}+\left[{2\alpha \atop i};\ {2\beta \atop j}\right]\widetilde{F}^{2\alpha-1,\,2\beta}-\left[{2\alpha+1 \atop i};\ {2\beta-1 \atop j}\right]\widetilde{F}^{2\alpha,\,2\beta-1}-\left[{2\alpha-1 \atop i};\ {2\beta \atop j}\right]\widetilde{F}^{2\alpha,\,2\beta}\right\}$	$n \in U(n)$
	$n=2k+1$	$\Phi_{ij}^{2k+1}=\Phi_{ij}^{2k}+\sum\limits_{1}^{k}\left\{\left[{2\alpha \atop i};\ {2k \atop j}\right]\widetilde{F}^{2\alpha-1,\,2k}-\left[{2\alpha-1 \atop i};\ {2k+1 \atop j}\right]\widetilde{F}^{2\alpha,\,2k+1}\right\}$	$n \in U(n)$
$O(p, q)$ $p \geqslant q$		$\Phi_{\alpha i}=-\sum\limits_{1}^{q}p_\alpha^k q_i^k\partial/\partial\tau_k-\sum\limits_{p\geqslant\beta>k\geqslant1}p_\alpha^\beta q_i^k\widetilde{\mathscr{P}}^{\beta k}+\sum\limits_{1\leqslant k<l\leqslant q}p_\alpha^k q_i^l\widetilde{Q}^{kl}$, $1\leqslant\alpha\leqslant p$, $1\leqslant i\leqslant q$	$p \in O(p)$ $q \in O(q)$
$\mathrm{Sp}(2n, C)$		$\Phi_{ab}=-\mathrm{i}\sum\limits_{1}^{2n}\left\{c,\ a;\ {c \atop b}\right\}\partial/\partial\tau_c+\mathrm{i}\sum\limits_{c,\,d=1}^{2n}\mathrm{sgn}\,(d-c)\times\left\{c,\ a;\ {d \atop b}\right\}\widetilde{F}_d^c$, $\left\{c,\ a;\ {d \atop b}\right\}=n_{ca}n_b^d+n_{cb}n_a^d$	$n \in \mathrm{Sp}(2n)$

Продолжение табл. 2

G	Инфинитезимальные операторы	$k \in \mathscr{K}$
$\mathrm{Sp}\,(2n, R)$	$\Phi^1_{kl} = \widetilde{F}^{lk} - \widetilde{F}^{kl} + \sum\limits_1^n \left\{\begin{matrix} i, & \overset{*}{i} \\ l; & k \end{matrix}\right\} \partial/\partial\tau_i + \sum\limits_1^n \left[\begin{matrix} i, & \overset{*}{i} \\ l; & k \end{matrix}\right] \times$ $\times \widetilde{F}^{ii} + \sum\limits_{i>j}^n \left\{\begin{matrix} i, & j \\ l; & k \end{matrix}\right\} \widetilde{F}^{ij} - \sum\limits_{i<j}^n \left\{\begin{matrix} \overset{*}{i}, & \overset{*}{j} \\ l; & k \end{matrix}\right\} \widetilde{F}^{ij},$ $\left[\begin{matrix} i, & \overset{*}{i} \\ k; & l \end{matrix}\right] = n^i_k n^i_l - n^{*i}_k n^{*i}_l$ $\Phi^2_{kl} = -\mathrm{i} \sum\limits_1^n \left[\begin{matrix} i, & \overset{*}{i} \\ k; & l \end{matrix}\right] \partial/\partial\tau_i - \mathrm{i} \sum\limits_1^n \left\{\begin{matrix} i, & \overset{*}{i} \\ l; & k \end{matrix}\right\} \widetilde{F}^{ii} -$ $-\mathrm{i} \sum\limits_{i>j} \left\{\begin{matrix} i, & j \\ l; & k \end{matrix}\right\} \widetilde{F}^{ij} - \mathrm{i} \sum\limits_{i<j} \left\{\begin{matrix} i^*; & j^* \\ l & k \end{matrix}\right\} \widetilde{F}^{ij},$ $\left\{\begin{matrix} i, & j \\ l; & k \end{matrix}\right\} = n^i_l n^j_k + n^i_k n^j_l$ $\left\{\begin{matrix} i, & i^* \\ l; & k \end{matrix}\right\} = n^i_k n^i_l + \overset{*}{n}{}^i n^{*i}_l$	$n \in U\,(n)$
$\mathrm{Sp}\,(2p, 2q)$ $p \geqslant q$	$\Phi_{\lambda k} \equiv \Phi_{k\lambda} = -1/4 \sum\limits_{-q}^q \left[\begin{matrix} i, \alpha; & i \\ & k \end{matrix}\right] \partial/\partial\tau_i -$ $-1/4 \sum\limits_{-q}^q \left[\begin{matrix} \mu, \lambda; & \nu \\ & k \end{matrix}\right] (\widetilde{\mathcal{P}}^\mu_\nu - \widetilde{Q}^\mu_\nu) -$ $-1/4 \sum\limits_{-q}^q \mathrm{sgn}\,(\lvert\mu\rvert - \lvert\nu\rvert) \left[\begin{matrix} \mu, \lambda; & \nu \\ & k \end{matrix}\right] \times$ $\times (\widetilde{\mathcal{P}}^\mu_\nu + \widetilde{Q}^\mu_\nu); \left[\begin{matrix} \mu, \lambda; & \nu \\ & k \end{matrix}\right] \equiv p_{\mu\lambda} q^\nu_k - q_{\mu k} p^\nu_\lambda$	$p \in \mathrm{Sp}\,(2p)$ $q \in \mathrm{Sp}\,(2q)$

Примечание. В таблице приведены некомпактные операторы левых сдвигов для классических полупростых групп Ли, выражающиеся через операторы правого регулярного представления максимальных компактных подгрупп ($\widetilde{F}$, $\widetilde{\mathcal{P}}$, $\widetilde{Q}$) и ее матричные элементы (n, p, q), согласно формулам (9) и (13).

группе $\mathscr{K}$ из G, представления G, для которых набор $\{s\}$ целочисленный, являются однозначными. Как будет показано в дальнейшем, построенные представления операторно неприводимые, выделение топологически неприводимых компонент из которых основывается на изучении аналитических свойств ядер переплетающих операторов.

Явные выражения для генераторов алгебр всех типов классических полупростых групп Ли в тензорном базисе приведены в табл. 2.

Операторы Казимира полупростых групп Ли. Операторы Казимира в общем случае произвольной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ являются элементами центра ее универсальной обертывающей алгебры, изоморфного алгебре всех полиномов над $\mathfrak{h}$, инвариантных относительно группы Вейля [17], и выражаются через следы последовательных степеней матрицы генераторов соответствующего представления [18]. (Для групп, в которых имеется полностью антисимметричный тензор, полная система операторов Казимира, кроме того, включает в себя дополнительный оператор, являющийся обобщением псевдоскаляра Паули — Любанского для группы Лоренца. Наличие этого оператора позволяет для таких групп восстановить однозначность связи между весовым вектором, полностью определяющим неприводимое представление, и совокупностью операторов Казимира.) Для операторно неприводимых представлений $\mathfrak{g}$ операторы Казимира сводятся к C-числовым функциям их старших весов. В случае классических серий ввиду наличия матричной реализации соответствующие расчеты можно провести в тензорном и картановском базисе, тогда как для особых картановских групп вид генераторов известен лишь в базисе Картана — Вейля, и поэтому первая возможность исключается. В работе [19] в рамках традиционного метода (применение к старшему вектору) были рассмотрены операторы Казимира полупростых групп Ли, обладающие хотя бы одним конечномерным невырожденным представлением (нетривиальным), и в явном виде вычислены их собственные значения для компактных групп типа A_r, B_r, C_r, D_r, G_2.

Полученные в предыдущем разделе явные выражения для операторов сдвига на полупростой группе Ли позволяют решить задачу на собственные значения и собственные функции операторов Казимира, построенных из генераторов при конечных значениях параметров $\{\tau\}$, и вычислить спектр собственных значений операторов Казимира для произвольного операторно неприводимого представления рассматриваемых групп безотносительно к тому, является ли оно вырожденным или невырожденным, конечно- или бесконечномерным. Не проводя подробных расчетов, приведенных в работе [20], перечислим кратко лишь их основные этапы для комплексного случая, не претерпевающие существенных изменений при переходе к действительным формам соответствующих комплексных групп. Алгебра генераторов $\hat{F}_{\pm}$ (12) по своим коммутационным свойствам представляет собой прямую сумму алгебр соответствующей компактной группы $\mathcal{K}^C$. Поэтому система операторов Казимира разбивается на две совокупности операторов Казимира $C_p^{\pm}$ соответствующей компактной группы, построенных из генераторов $\hat{F}_{\pm}$. С учетом полноты системы Y_μ матрица генераторов представления $G_{\pm} = \sum_\mu (\hat{F}_\mu)_{\pm} Y_\mu$ выражается формулой

$$G_{\pm} = \pm \sum_i (kh_ik^{-1})\, d_{\pm i} + \sum_{\alpha>0} (kX_{\pm\alpha}k^{-1})\, \widetilde{X}^{\mp\alpha}; \quad d_{\pm i} = (\rho_i \pm s_i)/2. \qquad (14)$$

Для вычисления последовательных степеней этой матрицы ее удобно переписать в виде (для определенности G_+)

$$G_+ = k\, [\sum_i h_id_i + \sum_{\alpha>0} (X_\alpha X_{-\alpha} + X_\alpha \widetilde{X}^{-\alpha})]\, k^{-1},$$

откуда

$$C_p^+ \equiv \mathrm{Sp}\, G_+ = \mathrm{Sp}\, (k\Phi^p k^{-1}); \quad \Phi = \Psi + \sum_{\alpha>0} X_\alpha \widetilde{X}^{-\alpha}; \quad \Psi \equiv$$
$$\equiv \sum_i h_id_i + \sum_{\alpha>0} X_\alpha X_{-\alpha}. \qquad (15)$$

Результат перестановки матриц Φ и k^{-1} представим формулой

$$\Phi_{ab}\,(k^{-1})_c^i = (k^{-1})_c^i\, \Phi_{ab} + \sum_d (k^{-1})_d^i\, \theta_{ab;\, cd}; \quad \theta_{ab;\, cd} \equiv -\sum_{\alpha>0} (X_\alpha)_{ab}\, (X_{-\alpha})_{cd}. \qquad (16)$$

Так как след произведения, содержащего произвольное число элементов пространства положительных корней, наряду с матрицами из $\mathfrak{h}$ равен нулю, то

$$C_p^+ = \sum_{a_1,\, b_1;\, a_2,\, b_2} [\sum_i h_id_i + \sum_{\alpha>0} h_\alpha]_{a_1b_1}\, D_{a_1b_1;\, a_2b_2}\, [\sum_i h_id_i]_{a_2b_2}, \qquad (17)$$

где

$$D_{a_1,\, b_1;\, a_2,\, b_2} = \Psi_{a_1a_2}\delta_{b_1b_2} + \theta_{a_1a_2;\, b_1b_2}. \qquad (18)$$

Реализуя действие матрицы D на «столбце», имеющем два индекса, в общем случае произвольной комплексной полупростой группы Ли получаем

$$\left.\begin{aligned} C_p^+ &= \sum_{i,\, j} [\sum_k h_kd_k + \sum_{\alpha>0} h_\alpha]_{ii}\, A_{ij}^{p-2}\, [\sum_s h_sd_s]_{jj}; \\ A_{ij} &= \sum_k \mathrm{Sp}\,(S_iS^jh_k)\, d_k + \\ &+ \sum_{\alpha>0} [\mathrm{Sp}\,(S_iS^jX_\alpha X_{-\alpha}) + \mathrm{Sp}\,(X_\alpha S_iX_{-\alpha}S^j)], \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Таблица 3

<table>
<tr><th>G</th><th>Матрица A</th><th>m</th></tr>
<tr><td>$L(n, C)$</td><td rowspan="4">$A_{ab}=\delta_{ab}A_{aa}-\theta(a, b)$,
$A_{aa}=m_a+n-a$,
$1\leqslant a\leqslant n$</td><td>$m_{\pm a}=(\rho_a\pm\varkappa_a)/2$</td></tr>
<tr><td>$L(n, R)$</td><td>$m_a=\rho_a$</td></tr>
<tr><td>$U^*(2N)$
$n=2N$</td><td>$m_{2k}=(\rho_k-\varkappa_k)/2,\ m_{2k-1}=(\rho_k+\varkappa_k)/2,$
$1\leqslant k\leqslant N$</td></tr>
<tr><td>$U(p, q)$
$p\geqslant q,$
$p+q=n$</td><td>$m_a=(\rho_a+\varkappa_a)/2,\ 1\leqslant a\leqslant q,$
$m_a=l_{p-a+1},\ q+1\leqslant a\leqslant p,$
$m_a=(\rho_{n-a+1}-\varkappa_{n-a+1})/2$.</td></tr>
<tr><td>$O(N, C)$
$N=2n$</td><td rowspan="3">$A_{ab}=\delta_{ab}A_{aa}-$
$-\theta(a, b)(1-\delta_{a,\,2n-a+1}),$
$A_{ii}=m_i+n(\varepsilon_i+1)-$
$-(i+1),\ i=$
$=\begin{cases} a, & a\leqslant n\\ a-2n-1, & a\geqslant n\end{cases}$</td><td>$m_i^{\pm}=\rho_i\pm\varkappa_i,\ m_{-i}\equiv -m_i,\ 1\leqslant i\leqslant n$</td></tr>
<tr><td>$O^*(2n)$
$n=2k+(1)$</td><td>$m_{2i}=(\rho_i-\varkappa_i)/2,\ m_{2i-1}=(\rho_i+\varkappa_i)/2,$
$1\leqslant i\leqslant k$
$m_{-i}\equiv -m_i\ (m_{k+1}=\varkappa_{k+1},\ n=2k+1)$</td></tr>
<tr><td>$O(p, q)$
$p-q=2k$
$p+q=n$</td><td>$m_i=\rho_i,\ 1\leqslant i\leqslant q,\ m_i=l_{n-i+1},$
$q+1\leqslant i\leqslant n,\ m_{-i}\equiv m_i$</td></tr>
<tr><td>$O(N, C)$
$N=2n+1$</td><td rowspan="2">$A_{ab}=\delta_{ab}A_{aa}-\theta(a, b)\times$
$\times(1-\delta_{a,\,2n-a+2}),$
$i=\begin{cases} a, & a\leqslant n\\ a-2n-2, & \\ a>n+1 & \end{cases}$
$A_{ii}=m_i+(n+1/2)\times$
$\times(\varepsilon_i+1)-(i+1),$</td><td>$m_i^{\pm}=(\rho_i\pm\varkappa_i)/2,\ m_{-i}\equiv m_i,\ 1\leqslant i\leqslant n,$
$m_0=0$</td></tr>
<tr><td>$O(p, q)$
$p-q=2k+1$
$p+q=n$</td><td>$m_i=\rho_i,\ 1\leqslant i\leqslant q,\ m_i=l_{i-q},$
$q+1\leqslant i\leqslant (n-1)/2$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{Sp}(2n, C)$</td><td rowspan="3">$A_{ab}=\delta_{ab}A_{aa}-$
$-\theta(a, b)(1+\delta_{a,\,2n-a+1});$
$A_{ii}=m_i+(n+1)\times$
$\times(\varepsilon_i+1)-i;$
$i=\begin{cases} a, & a\leqslant n,\\ a-2n-1, & a\geqslant n;\end{cases}$
$\theta(a, b)=\begin{cases} 1, & a<b,\\ 0, & a\geqslant b;\end{cases}$
$\varepsilon_i=\begin{cases} 1, & i>0;\\ -1, & i<0\end{cases}$</td><td>$m_i^{\pm}=\rho_i\pm\varkappa_i,\ m_{-i}\equiv m_i,\ 1\leqslant i\leqslant n$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{Sp}(2n, R)$</td><td>$m_i=\rho_i,\ m_{-i}\equiv m_i,\ 1\leqslant i\leqslant n$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{Sp}(2p, 2q)$
$p\geqslant q,$
$p+q=n$</td><td>$m_i=\begin{cases} m_{2k}=(\rho_k-\varkappa_k)/2, & \\ m_{2k-1}=(\rho_k+\varkappa_k)/2, & 1\leqslant k\leqslant q\\ m_{n-1+j}=l_j, & 1\leqslant j\leqslant p-q\end{cases}$</td></tr>
</table>

где $\{S_i\}$ — полная «ортонормированная» система матриц $\mathrm{Sp} S_i S^j = \delta_i^{\,j}$, перестановочных с $\mathfrak{h}$.

В случае классических комплексных полупростых групп Ли последняя формула перепишется в следующем виде:

$$C_p^+ = \sum_{a,\, b} (A^p)_{a\, b}; \quad A_{ab} = \Psi_{ab} + \theta_{ab;\, ba}. \tag{20}$$

Последнее выражение (20) справедливо и для конечномерных унитарных представлений, в том числе вырожденных, компактных групп, причем спектр собственных значений операторов Казимира в этом случае совпадает с полученным другим методом (неприменимым для вырожденных представлений h_i, $X_{\pm\alpha}$) в работе [19]. Таким образом, операторы Казимира для бесконечномерных представлений с весами $d_{\pm i}$ комплексных полупростых групп Ли получаются формальной заменой целочисленных весов l_i на $d_{\pm i}$ в операторах Казимира соответствующих компактных групп.

Для действительных форм комплексных полупростых групп Ли отличие состоит в сужении матрицы генераторов $\widetilde{X}^\alpha$ на $\mathcal{K}^{R_i}$ и след ее последовательных степеней определяется, как и для комплексного случая [формулой (19) в общем случае и (20) — для классических серий] суммой матричных элементов числовой матрицы A. Явный вид матрицы A для каждой из классических комплексных полупростых групп Ли и их действительных форм приведен в табл. 3.

2. РЕАЛИЗАЦИЯ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ. ХАРАКТЕРЫ

Некоторые общие соотношения и матричные элементы конечных преобразований. Чтобы получить представления группы Ли G, исходя из ее алгебры, необходимо проинтегрировать последнюю (в тех случаях, когда это возможно), иначе говоря, решить систему уравнений Ли. Знание закона преобразования групповых параметров под действием произвольного элемента g группы G оказывается достаточным для построения таких важных характеристик представления группы, как матричные элементы конечных преобразований, характеры представлений, мера Планшереля и т. д.

Как уже говорилось, построенные представления группы реализуются на пространстве $D^{\{\rho\}}$ функций, заданных на подгруппе $\mathcal{K}$ группы G:

$$T_g^{\{\rho\}} f(k) = \prod_{1}^{r_{\mathcal{A}}} [R_i(g,\, k)]^{\rho_i} f(\widetilde{k}); \quad R_i \equiv \exp(\widetilde{\tau}_i - \tau_i), \tag{21}$$

где $\widetilde{k}$ и $\widetilde{\tau}$ получаются из исходных k и τ под действием преобразования g из G. Формулы, связывающие исходные и преобразованные параметры, находятся из решения уравнений Ли с генераторами (12) и (13).

Представление (21) является приводимым, поскольку его генераторы коммутативны с преобразованиями из подгруппы S. Для выделения операторно неприводимых компонент разложим функции f из $D^{\{\rho\}}$ по матричным элементам централизатора. Представим элемент k из $\mathscr{K}$ в виде $k = k_{-s}\cdot s$, где $s \in S$, $k_{-s} \in \mathscr{K}/S$. Инвариантность $T_g^{\{\rho\}}$ по отношению к подгруппе S означает, что при произвольном преобразовании группы G элемент претерпевает сдвиг, $\widetilde{s} = sN\,(k_{-s}g)$, где матрица $N \in S$ не содержит параметров s. Учитывая это обстоятельство, получаем

$$T_g^{\{\rho,\, s\}} f_{\{m\}}(k_{-s}) = \prod_1^{r_{\mathscr{A}}} [R_i(g,\, k_{-s})]^{\rho_i} \sum_{\{m'\}} D^{\{s\}}_{\{m\},\,\{m'\}}(N)\, f_{\{m'\}}(\widetilde{k}_{-s}), \tag{22}$$

где $D^{\{s\}}_{\{m\},\,\{m'\}}$ — матричный элемент неприводимого представления веса $\{s\}$ группы S между состояниями с квантовыми числами $\{m\}$ и $\{m'\}$. Выражение (22) является интегральной формой реализации представления $\{\rho,\, s\}$ группы G, отвечающей построенной выше алгебре с генераторами (12) и (13). Доказательство операторной неприводимости представления $\{\rho,\, s\}$, задаваемого формулой (22), будет дано ниже в связи с общим исследованием свойств приводимости на основе изучения ядер переплетающих операторов. (Для бесконечномерных представлений операторная неприводимость и отсутствие инвариантных подпространств в пространстве представления не есть, вообще говоря, эквивалентные требования.)

В соответствии с реализацией (22) оператор $T_g^{\{\rho,\, s\}}$ можно рассматривать как интегральный оператор с сингулярным ядром:

$$T^{\{\rho,\, s\}}_{\{m\},\,\{m'\}}(k_{-s},\, k'_{-s}) = \prod_1^{r_{\mathscr{A}}} [R_i(g,\, k_{-s})]^{\rho_i} D^{\{s\}}_{\{m\},\,\{m'\}}(N)\,\delta(k'_{-s}\widetilde{k}^{-1}_{-s}), \tag{23}$$

где $\delta(k'_{-s}\cdot\widetilde{k}^{-1}_{-s})$ — δ-функция на $\mathscr{K}/S$, определяемая формулой

$$\int dk'_{-s} f(k'_{-s})\,\delta(k'_{-s}\cdot k^{-1}_{-s}) = f(k_{-s}).$$

Исходя из определения характера $\pi^{\{\rho,\, s\}}(g)$ как следа оператора представления на классе обобщенных функций [21, 22] и формулы (23), имеем

$$\pi^{\{\rho,\, s\}}(g) = \int dk_{-s}\delta(k_{-s}\widetilde{k}^{-1}_{-s}) \prod_1^{r_{\mathscr{A}}} [R_i(g,\, k_{-s})]^{\rho_i}\, \pi^{\{s\}}(N), \tag{24}$$

где dk_{-s} — мера на $\mathscr{K}/S$; $\pi^{\{s\}}(N)$ — характер неприводимого представления $\{s\}$ централизатора S. [Вопрос о необходимости введения сглаживающей функции для корректного определения характера как обобщенной функции собственных значений матрицы g достаточно полно отражен в математической литературе (см., например, работу [21]) и поэтому не требует дополнительного обсуждения.]

В соответствии с используемым разложением (3) элемента g полупростой группы G в качестве базиса в пространстве $D^{\{\rho, s\}}$ представления удобно выбрать матричные элементы $D^{\{L\}}_{\{M\}, \{N\}}(k)$ неприводимых унитарных представлений подгруппы $\mathcal{K}$ между состояниями с квантовыми числами $\{M\}$ и $\{N\}$, являющиеся собственными векторами подгруппы S. Тогда из формулы (21) вытекает следующее интегральное представление для матричных элементов $D^{\{\rho, s\}}(g)$ представления $\{\rho, s\}$ группы G:

$$D^{\{\rho, s\}}_{\left\{\begin{smallmatrix}L\\ MN\end{smallmatrix}\right\};\left\{\begin{smallmatrix}L'\\ M'N'\end{smallmatrix}\right\}}(g) = N_L^{-1}\int dk \prod_{1}^{r_{\mathcal{A}}} [R_i(k, g)]^{\rho_i} \times$$
$$\times \overset{*}{D}{}^{\{L'\}}_{\{M'\}, \{N'\}}(\widetilde{k})\, D^{\{L\}}_{\{M\}, \{N\}}(k), \tag{25}$$

где N_L — размерность представления $\{L\}$ группы $\mathcal{K}$; $dk = dk_{-s}\, ds$ — нормированная на единицу инвариантная мера на $\mathcal{K}$. При этом число непрерывных параметров введенного дискретного базиса в точности равно числу квантовых чисел, включая веса представления.

Отметим, что формальное вычисление следа в формуле (25), т. е. $\sum\limits_{\{L,M,N\}} D^{\{\rho, s\}}_{\left\{\begin{smallmatrix}L\\ MN\end{smallmatrix}\right\};\left\{\begin{smallmatrix}L\\ M\,N\end{smallmatrix}\right\}}(g)$, приводит к выражению (24) для характера представления, хотя обоснованность изменения порядка суммирования и интегрирования в рамках корректного определения соответствующих операций в классе обобщенных функций требует дополнительного исследования.

Для дальнейшего приведения и конкретизации полученных выражений для матричных элементов и характеров операторно неприводимых представлений группы G требуется знание явной зависимости преобразованных параметров $\widetilde{k}$ и $\widetilde{\tau}$ от g, k и τ. Начнем с рассмотрения комплексных групп. Из сравнения формул (11) и (12) следует, что

$$\exp\Big(\sum_i \tau_i l_i\Big) D^{\{l\}}_{\{m\}, \{l\}}(k) \equiv E^{\{l\}}_{\{m\}}(k, \tau),$$
$$(\widetilde{\widetilde{X}}{}^{\alpha} E^{\{l\}}_{\{m\}} = 0,\ \alpha > 0;\ \ \widetilde{\widetilde{h}}{}^{i} E^{\{l\}}_{\{m\}} \equiv l_i E^{\{l\}}_{\{m\}})$$

преобразуется по конечномерному неунитарному представлению G^C, т. е.

$$E^{\{l\}}_{\{m\}}(\widetilde{k}, \widetilde{\tau}) = \sum_{\{m'\}} D^{\{l\}}_{\{m\}, \{m'\}}(g)\, E^{\{l\}}_{\{m'\}}(k, \tau). \tag{26}$$

Таблица 4

G	$\tilde{k}^{(a)}$	$\prod_1^{\alpha} [R_l^{(a)} \exp(-\varepsilon_l)]$	$k \in \mathcal{K}$
$L(n, C)$	$(\widetilde{n}^{(a)})_{\alpha}^{\alpha} = \dfrac{\det_{\alpha} n}{\lvert \det_{\alpha} n \rvert} \dfrac{\lvert \det_{\alpha-1} n \rvert}{\det_{\alpha-1} n}$	$\lvert \det_{\alpha} n \rvert$	$n \in U(n)$
$L(n, R)$	$(\widetilde{n}^{(a)})_{\alpha}^{\alpha} = \operatorname{sgn}\left(\dfrac{\det_{\alpha} n}{\det_{\alpha-1} n}\right)$	$\lvert \det_{\alpha} n \rvert$	$n \in O(n)$
$U^*(2n)$	$(\widetilde{n}^{(a)})_{\pm s \pm 1}^{\pm s \pm 1} = \dfrac{\det_{2s+1} \left\{ \begin{matrix} 1, -1; 2, -2; \ldots \pm s \pm 1 \\ 1, -1; 2, -2; \ldots \pm s \pm 1 \end{matrix} \right\}}{\left\lvert \det_{2s+2} \left\{ \begin{matrix} 1, -1; 2, -2; \ldots; s+1, -s-1 \\ 1, -1; 2, -2; \ldots; s+1, -s-1 \end{matrix} \right\} \right\rvert^{1/2}}$	$\left\lvert \det_{2\alpha} \times \left\{ \begin{matrix} 1, -1; 2, -2; \ldots \\ \ldots; \alpha, -\alpha \\ 1, -1; 2, -2; \ldots \\ \ldots; \alpha, -\alpha \end{matrix} \right\} \right\rvert^{1/2}$	$\left\{ \begin{matrix} a_1 \ldots a_k \\ a_1, \ldots, a_k \end{matrix} \right\} \equiv$ $\equiv \{ n_{a_1}^{a_1} - n_{ak}^{ak} \}$ $n \in \mathrm{Sp}(2n)$
$U(p, q), p \geqslant q$	$(\widetilde{p}^{(a)})_s^s = \dfrac{\det_{p-s+1}(p+q) \det^*_{p-s}(p+q)}{\lvert \det_{p-s+1}(p+q) \det_{p-s}(p+q) \rvert}$; $(\widetilde{q}^{(a)})_s^s = \dfrac{\det_s(p+q) \det^*_{s-1}(p+q)}{\lvert \det_s(p+q) \cdot \det_{s-1}(p+q) \rvert}, \; p-q+1 \leqslant s \leqslant p$; $\sum_{k=1}^{p-q} (\widetilde{p}^{(a)})_{\beta}^{k} p_{\gamma}^{*k} = \delta_{\beta\gamma} - \sum_{i, j=1}^{q} n_{\beta}^{p+1-i} \times$ $\times [(1+n)^{-1}]_{p+1-i, p+1-j} n_{\gamma}^{*p+1-j}, \; 1 \leqslant \beta, \gamma \leqslant p-q$	$\lvert \det_{\alpha}(p+q) \rvert$	$p \in U(p)$, $q \in U(q)$ $n \equiv q_{(1)}^{-1} p$ $q_{(1)} =$ $= \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & I_{p-q} \end{pmatrix}$

$O(n, C)$	$(\widetilde{a}^{(a)})^s_s = \frac{\det_s a}{\lvert\det_s a\rvert}\frac{\lvert\det_{s-1} a\rvert}{\det_{s-1} a}$, $2a^{\alpha}_{\beta} = n^{-\alpha}_{-\beta} + n^{\alpha}_{\beta} + i(n^{-\alpha}_{\beta} - n^{\alpha}_{-\beta})$	$\lvert\det_\alpha a\rvert$	$n \in O(n)$
$O^*(2n)$	$(\widetilde{n}^{(a)})^{s+1}_{\pm s\pm 1} = \frac{\det_{2s+1}\begin{Bmatrix}1, -1; \ldots; s+1\\ 1, -1; \ldots; \pm s\pm 1\end{Bmatrix}}{\left\lvert\det_{2s+2}\begin{Bmatrix}1, -1; \ldots; s+1, -s-1\\ 1, -1; \ldots; s+1, -s-1\end{Bmatrix}\right\rvert^{1/2}} = \frac{\det_{2s+1} a}{\lvert\det_{2s+2} a\rvert^{1/2}}$, $a = n + Jn^*J$	$\left\lvert\det_{2\alpha} \times \begin{Bmatrix}1, -1; \ldots; \alpha, -\alpha\\ 1, -1; \ldots; \alpha, -\alpha\end{Bmatrix}\right\rvert^{1/2} = \lvert\det_{2\alpha} a\rvert^{1/2}$	$n \in U(n)$
$O(p, q)$ $p \geqslant q$	$(\widetilde{p}^{(a)})^s_s = \operatorname{sgn}\left(\frac{\det_{p-s+1}(p+q)}{\det_{p-s}(p+q)}\right)$; $(\widetilde{q}^{(a)})^s_s = \operatorname{sgn}\left(\frac{\det_s(p+q)}{\det_{s-1}(p+q)}\right)$; $p-q+1 \leqslant s \leqslant p$; $\sum_{k=1}^{p-q}(\widetilde{p}^{(a)})^k_\beta p^k_\gamma = \delta_{\beta\gamma} - \sum_{i,j=1}^{q} n^{p+1-i}_{\beta}[(1+n)^{-1}]\rvert_{p+1-i,p+1-j} \times n^{p+1-j}_{\gamma}$, $1 \leqslant \beta,\ \gamma \leqslant p-q$	$\lvert\det_\alpha(p+q)\rvert$	$p \in O(p)$, $q \in O(q)$ $n = q^{-1}_{(1)}p$ $q_{(1)} = \begin{pmatrix}q & 0\\ 0 & I_{p-q}\end{pmatrix}$
$\mathrm{Sp}(2n, C)$	$(\widetilde{n}^{(a)})^s_s = \frac{\det_s n}{\lvert\det_s n\rvert}\frac{\lvert\det_{s-1} n\rvert}{\det_{s-1} n}$	$\lvert\det_\alpha n\rvert$	$n \in \mathrm{Sp}(2n)$

Продолжение табл. 4

G	$\widetilde{k}^{(a)}$	$\prod\limits_{1}^{\alpha}[R_l^{(a)}\exp(-\varepsilon_l)]$	$k\in\mathcal{K}$
$\mathrm{Sp}\,(2n, R)$	$(\mathrm{Re}\,\widetilde{n}^{(a)})_s^s=\mathrm{sgn}\left(\dfrac{\det_s(\mathrm{Re}\,n)}{\det_{s-1}(\mathrm{Re}\,n)}\right)$	$\lvert\det_\alpha(\mathrm{Re}\,n)\rvert$	$n\in U\,(n)$
$\mathrm{Sp}\,(2p, 2q)$ $p\geqslant q$	$(\widetilde{\mathbf{p}}^{(a)})_k^k=\dfrac{\det_{p-k+1}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\det^*_{p-k}(\mathbf{p}+\mathbf{q})}{\lvert\det_{p-k+1}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\det_{p-k}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\rvert}$, $(\widetilde{\mathbf{q}}^{(a)})_k^k=\dfrac{\det_k(\mathbf{p}+\mathbf{q})\det^*_{k-1}(\mathbf{p}+\mathbf{q})}{\lvert\det_k(\mathbf{p}+\mathbf{q})\det_{k-1}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\rvert}\quad p-q+1\leqslant k\leqslant p$ $\sum\limits_{k=1}^{p-q}(\widetilde{\mathbf{p}}^{(a)})_\beta^k\mathbf{p}_j^{*k}=\delta_{\beta\gamma}-\sum\limits_{i,j=1}^{q}\mathbf{n}_\beta^{p+1-i}[(1+\mathbf{n})^{-1}]_{p+1-i,\,p+1-j}\times$ $\times\mathbf{n}_\gamma^{*p+1-j},\quad 1\leqslant\beta,\ \gamma\leqslant p-q$	$\lvert\det_\alpha(\mathbf{p}+\mathbf{q})\rvert$	$\mathbf{p}\in\mathrm{Sp}\,(2p)$ $\mathbf{q}\in\mathrm{Sp}\,(2q)$

Примечание. Здесь приведены асимптотические выражения для преобразованных параметров $\widetilde{k}^{(a)}$ (ненулевые элементы этих матриц) и $R_i=\exp(\widetilde{\tau}_i-\tau_i)$ для классических полупростых групп Ли; $\det_j$ – главные миноры соответствующих матриц.

Использование условия ортогональности матричных элементов $\mathscr{K}$ приводит к следующим равенствам, вытекающим из формулы (26):

$$\prod_{1}^{r_{\mathscr{A}}} [R_i(k, g)]^{l_i} = [\sum_{\{m\}} |D^{\{l\}}_{\{m\},\{l\}}(gk)|^2]^{1/2}; \; D^{\{l\}}_{\{l\},\{l\}}(k^{-1}\tilde{k}) =$$
$$= D^{\{l\}}_{\{l\},\{l\}}(k^{-1}gk) / [\sum_{\{m\}} |D^{\{l\}}_{\{m\},\{l\}}(gk)|^2]^{1/2}. \tag{27}$$

Выбирая в качестве $\{l\}$ систему фундаментальных представлений соответствующей группы, нетрудно получить соотношения связи между преобразованными $\tilde{k}$, $\tilde{\tau}$ и исходными k, τ параметрами. В асимптотической области бесконечно больших значений некомпактных параметров ε_i из g правые части обоих равенств (27) для $g = T(\varepsilon) \in \mathscr{A}$ значительно упрощаются и выражаются через старшие векторы $\xi^{\{l\}}(k) = D^{\{l\}}_{\{l\}\{l\},}(k)$ соответствующих представлений группы $\mathscr{K}$, именно $\exp(\sum_i \varepsilon_i l_i)$, $|\xi^{\{l\}}(k)|$ и $|\xi^{\{l\}}(k)|$ соответственно. Явный вид старших векторов $\xi^{\{l\}}(k)$ для компактных полупростых групп Ли в универсальной параметризации дается в приложении [формула (П.5)].

В случае действительных форм комплексных групп основные соотношения (26), (27) сохраняют свой вид. Соответствующие величины $E^{\{l\}}_{\{m\}}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{k})$ преобразуются по конечномерным неунитарным представлениям данной действительной формы, причем $\mathbf{k}$ принадлежит сужению $\mathscr{K}^C$ на $\mathscr{K}^{R_i}$ и не все параметры $\{\tau\}$ линейно независимы и отличны от нуля.

Полученные соотношения решают задачу интегрирования системы уравнений Ли с генераторами (12) и (13) в случае произвольной полупростой группы Ли. Для классических групп, допускающих матричную реализацию, эти соотношения можно записать в тензорном базисе. Явные выражения, связывающие $\tilde{\tau}$, $\tilde{k}$ с k, τ и $g = T(\varepsilon)$ в асимптотической области по $\{\varepsilon\}$ для всех типов классических групп Ли в тензорном базисе, приведены в табл. 4.

Характеры операторно неприводимых представлений. Характеры построенных представлений для произвольной полупростой группы Ли G выражаются общей формулой (24); преобразованные величины $\tilde{k}$ и $\tilde{\tau}$, входящие в интегрант которой, определяются соотношениями (27). В случае классических полупростых групп Ли, для которых известна их матричная реализация, вычисление характеров представлений $\{\rho, s\}$ в смысле нахождения их явной аналитической зависимости от собственных значений матрицы g из G и весов представлений можно провести по единой схеме. Не останавливаясь на непосредственных расчетах для различных типов рассматриваемых групп (см., например, работы [40—42]), приведем описание основных этапов этой схемы в случае матрицы g,

Таблица 5

G	$A^{\{\rho\}}(\lambda)$	$B(\lambda)$	$\pi^{\{s\}}(\lambda)$
$L(n, C)$	$\prod_j \lvert\lambda_j\rvert^{\rho_j+2(n-j)}$	$\prod_{i>j} \lvert\lambda_i-\lambda_j\rvert^2$	$\prod_{j=1}^{n} (\lambda_j/\lvert\lambda_j\rvert)^{\varkappa_j}$
$L(n, R)$	$\prod_j \lvert\lambda_j\rvert^{\rho_j+(n-j)}$	$\prod_{i>j} \lvert\lambda_i-\lambda_j\rvert$	$\prod_{j=1}^{n} (\operatorname{sgn}\lambda_j)^{\xi_j}$, $\xi_j=0, 1$
$U^*(2n)$	$\prod_j \lvert\lambda_j\rvert^{\rho_j+4(n-j)}$	$\prod_{i>j} (\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_j^*)$	$\prod_{j=1}^{n} \pi_{SU(2)}^{\{l_j\}}$
$U(p, q)$ $p\geqslant q$ $p+q=n$	$\prod_{j=1}^{q} [\lvert\lambda_j\rvert^{\rho_j+2(n-2j+1)}+\lvert\lambda_j\rvert^{-\rho_j}]$,	$\prod_1^q [1-\lvert\lambda_j\rvert^2] \prod_{q\geqslant i>j\geqslant 1} \lvert\lambda_i-\lambda_j\rvert^2\times$ $\times\lvert\lambda_j-\lambda_i^{*-1}\rvert^2 \cdot \prod_{\substack{q\geqslant i\geqslant 1\\ p\geqslant\alpha\geqslant q+1}} \lvert\lambda_i-\lambda_\alpha\rvert^2$	$\prod_{j=1}^{q} (\lambda_j/\lvert\lambda_j\rvert)^{\varkappa_j}\times$ $\times\pi_{U(p-q)}^{\{l\}}$
$O(n, C)$	${}'\prod_{j=1}^{[n/2]} [\lvert\lambda_j\rvert^{\rho_j}+$ $+\lvert\lambda_j\rvert^{-\rho_j-2\Delta_j-4\varkappa_j}(\lambda_j/\lvert\lambda_j\rvert)^{-2\varkappa_j}]$, $'\prod$ содержит при $n=2k$ только четные степени λ_j; $\Delta_j=\begin{cases} 2(n-j), & n=2k \\ n-2j, & n=2k+1\end{cases}$	$\prod_{i>j} \lvert 1-\lambda_i\lambda_j^{-1}\rvert^2\cdot\lvert 1-\lambda_i^{-1}\lambda_j^{-1}\rvert^2\times$ $\times\begin{cases} 1, & n=2k \\ \prod_j \lvert 1-\lambda_j^{-1}\rvert^2, & n=2k+1\end{cases}$	—

$O^*(2n)$	$\prod_j [\lvert\lambda_j\rvert^{\rho_j}+\lvert\lambda_j\rvert^{-\rho_j-2(2n-2j+1)}]$	$\prod_j \lvert 1-\lambda_j^{-2}\rvert\lvert 1-\lambda_j^{*-2}\rvert \prod_{i>j}\lvert 1-\lambda_i\lambda_j^{-1}\rvert^2\times$ $\times\lvert 1-\lambda_i\lambda_j^{*-1}\rvert^2\cdot\lvert 1-\lambda_i^{-1}\lambda_j^{-1}\rvert^2\times$ $\times\lvert 1-\lambda_i^{-1*}\lambda_j^{-1}\rvert^2\times$ $\times\begin{cases}1, & n=2k\\ \prod_j \left\lvert\frac{\lambda}{\lvert\lambda\rvert}-\lambda_j\right\rvert^2\left\lvert\frac{\lambda}{\lvert\lambda\rvert}-\lambda_j^{-1}\right\rvert^2, & n=2k+1\end{cases}$	$\prod_{j=1}^{k}\pi_{SU(2)}^{\{l_j\}}\times$ $\times\begin{cases}1, & n=2k\\ \left(\frac{\lambda}{\lvert\lambda\rvert}\right)^{\varkappa}, & n=2k+1\end{cases}$
$O(p, q)$ $p\geqslant q$ $p+q=n$	$\prod_{j=1}^{q}[\lvert\lambda_j\rvert^{\rho_j}+\lvert\lambda_j\rvert^{-\rho_j-n+2j}]$,	$\left\lvert\prod_{i<j,\, i<q}(1-\lambda_j\lambda_i^{-1})(1-\lambda_i^{-1}\lambda_j^{-1})\right\rvert$	$\prod_{j=1}^{q}(\operatorname{sgn}\lambda_j)^{\xi_j}\pi_{O(p-q)}^{\{l\}}$
$\mathrm{Sp}(2n, C)$	$\prod_{j=1}^{n}[\lvert\lambda_j\rvert^{\rho_j}+\lvert\lambda_j\rvert^{-\rho_j-4(n-j+1)-4\varkappa_j}\times$ $\times\lambda_j^{4\varkappa_j}]\left(\frac{\lambda_j}{\lvert\lambda_j\rvert}\right)^{-2\varkappa_j}$	$\prod_{j=1}^{n}\lvert 1-\lambda_j^{-2}\rvert^2\cdot\prod_{i=j+1}^{n}\lvert 1-\lambda_i\lambda_j^{-1}\rvert^2\times$ $\times\lvert 1-\lambda_i^{-1}\lambda_j^{-1}\rvert^2$	—
$\mathrm{Sp}(2n, R)$	$\prod_{j=1}^{n}[\lvert\lambda_j\rvert^{\rho_j}+\lvert\lambda_j\rvert^{-\rho_j-2(n-j+1)}]$	$\prod_{j=1}^{n}\lvert 1-\lambda_j^{-2}\rvert\cdot\prod_{i=j+1}^{n}\lvert 1-\lambda_i\lambda_j^{-1}\rvert\times$ $\times\lvert 1-\lambda_i^{-1}\lambda_j^{-1}\rvert$	$\prod_{j=1}^{n}(\operatorname{sgn}\lambda_j)^{\xi_j}$

Продолжение табл. 5

G	$A^{\{\rho\}}(\lambda)$	$B(\lambda)$	$\pi^{\{s\}}(\lambda)$
$\mathrm{Sp}(2p, 2q)$ $p \geqslant q$ $p+q=n$	$\prod\limits_{j=1}^{q} [\lvert\lambda_j\rvert^{\rho_j} + \lvert\lambda_j\rvert^{-\rho_j-2(2n-2j+3)}]$	$\prod\limits_{j=1}^{q} \lvert 1-\lambda_j^{-2}\rvert \cdot \lvert 1-\lambda_j^{*-2}\rvert \cdot \lvert 1-\lvert\lambda_j\rvert^{-2}\rvert \times$ $\times \prod\limits_{i=j+1}^{q} \lvert 1-\lambda_i\lambda_j^{-1}\rvert^2 \cdot \lvert 1-\lambda_i^*\lambda_j^{-1}\rvert^2 \times$ $\times \lvert 1-\lambda_i^{-1}\lambda_j^{-1}\rvert^2 \lvert 1-\lambda_i^{*-1}\lambda_j^{-1}\rvert \times$ $\times \prod\limits_{k=1}^{p-q} \lvert\lambda_k' - \lambda_j\rvert^2 \lvert\lambda_k^{*\prime} - \lambda_j\rvert^2$	$\prod\limits_{j=1}^{q} \pi_{\mathrm{Sp}(2)}^{\{l_j\}} \cdot \pi_{\mathrm{Sp}(2p-2q)}^{\{\varkappa\}}$

Примечание. Здесь приведены характеры операторно неприводимых представлений классических полупростых групп Ли; $\pi^{\{\rho, s\}}(g) = \sum\limits_{\omega} A^{\{\rho^{\omega}\}} \pi^{\{s\}}/B$.

сопряженной элементам максимальной некомпактной картановской подгруппы, и единообразное выражение для характеров произвольной полупростой группы, являющееся инвариантной корневой формой записи соответствующих выражений для конкретизированных типов групп, которые приведены в табл. 5.

Интегральное выражение (24) ввиду наличия в нем δ-функции по множеству параметров $\mathcal{K}/S$ равно отношению значений подынтегральной функции (за вычетом δ-символа) к якобиану перехода J от переменных аргумента $k_{-s}\,\tilde{k}_{-s}^{-1}$ δ-функции к переменным интегрирования k_{-s}, взятому в «точках» носителя δ-функции и просуммированного по ним. Возможность замены интегрирования по $\mathcal{K}/S$ интегрированием по многомерному евклидову пространству [37] существенно облегчает все вычисления, позволяя довести их до конкретных выражений для характеров как функций собственных значений λ матрицы g из G. Обозначая $\{k_{-s}^{0}\}$ — множество элементов $\mathcal{K}/S$, лежащих в носителе $\delta\,(k_{-s}\tilde{k}_{-s}^{-1})$, для $\pi^{\{\rho,\,s\}}(g)$ получаем

$$\pi^{\{\rho,\,s\}}(g)=\sum_{\{\overset{\circ}{k}_{-s}\}}\Big\{\prod_{1}^{r_{\mathcal{A}}}[R_i(g,\,k_{-s})]^{\rho_i}\,\pi^{\{s\}}(N)/J\,[k_{-s}\tilde{k}_{-s}^{-1};\,k_{-s}]\Big\}\Big|_{\{\overset{\circ}{k}_{-s}\}}. \qquad (28)$$

Таким образом, чтобы вычислить характер этого выражения, необходимо определить в «точках» $\{\overset{\circ}{k}_{-s}\}$ значения мультипликаторов R_i, якобиана перехода J и связать собственные значения $\exp(\mathrm{i}\theta_j)$ матрицы N, через которые по известной формуле Вейля выражаются характеры $\pi^{\{s\}}(N)$ [6]:

$$\pi^{\{s\}}(N)=\sum_{\omega}\det\omega\exp\Big[\mathrm{i}\sum_{j}\theta_j\,(s_j+\rho_{0j})_{\omega}\Big]\Big/\sum_{\omega}\det\omega\times$$

$$\times\exp\Big[\mathrm{i}\sum_{j}\theta_j\,(\rho_{0j})_{\omega}\Big];\ \det\omega=\pm1;\ \omega\in W_S$$

с собственными значениями матрицы g из G. Полученные ранее соотношения связи параметров $\tilde{k}_{-s}$ и k_{-s} позволяют в явном виде вычислить все величины, входящие в формулу (28). Приведенные в табл. 5 окончательные выражения для характеров операторно неприводимых представлений каждого типа классических полупростых групп Ли в инвариантной корневой форме можно записать в следующем единообразном виде:

$$\pi^{\{\rho,s\}}=\sum_{\omega}\exp\sum_{j}\rho_j\tau_j^{\omega}\Big/\prod_{\alpha>0}{}'\,|\,1-\exp\,[-\alpha\,(\tau)]\,|^{p_\alpha}\,\pi^{\{s\}}(\varphi_\omega). \qquad (29)$$

Суммирование в формуле (29) распространяется по всем перестановкам ω из фактор-группы W_G/W_S; $\alpha\,(\tau)$ определяется из соотношения $[\tau,\,X_\alpha]_-=\alpha\,(\tau)\,X_\alpha$, $\tau\equiv\sum_j h_j\tau_j$. Произведение $\prod'_{\alpha>0}$ в знаменателе (29) распространяется на все положительные корни G, за вычетом корней S, причем все $\alpha\,(\tau)$ различны; p_α — кратность соответствующего положительного корня. В частном случае комплексной группы ($W_{G^C}/W_S = W_{G^C}$, $p_\alpha = 2$) формула (29) имеет вид

$$\pi^{\{\rho,\ s\}} = \sum_{\omega} \exp \sum_{j} (\rho_j \tau_j + i s_j \varphi_j)_\omega \Big/ \prod_{\alpha>0} | 1 - \exp[-\alpha(\tau)] |^2 \qquad (30)$$

и совпадает с выражениями характеров комплексных групп, полученными ранее в работах [21, 22] для основной непрерывной и дополнительной серий. Для действительных форм G^{R_i} комплексных классических групп выражение (29) можно записать также в следующем виде:

$$\pi^{\{\rho\}}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{\omega} \delta\omega \exp \mathrm{Sp}(\boldsymbol{\rho} + \rho_0,\ \boldsymbol{\tau}^{\omega}) \Big/ \sum_{\omega} \delta\omega \times$$
$$\times \exp \mathrm{Sp}(\rho_0,\ \boldsymbol{\tau}^{\omega});\ \rho \equiv \sum_i h_i \rho_i, \qquad (31)$$

причем для каждой перестановки ω из $W_{G^{R_i}}$ компактных корней матрицы g ($|\lambda_j| = 1$) $\delta\omega = -1$, а для некомпактных ($|\lambda_j| \neq 1$) $\delta\omega = +1$.

Следует отметить, что в случае топологической приводимости рассматриваемых операторно неприводимых представлений $\{\rho,\ s\}$ формула (29) дает сумму характеров неприводимых компонент.

Производящие функции и интегральное представление для характеров. При исследовании аналитических свойств матричных элементов, установлении рекуррентных соотношений между ними, решении задачи выделения инвариантных подпространств и т. д. весьма удобен метод производящих функций. В частности, этот метод эффективен в различных приложениях теоретико-группового подхода, связанных с разложениями по системе производящих функций (см., например, работу [13]).

В общем случае производящая функция $F^{\{\rho,\ s\}}(g;\ k_1,\ k_2)$ представления $\{\rho,\ s\}$ группы G зависит от ее элемента g и набора параметров k_1, k_2 из $\mathscr{K}$. Матричные элементы $D^{\{\rho,\ s\}}_{\{n\};\ \{m\}}(g)$ связаны с разложением $F^{\{\rho,\ s\}}$ по некоторой полной ортонормированной системе функций $\varphi_{\{n\}}(k)$:

$$F^{\{\rho,\ s\}}(g;\ k_1,\ k_2) = \sum_{\{m\},\ \{n\},\ \{n'\}} G^{\{\rho,\ s\}}_{\{n\}\{n'\}} D^{\{\rho,\ s\}}_{\{n'\}\{m\}}(g)\, \varphi_{\{n\}}(k_1)\, \overset{*}{\varphi}_{\{m\}}(k_2). \quad (32)$$

Из формулы (25) вытекает одно из выражений для производящих функций матричных элементов с фиксированными правыми квантовыми числами, а именно

$$\Phi^{\{\rho,\ s\}}_{\left\{\begin{smallmatrix} L \\ NM \end{smallmatrix}\right\}}(g;\ k) = \prod_{1}^{r_{\mathscr{A}}} [R_i(g,\ k)]^{\rho_i}\, D^{\{L\}}_{\{N,\ M\}}(\widetilde{k}) =$$
$$= \sum_{\left\{\begin{smallmatrix} l \\ nm \end{smallmatrix}\right\}} D^{\{\rho,\ s\}}_{\left\{\begin{smallmatrix} l \\ nm \end{smallmatrix}\right\};\ \left\{\begin{smallmatrix} L \\ NM \end{smallmatrix}\right\}}(g)\, D^{\{l\}}_{\{n\},\ \{m\}}(k),. \qquad (33)$$

откуда по теореме Петера — Вейля получаем

$$F^{\{\rho,\, s\}}(g;\, k_1,\, k_2) = \prod_{1}^{r_{\mathcal{A}}} R_i^{\rho_i}\, \delta(\tilde{k}_1 k_2^{-1}) =$$
$$= \Sigma N_{\{L\}} D^{\{\rho,\, s\}}_{\left\{ l \atop nm \right\};\, \left\{ L \atop NM \right\}}\, g D^{\{l\}}_{\{n\},\,\{m\}}(k_2)\, \overset{*}{D}{}^{\{L\}}_{\{N\},\,\{M\}}(k_1). \tag{34}$$

Производящие функции определенного типа связаны с асимптотическими значениями характеров полупростых групп Ли. Для того, чтобы уяснить это, следует использовать то, что характер является собственным инвариантным распределением на G [22], иначе говоря, удовлетворяет системе уравнений:

$$(\hat{F}_i + \hat{\hat{F}}_i)\, \pi(g) = 0;$$
$$[\hat{C}_\alpha - c_\alpha(\rho,\, s)]\, \pi(g) = 0;\;\; 1 \leqslant \alpha \leqslant r_G, \tag{35}$$

где $\hat{F}_i$ $(\hat{\hat{F}}_i)$ — генераторы левых (правых) сдвигов на G; $\hat{C}_\alpha$ — операторы Казимира. При этом не все решения (35) определяют характеры представлений; для выделения последних из всего набора решений требуются дополнительные правила отбора [22]. Аналогичную систему можно записать и в асимптотической области, где все генераторы, входящие в (35), заменяются своими предельными выражениями. Получаемые при этом функции обозначим $\pi_{(a)}$. Связь функций π (g) в конечной и асимптотической областях дается интегральным представлением:

$$\pi(g) = \int \mathcal{M}(g,\, g_0)\, \pi_{(a)}(g_0)\, d\mu_{(a)}(g_0), \tag{36}$$

где ядро $\mathcal{M}$ (g, g_0) удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$[\hat{F}_i - \hat{F}^T_{i(a)}]\, \mathcal{M}(g,\, g_0) = 0;\;\; [\hat{\hat{F}}_i - \hat{\hat{F}}{}^T_{i(a)}]\, \mathcal{M}(g,\, g_0) = 0. \tag{37}$$

Формула (36) является в некотором смысле обобщением преобразования Гельфанда — Граева [23] на случай произвольных полупростых групп Ли. Асимптотическое выражение для характера дается главным членом разложения $\pi^{\{\rho,\, s\}}(g)$:

$$\pi^{\{\rho,\, s\}}(g) \Rightarrow \sum_{\omega} \exp\Big(\sum_j \tau_j \widetilde{\rho_{\omega(j)}}\Big)\, \pi^{\{\rho,\, s\}_\omega}_{(a)}(k_1,\, k_2);$$
$$g = k_1 T(\tau)\, k_2;\;\; \omega \in W_G. \tag{38}$$

Из проведенного анализа следует, что функция $\mathcal{M}$ $(g,\, g_0) \equiv \mathcal{M}^{\{\rho,\, s\}}(k_2 g k_1)$, являющаяся решением системы (37), в которой операторы $\hat{F}_{i(a)}$ и $\hat{\hat{F}}_{i(a)}$ связаны с набором параметров $\{\rho,\, s;\, k_1\}$ и $\{\rho,\, s;\, k_2\}$ соответственно, суть производящая функция. Система уравнений (37) по форме аналогична соответствующей системе для ядер $B^{\{\rho, s\}}(k)$ переплетающих операторов. Поэтому ее решения можно получить из последних формальной заменой k на k_2gk_1.

3. ПЕРЕПЛЕТАЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ И ЭРМИТОВА ФОРМА

Связь переплетающих операторов с вопросами приводимости, эквивалентности и унитарности. Теория унитарных представлений действительных полупростых групп Ли, несмотря на значительные результаты, полученные в этой области, вплоть до настоящего времени вряд ли может претендовать на завершенность. Причина этого состоит в характерных особенностях представлений действительных групп (отсутствующих в комплексном случае), в частности в появлении нескольких различных типов основных серий унитарных представлений, что находится в тесной связи с наличием у этих групп неизоморфных картановских подгрупп, и представлений, реализующихся в пространствах аналитических функций многих комплексных переменных со сложной топологией [8, 24].

Методологические трудности построения унитарных представлений действительных полупростых групп Ли обусловлены, в частности, тем, что в этом случае, в отличие от комплексного, метод индуцированных и голоморфно индуцированных представлений [4, 6, 25] не позволяет получить все унитарные представления.

Среди различных подходов, использующихся при построении унитарных представлений полупростых групп Ли, наиболее конструктивными, на наш взгляд, являются исследования асимптотических свойств матричных элементов и ядер эрмитовых форм. Обе эти задачи можно связать с изучением аналитических свойств переплетающих операторов в пространстве весов представления. Кроме того, к переплетающим операторам приводит также исследование вопроса приводимости и эквивалентности представлений.

Исходным пунктом при построении явных выражений для переплетающих операторов $\hat{B}$ и выяснении взаимосвязи их с перечисленными выше задачами теории представлений является сплетающее свойство этих операторов

$$\hat{B}^{\{\omega, \Lambda\}} T_g^{\{\Lambda\}} = T_g^{\{\Lambda'\}} \hat{B}^{\{\omega, \Lambda\}} \tag{39}$$

для представлений $T_g^{\{\Lambda\}}$ и $T_g^{\{\Lambda'\}}$, которые задаются весами $\{\Lambda\}$ и $\{\Lambda'\}$, связанными преобразованиями группы Вейля W_G, $\{\Lambda'\} = \omega\{\Lambda\}$.

В случае бесконечномерных представлений (в отличие от конечномерных) группы G приводимость ввиду возможного наличия инвариантных подпространств в пространстве представления [6, 8, 23] включает в себя два неэквивалентных требования —

операторное и топологическое. Оба эти требования можно связать с аналитическими свойствами переплетающих операторов в пространстве весов, являющихся решениями уравнения (39). Для того чтобы пояснить это утверждение, удобно реализовать $\hat{B}$ как интегральный оператор на функциях из пространства соответствующего представления на $\mathcal{K}$:

$$\hat{B}^{\{\omega,\,\Lambda\}} f(k_1) = \int dk_2 B^{\{\omega,\,\Lambda\}}(k_1, k_2) f(k_2), \tag{40}$$

ядро которого является, вообще говоря, обобщенной функцией. Тогда операторная неприводимость (в смысле отсутствия оператора, перестановочного с представлением $T_g^{\{\Lambda\}}$, помимо кратного единичному) означает на языке $B^{\{\omega,\,\Lambda\}}(k_1, k_2)$, что при тождественном преобразовании $\omega = e$, $\{\Lambda'\} = \{\Lambda\}$, ядро пропорционально $\delta(k_2^{-1}k_1)$. При целочисленных значениях весов $\{\Lambda\}$ (или некоторых их линейных комбинаций) представление $T_g^{\{\Lambda\}}$ является, вообще говоря, топологически приводимым. При этом возможность выделения вполне неприводимых представлений в рамках данного подхода основывается на исследовании аналитических свойств переплетающих операторов в пространстве весов представления $T_g^{\{\Lambda\}}$ группы G в базисе квантовых чисел представления $T_k^{\{l\}}$ ее максимальной компактной подгруппы $\mathcal{K}$:

$$B_{\{l\}}^{\{\omega,\,\Lambda\}} = \int B^{\{\omega,\,\Lambda\}}(k) D^{*\{l\}}(k)\, dk \tag{41}$$

(ядро $B^{\{\omega,\,\Lambda\}}(k_1, k_2)$, как будет объяснено ниже, зависит лишь от $k_2^{-1}k_1 \equiv k$). Отметим, что для исследования явной аналитической зависимости переплетающих операторов от весов представления удобно перейти к операторной форме выражения (41), т. е.

$$\hat{J}^{\{\omega,\,\Lambda\}} = \int B^{\{\omega,\,\Lambda\}}(k)\, \hat{k}\, dk, \tag{42}$$

в которой компактные операторы $X_\alpha + X_{-\alpha}$ и h_α, входящие в $\hat{k}$ [см. формулу (П.1)], имеют вполне определенный целочисленный спектр собственных значений.

Исследование вопроса об эквивалентности представлений с весами $\{\Lambda\}$ и $\{\Lambda'\}$ сводится к выяснению условия изоморфности отображения пространства представления $D^{\{\Lambda\}}$ на пространство $D^{\{\Lambda'\}}$ под действием переплетающего оператора $\hat{B}^{\{\omega,\,\Lambda\}}$, $\{\Lambda'\} = \omega\{\Lambda\}$ и в конечном счете определяется нормировочной постоянной этого оператора. В случае неизоморфного отображения операторы $\hat{B}$ являются операторами частичной эквивалентности.

Как уже говорилось, переплетающие операторы входят также и в такую важную характеристику представлений некомпактных групп, как асимптотика матричных элементов, что в операторной форме можно записать следующим образом:

$$T_g^{\{\Lambda\}} \underset{\{\tau\}\to\infty}{\Longrightarrow} \sum_{\omega} \hat{B}^{\{\omega,\,\Lambda\}} \exp \sum_j \tau_j \rho_{\omega(j)} \hat{B}^{-1\{\omega,\,\Lambda\}} \hat{B}^{\{\omega,\,\Lambda\}}, \qquad (43)$$

где ω отвечает полной перестановке всех весов $\{\Lambda\}$.

Асимптотическое разложение матричного элемента оператора представления $T_g^{\{\Lambda\}}$, взятого между состояниями с фиксированными значениями квантовых чисел (включая веса) $T_k^{\{l\}}$, с очевидностью вытекает из формулы (43). При этом коэффициенты при экспоненциалах выражаются через функции (41) и несут полную информацию об унитарных компонентах представления $\{\Lambda\}$, матричные элементы для которых убывают в асимптотической области определенным образом. В частности, представлениям основных серий отвечают матричные элементы, квадратично интегрируемые с мерой $D(\tau)$; $D(\tau) \underset{\{\tau_j - \tau_{j+1}\}\to\infty}{\Longrightarrow} \exp 2\sum_j \Delta_j\tau_j$. Вклад в асимптотику для основной непрерывной серии ($\rho_j = -\Delta_j + i\sigma_j$, $-\infty < \sigma_j < \infty$) дают все члены ряда (43), тогда как для полудискретных и дискретной серий (если таковые имеются) отсутствие членов в сумме (43), убывающих медленнее $\exp(-\sum_j \Delta_j\tau_j)$ (или растущих), обеспечивается требованием равенства нулю соответствующих функций B. Условие зануления соответствующих функций непосредственно определяется их аналитическими свойствами (расположением нулей в весовом пространстве). Именно в этом пункте наиболее наглядно прослеживается упомянутая в разд. 1 аналогия асимптотического метода в теории представлений некомпактных групп и потенциальной теории рассеяния, в которой роль B играют функции Йоста $f(\lambda, k)$. При этом исследование аналитических свойств (полюсов и нулей) в комплексном пространстве $\{\rho\}$, выделяющее различные вполне неприводимые и унитарные представления, подобно изучению связанных состояний, резонансов и т. д. на основе аналитических свойств функций Йоста в комплексной k плоскости и их физической интерпретации [3].

Задачу построения ядер билинейных инвариантных эрмитовых форм, позволяющих в тех случаях, когда они существуют, выделять псевдоунитарные и унитарные представления, можно свести к нахождению ядер соответствующих переплетающих операторов. Более подробно этот вопрос будет обсуждаться ниже.

Таким образом, для эффективного использования переплетающих операторов в перечисленных выше задачах теории представлений полупростых групп Ли требуется, во-первых, знание их явных аналитических выражений и, во-вторых, диагонализация функций $B_{\{l\}}^{\{\omega,\,\Lambda\}}$, являющихся конечномерными матрицами. Решение первого вопроса дано ниже, где получены единообразные выражения для ядер переплетающих операторов полупростых групп Ли и операторнозначных функций (42) в корневой форме. Однако диагонализацию матриц вида (41) в общем случае нам провести не удалось. В отдельных же частных случаях, где эта процедура была реализована, например для группы $U(m, 1)$ [36], техника переплетающих операторов позволила получить полное решение указанных проблем.

Построение переплетающих операторов. Перейдем к непосредственному построению переплетающих операторов для представлений полупростых групп Ли. Для этого перепишем уравнение (39) в инфинитезимальной форме, откуда с учетом реализации (40) имеем

$$({}_1\hat{F}_i^{\{\Lambda'\}} - {}_2\hat{F}_i^{T\{\Lambda\}})\, B^{\{\omega,\, \Lambda\}}(k_1, k_2) = 0, \tag{44}$$

где индексы 1 и 2 у $\hat{F}_i$ указывают переменные (k_1 или k_2), на которые эти операторы действуют. Из подсистемы, которая связана с генераторами, отвечающими компактным преобразованиям из G, вытекает, что ядро зависит только от $k \equiv k_2^{-1}k_1$. Тогда, используя выражения для некомпактных генераторов $\hat{F}_i$ группы G в асимптотической области, полученные в разд. 1, оставшиеся уравнения (44) можно переписать в явном виде. В случае комплексной группы G^C система уравнений для ядра $B(k)$ имеет вид

$$\left[\sum_i \mathrm{Sp}\left(k^{-1}\begin{Bmatrix} h_j \\ X_{-\beta} \\ X_\beta \end{Bmatrix} kh_i\right) d_i + \sum_{\alpha\in R_+} \mathrm{Sp}\left(k^{-1}\begin{Bmatrix} h_j \\ X_{-\beta} \\ X_\beta \end{Bmatrix} kX_\alpha\right)\tilde{X}^{-\alpha} + \right.$$
$$\left. + \begin{Bmatrix} -d_j' - \Delta_j \\ X_{-\beta} \\ 0 \end{Bmatrix}\right]_{\beta\in R} B(k) = 0; \quad \rho_0 = 1/2\sum_{\alpha\in R_+}\alpha = \sum_j \Delta_j\varepsilon_j \tag{45}$$

(ε_j — канонический базис в пространстве корней [6]), а для действительных групп в соответствии с (9) получается из уравнений (45) простым сужением максимальной компактной подгруппы G^C на максимальную компактную подгруппу соответствующей ее действительной формы G^{R_i} и заменой $\{\Lambda\}_{G^C}$ на $\{\Lambda\}_{G^{R_i}}$.

В параметризации (П.1) ядро переплетающего оператора для группы G^C содержит δ-функции по параметрам θ_β, φ_β, $\beta \in \Sigma_- \cap \cap\, \omega(\Sigma_-)$. С точностью до множителей, отвечающих этим параметрам, ядро имеет вид

$$B^{\{\omega,\, \Lambda\}_C}(k) \sim \prod_{\alpha\in\Sigma_+\cap\omega(\Sigma_-)} (\cos\theta_\alpha/2)^{2(\alpha\rho)/(\alpha\alpha)} \times$$
$$\times \exp[i\varphi_\alpha(\alpha s)/(\alpha\alpha)] \prod_j \exp[i\psi_{j/2}(\pi_j s)]_{\substack{s\equiv\{s_j\} \\ \rho\equiv-\{\rho_j+2\Delta_j\}}}, \tag{46}$$

Подставляя выражения (П.1), (П.3) и (46) в формулу (42), с учетом δ-образных множителей в (46), отвечающих корням $\beta \in \Sigma_- \cap$

$\bigcap \omega(\Sigma_-)$, получаем

$$\hat{J}^{\{\omega,\Lambda\}C} = \prod_{\alpha\in\Sigma_+\bigcap\omega(\Sigma_-)} \delta[h_\alpha - (\alpha s)]\, J_\alpha[X_{\pm\alpha}, \rho] \prod_j \delta[h_j - (\pi_j s)], \qquad (47)$$

где

$$J_\alpha[X_{\pm\alpha}, \rho] = \int d\theta_\alpha \sin\theta_\alpha/2\,(\cos\theta_\alpha/2)^{2\frac{(\alpha,\rho+2\rho_0)}{(\alpha\alpha)}-1} \exp\left[i\theta_\alpha \frac{X_\alpha + X_{-\alpha}}{\sqrt{2(\alpha\alpha)}}\right]. \qquad (48)$$

Отметим, что в случае $\omega(\Sigma_-) = \Sigma_+$ формула (47) по форме совпадает с выражением (П.10) для проекционного оператора на старший вектор неприводимого представления компактной группы. В силу редукционного характера формулы (47) ее можно представить в следующем виде:

$$\hat{J}^{\{\omega,\Lambda\}C} = \hat{J}^1 J_{(-2)}^{\{\omega,\Lambda\}C};$$

$$\hat{J}^1 = \prod_{\alpha\in\Sigma_+^1\bigcap\omega(\Sigma_-)} \delta[h_\alpha - (\alpha s)]\, J_\alpha \prod_j \delta[h_j - (\pi_j s)], \qquad (49)$$

где $\hat{J}_{(-2)}^{\{\omega,\Lambda\}C}$ — соответствующий оператор для группы ранга $r_G - 2$, множество положительных корней $\Sigma_+^{(-2)} = \Sigma_+/\Sigma_+^1$ которой не содержит π_1 и π_{r_G} (иначе говоря, вычеркиванием из схемы Дынкина для группы G^C ранга r_G двух простых корней π_1 и π_{r_G}). Переплетающие операторы действительных групп, для которых $r_s = 0$, выражаются формулами, аналогичными (47) и (49) соответствующего комплексного случая.

В качестве примера переплетающих операторов для произвольной действительной полупростой группы Ли ($r_s \not\equiv 0$) приведем их выражения для действительной формы классического типа AIII, точнее редуктивной группы $U(p, q)$, $p \geqslant q$, отличающейся от $SU(pq)$ только центром. Как показано в работе [27], интегральная формула (42) в этом случае приводит к следующему факторизованному виду:

$$\hat{J}_{U(p,q)}^{\{\omega,\Lambda\}} = {}_1\hat{J}_L \hat{J}_{U2} \hat{J}_L \hat{J}_{U(p-1,\,q-1)}^{\{\omega,\Lambda\}}, \qquad (50)$$

где ${}_\mu\hat{J}_L$ — аналогичные $\hat{J}^1_{L(n,\,c)}$ выражения (49) с очевидной заменой Σ_+^1 на ${}_\mu\Sigma_+$ и $X_{\pm\alpha}$ на $X_{\pm\alpha} + X_{\pm\bar{\alpha}}$ $(\bar{\pi}_k = \pi_{p+q-k},\ 1 \leqslant k \leqslant q - 1)$; $\hat{J}_U$ — оператор, отвечающий подгруппе $U(p - q + 1, 1)$, а $\hat{J}_{U(p-1,\,q-1)}^{\{\omega,\Lambda\}}$ — соответствующий оператор для подгруппы $U(p - 1, q - 1) \subset U(p, q)$, не содержащий величин с индексом 1. Поэтому в случае псевдоунитарной группы $U(p, q)$ задача сводится к нахождению оператора $\hat{J}_U$ для группы $U(m, 1)$, $m = p - q + 1$, ранга 1. Эта группа занимает особое место среди псевдоунитарных групп, так как в сужение ее неприводимого представления на максимальную компактную подгруппу $U(m) \otimes U(1)$

неприводимые представления последней входят не более раза, что позволяет диагонализовать ядро переплетающего оператора в форме (41) и получить на этой основе полное решение перечисленного выше круга вопросов.

Рассмотрим более подробно группу $U(m, 1)$ и проиллюстрируем на ее примере общие рассуждения из предыдущего раздела. Ядро переплетающего оператора представления $\{\rho, \varkappa; p_1, \ldots, p_{m-1}\}$ ($\{p_1, \ldots, p_{m-1}\}$ и $\varkappa$-веса представлений подгрупп $U(m-1)$ и $U(1)$ централизатора $S = U(m-1) \otimes U(1)$) в случае нетривиальной вейлевской подстановки имеет вид

$$B^{\{d_\pm, p\}} = (\exp(\mathrm{i}\varphi) - m_1^1)^{-(d_- + m)} (\exp(-\mathrm{i}\varphi) - \overset{*}{m}{}_1^1)^{-(d_+ + m)} \times$$
$$\times \prod_1^{m-1} (\det{}_j \widetilde{m})^{p_j - p_{j+1}}; \tag{51}$$
$$\widetilde{m}_\beta^\alpha = m_\beta^\alpha + \frac{m_1^\alpha m_\beta^1}{\exp(\mathrm{i}\varphi) - m_1^1}; \quad 2 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant m; \quad p_m \equiv 0;$$
$$d_\pm = (\rho \pm \varkappa)/2; \quad m \in U(m); \quad \exp[\mathrm{i}\varphi] \in U(1),$$

где $\det_j m$ — «главные» миноры матрицы m — $\det_1 m = m_m^m$, $\det_2 m = m_m^m m_{m-1}^{m-1} - m_m^{m-1} m_{m-1}^m$ и т. д. Отметим, что веса L_α представления связаны с параметрами $d_\pm$ и p_i соотношениями $L_1 = d_+ + m$, $L_{i+1} = p_i + m - i$, $1 \leqslant i \leqslant m - 1$, $L_{m+1} = -d_-$. В соответствии с (51) диагональный по квантовым числам S матричный элемент (41)

$$B_{\{l\}}^{\{\rho, \varkappa; p\}} = N_{\{l\}}^{-1} \int dm\, d\varphi B^{\{d_\pm, p\}}(m, \varphi) \overset{*}{D}{}_{\{p\}, \{p\}}^{\{l\}}(m) \times$$
$$\times \exp(-\mathrm{i}r\varphi), \quad \sum_1^m l_i + r = \varkappa + \sum_1^{m-1} p_i \tag{52}$$

имеет вид

$$B_{\{l\}}^{\{\rho, \varkappa; p\}} = \frac{(-)^{\sum_1^m l_\alpha}}{N_{\{l\}}} \frac{\Gamma(-d_+ - d_- - m)}{\Gamma(-d_- - l_m)\Gamma(-d_+ + l_m - m + 1)} \times$$
$$\times \prod_1^{m-1} (-d_+ + p_\alpha - \alpha)^{-1} \frac{B(-d_- - p_\alpha - m + \alpha - d_+ + p_\alpha - \alpha + 1)}{B(-d_- - l_\alpha - m + \alpha - d_+ + l_\alpha - \alpha + 1)}.$$

(Подробный вывод формул (51) и (52) приведен в работе [36].) Аналитические свойства выражения (52) непосредственно определяются для целочисленных $d_\pm$ знаками аргументов входящих в него Γ-функций, что позволяет перечислить все вполне неприводимые компоненты, в том числе и «странные» серии. В частном случае группы $SU(2,1)$ пространства всех вполне неприводимых представлений, описанных ранее в работе [33], в точности воспроизводятся структурой функции (52) при $m = 2$, равно как и унитарные серии при произвольном m, проклассифицированные в работах [24, 34]. Матричная форма записи асимптотического разложения (43) для преобразования $g \exp \Phi_{mm+1}\tau$ группы $U(m, 1)$ при максимальном заполнении по квантовым числам S имеет вид

$$D^{\{\rho, s\}}_{\{l\}, \{l\}}(\tau) \underset{\{\tau\}\to\infty}{\Longrightarrow} \exp(\tau\rho) B^{\{-\rho-2m, s\}}_{\{l\}} \theta(\operatorname{Re}\rho + m) + $$
$$+ \exp[-\tau(\rho + 2m)](-)^{\sum_1^m l_\alpha} B^{\{\rho, s\}}_{\{l\}} \theta(-\operatorname{Re}\rho - m),$$
$$\theta(-\operatorname{Re}\rho - m), \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где коэффициенты $B^{\{\rho, s\}}_{\{l\}}$ при главных членах асимптотического разложения определяются формулой (52). Это позволяет выделить все унитарные представления, исходя из структуры аргументов Г-функций.

Факторизуемость выражений (49) и (50), сводящихся к произведению соответствующих операторов для групп ранга 1, является конкретной реализацией предложения Шиффмана [28] о возможности сведения задачи рассмотрения переплетающих операторов группы произвольного ранга к группам ранга 1. Однако, в отличие от абстрактной формы записи переплетающих операторов в виде свертки [29] (в общем случае многократной) соответствующих операторов для простых отражений, нами получено явное выражение для произвольного преобразования вейлевской группы. При этом операторы (42) представимы в виде произведения известных функций типа (48) от генераторов компактных подгрупп, имеющих известный целочисленный спектр собственных значений.

В заключение отметим, что операторная неприводимость построенных в предыдущих главах представлений $\{\rho, s\}$ непосредственно вытекает из проведенного анализа. Действительно, выбирая преобразование вейлевской группы тождественным, т. е. $\{\Lambda'\} = \{\Lambda\}$, получаем, что ядро $B^{\{\Lambda\}}(k)$ имеет δ-образный вид, так как в этом случае $\Sigma_+ \cap \omega(\Sigma_-) = \phi$, если веса $\{\Lambda\}$ не подчинены дополнительным соотношениям связи. (Рассмотрение последнего случая, отвечающего вырожденным представлениям, подробно исследовано в работе 26].)

Билинейная инвариантная эрмитова форма. Задачу выделения унитарных представлений можно связать с нахождением билинейной инвариантной эрмитовой формы (в тех случаях, когда она существует) и последующим исследованием вопроса о ее положительной определенности. Существование билинейной инвариантной эрмитовой формы означает возможность введения в пространстве представления $D^{\{\Lambda\}}$ скалярного произведения, наиболее общий вид которого в используемой реализации

$$(f_1, f_2)^{\{\Lambda\}} = \int dk_1\, dk_2\, f_1^*(k_1)\, K^{\{\Lambda\}}(k_1, k_2)\, f_2(k_2), \tag{53}$$

на которое накладываются условия:

1) эрмитовости

$$(f_1, f_2)^{\{\Lambda\}} = (f_2, f_1)^{*\{\Lambda\}}; \tag{54}$$

2) инвариантности

$$(f_1, \hat{F}_i f_2)^{\{\Lambda\}} = (\hat{F}_i f_1, f_2)^{\{\Lambda\}}. \tag{55}$$

Ядро $K^{\{\Lambda\}}$ является, вообще говоря, обобщенной функцией.

Представления $\{\Lambda\}$, удовлетворяющие перечисленным условиям, называются псевдоунитарными. Дополнительное условие

3) положительной определенности

$$(f_1, f_2) \geqslant 0 \tag{56}$$

приводит к унитарным представлениям. При этом, если функции f из пространства представления $D^{\{\Lambda\}}$ квадратично интегрируемы, то представление принадлежит к одной из основных серий и входит, вообще говоря, в разложение регулярного; в противном случае — к дополнительным. Равенства (54) и (55) можно переписать в виде следующих условий на ядро:

$$K^*(k_1, k_2) = K(k_2, k_1) \tag{57}$$

и

$$({}_1\hat{F}_i^t - {}_2\hat{F}_i^T)\, K(k_1, k_2) = 0, \tag{58}$$

причем из подсистемы (58), связанной с генераторами компактных преобразований из G, вытекает, что ядро зависит лишь от $k \equiv \equiv k_2^{-1} k_1$, и, следовательно,

$$K^*(k) = K(k^+). \tag{59}$$

Условие инвариантности

$$T_g^{+\{\Lambda\}}\, \hat{K}^{\{\Lambda\}} T_g^{\{\Lambda\}} = \hat{K}^{\{\Lambda\}}, \tag{60}$$

инфинитезимальной формой которого является формула (58), в случае невырожденности оператора $\hat{K}$ можно записать в виде

$$T_{g^{-1}}^{+\{\Lambda\}} = \hat{K}^{\{\Lambda\}}\, \hat{T}_g^{\{\Lambda\}}\, \hat{K}^{\{\Lambda\}^{-1}}, \tag{61}$$

откуда, в частности, следует, что характеры представлений $T_{g^{-1}}^{+\{\Lambda\}}$ и $T_g^{\{\Lambda\}}$ совпадают, т. е.

$$\overset{*}{\pi}{}^{\{\Lambda\}}(\lambda_\alpha^{-1}) = \pi^{\{\Lambda\}}(\lambda_\alpha). \tag{62}$$

Это позволяет, зная явный вид характеров неприводимых представлений, перечислить ограничения, накладываемые условием инвариантности на веса представления.

В общем случае произвольной полупростой группы Ли G из условия инвариантности (58) в инфинитезимальной форме с использованием явного вида генераторов (12) и (13) вытекает система уравнений для ядра $K^{\{\Lambda\}}(k)$ типа (45), условием разрешимости которой является $\{\rho, s\}_\omega = \{-\rho^* - 2\Delta, s\}$, где $\omega \in W_G$. При этом решение системы для $K^{\{\Lambda\}}(k)$ совпадает с ядром соответствующего переплетающего оператора. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно сравнить системы (44) и (58). Поэтому полученные выше выражения позволяют выделить из всех вполне неприводимых представлений рассматриваемых групп псевдоунитарные компоненты. Задача нахождения унитарных представлений эффективным использованием условия положительной определенности в форме (56) требует построения базиса в пространстве представления, диагонализующего соответствующую билинейную форму.

Проиллюстрируем сказанное выше на примере группы $U(m, 1)$, для которой решение этой задачи в рамках предлагаемого подхода удается провести полностью [36]. Из условия разрешимости соответствующей системы следует, что для псевдоунитарных представлений либо $\rho = -m, +i\sigma$, $\sigma = \sigma^*$, либо $\rho^{\cdot}$ — вещественно. В первом случае, отвечающем основной непрерывной серии, ядро есть просто δ-функция и положительная определенность формы очевидна. Во втором случае, исходя из явного выражения (52) и накладывая условие положительной определенности соответствующей формы, можно получить ограничения на веса $(l_1, \ldots, l_m)$ неприводимых унитарных представлений компактной подгруппы $U(m)$, входящих в разложение представлений $(L_1, \ldots, L_{m+1})$ группы $U(m, 1)$ с целочисленными весами, и тем самым полностью описать дискретную серию унитарных представлений этой группы.

Условие дефинитности инвариантной эрмитовой формы по параметру l_α приводит к неравенству $f_\alpha \leqslant \min(L_1, L_{m+1}) - 1$ или $f_\alpha \geqslant \max(L_1, L_{m+1})$, $f_\alpha \equiv l_\alpha + m - \alpha$, при котором вычет соответствующей Г-функции в знаменателе выражения (52) обеспечивает исчезновение знаковой функции $(-)^{l_\alpha}$ из формы. Из общего числа 2^m возможных наборов неравенств лишь $(m+1)$ совместны с цепочкой $f_1 > f_2 > \ldots > f_m$, именно $\min(L_1, L_{m+1}) > f_1 > \ldots > f_m$; $f_1 > \ldots > f_m \geqslant \max(L_1, L_{m+1})$; $f_1 > \ldots > f_{k-1} \geqslant \max(L_1, L_{m+1}) \geqslant \min(L_1, L_{m+1}) > f_k > \ldots > f_m$, $2 \leqslant k \leqslant m$. С учетом неравенств Гельфанда — Цейтлина для унитарной группы $f_1 > L_2 \geqslant f_2 > L_3 \geqslant f_3 > \ldots > L_m \geqslant f_m$ для параметров дискретной серии невырожденных унитарных представлений группы $U(m, 1)$ окончательно получаем

$$\left.\begin{array}{l} \min(L_1, L_{m+1}) > f_1 > L_2 \geqslant f_2 > \ldots > L_m \geqslant f_m; \\ f_1 > L_2 \geqslant f_2 > \ldots > L_m \geqslant f_m \geqslant \max(L_1, L_{m+1}); \\ f_1 > L_2 \geqslant f_2 > \ldots > L_{k-1} \geqslant f_{k-1} \geqslant \\ \geqslant T(L_1, L_k, L_{m+1}) > f_k > L_{k+1} \geqslant \ldots > L_m \geqslant f_m, \end{array}\right\} \quad (63)$$

где T — символ упорядочения.

Таким образом, по отношению к представлениям подгруппы $U(m)$ пространство представления (дискретной серии) группы $U(m, 1)$ разбивается в сумму попарно неэквивалентных неприводимых инвариантных подпространств $D(l_1, \ldots, l_m)$, определяемых неравенствами (63), на каждом из которых билинейная инвариантная эрмитова форма определяется однозначно (с точностью до несущественного множителя) и положительно определена.

В общем случае произвольной полупростой группы Ли полное решение проблемы выделения унитарных компонент из псевдоунитарных представлений на основе условия положительной определенности формы требует дальнейшего исследования.

4. МЕРА ПЛАНШЕРЕЛЯ ОСНОВНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СЕРИИ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Общее выражение для меры Планшереля. Приведем расчет меры Планшереля основной непрерывной серии унитарных представлений комплексных классических групп Ли и их действительных форм. Для этого, используя результаты разд. 2, вычислим в явном виде нормировочную постоянную $F(\sigma, s)$ матричных элементов основной непрерывной серии ($\rho_j = -\Delta_j + i\sigma_j$, $\sigma_j^* = \sigma_j$), с которой весовая функция $\omega(\sigma, s)$ меры Планшереля связана обратно пропорциональной зависимостью.

В интересующем нас случае основной непрерывной серии условие ортогональности матричных элементов $D^{\{\rho, s\}}_{\{N_1\}, \{N_2\}}(g)$ имеет вид

$$\int \overset{*}{D}{}^{\{\rho, s\}}_{\{N_1\}, \{N_2\}}(g)\, D^{\{\rho', s'\}}_{\{M_1\}, \{M_2\}}(g)\, dg =$$

$$= \delta_{\{N_1\}, \{M_1\}}\delta_{\{N_2\}, \{M_2\}}\delta_{\{s\}, \{s'\}} F(\qquad \prod_{1}^{\mathscr{A}} \delta(\sigma_j - \sigma'_j), \qquad (64)$$

где dg — инвариантная мера на G; $\delta_{\{N\}, \{M\}}$ — символы Кронекера по всем квантовым числам базисных векторов. При вычислении функции $F(\sigma, s)$ используем метод, примененный В. А. Фоком [30], для расчета нормировочной постоянной непрерывного спектра атома водорода. Суть его состоит в возможности перехода к асимптотике для подынтегральных функций под знаком интеграла, относительно которого известно, что он заведомо имеет δ-образный характер по непрерывным параметрам. После этого остается интегрирование лишь по параметрам максимальной компактной подгруппы, что существенно облегчает все расчеты, позволяя довести их до конкретных выражений. В соответствии с использованным для элементов группы разложением (3)

$$\int f(g)\,dg = \int\limits_{T(\tau)} D(\tau)\,d\tau \int\limits_{\mathscr{K}} dk_1\,dk_2 f(k_1 T(\tau) k_2); \quad d\tau \doteq \prod_{1}^{r_{\mathscr{A}}} d\tau_j, \qquad (65)$$

причем в асимптотической области, задаваясь определенной упорядоченностью по τ_j, например $\tau_j - \tau_{j+1} \to \infty$, $1 \leqslant j \leqslant r_{\mathscr{A}}$, $\tau_{r_{\mathscr{A}}+1} = 0$, имеем $D(\tau) \Rightarrow \exp 2\sum_j \Delta_j \tau_j$. Инвариантные объемы на $\mathscr{K}$ выбираются нормированными на единицу. Поскольку нормировочная постоянная $F(\sigma, s)$ в (64) не зависит от квантовых чисел $\{N_1\}$ и $\{N_2\}$ представления, то для ее нахождения удобно взять некоторый определенный набор $\{N_1\} = \{N_2\} = \{{}^{L}_{MN}\}$, удовлетворяющий необходимым требованиям, вытекающим из наличия централизатора. Именно в качестве матричного элемента $D^{\{L\}}_{\{M\},\{N\}}(k)$ максимальной компактной подгруппы, входящего в интегральное представление (25) для $D^{\{\rho,s\}}_{\{N_1\}\{N_2\}}(g)$, выберем матричный элемент, взятый между старшими векторами соответствующего представления, т. е. $\{{}^{L}_{MN}\} \equiv \{{}^{s}_{ss}\}$. Поэтому реализуется возможность использовать для вычисления интегралов типа (64) в асимптотической области явные выражения (П.5) для старших векторов неприводимых представлений компактных групп.

Асимптотическое выражение матричных элементов $D^{\{\rho,s\}}_{\{s\};\{s\}}(g)$ находится из формулы (25) обычными методами и имеет вид

$$D^{\{\rho,s\}}_{\{s\};\{s\}}(g) \Rightarrow \exp\Big[-\sum_j \tau_j \Delta_j\Big] \sum_{\omega} \exp\Big[\mathrm{i}\sum_j \sigma_{\omega(j)}\tau_j\Big] \times$$

$$\times \int dk \prod_{1}^{r_{\mathscr{A}}} [R_i^{(a)}]^{\rho_i} \overset{*}{D}{}^{\{s\}}_{\{s\},\{s\}}(k)\, D^{\{s\}}_{\{s\},\{s\}}(\tilde{k}^{(a)}), \qquad (66)$$

где сумма распространяется по всем перестановкам ω из группы Вейля W_G, а индекс a у R_i и $\tilde{k}$ означает асимптотическое значение соответствующих величин. Явные выражения для $R^{(a)}$ и $\tilde{k}^{(a)}$ приведены выше. Подставляя в формулу (64) асимптотические выражения (66) матричных элементов, проводя с учетом (65) интегрирование по $\{\tau\}$, приводящее к δ-функциям в правой части (64), и по параметрам k_1, k_2 из $\mathscr{K}$ для $F(\sigma, s)$ получаем

$$F(\sigma, s) = (2\pi)^{r_{\mathscr{A}}} \int dk\, dk' \prod_{1}^{r_{\mathscr{A}}} [R_i^{(a)}(k)]^{\rho_i} [R_i^{(a)}(k')]^{\overset{*}{\rho}_i} \times$$
$$\times \overset{*}{D}{}^{\{s\}}_{\{s\},\{s\}}(k'^{-1}k)\, D^{\{s\}}_{\{s\},\{s\}}(\widetilde{k}'^{(a)^{-1}} \widetilde{k}^{(a)}). \qquad (67)$$

Дальнейшее упрощение формулы для $F(\sigma, s)$ связано с использованием свойств максимально заполненных матричных элементов $D^{\{s\}}_{\{s\},\{s\}}$ и наличием подгруппы централизатора. Разлагая $D^{\{s\}}_{\{s\},\{s\}}(k'^{-1}k)$ по полной системе и интегрируя по параметрам централизатора, из формулы (67) имеем

$$F(\sigma, s) = \frac{(2\pi)^{r_{\mathscr{A}}}}{N_{\{s\}}} \left| \int\limits_{\mathscr{K}/S} dk \prod_{1}^{r_{\mathscr{A}}} [R_i^{(a)}(k)]^{\rho_i} \overset{*}{D}{}^{\{s\}}_{\{s\},\{s\}}(\widetilde{k}^{\overset{-1}{(a)}} k) \right|^2, \qquad (68)$$

где $N_{(s)}$ — размерность представления $\{s\}$ централизатора, выражающаяся формулой (П.8) через веса s_j.

Таким образом, задача вычисления меры Планшереля основной непрерывной серии унитарных представлений полупростых групп Ли сводится к вычислению интегралов типа

$$J(\sigma, s) = \int\limits_{\mathscr{K}/S} dk \prod_{1}^{r_{\mathscr{A}}} [R_i^{(a)}(k)]^{\rho_i} \overset{*}{D}{}^{\{s\}}_{\{s\},\{s\}}(\widetilde{k}^{\overset{-1}{(a)}} k). \qquad (69)$$

Отметим, что интегралы в формуле (69), определяющей при $\rho_j = -\Delta_j + i\sigma_j$ весовую функцию меры Планшереля основной непрерывной серии группы G, получаются на границе сходимости, поэтому их следует понимать в обобщенном смысле.

В случае комплексных полупростых групп Ли формула (69) допускает дальнейшее упрощение ввиду особенной простоты выражений для $R_i^{(a)}$ и $D^{\{s\}}_{\{s\},\{s\}}(\widetilde{k}^{\overset{-1}{(a)}} k)$ [см. формулу (27)]. Для таких групп интеграл (69) переписывается следующим образом:

$$J(\sigma, s) = \int dk \prod_{1}^{r_{\mathscr{A}}} |\det_\alpha k|^{i(\sigma_\alpha - \sigma_{\alpha+1}) + (s_\alpha - s_{\alpha+1})}. \qquad (70)$$

Подынтегральное выражение в формуле (70) есть не что иное, как аналитическое продолжение квадрата модуля матричного элемента $\mathscr{K}$ (взятого между старшими векторами) в область комплексных значений $(s_\alpha + i\sigma_\alpha)/2$ весов соответствующего представления. Поэтому весовая функция меры Планшереля имеет вид

$$\omega(\sigma, s) = (2\pi)^{-r_{\mathscr{A}}} |N_{\{l\}}|^2 \Bigg|_{\{l\} \equiv \left\{\frac{s_\alpha + i\sigma_\alpha}{2}\right\}}, \qquad (71)$$

где $N_{\{l\}}$ — размерность неприводимого представления соответствующей компактной группы $\mathscr{K}$, определяющаяся формулой (П.8). Для комплексных классических групп Ли весовая функция в форме (71) была получена другими методами в работах [21, 28, 31].

Явный вид весовой функции для различных темпов классических полупростых групп Ли. Не останавливаясь на конкретных расчетах меры Планшереля основной непрерывной серии унитарных представлений различных типов действительных полупро-

Таблица 6

G	Весовые функции меры Планшереля основной непрерывной серии унитарных представлений
$L(n, C)$	$\prod\limits_{i>j}[(\sigma_i-\sigma_j)^2+(\varkappa_i-\varkappa_j)^2], \quad \rho_s=-(n-2s+1)+i\sigma_s$
$L(n, R)$	$\prod\limits_{j>j}(\sigma_i-\sigma_j)\,\mathrm{th}\,\frac{\pi}{2}(\tilde{\sigma}_i-\tilde{\sigma}_j), \quad \tilde{\sigma}_s=\sigma_s+i\xi_s,\ \xi_s=0,\ 1;$ $\rho_s=-\frac{n-2s+1}{2}+i\sigma_s$
$U^*(2n)$	$\prod\limits_{i>j}[(\sigma_i-\sigma_j)^2+(\varkappa_i-\varkappa_j)^2]\,[(\sigma_i-\sigma_j)^2+(\varkappa_i+\varkappa_j+1)^2],$ $1/2\rho_s=-(n-2s+1)+i\sigma_s$
$U(p, q)$ $p\geqslant q$	$\prod\limits_{1}^{q}\sigma_i\,\mathrm{th}\,\frac{\pi}{2}\tilde{\sigma}_i\prod\limits_{i>j}[(\sigma_i-\sigma_j)^2+(\varkappa_i-\varkappa_j)^2]\,[(\sigma_i+\sigma_j)^2+(\varkappa_i-\varkappa_j)^2]\times$ $\times\prod\limits_{s=1}^{q}\prod\limits_{\alpha=1}^{p-q}[\sigma_s^2+(\varkappa_s-l_\alpha)^2], \quad \rho_s=-(n-2s+1)+2i\sigma_s,\ p+q=n$
$O(n, C)$	$n=2k.\quad \prod\limits_{i>j}[(\sigma_i-\sigma_j)^2+(\varkappa_i-\varkappa_j)^2]\,[(\sigma_i+\sigma_j)^2+(\varkappa_i+\varkappa_j)^2],$ $\rho_s=-2(n-s)+i\sigma_s$
	$n=2k+1.\quad \prod\limits_{i>j}[(\sigma_i-\sigma_j)^2+(\varkappa_i-\varkappa_j)^2]\times$ $\times[(\sigma_i+\sigma_j)+(\varkappa_i+\varkappa_j)^2]\cdot\prod\limits_{s}[\sigma_s^2+\varkappa_s^2], \quad \rho_s=-n+2s+i\sigma_s$

Продолжение табл. 6

G	Весовые функции меры Планшереля основной непрерывной серии унитарных представлений
$\overset{*}{O}(2n)$	$n=2k.\ \prod\limits_{i>j}[(\sigma_i-\sigma_j)^2+(\varkappa_i-\varkappa_j)^2]\times$ $\times[(\sigma_i-\sigma_j)^2+(\varkappa_i+\varkappa_j+1)^2]\,[(\sigma_i+\sigma_j)^2+(\varkappa_i-\varkappa_j)^2]\times$ $\times[(\sigma_i+\sigma_j)^2+(\varkappa_i+\varkappa_j+1)^2]\cdot\prod\limits_{1}^{k}\sigma_s\,\mathrm{th}\,\frac{\pi}{2}\,\tilde{\sigma}_s,$ $\rho_s=-(2n-4s+1)+2i\sigma_s$
	$n=2k+1.\ \prod\limits_{i>j}[(\sigma_i-\sigma_j)^2+(\varkappa_i-\varkappa_j)^2]\times$ $\times[(\sigma_i-\sigma_j)^2+(\varkappa_i+\varkappa_j+1)^2]\,[(\sigma_i+\sigma_j)^2+(\varkappa_i-\varkappa_j)^2]\times$ $\times[(\sigma_i+\sigma_j)^2+(\varkappa_i+\varkappa_j+1)^2]\prod\limits_{1}^{k}\sigma_s\,\mathrm{th}\,\frac{\pi}{2}\,\tilde{\sigma}_s\times$ $\times[\sigma_s^2+(\varkappa_s-\varkappa+1/2)^2]\,[\sigma_s^2+(\varkappa_s+\varkappa+1/2)^2],$ $\rho_s=-(2n-4s+1)+2i\sigma_s$
$O(p,q)$ $p\geqslant q$	$p-q=2k.\ \prod\limits_{i>j}^{q}(\sigma_i+\sigma_j)\,\mathrm{th}\,\frac{\pi}{2}(\tilde{\sigma}_i+\tilde{\sigma}_j)\ (\sigma_i-\sigma_j)\,\mathrm{th}\,\frac{\pi}{2}\times$ $\times(\tilde{\sigma}_i-\tilde{\sigma}_j)\cdot\prod\limits_{s,\alpha}\left[\sigma_s^2+\left(l_\alpha+\frac{p-q}{2}-\alpha\right)^2\right],$ $\rho_s=-1/2\,(n-2s)+i\sigma_s$ $p+q=n$
	$p-q=2k+1.\ \prod\limits_{i>j}^{q}(\sigma_i+\sigma_j)\,\mathrm{th}\,\frac{\pi}{2}(\tilde{\sigma}_i+\tilde{\sigma}_j)\,(\sigma_i-\sigma_j)\,\mathrm{th}\,\frac{\pi}{2}\times$ $\times(\tilde{\sigma}_i-\tilde{\sigma}_j)\prod\limits_{s,\alpha}\left[\sigma_s^2+\left(l_\alpha+\frac{p-q}{2}-\alpha\right)^2\right]\cdot\prod\limits_{1}^{q}\sigma_s\,\mathrm{th}\,\frac{\pi}{2}\,\tilde{\sigma}_s,$ $\rho_s=-1/2\,(n-2s)+i\sigma_s$ $p+q=n$

Продолжение табл. 6

G	Весовые функции меры Планшереля основной непрерывной серии унитарных представлений
$\mathrm{Sp}(2n, C)$	$\prod_{i>j} [(\sigma_i+\sigma_j)^2+(\varkappa_i+\varkappa_j)^2]\,[(\sigma_i-\sigma_j)^2+(\varkappa_i-\varkappa_j)^2]\cdot\prod_1^n(\sigma_s^2+\varkappa_s^2)$, $\rho_s=-2(n-s+1)+i\sigma_s$
$\mathrm{Sp}(2n, R)$	$\prod_1^n \sigma_i \operatorname{th}\frac{\pi}{2}\widetilde{\sigma}_i \prod_{i>j}(\sigma_i+\sigma_j)\operatorname{th}\frac{\pi}{2}(\widetilde{\sigma}_i+\widetilde{\sigma}_j)\,(\sigma_i-\sigma_j)\operatorname{th}\frac{\pi}{2}(\widetilde{\sigma}_i-\widetilde{\sigma}_j)$, $\rho_s=-(n-s+1)+i\sigma_s$
$\mathrm{Sp}(2p, 2q)$ $p\geqslant q$	$\prod_1^q \sigma_j \operatorname{th}\frac{\pi}{2}\widetilde{\sigma}_j\cdot[\sigma_j^2+(\varkappa_j+1/2)^2]\cdot\prod_{i>j}[(\sigma_i-\sigma_j)^2+(\varkappa_i-\varkappa_j)^2]\times$ $\times[(\sigma_i-\sigma_j)^2+(\varkappa_i+\varkappa_j+1)^2]\,[(\sigma_i+\sigma_j)^2+(\varkappa_i-\varkappa_j)^2]\times$ $\times[(\sigma_i+\sigma_j)^2+(\varkappa_i+\varkappa_j+1)^2]\cdot\prod_{s,\alpha}[\sigma_s^2+(\varkappa_s+1/2-l_\alpha)^2]\times$ $\times[\sigma_s^2+(\varkappa_s+1/2+l_\alpha)^2]$,

стых классических групп Ли, содержащихся в работах [41, 43], приведем окончательные явные выражения весовых функций для рассматриваемых групп в виде табл. 6. При этом для простоты записи числовые множители будут опускаться. Их можно легко восстановить, исходя из общей формулы для весовой функции произвольной полупростой группы Ли, приведенной ниже.

Корневая форма записи весовых функций. Приведенные в табл. 6 выражения для весовой функции меры Планшереля основной непрерывной серии унитарных представлений классических полупростых групп Ли могут быть записаны единообразным способом в инвариантной корневой форме. Именно

$$\left.\begin{aligned} &\omega(\sigma, s)=(2\pi)^{-r}\mathscr{A}\,N_{\{s\}}\,|\,J(\sigma, s)\,|^{-2};\\ &J(\sigma, s)=\prod_{\alpha>0}{}' B\,[p_\alpha/2,\ \alpha(\rho+\rho_0)]/B\,[p_\alpha/2,\ \alpha(\rho_0)], \end{aligned}\right\}\quad(72)$$

где произведение распространяется по всем положительным корням α (за вычетом корней централизатора), для которых все $|\,\alpha(\rho+\rho_0)\,|$ различны; $B(x, y)$ — функции Эйлера второго рода; p_α — кратность соответствующего корня.

Отметим, что для представлений класса 1 (в случае римановых симметрических пространств неположительной кривизны) выражение для весовой функции (72) получено ранее в работе [32]. Формула (72) также справедлива и для произвольной (не обязательно классической) комплексной полупростой группы Ли.

Найденные выражения для весовых функций меры Планшереля основной непрерывной серии унитарных представлений классических полупростых групп Ли являются аналитическими функциями параметров представления ρ, обладающими полюсами не выше первого порядка (за счет гиперболических тангенсов). Расположение полюсов и их количество находится в однозначном соответствии с запасом основных серий унитарных представлений рассматриваемых групп. По-видимому, мера Планшереля полудискретных и дискретной серий, наличие которых связано с возможностью существования у действительных полупростых групп неизоморфных картановских подгрупп, определяется вычетами в полюсах весовой функции для основной непрерывной серии, рассматриваемой в комплексной плоскости параметров $\{\sigma\}$.

Существующие примеры действительных групп, для которых мера Планшереля вычислена полностью [35], т. е. для всех имеющихся у них типов основных серий, не противоречит высказанному предложению. Если этот факт подтвердится в общем случае и будет доказан независимо, то формула (72) полностью решит задачу разложения регулярного представления на неприводимые компоненты (или задачу разложения квадратично интегрируемых функций по матричным элементам основных серий унитарных представлений полупростых групп Ли).

Удивительная простота окончательного результата (72) свидетельствует, по-видимому, о существовании чисто алгебраического вывода для весовой функции меры Планшереля полупростых групп. В пользу этого говорит наличие редукционной процедуры, позволяющей при конкретных вычислениях меры [41, 43] производить сужение на подгруппы более низких размерностей и факторизовать возникающие на этом пути интегралы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На данном этапе развития и применения теоретико-группового подхода в физических приложениях безусловно превалирует тензорный базис. Проведенное в настоящем обзоре исследование некоторых вопросов теории представлений полупростых групп Ли на основе асимптотического метода и универсальной параметризации элементов компактных групп существенным образом использует инвариантную корневую формулировку этих групп, в которой все доказательства и окончательные результаты приобретают наиболее простой и единообразный вид. По нашему мнению, применение корневой техники в рамках теоретико-группового подхода позволит значительно упростить необходимые расчеты, возникающие в физических приложениях, и свести большинство из них к простым автоматическим операциям.

Перечислим задачи теории представлений полупростых групп Ли, решение которых можно получить в рамках развитого в обзоре метода и представляет большой интерес.

1. Выделение всех вполне неприводимых и унитарных представлений произвольной полупростой группы Ли. Знание явного вида переплетающих операторов, через которые выражаются ядра эрмитовых форм и главные члены асимптотического разложения матричных элементов, позволяет свести эту задачу к диагонализации соответствующих конечномерных матриц типа (41) и последующему выяснению их положительной определенности и аналитических свойств.

2. Вычисление меры Планшереля для всех основных серий и проверка на основе этого выдвинутого выше предложения.

3. Исследование вопроса о том, каков запас представлений группы, получаемых с помощью асимптотического метода. Эта проблема носит сугубо математический характер и теснейшим образом связана с постановкой задачи о перечислении всех неприводимых представлений полупростых групп Ли.

Во всяком случае можно утверждать, что среди представлений, получаемых асимптотическим методом, содержатся все описанные до настоящего времени (различными методами) представления рассматриваемых групп, и, безусловно, их запас достаточно большой для физических приложений.

Полное решение указанных задач, которое известно лишь для некоторых частных случаев позволило бы в значительной степени приблизиться к завершению построения теории представлений полупростых групп Ли.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Универсальная параметризация компактных групп и старшие векторы их неприводимых представлений

Из анализа структуры системы R_+ положительных корней классических серий A_r, B_r, C_r, D_r и особых картановских алгебр Ли G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 вытекает существование такого упорядочения в R_+, при котором каждый суммарный корень располагается между своими составляющими. Фиксированное таким образом расположение индексов корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (не однозначное) будем называть Σ_+-упорядочением.

Поясним кратко смысл этого определения. Выберем из R_+ совокупность корней $\{\alpha\}$ и $\{\alpha'\}$, для которых максимальный корень s является суммой ($s = \alpha_i + \alpha_i'$), и расположим выделенное подмножество $\{\alpha, \alpha'; s\} \in R_+$

таким образом, чтобы каждый суммарный корень находился между своими составляющими. В оставшейся совокупности проводится аналогичное упорядочение. В качестве примера приведем Σ_+-упорядоченную систему корней для G_2: $(\pi_1, \pi_1 + \pi_2, 2\pi_1 + 3\pi_2, \pi_1 + 2\pi_2, \pi_1 + 3\pi_2, \pi_2)$.

Известно, что произвольный элемент $\hat{k}$ компактной группы $\mathcal{K}$ можно параметризовать элементами своих трехмерных подгрупп. В соответствии с этим представим $\hat{k}$ в виде

$$\hat{k} = \prod_{\alpha>0}^{\Sigma_+} \exp\left[i \frac{h_\alpha}{(\alpha\alpha)} \varphi_\alpha \right] \exp\left[i \frac{X_\alpha + X_{-\alpha}}{\sqrt{2(\alpha\alpha)}} \right] \theta_\alpha \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{r} \exp\,[ih_j\Psi_j/2], \quad \left. \begin{array}{l} 0 \leqslant \theta_\alpha < \pi; \\ 0 \leqslant \varphi_\alpha < 2\pi; \\ 0 \leqslant \Psi_j < 4\pi, \end{array} \right\} \qquad (\text{П}.1)$$

где под произведением $\prod_{\alpha>0}^{\Sigma_+}$ понимается Σ_+-упорядочение по всем положительным корням $\alpha > 0$. Используя формулу (см., например, работу [5])

$$\exp\left[i \frac{X_\alpha + X_{-\alpha}}{\sqrt{2(\alpha\alpha)}} \theta_\alpha \right] = \exp\left[i \sqrt{\frac{2}{(\alpha\alpha)}} \operatorname{tg} \frac{\theta_\alpha}{2} X_{-\alpha} \right] \times$$
$$\times \exp\left[\frac{2}{(\alpha\alpha)} \ln \cos \frac{\theta_\alpha}{2} h_\alpha \right] \times \exp\left[i \sqrt{\frac{2}{(\alpha\alpha)}} \operatorname{tg} \frac{\theta_\alpha}{2} X_\alpha \right] \qquad (\text{П}.2)$$

можно показать, что инвариантная мера dk на $\mathcal{K}$ в параметризации (П.1) имеет вид
83

$$dk = \prod_{\alpha>0} (\cos \theta_\alpha/2)^{4(\alpha\rho_0)/(\alpha\alpha)-1} \sin \theta_\alpha/2 d\theta_\alpha\, d\varphi_\alpha \prod_{j=1}^{r} d\Psi_j. \qquad (\text{П}.3)$$

Для нахождения явного выражения для старшего вектора неприводимого представления группы $\mathcal{K}$ в параметризации (П.1) предварительно докажем следующее утверждение.

В разложении Гаусса $\hat{k} = z_-\, dz_+$ комплексной оболочки группы $\mathcal{K}$ элемент d максимальной абелевой подгруппы «факторизуется» в параметрах $(\varphi_\alpha, \theta_\alpha, \Psi_j)$ и имеет вид

$$d = \prod_{\alpha>0} \exp\left\{ i \frac{h_\alpha}{(\alpha\alpha)} [\varphi_\alpha - 2i \ln \cos \theta_\alpha/2] \right\} \prod_{1}^{r} \exp\,(ih_j\Psi_j/2). \qquad \text{П}.4)$$

С этой целью рассмотрим подалгебру, натянутую на элементы X_α и $X_{\{-\alpha'\}}$ корневого пространства, где $\{-\alpha'\}$ — совокупность всех отрицательных корней, которые образуют подалгебру и расположены правее α при принятом способе упорядочения. Пусть $\alpha - \alpha_i' < 0$, тогда $\alpha - \alpha_i' \in \{-\alpha'\}$, поскольку суммарный корень должен располагаться между своими слагаемыми α и $\alpha_i' - \alpha > 0$. Если $\alpha - \alpha_i' > 0$, то он располагается левее α, так как α является суммой по отношению к $\alpha - \alpha_i' > 0$ и $\alpha_i' > 0$. Взаимные коммутаторы элементов, отвечающих положительным корням $\alpha - \alpha_i'$, расположены между ними. Таким образом, в подалгебре X_α, $X_{\{\alpha-\alpha'\}}$ и $X_{\{-\alpha'\}}$ ни разу не встречаются элементы, которые соответствуют корням, равным по модулю и противоположным по знаку. Используя это обстоятельство, формулу (П.2) и разложение (П.1) по индукции можно вывести доказательство приведенного утверждения.

Исходя из формулы (П.4), обычным образом [6] получаем следующее выражение для старшего вектора $\xi^{\{l\}}$ неприводимого представления группы $\mathscr{K}$ со старшим весом $\{l\} \equiv \{l_1, \ldots, l_r\}$:

$$\xi^{\{l\}} = \prod_{\alpha>0} \exp\left[i \frac{(\alpha l)}{(\alpha\alpha)} \varphi_\alpha\right] (\cos\theta_\alpha/2)^{2\frac{(\alpha l)}{(\alpha\alpha)}} \prod_1^r \exp\,[i\Psi_j \,|\, l_j/2]. \qquad (\text{П}.5)$$

Старшие векторы $\xi^{\{l\}}$ можно выразить через главные миноры матрицы $a_{\alpha\alpha'} = \mathrm{Sp}\,(X_{-\alpha}kX_{\alpha'}k^{-1})$ присоединенного представления. Обозначим Ξ — Σ_+-упорядоченную совокупность «старших» корней, таких, что $a_i + \alpha \geqslant a_{i+1}\alpha \in \Sigma_+$ и $a \in \Xi$. Одна из возможных систем линейно независимых «старших» корней для всех простых компактных групп приведена в табл. 7.

Таблица 7

G	Старшие корни простых комплексных алгебр Ли		
A_n, $n \geqslant 1$	$\pi_1,\ \pi_1+\pi_2,\ \ldots,\ \pi \equiv \sum_{j=1}^{r} \pi_j$	B_n, $n \geqslant 1$	$\pi,\ \pi+\pi_r,\ \pi+\pi_{r-1}+\pi_r,\ \ldots,\ 2\pi-\pi_1$
C_n, $n \geqslant 1$	$\pi,\ \pi+\pi_{r-1},\ \pi+\pi_{r-2}+\pi_{r-1},\ \ldots,\ 2\pi-\pi_r$		
D_n, $n > 2$	$\pi-\pi_{r-1},\ \pi-\pi_r,\ \pi,\ \pi+\pi_{r-2},\ \pi+\pi_{r-3}+\pi_{r-2},\ \ldots,\ 2\pi-\pi_{r-1}-\pi_r-\pi_1$		
G_2	(13), (23)	F_4	(1232), (1242), (1243), (2243)
E_6	(101212), (112211), (111212), (112212), (112312), (112322)	E_7	(1112322), (1212322), (1212313), (1212323), (1212423), (1213423), (1223423)
E_8	(12324524), (12323534), (12324534), (12324634), (12324635), (12424635), (13424635), (23424635)		

Примечание. В таблице используется параметризация положительных корней в форме [6], причем старшие корни расположены в порядке возрастания высоты. В целях упрощения записи для старших корней особых картановских алгебр выписаны лишь коэффициенты разложения по простым корням.

Справедливо следующее утверждение.

Главные миноры D_j матрицы a_{ab}, a, $b \in \Xi$, отсчитываемые от максимального корня $s \in \Xi$, являются собственными векторами операторов $\hat{X}_\alpha$ $(\hat{\hat{X}}_{-\alpha})$ с нулевыми собственными значениями и собственными векторами операторов $\hat{h}_j$ $(\hat{\hat{h}}_j)$ с собственными значениями $\lambda_j^{(i)} = \sum_{n=s-i+1}^{s} n_j$. Элементы собственного подпространства α-корня левого (правого) регулярного представления $\mathscr{K}$ обозначены $\hat{X}_\alpha$ $(\hat{\hat{X}}_{-\alpha})$, а $\hat{h}_i$ $(\hat{\hat{h}}_i)$ — генераторы $\mathfrak{h}$.

Из определения a_{ab} и линейности оператора $\hat{X}_\alpha$ следует, что

$$\hat{X}_\alpha a_{ab} = \mathrm{Sp}\,(X_{-a} k\,[X_\alpha,\ X_b]_-\, k^{-1}) = \begin{cases} N_{ab} a_{a,\,b+\alpha}, & b+\alpha \in \Xi, \\ 0, & b+\alpha \notin \Xi. \end{cases}$$

Нильпотентный характер действия $\hat{X}_\alpha$ на a_{ab} $(b+\alpha > b)$ делает очевидным равенство $\hat{X}_\alpha D_j(a) = 0$. Выражение для $\lambda_i^{(j)}$ является прямым следствием формулы $\hat{h}_i a_{ab} = b_i a_{ab}$. (Справедливость соответствующих равенств для $\hat{\hat{X}}_{-\alpha}$, $\hat{\hat{h}}_i$ доказывается аналогично.) Тогда из определения старшего вектора $\xi^{\{l\}}$ как решения системы уравнений

$$\hat{X}_\alpha \xi^{\{l\}} = 0 \quad \hat{\hat{X}}_{-\alpha}\xi^{\{l\}}; \quad \hat{h}_i \xi^{\{l\}} = l_i \xi^{\{l\}} = -\hat{\hat{h}}_i \xi^{\{l\}} \tag{П.6}$$

вытекает следующая формула:

$$\xi^{\{l\}} = \prod_1^r [D_j(a)]^{\mu_j}, \tag{П.7}$$

где в силу отмеченной ранее линейной независимости системы старших корней параметры μ_j можно подобрать в соответствии со второй парой уравнений (П.6).

Знание явных выражений для старшего вектора и инвариантного объема на $\mathcal{K}$ позволяет вычислить нормировочную постоянную старшего вектора и тем самым еще одним способом получить известную формулу для размерности $N_{\{l\}}$ неприводимого представления $\mathcal{K}$ [6]. Нормируя инвариантную меру $d\bar{k}$ на единицу, получаем

$$N_{\{l\}} = \left[\int d\bar{k}\,|\,\xi^{\{l\}}\,|^2\right]^{-1} = \prod_{\alpha>0} \frac{(\alpha,\ l+\rho_0)}{(\alpha,\ \rho_0)}. \tag{П.8}$$

Дадим теперь новое решение задачи о нахождении проекционного оператора на старший вектор, который, как нетрудно показать, имеет вид

$$\hat{P}_l = N_{\{l\}} \int d\bar{k} \overset{*}{\xi}{}^{\{l\}} \hat{k}, \tag{П.9}$$

где в элементе $\hat{k} \in \mathcal{K}$, задаваемом формулой (П.1), в качестве $X_{\pm\alpha}$ и h_i используются инфинитезимальные операторы правого (левого) регулярного представления. Подставляя $\hat{k}$ из разложения (П.1) и выражение (П.5) для $\xi^{\{l\}}$ в формулу (П.9), получаем следующее выражение для проекционного оператора $\hat{P}_l$:

$$\left.\begin{aligned} \hat{P}_l = N_{\{l\}} \prod_{\alpha>0}^{\Sigma_+} \delta\left[\frac{h_\alpha - (\alpha,\ l)}{(\alpha\rho_0)}\right] J_\alpha \prod_1^r \delta\,[h_j - l_j]; \\ J_\alpha = \sum_j \frac{(-)^j}{j!}\left[\frac{2}{(\alpha\alpha)}\right]^j \times \\ \times \left[2\,\frac{(\alpha,\ l+\rho_0)}{(\alpha\alpha)}\right]! \Big/ \left[2\,\frac{(\alpha,\ l+\rho_0)}{(\alpha\alpha)} + j\right]!\, X_{-\alpha}^j X_\alpha^j, \end{aligned}\right\} \tag{П.10}$$

которое совпадает с формой проекционного оператора, полученного в работе [39] алгебраическим методом; δ — операторный δ-символ. Математически более строгое изложение содержания этого приложения дано в работе [38].

Отметим также, что параметризация (П.1) позволяет получить результаты работы [32] по вычислению меры Планшереля для представлений класса 1, по-видимому, наиболее простым путем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вигнер Е.** Теория групп и ее приложения к квантовомеханическим расчетам. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1961; **Хамермеш М.** Теория групп и ее применение к физическим проблемам. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1966; **Group** theory and its applications. N.Y.— L., Academ. Press, 1968; **Cracknell A. P.** Applied group theory. L., Pergamon Press, 1968; **Мишель Л., Шааф М.** Симметрия в квантовой физике. Пер. с англ. М., «Мир», 1974.
2. **Group** theoretical concepts and methods in elementary particles physics. N. Y.— L., 1964; **High** energy physics and elementary particles. IAEA, Vienna, 1965. **Физика** высоких энергий и теория элементарных частиц. Киев, «Наукова думка», 1967; **Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.** Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М., «Наука», 1969; Материалы Международной конференции по физике высоких энергий. Киев, 1970; Лондон, 1974.
3. **де Альфаро В., Редже Т.** Потенциальное рассеяние. Пер. с англ. М., «Мир», 1966.
4. **Семинар** «Софус Ли». Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1962; **Джекобсон Н.** Алгебры Ли. Пер. с англ. М., «Мир», 1964; **Серр Ж. П.** Алгебры Ли и группы Ли. Пер. с франц. М., «Мир», 1969; **Кириллов А. А.** Элементы теории представлений. М., «Наука», 1972; **Желобенко Д. П.** Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли. М., «Наука», 1974.
5. **Хелгасон С.** Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
6. **Желобенко Д. П.** Комплексные группы Ли и их представления. М., «Наука», 1972.
7. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. Пер. с англ. М., «Мир», 1972.
8. **Березин Ф. А. и др.** УМН, 1956, т. 11, с. 13.
9. **Racah G.** Group theory and spectroscopy. Preprint JINR P-1864, 1964.
10. **Biedenharn L. C.** Lectures in theoret phys. Vol. 5. N.Y., 1963.
11. **Pais A.** «Rev. Mod. Phys.», 1966, v. 38, p. 215.
12. **Toller M.** «Nuovo cimento», 1958, v. 53, p. 671; **Strathdee J. e.a.** Preprint IC/67/9, Trieste, 1967; **Chew G., de Tar C.** «Phys. Rev.», 1969, v. 180, p. 1577; **Huszàr M., Smorodinsky Ya.A.** Preprint JINR E2-4225, 1968.
13. **Переломов А. М., Попов В. С.** ЖЭТФ, 1966, т. 50, с. 179; **Кадышевский В. Г., Тавхелидзе А. Н.** В сб.: Проблемы теоретической физики. М., «Наука», 1969; **Донков А. А. и др.** Препринт ОИЯИ Е2-6992, Дубна, 1973.
14. **Rühl W.** Preprint CERN, Geneva, 1966; **Koller K.** Preprint Desy 74/8, Hamburg, 1974; **Mack G., Todorov I. T.** «Phys. Rev. D», 1973, v. 8, p. 1324.
15. **Joos H.** «J. Math. Phys.», 1964, v. 5, p. 155; **Lurcat F.** «Physics», 1964, v. 1, p. 95.
16. **Бейман Б. Ф.** Лекции по применению теории групп в ядерной спектроскопии. Пер. с англ. М., «Мир», 1963; **Asherova R. M., Smirnov Yu. F.** «Nucl. Phys. B», 1968, v. 4, p. 399.
17. **Chevalley C.** «Amer. J. Math.», 1955, v. 77, p. 778.
18. **Гельфанд И. М.** «Матем. сб.», 1950, т. 26, с. 103.
19. **Переломов А. М., Попов В. С.** «Изв. АН СССР, сер. матем.», 1968, т. 32, с. 1368.
20. **Лезнов А. Н., Малкин И. А., Манько В. И.** Препринт ФИАН-139, 1972.
21. **Гельфанд И. М., Наймарк М. А.** «Труды МИАН СССР», 1950, т. 36.

22. **Березин Ф. А.**—«Докл. АН СССР», 1956, т. 110, с. 897; **Hirai T.** «Jap. J. Math.», 1970, v. 39, p. 1; **Kyoto J.** Univ., 1972; v. 12, p. 2, 393; **Harish** Chandra. «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 119, p. 457; «**Acta** Math.», 1965, v. 113, p. 241; 1966, v. 116, p. 1.
23. **Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.** Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М., Физматгиз, 1962.
24. **Граев М. И.** «Тр. Моск. матем. общества», 1958, т. 7, с. 335.
25. **Mackey G. W.** «Ann. Math.», 1952, v. 55, p. 101; 1953, v. 58, p. 193; «Bull. Amer. Math. Soc.», 1963, v. 69, p. 628; **Гельфанд И. М., Граев М. И.** «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1953, т. 17, с. 189; **Граев М. И.** УМН, 1957, т. 12, с. 179.
26. **Лезнов А. Н.** Диссертация. ИФВЭ, Серпухов, 1972.
27. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.** Препринт ИФВЭ 74—46, Серпухов, 1974.
28. **Schiffman G. C. R.** «Acad. Sci. Paris», 1968, v. 266, pp. 47, 859.
29. **Knapp A. W., Stein E. M.** «Ann. Math.», 1971, v. 93, p. 489.
30. **Fock V.** «Z. Phys.», 1936, Bd 98, S 145.
31. **Harish** Chandra «Amer. J. Math.», 1958, v. 80, pp. 241, 553.
32. **Гиндикин С. Г., Карпелевич Ф. И.** «Докл. АН СССР», 1962, т. 145, с. 252.
33. **Граев М. И.** «Докл. АН СССР», 1957, т. 113, с. 966; **Штерн А. И.** «Докл. АН СССР», 1968, т. 179, с. 1289.
34. **Hirai T.** «Proc. Japan Acad.», 1966, v. 42, p. 907; **Ottoson U.** «Comm. Math. Phys.», 1968, v. 10, p. 114.
35. **Ромм Б. Д.** «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1965, т. 29, с. 1147; **Hirai T.** «J. Math. Soc. Japan», 1970, v. 22, p. 134.
36. **Лезнов А. Н., Савельев М. В., Хрущев В. В.** Препринт ИФВЭ 73-24, Серпухов, 1973.
37. **Савельев М. В.** Диссертация ИФВЭ, Серпухов, 1971.
38. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.** Функциональный анализ и его приложения, 1974, т. 8, с. 87.
39. **Ашерова Р. М., Смирнов Ю. Ф., Толстой В. Н.** ТМФ, 1971, т. 8, с. 255.
40. **Лезнов А. Н.** Препринт ИФВЭ 68-20-К, Серпухов, 1968.
41. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.** ТМФ, 1970, т. 2, с. 311; 1970, т. 4, с. 310; 1971, т. 8, с. 161.
42. **Лезнов А. Н., Федосеев И. А.** ТМФ, 1971, т. 7, с. 298.
43. **Лезнов А. Н.** Препринт ИФВЭ 71-42, Серпухов, 1971.