«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1976, ТОМ 7, ВЫП. 3

УДК 530. 145

S-МАТРИЦА В КОНСТРУКТИВНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

С. С. Иванов,
Д. Я. Петрина,
А. Л. Ребенко

Институт теоретической физики
АН УССР, Киев

Исследуются уравнения для коэффициентных функций S-матрицы на примере самодействующего бозонного поля в двумерном пространстве времени. Методами конструктивной квантовой теории поля показано, что ряд теории возмущений в пределе бесконечного объема можно рассматривать как асимптотический в смысле слабой сходимости.

Предлагается новый подход к исследованию уравнений для коэффициентных функций матрицы рассеяния при бесконечном объеме в гильбертовом пространстве трансляционно-инвариантных функций. Доказано существование решения некоторых аппроксимированных уравнений.

The equations for coefficient functions of the S-matrix are investigated on the example of self-interacting boson field in two-dimensional space-time. It is proved, by the methods of constructive quantum field theory, that the series of perturbation theory within an infinite volume can be considered to be asyptotic in the sense of weak convergence.

A new approach to investigation of the equations for coefficient functions of scattering matrix in infinite volume in Hilbert space of translationary invariant functions is developed. The existence of a solution of some approximate equations is proved.

ВВЕДЕНИЕ

Последнее время в конструктивной квантовой теории поля внимание многих исследователей привлечено к построению моделей с нетривиальной матрицей рассеяния. Значительные результаты в этом направлении были достигнуты при изучении гамильтонианов теории и операторов эволюции. В частности, в работах Джаффе, Глимма [1] (см. также [2]) были исследованы свойства вакуума и показано, что в пределе бесконечного объема семейство временных автоморфизмов $\mathcal{U}_t$ можно реализовать группой унитарных операторов в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\text{ren}}$.

Параллельно с этим в работах Нельсона [3] была окончательно сформулирована на языке случайных процессов евклидова квантовая теория поля, исследования которой были начаты еще Швингером [4], Накано [5], Е. С. Фрадкиным [6], Симанзиком [7], Тейлором [8] и Г. В. Ефимовым [9]. В свою очередь, работы Нельсона создали основу для доказательства Глиммом и Спенсером [10] теоремы о существовании при бесконечном объеме функций Грина для теорий с полиномиальным взаимодействием.

В работах Е. С. Фрадкина [6], Симанзика [7], Фивела [11], Д. Я. Петрины и В. И. Скрипника [12] была открыта важная связь евклидовой квантовой теории поля с классической статистической физикой. Основываясь на этой взаимосвязи, удалось установить существование и свойства в пределе бесконечного объема корреляционных функций для матрицы рассеяния в случае неполиномиальных взаимодействий. Интересные результаты в этом направлении были получены в работах Хаге-Крона и Альбеверио [13], Гуэра, Розена и Саймона [14].

Другим важным направлением в конструктивной теории поля является исследование матрицы рассеяния, представленной в явно ковариантной и унитарной форме: $S = T\left(\exp\left[i\int \mathscr{L}(x)\,dx\right]\right)$. Вопросы, связанные с построением S-матрицы, освещены в ставшей уже классической монографии Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова [15]. В таком подходе основные объекты рассмотрения — коэффициентные функции F_N, которые были введены еще в монографии Н. Н. Боголюбова, Б. В. Медведева, М. К. Поливанова [16] (см. также [17]). Функции F_N, в свою очередь, однозначно связаны с функциями Грина G_N. Эти оба объекта обладают различными взаимодополняющими свойствами и в равной степени пригодны для изучения моделей квантовой теории поля. Впервые линейные уравнения для коэффициентных функций S-матрицы были построены в работах Д. Я. Петрины [18] в связи с задачей суммирования ряда фейнмановских диаграмм. Следует, однако, сказать, что еще раньше были известны нелинейные уравнения для коэффициентных функций [19—21], которые следовали из аксиом теории и при выводе которых не использовался вид лагранжиана. В настоящей работе не будут рассматриваться такие уравнения.

Возможны два основных типа уравнений для коэффициентных функций [22] — уравнения эволюционного типа, образованные дифференцированием S-матрицы по константе связи, и уравнения резольвентного типа, образованные формальным варьированием по свободному полю $\Phi_0(x)$. Итерации уравнений первого типа полностью восстанавливают диаграммы ряда теории возмущений, итерации второго — совокупность диаграмм без вакуумных вкладов.

Подчеркнем, что уравнения эволюционного типа весьма просты и задают по существу общую структуру коэффициентных функций S-матрицы. Эта структура подробно описана в разд. 1. Естественно, что в результате присутствия вакуумных множителей уравнения эволюционного типа требуют значительной перестройки для исследования их в бесконечном объеме. Для этого значительно более удобны уравнения резольвентного типа.

В разд. 2 настоящей работы, следуя сложившимся в квантовой теории поля традициям, строятся резольвентные уравнения вначале в конечном объеме, а затем, опираясь на связь между коэффициентными функциями и функциями Грина, устремляется объем к бесконечности.

При этом итерации резольвентных уравнений можно рассматривать как слабые асимптотические ряды для коэффициентных функций, членами которых являются вклады от диаграмм Фейнмана.

В разд. 3 предлагается новый подход к исследованию уравнений резольвентного типа при бесконечном объеме. Наш подход основывается на том, что при бесконечном объеме коэффициентные функции можно единственным образом представить через свои трансляционно-инвариантные связные части,— этот факт хорошо известен из теории возмущений. Поэтому естественно исследовать резольвентные уравнения в пространстве функций, которое бы учитывало такую трансляционно-инвариантную структуру.

Такое пространство, а именно гильбертово пространство трансляционно-инвариантных функций h^T, было введено в работах [23] в связи с задачей исследования гамильтонианов квантовой статистики. Исследование уравнений резольвентного типа $F = g'AF + F^0$ в пространстве h^T представляет трудную математическую задачу. Тем не менее при детальном изучении оказывается, что производящий оператор A можно представить в следующем виде:

$$A = S + P + C,$$

где S — самосопряженный оператор; P — оператор, уменьшающий число связных частей; C — ограниченный оператор.

Основной результат состоит в том, что решение приближенного уравнения, в котором отсутствует часть P:

$$F = g'(S + C)F + F^0 \tag{1}$$

существует и задается сильносходящимся в h^T рядом. Интересно, что итерации такого уравнения восстанавливают совокупность вкладов от всех возможных топологически неэквивалентных диаграмм, однако с кратностью меньшей, чем в ряду теории возмущений.

В заключение подчеркнем, что нами исследуется только евклидов вариант уравнений. На наш взгляд, это нисколько не сужает постановку задачи, так как к настоящему времени в работах

Нельсона, Остервальдера, Шрадера и Глазера [24] практически завершен вопрос об однозначном соответствии между евклидовыми и псевдоевклидовыми функциями Грина; разумеется, то же самое касается и коэффициентных функций. Однако обсуждение этого вопроса выходит за рамки настоящей работы.

1. ОБЩАЯ СТРУКТУРА КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим матрицу рассеяния в модели $g\,(:\Phi_0^4:)_2$ и ее разложение по свободным полям [16, 17, 25]:

$$\left.\begin{aligned} S &= T\,[\exp(\mathrm{i}\mathscr{L})] = T\left(\exp\left[\mathrm{i}g\int :\Phi_0^4(x):dx\right]\right) = \\ &= \sum_{N=0} \frac{1}{\sqrt{N!}} \int F_N(x_1, \ldots, x_N) : \Phi_0(x_1) \ldots \Phi_0(x_N) : dx_1 \ldots dx_N; \\ & x = (x^1, x^0) \in R^2; \quad F_0 = (\Omega_0, S\,\Omega_0), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

где Ω_0 — состояние без частиц.

Подчеркнем, что операторно-значный нормально упорядоченный (виковский) функционал от свободного поля $\Phi_0(x)$ однозначно определяется последовательностью своих коэффициентных функций $F = \{F_N(x_1, \ldots, x_N)\}_{N=0}^{\infty}$. Поэтому целесообразно свести задачу исследования формального выражения $T\,[\exp(\mathrm{i}\mathscr{L})]$ к исследованию определенных уравнений для коэффициентных функций. Для этого воспользуемся, как и в работах [18, 22], следующим хорошо известным тождеством [26]:

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{d}{dg} S = T\left(\int dx : \Phi_0^4(x) : S\right), \quad S_{g=0} = 1. \qquad (3)$$

Подставим в обе части равенства (3) разложение (2) и раскроем правую часть, пользуясь теоремой Вика. Рассмотрим предварительно более элементарную операцию [27]

$$T\,(\Phi_0(x)\,S) = :\Phi_0(x)\,S: + :\overline{\Phi_0(x)\,S}:. \qquad (4)$$

В пространстве последовательностей коэффициентных функций операция (4) представляется следующим образом:

$$a(x)\,F = a^+(x)\,F + a^-(x)\,F,$$

где

$$\left.\begin{aligned} &(a^+(x)\,F)_N(x_1, \ldots, x_N) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \delta(x - x_i)\, F_{N-1}(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_N), \\ &(a^-(x)\,F)_N(x_1, \ldots, x_N) = \\ &= \sqrt{N+1} \int dx' \frac{1}{\mathrm{i}} \mathscr{D}^c(x - x')\, F_{N+1}(x', x_1, \ldots, x_N) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

и, очевидно,

$$[a^-(x), a^+(x')] = \frac{1}{\mathrm{i}} \mathscr{D}^c (x - x').$$

С диаграммной точки зрения операции $a^\pm(x)$ можно назвать операторами рождения — уничтожения внешних линий. С их помощью мгновенно раскрывается соотношение (3):

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dg} F = HF; \quad F_{g=0} = \Omega_0, \tag{6}$$

где производящий оператор H имеет следующий вид: $H = \int : a^4(x) : dx$. Таким образом, для последовательности коэффициентных функций, определяющих однозначно виковский функционал (2), справедливо представление

$$F = \exp(\mathrm{i}gH)\,\Omega_0. \tag{7}$$

Его несомненная польза состоит в том, что после перехода в евклидову область $x^0 \to \mathrm{i}x^2$, $p^0 \to \mathrm{i}p^2$ и введения пространственно-временного обрезания $h(x)$ получаем возможность придать строгий математический смысл всей последовательности коэффициентных функций F. Опишем этот переход подробнее. Прежде всего, в евклидовой области нужно переопределить операторы $a^\pm(x)$ (5) так, чтобы

$$[a^-(x), a^+(x')] = G_0(x - x') =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \exp[\mathrm{i}k(x - x')]/(k^2 + m^2)\,dk; \quad k^2 = (k^1)^2 + (k^2)^2,$$

где G_0 — евклидова свободная функция Грина. Кроме того, при замене элемента объема $\int dx$ на $-\mathrm{i}\int dx$ исчезнет мнимая единица в (7).

Введем теперь в импульсном пространстве дополнительное преобразование [22]

$$F_N \to \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{2\pi\sqrt{k_i^2 + m^2}} F_N(k_1, \ldots, k_N). \tag{8}$$

После этого операторы $a^\pm(x)$ и H представятся через обычные операторы рождения и уничтожения частиц с импульсом k (для простоты сохраняем прежние обозначения):

$$a(x) = \int \frac{\exp(\mathrm{i}\,kx)}{2\pi\sqrt{k^2 + m^2}} a(k)\,dk;$$

$$H = \int dk_1 \ldots dk_4 \frac{(2\pi)^2 \delta(k_1 + \ldots + k_4)}{2\pi\sqrt{k_1^2 + m^2} \ldots 2\pi\sqrt{k_4^2 + m^2}} : a(k_1) \ldots a(k_4) :, \tag{9}$$

где $a(k) = a^+(k) + a^-(-k)$; $[a^-(k), a^+(k')] = \delta(k - k')$, $k \in R^2$.

Формула (9) с очевидностью подчеркивает, что оператор H имеет структуру, родственную гамильтониану взаимодействия $\mathscr{H}_{\text{int}}$, с той лишь разницей, что в гамильтониане фигурируют свободные поля $\Phi_0(x^1)$, $x^1 \in R^1$ в момент времени $t = 0$*. Таким образом, к исследованию векторно-значной функции F (7) естественно применить традиционные математические средства конструктивной квантовой теории поля.

Введем необходимые определения. Рассмотрим сглаженный оператор

$$a(f) = \int \frac{f(k)}{2\pi\sqrt{k^2+m^2}}\, a(k)\, dk,$$

где функция $f(k) = \overline{f(-k)}$ квадратично интегрируема с весом $\rho(k) = 1/[(2\pi)^2(k^2+m^2)]$. Функции f образуют гильбертово пространство $L_\rho^2(R^2)$ со скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int \overline{f(k)} \times \times g(k)\rho(k)\, dk$. Заметим, что оператор $a(f)$ симметричен на области конечных последовательностей $\mathscr{D}_0$ в евклидовом пространстве Фока [18, 28] $\mathscr{H} = \bigoplus\limits_0^\infty \mathscr{H}_N$ и, более того, существенно самосопряжен.

Пусть далее $\mathbb{C}$ есть линейная оболочка $[\exp[ia(f)]]$. Замыкание множества $\mathbb{C}$ образует максимальную коммутативную алгебру $\mathfrak{M} = \{m\}$ операторов в $\mathscr{H}$ с циклическим вектором Ω_0. Согласно теореме Гельфанда — Наймарка — Сигала существует унитарное отображение U пространства $\mathscr{H}$ в пространство $L^2(d\mu, \Lambda)$, где $\Lambda = \{\lambda\}$ — спектр алгебры $\mathfrak{M}$; $d\mu$ — нормированная мера на Λ. При этом правила соответствия таковы:

$$U : \begin{cases} \mathscr{H} \ni f \Longleftrightarrow f(\lambda) \in L^2(d\mu, \Lambda),\ \Omega_0 \Longleftrightarrow 1; \\ (f, f) = (f, f)_{L^2} = \int\limits_\Lambda \overline{f(\lambda)}\, f(\lambda)\, d\mu(\lambda); \\ \mathfrak{M} \Longleftrightarrow C^0(\Lambda);\ \mathbb{C} \Longleftrightarrow C(\Lambda). \end{cases}$$

Заметим, что $C(\Lambda)$ плотно в $C^0(\Lambda)$ в равномерной топологии (в пространстве Фока $\mathscr{H}$ она эквивалентна равномерной операторной топологии).

Введем в оператор H пространственно-временное вещественное обрезание $h(x)$, $\operatorname{supp} h(x) \subset R^2$. В этом случае

$$H(h) = \int h(x) : a^4(x) : dx =$$

$$= \int dk_1 \ldots dk_4 \frac{\tilde{h}(k_1 + \ldots + k_4)}{2\pi\sqrt{k_1^2+m^2} \ldots 2\pi\sqrt{k_4^2+m^2}} : a(k_1) \ldots a(k_4) : \qquad (10)$$

* В работах Нельсона [3] оператор $a(x)$ именуется евклидовым полем, а оператор H — евклидовым гамильтонианом. Впервые эти операторы появились в неявной форме еще в работах [18], их определение дано в работе [28], а в работах [27] описан фермионный вариант.

приобретает смысл виковского полинома с квадратично интегрируемым эрмитово-симметричным ядром, который эквивалентен умножению на $h(\lambda) \in L^2(d\mu, \Lambda)$ и, следовательно, существенно самосопряжен в $\mathscr{H}$. Более того, можно показать, что $\exp[gh(\lambda)] \in \in L^2(d\mu, \Lambda)$ для любых g при условии $\operatorname{Re} g \leqslant 0$ (идея доказательства этого факта заимствована из работы Нельсона [29] и подробно развита применительно к нашему случаю в работе [30] (см. Приложение 1). Опираясь уже на это свойство, удается доказать, что функция $\exp[gh(\lambda)]$ бесконечно дифференцируема по g в смысле $L^2(d\mu, \Lambda)$ и разлагается в сильный асимптотический ряд, остаток которого можно проконтролировать достаточно точно [30].

Таким образом, каждая коэффициентная функция $F_N(k_1, \ldots, k_N)$ представляется как N-частичная проекция векторно-значной функции $\exp[gH(h)]\,\Omega_0$, а соответствующий ей ряд евклидовых диаграмм с N внешними линиями является асимптотическим в смысле среднеквадратической сходимости.

Заметим, что благодаря наличию вакуумных диаграмм выражение (7) не пригодно для совершения предельного перехода $h(x) \to 1$ и поэтому нуждается в дополнительном, точном математически, переосмысливании. Попытки такого переосмысливания будут предприняты нами в последующих разделах.

2. ПОСТРОЕНИЕ СЛАБОГО АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПРИ БЕСКОНЕЧНОМ ОБЪЕМЕ

Рассмотрим последовательность

$$F_N^h(f_1, \ldots, f_N) = (a^+(f_1) \ldots a^+(f_N)\,\Omega_0, F^h), \quad N = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

где

$$F^h = \exp[gH(h)]\,\Omega_0/F_0^h; \quad F_0^h = (\Omega_0, \exp[gH(h)]\,\Omega_0).$$

Так как вектор $a^+(f_1) \ldots a^+(f_N)\,\Omega_0 \in \mathscr{H}_N$, то выражение (11) описывает коэффициентные функции $F_N^h(k_1, \ldots, k_N)$, усредненные с функциями $f_i(k) = f_i(k)/[2\pi\sqrt{k^2 + m^2}]$; вакуумный вклад F_0^h сокращен.

Будем предполагать, что $f_i(k)$ являются преобразованием Фурье бесконечно дифференцируемых, с компактным носителем функций $f_i(x) \in C_0^\infty(R^2)$, причем, очевидно, $f_i(k) \in L_\rho^2$. Все выражение $F_N^h(f_1, \ldots, f_N)$ можно рассматривать как непрерывный полилинейный функционал, который по теореме о ядре единственным образом расширяется до непрерывного функционала $F_N^h(f^N)$ над пространством $C_0^\infty(R^{2N})$, причем $F_N^h(f^N) = (\tilde{f}^N, F^h)$,

$\tilde{f}^N = \prod_{i=1}^{N} f^N/2\pi\sqrt{k_i^2+m^2}$. Если рассмотреть далее множество конечных последовательностей $\tilde{f} = (1, \ldots, \tilde{f}^N, \ldots)$, то можно образовать новый векторно-значный функционал $F^h(f)$ по такому правилу:

$$F^h(f) = (\tilde{f}, F^h). \tag{12}$$

Используем определение (11) для построения соотношений (уравнений) резольвентного типа; в свою очередь, эти уравнения положим в основу асимптотического разложения при бесконечном объеме ($h = 1$) всего функционала (12). Справедлива следующая предварительная лемма.

Лемма 1.

$$\begin{gathered}(a^+(f_1)\ldots a^+(f_N)\Omega_0, F^h) = \\ = g(W_{f_1}(h)a^+(f_2)\ldots a^+(f_N)\Omega_0, F^h),\end{gathered} \tag{13}$$

где функции $f_i(x)$, $h(x) \in C_0^\infty(R^2)$ вещественны, а виковский полином

$$W_{f_1}(h) = [a^-(f_1), H(h)] = W_{f_1}^*(h).$$

Доказательство. Основная идея доказательства леммы состоит в том, чтобы непрерывно продолжать операцию коммутирования операторов $a^-(f_i)$ с ограниченными элементами оболочки $\{\exp[ia(f)]\} = \mathbb{C} \subset \mathfrak{M}$ до коммутирования с присоединенным элементом $\exp[gH(h)]$, $\operatorname{Re} g \leqslant 0$.

Зафиксируем произвольный элемент $f_1 \in L_\rho^2$; без ограничения общности можно предположить, что $\|f_1\| = 1$. Прежде всего заметим, что $[a^-(f_1), \exp[ia(f)]] = i\langle f_1, f\rangle \exp[ia(f)]$. Это утверждение легко следует из замкнутости операторов $a^-(f_1)$ и $a(f)$.

Представим далее множество $\mathbb{C}$ в виде $[\exp[i\alpha a(f_1)]; \exp[ia(g)]]$, где $g \perp f_1$ и произвольно. Легко проверить, что

$$\begin{gathered}\Big(\Omega_0, \sum_{i,j} c_i c_j' \exp[i\alpha_i a(f_1)]\exp[ia(g_j)]\Omega_0\Big) = \\ = \Big(\Omega_0, \sum_i c_i \exp[i\alpha_i a(f_1)]\Omega_0\Big)\Big(\Omega_0, \sum_j c_j' \exp[ia(g_j)]\Omega_0\Big).\end{gathered} \tag{14}$$

Пусть теперь $d\mu_1$ и Λ_1 — мера и спектр подалгебры $\mathfrak{M}_1$, порожденной оператором $a(f_1)$; $d\mu_1'$ и Λ_1' — мера и спектр подалгебры $\mathfrak{M}_1'$, порожденной операторами $a(g_j)$. Тогда из (14) следует, что меру $d\mu$ можно разложить (причем единственным образом; см., например, работу [31]) в тензорное произведение $d\mu_1 \otimes d\mu_1'$, заданное на $\Lambda_1 \times \Lambda_1'$; все гильбертово пространство $L^2(d\mu, \Lambda)$ представится так:

$$L^2(d\mu, \Lambda) = L^2(d\mu_1, \Lambda_1) \otimes L^2(d\mu_1', \Lambda_1'). \tag{15}$$

Спроектируем на $\Lambda_1 \times \Lambda_1'$ оператор $H(h)$. Для этого выберем ортонормированную систему $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, e_1 = f_1$ в L_ρ^2 и разложим ядро виковского полинома $H(h)$ в ряд по e_i:

$$H(h) = \sum c_{i_1, \ldots, i_4} : a(e_{i_1}) \ldots a(e_{i_4}) : =$$
$$= \sum_{k=0}^{4} : a^k(f_1) : P_k' = \sum_{k=0}^{4} a^k(f_1) P_k. \tag{16}$$

Отсюда следует, что $H(h)$ эквивалентен умножению на

$$\hbar = \sum_{k=0}^{4} a^k(\lambda) p_k(\lambda'). \tag{17}$$

Аналогичный подсчет показывает, что оператор $W_{f_1}(h)$ эквивалентен умножению на $w_{f_1} = \sum_{k=1}^{4} k a^{k-1}(\lambda) p_k(\lambda')$.

Введем теперь аппроксимацию функции $\hbar$:

$$m_{l, n} = \sum_{k=0}^{4} c_l^k(\lambda) p_{k, n}(\lambda'), \quad c_l \in \mathbb{C} \cap \mathfrak{M}_1; \tag{18}$$

$$p_{k, n}(\lambda') = \begin{cases} p_k(\lambda'), & \lambda' \in M_n \\ 0, & \lambda' \notin M_n \end{cases}, \quad M_n = \bigcap_k \{\lambda', |p_k(\lambda')| \leqslant n\}. \tag{19}$$

Потребуем, кроме того, чтобы для произвольного p и $f \in L^p(d\mu, \Lambda)$ (см. Приложение 2)

$$c_l^k f \xrightarrow{s} a^k f; \tag{20}$$
$$a = a(\lambda)$$
$$[a^-, c_l^k] f \xrightarrow{s} k a^{k-1} f. \tag{21}$$

Из определений (18)—(21) автоматически получаем, что в тензорном произведении (15)

$$m_{l, n} f \xrightarrow{s} m_n f \xrightarrow{s} h f; \tag{22}$$

$$[a^-, m_{l, n}] f \xrightarrow{s} [a^-, m_n] f \xrightarrow{s} w_{f_1} f. \tag{23}$$

Действительно, например,

$$\| m_n f - m_{l, n} f \| \leqslant \sum_{k=0}^{4} \| c_l^k p_{k, n} f - a^k p_{k, n} f \| =$$
$$= \sum_{k=0}^{4} \Big(\int d\mu_1(\lambda) \otimes d\mu_1'(\lambda') \, | c_l^k(\lambda) p_{k, n}(\lambda') -$$
$$- a^k(\lambda) p_{k, n}(\lambda') |^2 \, | f(\lambda, \lambda') |^2 \Big)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{4} \max_{\lambda' \in M_n} p_{k, n}(\lambda') \| c_l^k f - a^k f \| = n \sum_{k=0}^{4} \| c_l^k f - a^k f \| \to 0$$

из условия (20). Остальные из равенств (22) и (23) доказываются аналогично.

Далее, при любом фиксированном n и $\mathrm{Re}\, g \leqslant 0$ функции $\exp(gm_{l,n})$ равномерно по l ограничены на Λ, так как $m_{l,n}$ — полиномы четной степени по c_l, коэффициенты которых ограничены числом n, а коэффициент $p_{4,n}$ постоянен; следовательно,

$$\exp(gm_{l,n}) \xrightarrow{s} \exp(gm_n). \tag{24}$$

С другой стороны, из определения (19) следует, что функция $\exp(gm_n)$ на Λ стремится к $\exp(gh)$; поэтому

$$\exp(gm_n) \xrightarrow{s} \exp(gh). \tag{25}$$

Обратимся теперь непосредственно к доказательству формулировки леммы. Рассмотрим частный случай $N = 1$ [при этом в (20) и (21) следует положить $f = 1$]. Так как $m_{l,n}$ ограничены, то по непрерывности скалярного произведения мы получаем

$$(a^+(f_1)\,\Omega_0,\ \exp(gm_{l,n})\,\Omega_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^k}{k!}(\Omega_0,\ k\,[a^-(f_1),\ m_{l,n}]\,m_{l,n}^{k-1}\Omega_0) =$$
$$= g\,([a^-(f_1),\ m_{l,m}]\,\Omega_0,\ \exp(gm_{l,n})\,\Omega_0).$$

Учитывая, что сходимости (22) — (25) в $L^2(d\mu, \Lambda)$ эквивалентны сильной сходимости соответствующих операторов на векторе Ω_0 в $\mathscr{H}$, перейдем к пределу сначала по l, а затем по n:

$$(a^+(f_1)\,\Omega_0,\ \exp[gH(h)]\,\Omega_0) = g\,(W_{f_1}(h)\,\Omega_0,\ \exp[gH(h)]\,\Omega_0).$$

Доказательство прочих случаев аналогично. Следует лишь принять во внимание, что $a^+(f_2)\ \ldots\ a^+(f_N)\,\Omega_0$ эквивалентен некоторому $f \in L^p(d\mu, \Lambda)$. Лемма доказана.

Построим уравнения резольвентного типа. Преобразуем равенства (13) следующим образом:

$$(a^+(f_1)\ \ldots\ a^+(f_N)\,\Omega_0,\ F^h) =$$
$$= g\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(W_{f_i}(h)\,a^+(f_1)\ \ldots\ \hat{a}^+(f_i)\ \ldots\ a^+(f_N)\,\Omega_0,\ F^h) =$$
$$= g\frac{4}{N}\sum_{i=1}^{N}\Bigl(\int dk_1 \ldots dk_4 \frac{\tilde{h}(k_1 + \ldots + k_4)}{2\pi\sqrt{k_1^2+m^2}\ \ldots\ 2\pi\sqrt{k_4^2+m^2}} :a(k_1)\ \ldots$$
$$\ldots\ a(k_3):[a^-(-k_4),\ a^+(f_i)]\,a^+(f_1)\ \ldots\ \hat{a}^+(f_i)\ \ldots\ a^+(f_N)\,\Omega_0,\ F^h\Bigr) =$$
$$= g\Bigl(4\int dk_1 \ldots dk_4 \frac{\tilde{h}(k_1 + \ldots + k_4)}{2\pi\sqrt{k_1^2+m^2}\ \ldots\ 2\pi\sqrt{k_4^2+m^2}} :a(k_1)\ \ldots$$
$$\ldots\ a(k_3):a^-(-k_4)\frac{1}{N}a^+(f_1)\ \ldots\ a^+(f_N)\,\Omega_0,\ F^h\Bigr) \equiv$$
$$\equiv g\,(A^*(h)\,a^+(f_1)\ \ldots\ a^+(f_N)\,\Omega_0,\ F^h). \tag{26}$$

Определение оператора $A(h)$ ясно из предпоследнего равенства (26)

$$A(h) = 4\hat{N}^{-1} \int dk_1 \ldots dk_4 \frac{\tilde{h}(k_1 + \ldots + k_4)}{2\pi\sqrt{k_1^2+m^2} \ldots 2\pi\sqrt{k_4^2+m^2}} \times$$
$$\times a^+(k_1) : a(k_2) \ldots a(k_4) :,$$

где $\hat{N}$ — оператор числа частиц; его обратная степень определена, так как область значений $R(A(h)) \perp \Omega_0$. Расширим по непрерывности равенство (26) на все пространство $C_0^\infty(R^{2N})$:

$$(\tilde{f}^N, F^h) = g(A^*(h)\tilde{f}^N, F^h), \qquad N = 1, 2, \ldots \tag{27}$$

Сохраняя прежние обозначения, произведем замену $F^h \to F^h \ominus \Omega_0$ и введем вектор $F^{0h} = gA(h)\Omega_0$. Объединим равенства (27) по N: $(\tilde{f}, F^h) = g(A^*(h)\tilde{f}, F^h) + (\tilde{f}, F^{0h})$.

Произведя следующее очевидное преобразование: $A^*\tilde{f} \equiv \widetilde{(\tilde{A}^*f)}$, где $\tilde{A}^*$ — это просто преобразованный оператор A^*, и используя определение (12), окончательно получаем

$$F^h(f) = gF^h(\tilde{A}^*(h)f) + F^{0h}(f). \tag{28}$$

Уравнение (28) — уравнение резольвентного типа в слабой форме для функционала $F^h(f)$. Для полноты изложения напишем N-ю строку этого уравнения (в «сильной» форме) [22]:

$$F_N^h(k_1, \ldots, k_N) = \frac{4g}{N} \sum_{s=-1}^{2} \binom{3}{1+s} \sum_{1=i_1 \neq \ldots \neq i_{2+s}}^{N} \prod_{l=1}^{2-s} \int dk_l \times$$
$$\times \frac{\tilde{h}(p_{i_1} + \ldots + p_{i_{2+s}} - k_1 - \ldots - k_{2-s})}{2\pi\sqrt{p_{i_1}^2+m^2} \ldots 2\pi\sqrt{k_{2-s}^2+m^2}} \frac{\sqrt{(N-2s)!}}{\sqrt{N!}} \times$$
$$\times F_{N-2s}^h(k_1, \ldots, k_{2-s}, p_1, \hat{p}_{i_1}, \hat{p}_{i_{2+s}}, \ldots, p_N). \tag{29}$$

Перейдем теперь к вопросу об асимптотическом разложении функционала $F^h(f)$ при $h \to 1$. При этом будут использованы два факта: само существование резольвентного уравнения (28) и теорема Глимма — Спенсера — Нельсона [10] о существовании предела для функций Грина в бесконечном объеме.

Определим евклидовы швингеровские функции Грина в конечном объеме следующим образом:

$$G_N^h(f_1, \ldots, f_N) = (a(f_1) \ldots a(f_N)\Omega_0, F^h).$$

Раскроем по теореме Вика левую обкладку в этой формуле. Так как: $a(f_1) \ldots a(f_N) :\Omega_0 = a^+(f_1) \ldots a^+(f_N)\Omega_0$, то автоматически получаем представление функций Грина через коэффициент-

5—01256

ные функции (11):

$$G_N^h(f_1, \ldots, f_N) = \sum_{k=0}^{N/2} \Big(\sum_{[i_1, \ldots, i_{2k}]} \langle f_{i_1}, f_{i_2} \rangle \ldots \langle f_{i_{2k-1}}, f_{i_{2k}} \rangle F_{N-2k}^h \times$$
$$\times (f_1, \ldots, \hat{f}_{i_1}, \ldots, \hat{f}_{i_{2k}}, \ldots, f_N) \Big), \quad N = 2n; \tag{30}$$

при $N = 2n + 1$ первая сумма в (30) распространяется до $k = N - 1$. Заметим, что связь (30) обратима [32]:

$$F_N^h(f_1, \ldots, f_N) = \sum_{k=0}^{N/2} (-1)^k \Big(\sum_{[i_1, \ldots, i_{2k}]} \langle f_{i_1}, f_{i_2} \rangle \ldots \langle f_{i_{2k-1}}, f_{i_{2k}} \rangle \times$$
$$\times G_{N-2k}^h(f_1, \ldots, \hat{f}_{i_1}, \ldots, \hat{f}_{i_{2k}}, \ldots, f_N) \Big), \quad N = 2n,$$

и может быть расширена по непрерывности на все пространство $C_0^\infty(R^{2N})$. Таким образом, векторно-значные функционалы $C^h(f)$ и $F^h(f)$ с проекциями $G_N^h(f^N)$ и $F_N^h(f^N)$ соответственно связаны взаимоoднозначно, и существование предела $G(f)$ при $h \to 1$ влечет существование предела $F(f)$, и наоборот.

Приведем теперь формулировку предельной теоремы для функций Грина (применительно к нашим обозначениям). Пусть $\Delta(h_1, h_2) = \{x \mid h_1(x) \neq h_2(x)\}$ и $\mathrm{supp}_2 f$ — наименьшее замкнутое множество $K \subset R^2$, такое, что $K \times \ldots \times K \supset \mathrm{supp}\, f^N$. Положим $d = \mathrm{dist}\,(\Delta(h_1, h_2); \mathrm{supp}_2 f)$.

Теорема 1 [10]. Пусть g/m^2 достаточно мало. Тогда существует константа $m_1 > 0$, такая, что для любой $f^N \in C_0^\infty(R^{2N})$

$$|G_N^{h_1}(f^N) - G_N^{h_2}(f^N)| = 0\,(\exp[-m_1 d]).$$

Сходимость равномерна по h_1 и h_2.

Таким образом, как утверждает теорема, последовательность $G_N^h(f^N)$ слабо фундаментальна и, следовательно, слабо сходится при любом способе стремления $h \to 1$. Отсюда мгновенно следует существование предела $F_N(f)$ и, следовательно, всего функционала $F(f)$.

Рассмотрим далее n-ю итерацию уравнения (28)

$$F^h(f) = \sum_{k=0}^{n} g^k F^{0h}(\widetilde{A}^{*^k}(h) f) + g^{n+1} F^h(\widetilde{A}^{*^{n+1}}(h) f). \tag{31}$$

По определению F^{0h} имеем

$$F^{0h}(\widetilde{A}^{*^k}(h) f) = (A^{*^k}(h)\tilde{f}, F^{0h}) = (A^{*^{k+1}}(h)\tilde{f}, \Omega_0). \tag{32}$$

Выберем для простоты последовательность $\tilde{f}$, которая состоит из единственной компоненты $\tilde{f}^N$. В этом случае билинейная форма (31) представится в следующем виде:

$$(A^{*^{k+1}}(h)\tilde{f}, \Omega_0) = \int dk_1 \ldots dk_N w_N (k_1, \ldots, k_N) \tilde{f}(k_1, \ldots, k_N),$$

где ядро w_N — совокупность всех возможных графов Фейнмана с N внешними линиями без вакуумных петель [в $A^*(h)$ всегда имеется хотя бы один оператор уничтожения $a^-(k)$]. В пределе $h \to 1$ ядро w_N принимает вид

$$w_N = \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_p=N,\\ 1\leqslant p<N.}} \delta(k_{i_1}+\ldots+k_{i_{n_1}}) \ldots \delta(k_{j_1}+\ldots+k_{j_{n_p}}) \times$$
$$\times w_{n_1}(k_{i_1}, \ldots, k_{i_{n_1}}) \ldots w_{n_k}(k_{j_1}, \ldots, k_{j_{n_p}}),$$

причем регулярные коэффициенты w_n квадратично интегрируемы на гиперплоскостях $\Omega_n = (k_{i_1} + \ldots + k_{i_n} \equiv 0)$ (за проверкой этого факта мы отсылаем в разд. 3). Теперь очевидно, что

$$(A^{*^{k+1}}(1)\tilde{f}^N, \Omega_0) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_p=N\\ 1\leqslant p<N}} \left(\int\limits_{\Omega_{n_1}\cap\ldots\cap\Omega_{n_k}} dk_1 \ldots dk_N \,|\, w_{n_1}(k_{i_1}, \ldots, k_{i_{n_1}})^2 | \ldots \right.$$
$$\left. \ldots | w_{n_k}(k_{j_1}, \ldots, k_{j_{n_k}}) |^2 \right)^{1/2} \times$$
$$\times \left(\int\limits_{\Omega_{n_1}\cap\ldots\cap\Omega_{n_k}} dk_1 \ldots dk_N \frac{1}{(2\pi)^2 (k_1^2+m^2)} \ldots \frac{1}{2\pi (k_N^2+m^2)} \times \right.$$
$$\left. \times | f^N (k, \ldots, k_N) |^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

так как f^N — преобразование фурье-функции из $C_0^\infty(R^{2N})$.

Так как равенство (31) выполняется равномерно по h, возможен переход к пределу в каждом его члене:

$$F(f) = \sum_{k=0}^{n} g^k F^0 (A^{*^k} f) + R_n(g; f), \quad A^* = A^*(1). \tag{33}$$

Теперь воспользуемся слабой бесконечной дифференцируемостью функций Грина G_N при бесконечном объеме [33]. С помощью формулы (30) это свойство мгновенно распространяется на функционалы $F_N(f^N)$ и далее на весь функционал $F(f) \equiv F(g; f)$. Поэтому, опираясь на единственность тейлоровского разложения для бесконечно дифференцируемых функций, можно утверждать, что ряд (33) является слабым асимптотическим рядом Тейлора для функционала $F(g; f)$, причем

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k}{dg^k} F(g; f)|_{g=+0} = F^0 (A^{*^k} f) = (\tilde{f}, A^{k+1}\Omega_0). \tag{34}$$

Остаток такого ряда контролируется формулой Лагранжа

$$|R_n(g;\ f)| \leqslant \frac{g^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{g \in [0,\ g_0]} \left| \frac{d^{n+1}}{dg^{n+1}} F(g;\ f) \right|,$$

где $[0,\ g_0]$ — интервал бесконечной дифференцируемости.

Итак справедлива теорема:

Теорема 2. Пусть f — конечная последовательность $\{f^N\}_1^{n_0}$, $f^N = \bigotimes_{i=1}^{N} f_i$ и $F^N(f)$ — функционал, определенный в (12). Тогда предельный функционал $F(f) \equiv F(g;\ f)$ существует единственный при малых g/m^2 и разлагается в слабый асимптотический ряд Тейлора:

$$F(g;\ f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^k}{k!} F^{(k)}(g;\ f)|_0 + R_n(g;\ f),$$

где

$$F^{(k)}(g;\ f)|_0 = k!\,(\widetilde{f},\ A^{k+1}\Omega_0).$$

Таким образом, настоящая теорема утверждает, что коэффициенты разложения по степеням константы связи g функционалов $F_N(g;\ f^N)$, а благодаря формуле (30) и функционалов $G_N(g;\ f^N)$ суть диаграммы Фейнмана с N внешними линиями, сглаженные с помощью бесконечно дифференцируемых функций f^N и лишенные вакуумных петель.

В заключение отметим, что построить предельный функционал (12) можно было бы независимо от самого факта существования предельных функций Грина. Действительно, при любом $g < 0$ вектора $F^h = \Omega_0 \exp[gH(h)]/F_0^h$ определяют последовательность мер $dF^h(\lambda) = \dfrac{\exp(gh(\lambda))}{\int \exp(gh(\lambda) d\mu(\lambda))} d\mu(\lambda)$ на банаховом пространстве $C^0(\Lambda)$ с нормой $\|m\| = \sup_{\Lambda} |m(\lambda)|$. Так как $\|F^h\|_{C^0} = 1$, то общая теория (см., например, работу [34]) утверждает, что из такой последовательности можно извлечь слабосходящуюся. С другой стороны, предел первых n членов разложения (33) не зависит от способа стремления объема к бесконечности, т. е. расширения носителя функции $h(x)$, и, следовательно, вид разложения не зависит от выбора подпоследовательности F^{h_i}.

3. ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫХ ФУНКЦИЙ h^T

Рассмотрим линейное пространство трансляционно-инвариантных функций $f_n(x_1,\ \ldots,\ x_n) = f_n(x_1 + a,\ \ldots,\ x_n + a)$, $x_i,\ a \in R^2$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Функции f_n зависят от $(n-1)$ независимых разностных переменных $\xi_1 = x_{i_1} - x_{i_n},\ \ldots,\ \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}} - x_{i_n}$.

Введем скалярное произведение, задаваемое билинейной формой

$$(f_n, g_n) = \int d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1} \overline{f_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})}\, g_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}), \quad (35)$$

и соответствующее гильбертово пространство $h_n = \otimes (L^2(R^2))^{n-1}$ с нормой $\| f_n \| = (f_n, f_n)^{1/2}$, которая определяется скалярным произведением (35). На классе рассматриваемых функций скалярное произведение (35) можно задать эквивалентным образом с помощью формулы

$$(f_n, g_n) = \lim_{V \to R^2} \frac{1}{|V|} \int\limits_{\otimes V^n} dx_1 \ldots dx_n \overline{f_n(x_1, \ldots, x_n)}\, g_n(x_1, \ldots, x_n), \quad (36)$$

где V — компакт в R^2; $|V| = \mathrm{mes}\, V$.

Определим скалярное произведение (35) унитарно-эквивалентным способом. С этой целью рассмотрим фурье-преобразование функций $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ в смысле обобщенных функций:

$$\tilde{f}_n(p_1, \ldots, p_n) = (2\pi)^2 \delta(p_1 + \ldots + p_n) f'_n(p_1, \ldots, p_{n-1}),$$

где $f'_n(p_1, \ldots, p_{n-1})$ — фурье-преобразование от $f_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. Вместо функций $f'_n(p_1, \ldots, p_{n-1})$, зависящих от $(n-1)$ переменных, будем рассматривать функции n переменных $f_n(p_1, \ldots, p_n)$, сосредоточенные на гиперповерхности $\Omega_n = \{p_i \mid p_1 + \ldots + p_n = 0\}$ и задаваемые формулами:

$$\left.\begin{aligned} &(2\pi)^2 f'_n(p_1, \ldots, p_{n-1}) = f_n(p_1, \ldots, p_n)\big|_{p_1 + \ldots + p_n = 0}; \\ &\tilde{f}_n(p_1, \ldots, p_n) = \delta(p_1 + \ldots + p_n) f_n(p_1, \ldots, p_n). \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Тогда в импульсном пространстве скалярное произведение (35) будет задаваться следующим образом:

$$(f_n, g_n) = (\tilde{f}_n, \tilde{g}_n) = \int dp_1 \ldots dp_{n-1} \overline{f'_n(p_1, \ldots, p_{n-1})}\, g'_n(p_1, \ldots, p_{n-1}) =$$

$$= \int dp_1 \ldots dp_n \delta(p_1 + \ldots + p_n) \overline{f_n(p_1, \ldots, p_n)}\, g_n(p_1, \ldots, p_n) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_n} dp_1 \ldots dp_n \overline{f_n(p_1, \ldots, p_n)}\, g_n(p_1, \ldots, p_n). \quad (38)$$

Следуя работе [23], рассмотрим обобщение пространства h_n. Пусть σ_k — разбиения множества $\{N\} = \{x_1, \ldots, x_N\}$ (или эквивалентного множества $p_1, \ldots, p_N$) на k подмножеств $\{n_1\} = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_1}}\}, \ldots, \{n_k\} = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_k}}\}$, $n_1 + \ldots + n_k = N$. Множества $\{n_1\} \ldots \{n_k\}$ будут рассматриваться как связанные компоненты разбиения σ_k множества $\{N\}$. Графически эту ситуацию можно изобразить следующим образом:

$$\sigma_k : N = n_1 \ldots n_k.$$

Сопоставим теперь каждому разбиению σ_k множества $\{N\}$ тензорное произведение гильбертовых пространств:

$$\sigma_k\{N\} \to h^T_{N,\sigma_k} = \bigotimes_{i=1}^{k} h_{n_i}.$$

Элемент пространства h^T_{N,σ_k} — функция вида

$$f_{N,\sigma_k}(x_1, \ldots, x_N) = f_{N;\, n_1, \ldots, n_k}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_1}}; \ldots; x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_k}}).$$

Функции $f_{N;\, n_1, \ldots, n_k}$ являются ит рансляционно-инвариантными функциями по каждой группе переменных $\{n_1\}, \ldots, \{n_k\}$ отдельно. Скалярное произведение двух элементов $f_{N,\sigma_k}, g_{N,\sigma_k} \in h'_{N,\sigma_k}$ имеет вид

$$(f_{N,\sigma_k}, g_{N,\sigma_k}) = \int d\xi_{i_1} \ldots d\xi_{i_{n_1-1}} \ldots d\xi_{j_1} \ldots d\xi_{j_{n_k-1}} \times$$
$$\times \overline{f_{N,n_1,\ldots,n_k}(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_{n_1-1}}; \ldots; \xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_{n_k-1}})} \times$$
$$\times g_{N;\,n_1,\ldots,n_k}(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_{n_1-1}}; \ldots; \xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_{n_k-1}}) =$$
$$= \lim_{V\to R^2} \frac{1}{|V|^k} \int\limits_{\otimes V^n} dx_1 \ldots dx_N \overline{f_{N,\sigma_k}(x_1, \ldots, x_N)}\, g_{N,\sigma_k}(x_1, \ldots, x_N). \quad (39)$$

В импульсном пространстве функции из $h^T_{N,N\,\sigma_k}$ являются квадратично интегрируемыми на пересечении гиперповерхностей $\Omega_{n_1} \cap \cap\, \Omega_{n_2} \ldots \cap \Omega_{n_k}$.

Покажем теперь, что функции f_{N,σ_k} и g_{N,σ'_k}, соответствующие двум различным разбиениям множества $\{N\}$ на k подмножеств, являются линейно независимыми. Пусть $\tilde{f}_{N,\sigma_k}$ и $\tilde{g}_{N,\sigma'_k}$ — фурье-преобразования от f_{N,σ_k} и g_{N,σ'_k}, а $\tilde{f}_{N,\sigma'_k} + \tilde{g}_{N,\sigma'_k} = 0$. Тогда очевидно, что вне пересечения носителей обеих функций регулярные коэффициенты равны нулю, т. е. $f_{N,\sigma_k}(p_1, \ldots, p_N) = = g_{N,\sigma_k}(p_1, \ldots, p_N) = 0$. С другой стороны, пересечение является поверхностью низшей размерности и, следовательно, имеет меру нуль по отношению к носителям обоих членов, поэтому можно положить $f_{N,\sigma_k}(\ldots) = g_{N,\sigma'_k}(\ldots) = 0$.

Более того, оказывается, что если $f_{N,\sigma_k} \in h^T_{N,\sigma_k}$ и $g_{N,\sigma'_k} \in \in h^T_{N,\sigma'_k}$, тогда они являются ортогональными в смысле скалярного произведения (39). Действительно, пусть f_{N,σ_k} и g_{N,σ'_k} имеют компактные носители по своим разностным переменным, а разбиения $\sigma_k(N) = \{n_1\} \ldots \{n_k\}$ и $\sigma'_k\{N\}\,\{n'_1\}, \ldots, \{n'_k\}$ различаются всеми своими связанными компонентами. Тогда очевидно, что функция $\bar{f}_{N,\sigma_k} \cdot g_{N,\sigma'_k} = e_{N,\sigma_1}$ соответствует тождественному разбиению, т. е. зависит от $(N - 1)$ независимых переменных, поэтому получим

$$(f_{N,\sigma_k}, g_{N,\sigma'_k}) = \lim_{V\to R^2} \frac{1}{|V|^k} \int dx_1 \ldots$$

$$\ldots dx_N \overline{f_{N,\sigma_k}(x_1, \ldots, x_N)}\, g_{N,\sigma'_k}(x_1, \ldots, x_N) =$$

$$= \lim_{V\to R^2} \frac{1}{|V|^{k-1}} \int\limits_{\otimes V^{N-1}} d\xi_1 \ldots d\xi_{N-1} e_{N,\sigma_1}(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}) = 0. \quad (40)$$

В случае, когда функции f_{N,σ_k} и g_{N,σ'_k} имеют $p < k - 1$ одинаковых связанных компонент, доказательство (40) аналогично.

Рассмотрим теперь линейную оболочку $[f_{N,\sigma_k}]$ для фиксированного k по всем σ_k. Ортогональность функций, которые отвечают различным разбиениям, позволяет нам ввести в этом множестве топологию прямой суммы, используя скалярные произведения (39). Гильбертово пространство $h^T_{N,k}$, образованное в результате этого, содержит пространства h^T_{N,σ_k} как ортогональные подпространства: $h^T_{N,k} = \bigotimes\limits_{\sigma_k} h^T_{N,\sigma_k}$. Заметим далее, что функции f_{N,σ_k} и g_{N,σ'_k}, принадлежащие к разбиениям множества $\{N\}$ на различное число подмножеств k и k', зависят от различного числа переменных ξ и являются линейно независимыми. Поэтому естественно построить гильбертово пространство h^T_N как ортогональную сумму подпространств $h^T_{N,k}$, т. е.

$$h^T_N = \bigoplus_{k=1}^{N} h^T_{N,k} = \bigoplus_{k=1}^{N} (\bigoplus_{\sigma_k} h^T_{N,\sigma_k}) = \bigoplus_{\sigma} h^T_{N,\sigma}.$$

Наконец, следуя конструкции фоковского пространства, объединим все N-частичные подпространства h^T_N в ортогональную сумму $h^T = \bigotimes\limits_{N=1}^{\infty} h^T_N$. Элементами пространства h^T являются последовательности $f = \{f_N\}_{N=1}^{\infty}$, $f_N \in h^T_N$; каждый элемент такой последовательности f_N — линейная комбинация функций $f_{N,\sigma}$, которые соответствуют различным разбиениям множества $\{N\}$. Скалярное произведение в h^T задается формулой

$$(f, g) = \sum_{N=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{N} (\sum_{\sigma_k} (f_{N,\sigma_k}, g_{N,\sigma_k}))). \quad (41)$$

4. ПРОИЗВОДЯЩИЙ ОПЕРАТОР УРАВНЕНИЙ РЕЗОЛЬВЕНТНОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВЕ h^T

Приступим к исследованию уравнения (29) при бесконечном объеме. Прежде всего сделаем в (29) замену, которая сводится к другой нормировке коэффициентных функций:

$$3^{-N/4}\sqrt{N}F_N \to F_N,\quad 3^{-1}\sqrt{4}F^{(0)} \to F^{(0)}. \quad (42)$$

Для новой последовательности $F=\{F_N\}_{N=1}^{\infty}$ уравнение (29) сохранит свой прежний резольвентный вид

$$F=4\sqrt{3}gAF+F^{(0)}, \tag{43}$$

где $A=\sum_{s=-1}^{2}3^{\frac{1}{2}\delta_{0s}-\frac{3}{2}\delta_{2s}}W_{2+s,\,2-s}$, δ_{ij} — символ Кронекера;

$$(W_{2+s,\,2-s}F)_N(p_1,\,\ldots,\,p_N)=$$
$$=\frac{1}{N}\frac{\sqrt{(N-2s-1)!}}{\sqrt{(N-1)!}}\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_{2+s}}\prod_{l=1}^{2-s}\int dk_l\times$$
$$\times\frac{(2\pi)^2\delta(p_{i_1}+\ldots+p_{i_{2+s}}-k_1-\ldots-k_{2-s})}{2\pi\sqrt{p_{i_1}^2+m^2}\ldots2\pi\sqrt{k_{2-s}^2+m^2}}\times$$
$$\times F_{N-2s}(k_1,\,\ldots,\,k_{2-s},\,p_1,\,\ldots,\,\hat{p}_{i_1},\,\ldots,\,\hat{p}_{i_{2+s}},\,\ldots,\,p_N). \tag{44}$$

Рассмотрим уравнение (43) в пространстве h^T. В этом разделе покажем, что формальные отображения $W_{2+s,\,2-s}$, а следовательно, и A можно интерпретировать как операторы с плотной областью $D(A)\subset h^T$. Далее, так как $F^{(0)}\in h^T$, то уравнение (43) может рассматриваться как абстрактное уравнение резольвентного типа в h^T.

Опишем здесь действие оператора A в h^T. Рассмотрим последовательность $f=\{f_N\}_{N=1}^{N_0}\in h^T$ и подействуем на нее матрицей A. Тогда s — е слагаемое будет иметь вид

$$(W_{2+s,\,2-s}f)_N(p_1,\,\ldots,\,p_N)=$$
$$=\frac{1}{N}\frac{\sqrt{(N-2s-1)!}}{\sqrt{(N-1)!}}\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_{2+s}}^{N}\prod_{l=1}^{2-s}\int dk_l\times$$
$$\times\frac{(2\pi)^2\delta(p_{i_1}+\ldots+p_{i_{2+s}}-k_1-\ldots-k_{2-s})}{2\pi\sqrt{p_{i_1}^2+m^2}\ldots2\pi\sqrt{k_{2-s}^2+m^2}}\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{N-2s}\Big(\sum_{\sigma_k}\delta(p'_{i'_1}+\ldots+p'_{i'_{n_1}})\ldots\delta(p'_{j'_1}+\ldots+p'_{j'_{n_k}})\times$$
$$\times f_{N-2s;\,n_1,\ldots,n_k}(p'_{i'_1},\,\ldots,\,p'_{i'_{n_1}};\,\ldots;\,p'_{j'_1},\,\ldots,\,p'_{j'_{n_k}})\Big)\times$$
$$\times\left|\begin{array}{l}p'_1=k_1,\,\ldots,\,p'_{2-s}=k_{2-s},\\ p'_{2-s+1}=p_1,\,\ldots,\,p'_{N-2s}=p_N,\\ \hat{p}_{i_1},\,\ldots,\,\hat{p}_{i_{2+s}}.\end{array}\right. \tag{45}$$

С помощью интегрирования снимем соответствующие δ-функции в (45), тогда слагаемое $(W_{2+s,\,2-s}f)_N$ будет иметь алгебраическую структуру элементов пространства h_N^T. Если коэффициенты при вновь образовавшихся δ-функциях будут иметь свойства интегрируемости (38), то $(W_{2+s,\,2-s}f)_N$, а значит, и $(Af)_N \in h_N^T$. Таким образом, оператор A будет определен в h^T по крайней мере на множестве конечных последовательностей; более точное утверждение будет дано в теореме 4.1.

Рассмотрим алгебраическую структуру оператора A. Пусть $W_{2+s,\,2-s}(N) = W_{2+s,\,2-s} \upharpoonright h_{N-2s}^T$, т. е. $W_{2+s,\,2-s}(N)\colon h_{N-2s}^T \to h_N^T$ и, следовательно,

$$W_{2+s,\,2-s} = \sum_N W_{2+s,\,2-s}(N). \tag{46}$$

Зафиксируем в каждом члене (44) первые индексы, по которым производится суммирование. Для члена с $s=2$ положим $i_1 = 1, \ldots, i_4 = 4$; для члена с $s=1$ соответственно $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $i_3 = 3$ и т. д. Ту часть оператора $W_{2+s,\,2-s}(N)$, которая отвечает зафиксированным индексам, обозначим $w_{2+s,\,2-s}$. Тогда очевидно, что

$$W_{2+s,\,2-s}(N) = \underset{(s)}{\mathrm{symm}}\, w_{2+s,\,2-s}(N). \tag{47}$$

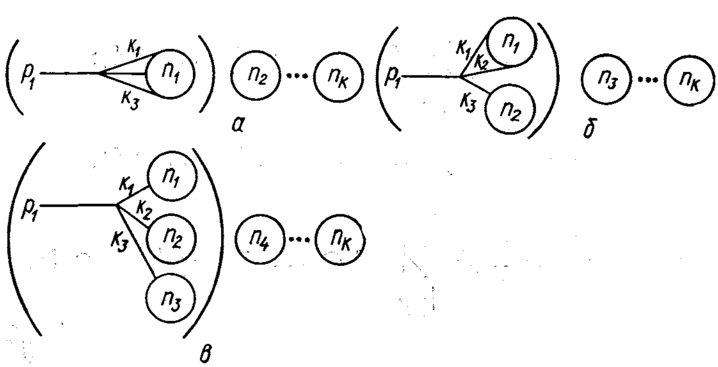
Определим теперь оператор $w_{2+s,\,2-s}(N, \sigma) = w_{2+s,\,2-s}(N) \upharpoonright h_{N-2s,\,\sigma}^T$ и установим его явный вид в зависимости от разбиения σ.

$s = -1$, оператор $w_{1,\,3}(N)$.

а) все три переменные интегрирования k_1, k_2, k_3 в (44) принадлежат к одной связанной компоненте — класс разбиений $\sigma_{1,\,3}^{3}$;

б) две переменные из k_1, k_2, k_3 лежат в одной связанной компоненте, а третья — в другой — класс разбиений $\sigma_{1,\,3}^{1,2}$;

в) все три компоненты k_1, k_2, k_3 лежат в различных связанных компонентах — класс разбиений $\sigma_{1,\,3}^{1,1,1}$. Графически эта ситуация выглядит следующим образом:



(48)

Пусть $\omega_{1,3}^{3}$, $\omega_{1,3}^{1,2}$ и $\omega_{1,3}^{1,1,1}$ интегральные операторы, действующие в круглых скобках, т. е.

$$\left.\begin{aligned}
&\text{а)}\quad \omega_{1,3}^{3}\colon h_{n_1}\to h_{n_1-2};\\
&\text{б)}\quad \omega_{1,3}^{1,2}\colon h_{n_1}\oplus h_{n_2}\to h_{n_1+n_2-2};\\
&\text{в)}\quad \omega_{1,3}^{1,1,1}\colon h_{n_1}\oplus h_{n_2}\oplus h_{n_3}\to h_{n_1+n_2+n_3-2}.
\end{aligned}\right\}\tag{49}$$

Они задаются следующими выражениями:

$$(\widetilde{\omega_{1,3}^{3}\tilde{f}_{n_1}})_{n_1-2}(p_1,\ \ldots,\ p_{n_1-2})=\int dk_1\,dk_2\,dk_3\times$$
$$\times\frac{(2\pi)^2\,\delta(p_1-k_1-k_2-k_3)}{(2\pi)\sqrt{p_1^2+m^2}\ldots(2\pi)\sqrt{k_3^2+m^2}}\tilde{f}_{n_1}(k,\ k_2,\ k_3,\ p_2,\ \ldots,\ p_{n_1-2});\tag{50}$$

$$(\widetilde{\omega_{1,3}^{1,2}f_{n_1,n_2}})_{n_1+n_2-2}(p_1,\ \ldots,\ p_{n_1+n_2-2})=$$
$$=\int dk_1\,dk_2\,dk_3\,\frac{(2\pi)^2\,\delta(p_1-k_1-k_2-k_3)}{(2\pi)\sqrt{p_1^2+m^2}\ldots(2\pi)\sqrt{k_3^2+m^2}}\times$$
$$\times\tilde{f}_{n_1,n_2}(k_1,\ k_2,\ p_2,\ \ldots,\ p_{n_1-1},\ k_3,\ p_{n_1},\ \ldots,\ p_{n_1+n_2-2});\tag{51}$$

$$(\omega_{1,3}^{1,1,1}f_{n_1,n_2,n_3})_{n_1+n_2+n_3-2}(p_1,\ \ldots,\ p_{n_1+n_2+n_3-2})=$$
$$=\int dk_1dk_2dk_3\,\frac{(2\pi)^2\,\delta(p_1-k_1-k_2-k_3)}{(2\pi)\sqrt{p_1^2+m^2}\ldots(2\pi)\sqrt{k_3^2+m^2}}\times$$
$$\times\tilde{f}_{n_1,n_2,n_3}(k_1\ p_2,\ \ldots,\ p_n;\ k_2,\ p_{n_1+1},\ \ldots$$
$$\ldots,\ p_{n_1+n_2-1};\ k_3,\ p_{n_1+n_2},\ \ldots,\ p_{n_1+n_2+n_3-2}).\tag{52}$$

Очевидно, что $w_{1,3}(N)=w_{1,3}(N,\ \sigma_{1,3}^{3})+w_{1,3}(N,\ \sigma_{1,3}^{1,2})+$ $+w_{1,3}(N,\ \sigma_{1,3}^{1,1,1})$,

где

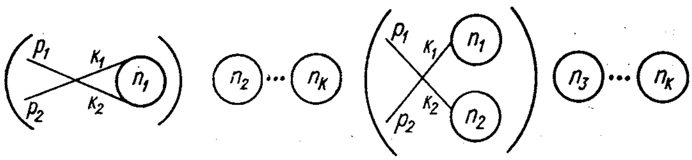
$$\left.\begin{aligned}
&w_{1,3}(N,\ \sigma_{1,3}^{3})=\frac{1}{N}\frac{\sqrt{(N+1)!}}{\sqrt{(N-1)!}}\sum_{\sigma_{1,3}^{3}}(1\otimes\ldots\otimes\omega_{1,3}^{3}\ldots\otimes 1);\\
&w_{1,3}(N,\ \sigma_{1,3}^{1,2})=\frac{1}{N}\frac{\sqrt{(N+1)!}}{\sqrt{(N-1)!}}\sum_{\sigma_{1,3}^{1,2}}(1\otimes\ldots\otimes\omega_{1,3}^{1,2}\ldots\otimes 1);\\
&w_{1,3}(N,\ \sigma_{1,3}^{1,1,1})=\frac{1}{N}\frac{\sqrt{(N+1)!}}{\sqrt{(N-1)!}}\sum_{\sigma_{1,3}^{1,1,1}}(1\otimes\ldots\otimes\omega_{1,3}^{1,1,1}\ldots\otimes 1).
\end{aligned}\right\}\tag{53}$$

На остальных разбиениях операторы $w_{1,3}$ доопределяем нулем.

$s = 0$, оператор $w_{2,2}(N)$. Имеются следующие возможности:

а) обе переменные интегрирования k_1 и k_2 принадлежат к одной компоненте — класс разбиений $\sigma^2_{2,2}$;

б) переменные k_1 и k_2 принадлежат к различным разбиениям — класс разбиений $\sigma^{1,1}_{2,2}$. Графически это выглядит так:



а *б* (54)

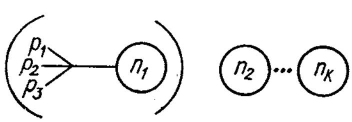
Интегральные операторы, действующие в круглых скобках, $\omega^2_{2,2}$ и $\omega^{1,1}_{2,2}$ определяются как

$$\begin{aligned} &\text{а)}\quad \omega^2_{2,2}\colon h_{n_1} \to h_{n_1};\\ &\text{б)}\quad \omega^{1,1}_{2,2}\colon h_{n_1} \otimes h_{n_2} \to h_{n_1+n_2} \end{aligned} \tag{55}$$

и могут быть заданы аналитически по аналогии с операторами $\omega_{1,3}$. Окончательно имеем для оператора $w_{2,2}(N)$:

$$\left.\begin{aligned} &w_{2,2}(N) = w_{2,2}(N, \sigma^2_{2,2}) + w_{2,2}(N, \sigma^{1,1}_{2,2});\\ &w_{2,2}(N, \sigma^2_{2,2}) = \frac{1}{N} \sum_{\sigma^2_{2,2}} (1 \otimes \ldots \otimes \omega^2_{2,2} \ldots \otimes 1);\\ &w_{2,2}(N, \sigma^{1,1}_{2,2}) = \frac{1}{N} \sum_{\sigma^{1,1}_{2,2}} (1 \otimes \ldots \otimes \omega^{1,1}_{2,2} \ldots \otimes 1). \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

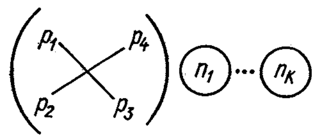
$s = 1$, оператор $w_{3,1}(N)$. Переменная интегрирования k_1 лежит в одной связанной компоненте — класс разбиений $\sigma^1_{3,1} = \sigma$, или графически



Если ввести $\omega_{3,1}\colon h_{n_1} \to h_{n_1+2}$, тогда оператор $w_{3,1}(N)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} w_{3,1}(N) &= w_{3,1}(N, \sigma) =\\ &= \frac{1}{N} \frac{\sqrt{(N-3)!}}{\sqrt{(N-1)!}} \sum_{\sigma} (1 \otimes \ldots \otimes \omega_{3,1} \ldots \otimes 1). \end{aligned} \tag{57}$$

$s=2$, оператор w_{40} (N). В этом случае интегрирование отсутствует и имеет место единственный случай



(58)

Оператор $\omega_{4,0}$, который отвечает графику в скобках, задается как отображение $\omega_{4,0}$: $h_{n_1}\to h_4\otimes h_{n_1}$ согласно формуле

$$(\widetilde{\omega_{4,0}\tilde f_{n_1}})_{n_1;4}(p_1,\ldots,p_4;\ p_5,\ldots,p_{n_1+4})=$$

$$=\frac{2(\pi)^2\,\delta(p_1+\ldots+p_4)}{2\pi\sqrt{p_1^2+m^2}\ldots2\pi\sqrt{p_4^2+m^2}}\tilde f_{n_1}(p_5,\ldots,p_{n+4}). \tag{59}$$

Тогда

$$w_{4,0}(N)=\frac{1}{N}\frac{\sqrt{(N-5)!}}{\sqrt{(N-1)!}}\omega_{4,0}. \tag{60}$$

Объединяя полученные результаты, приходим к следующему выражению для оператора:

$$A=\sum_{N}\underset{(s=-1)}{\mathrm{symm}}\,(w_{1,3}(N,\ \sigma^3_{1,3})+w_{1,3}(N,\ \sigma^{1,2}_{1,3})+w_{1,3}(N,\ \sigma^{1,1,1}_{1,3}))+$$

$$+3^{1/2}\sum_{N}\underset{(s=0)}{\mathrm{symm}}\,(w_{2,2}(N,\ \sigma^2_{2,2})+w_{2,2}(N,\ \sigma^{1,1}_{2,2}))+$$

$$+\sum_{N}\underset{(s=1)}{\mathrm{symm}}\,w_{3,1}(N)+3^{-3/2}\sum_{N}\underset{s=2}{\mathrm{symm}}\,w_{4,0}(N), \tag{61}$$

которое определяет алгебраическую структуру оператора A в пространстве h^T. Операторы w выражаются через операторы ω по формулам (53), (56), (57) и (60).

Найдем область определения оператора A.

Лемма 2. Операторы $\omega_{2+s,\ 2-s}$ ограничены.

Доказательство проведем для трех типичных случаев: 1) $\omega^3_{1,3}$; 2) $\omega^{1,2}_{1,3}$; 3) $\omega_{4,0}$.

1. Воспользуемся формулой (37), которая связывает функции $\tilde f_n(p_1,\ldots,p_n)$ и $f_n(p_1,\ldots,p_n)$, и перепишем выражение (50)

в таком виде:

$$(\omega^3_{1,3}\tilde{f}_{n_1})_{n_1-2}(p_1, \ldots, p_{n_1-2}) =$$
$$= \int dk_1\, dk_2\, dk_3 \frac{(2\pi)^2\,\delta(p_1-k_1-k_2-k_3)}{2\pi\sqrt{p_1^2+m^2}\ldots 2\pi\sqrt{k_3^2+m^2}}(2\pi)\,\delta(k_1+\ldots+p_{n_1-2})\times$$
$$\times f_{n_1}(k_1, k_2, k_3, p_2, \ldots, p_{n_1-2}) = 2\pi\delta(p_1+\ldots+p_{n_1-2})\times$$
$$\times\int dk_1\, dk_2 \frac{(2\pi)^{-2}}{\sqrt{p_1^2+m^2}\ldots\sqrt{(p_1-k_1-k_2)^2+m^2}}\times$$
$$\times f_{n_1}(k_1, k_2, p_1-k_2-k_3, p_2, \ldots, p_{n_1-2}).$$

Согласно определению нормы в пространстве h_{n_1-2} находим

$$\|\widetilde{(\omega_{1,3}\tilde{f}_{n_1})_{n_1-2}}\|^2 = \int dp_1\ldots dp_{n_1-2}\Big|\int dk_1\, dk_2\times$$
$$\times\frac{(2\pi)^{-2}}{\sqrt{p_1^2+m^2}\ldots\sqrt{(p_1-k_1-k_2)^2+m^2}}\times$$
$$\times f_{n_1}(k_1, k_2, p_1-k_1-k_2, p_2, \ldots, p_{n_1-2})\Big|^2. \tag{62}$$

Применяя неравенство Шварца в (62) по переменным k_1 и k_2, получаем

$$\|\widetilde{(\omega^3_{1,3}\tilde{f}_{n_1})_{n_1-2}}\|^2 \leqslant \int\limits_{\Omega_{n_1-2}} dp_1\ldots dp_{n_1-2}\times$$
$$\times\left(\int dk_1\, dk_2 \frac{(2\pi)^{-4}}{(p_1^2+m^2)\ldots[(p_1-k_1-k_2)^2+m^2]}\right)\times$$
$$\times\int dk_1'\, dk_2'\,|f_{n_1}(k_1', k_2', p_1-k_1'-k_2', p_2, \ldots, p_{n_1-2})|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \max_{p_1}\left(\int dk_1\, dk_2 \frac{(2\pi)^{-4}}{(p_1^2+m^2)\ldots[(p_1-k_1-k_2)^2+m^2]}\right)\times$$
$$\times\int\limits_{\Omega_{n_1-2}} dp_1\ldots dp_{n_1-2}\int dk_1'\, dk_2'\times$$
$$\times|f_{n_1}(k_1', k_2', p_1-k_1'-k_2', p_2, \ldots, p_{n_1-2})|^2. \tag{63}$$

Сделаем в (63) замену переменных $k_1' = q_1$, $k_2' = q_2$, $p_1 - k_1' - k_2' = q_3$, $p_2 = q_4$, ..., $p_{n_1-2} = q_{n_1}$. В этом случае область интегрирования Ω_{n_1-2} перейдет в Ω_{n_1}. Учитывая то, что max достигается в точке $p_1 = 0$, окончательно получаем

$$\|(\omega^3_{1,3}\tilde{f}_{n_1})_{n_1-2}\| \leqslant c^3_{1,3}\|\tilde{f}_{n_1}\|, \tag{64}$$

где

$$c^3_{1,3} = \frac{(2\pi)^{-2}}{m}\left(\int dk_1\, dk_2 \frac{1}{(k_1^2+m^2)(k_2^2+m^2)[(k_1+k_2)^2+m^2]}\right)^{1/2}.$$

2. По аналогии с предыдущим пунктом выделим δ-функцию из-под знака интеграла в (51) и, использовав определение нормы в $h_{n_1+n_2-2}$, получим

$$\|(\omega^{1,\,2}_{1,\,3}\tilde{f}_{n_1,\,n_2})_{n_1+n_2-2}\|^2 = \int\limits_{\Omega_{n_1+n_2-2}} dp \ldots dp_{n_1+n_2-2} \left| \int dk_1 \times \right.$$

$$\times \frac{(2\pi)^{-2}}{\sqrt{p_1^2+m^2}\sqrt{k_1^2+m^2}\sqrt{(k_1+p_2+\ldots+p_{n_1-1})^2+m^2}} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{(p_{n_1}+\ldots+p_{n_1+n_2-2})^2+m^2}} f_{n_1n_2}(k_1 - k_1 - p_2 - \ldots$$

$$\left. \ldots - p_{n_1-1}, p_2, \ldots, p_{n_1-1}; p_{n_1} - \ldots - p_{n_1+n_2-2}, p_{n_1}, \ldots, p_{n_1+n_2-2}) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \max_p \left(\frac{1}{m^4} \int dk_1 \frac{(2\pi)^{-4}}{(k_1^2+m^2)[(k_1+p)^2+m^2]} \right) \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega_{n_1+n_2-2}} dp_1 \ldots dp_{n_1+n_2-2} \int dk_1' \,| f_{n_1n_2}(k_1', \; -k_1' - p_2 - \ldots - p_{n_1-1},$$

$$p_2, \ldots, p_{n_1-1}; -p_{n_1} - \ldots - p_{n_1+n_2-2}, \; p_{n_1}, \ldots, p_{n_1+n_2-2})|^2. \qquad (65)$$

Так как интегральное выражение (65) не зависит от p_1, то можем проинтегрировать по p_1. Проделав после этого замену переменных $k_1' = q_1$, $p_2 = q_2, \ldots, p_{n_1-1} = q_{n_1-1}$, $p_{n_1} = q_1', \ldots, p_{n_1+n_2-2} = q'_{n_2-1}$, легко заметить, что интегрирование можно провести по плоскости $\Omega_{n_1} \cap \Omega_{n_2}$. Окончательно получим

$$\|\widetilde{(\omega^{1,\,2}_{1,\,3}\tilde{f}_{n_1n_2})}_{n_1+n_2-2}\| \leqslant c^{1,\,2}_{1,\,3} \|\tilde{f}_{n_1n_2}\|,$$

где $\qquad (66)$

$$c^{1,\,2}_{1,\,3} = \frac{(2\pi)^{-2}}{m^2} \left(\int dk \frac{1}{(k^2+m^2)^2} \right)^{1/2}.$$

3. Используя определение нормы, из (59) получаем

$$\|\widetilde{(\omega_{4,\,0}\tilde{f})}_{4,\,n}\|^2 = \left(\int\limits_{\Omega_4} dp_1 \ldots dp_4 \frac{(2\pi)^{-4}}{(p_1^2+m^2)\ldots(p_4^2+m^2)} \right) \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\Omega n} dp_5 \ldots dp_{n+4} \,| f_4(p_5, \ldots, p_{n+4})|^2 \right) = (c_{4,0})^2 \|f_n\|^2.$$

Совершенно аналогично можно доказать ограниченность оставшихся операторов. Здесь мы приведем лишь оценки для их норм:

$$\| \omega_{1,\,3}^{1,\,1,\,1} \| \leqslant c_{1,\,3}^{1,\,1,\,1} = (2\pi)^{-2}/m^4; \tag{67}$$

$$\| \omega_{3,\,1}^{1} \| \leqslant c_{3,\,1}^{1} = c_{1,\,3}^{3}; \tag{68}$$

$$\| \omega_{2,\,2}^{2} \| \leqslant c_{2,\,2}^{2} = \left(\int dk_1\, dk_2\, (2\pi)^{-4}/[(k_1^2+m^2)^2\,(k_2^2+m^2)^2] \right)^{1/2}; \tag{69}$$

$$\| \omega_{2,\,2}^{1,\,1} \| \leqslant c_{2,\,2}^{1,\,1} = c_{1,\,3}^{1,\,2}. \tag{70}$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Операторы $W_{2+s,\;2-s}(N)\,\hat{N}^{-1}$ равномерно ограничены по N.

Доказательство проведем для одного типичного случая, например для $W_{1,3}(N)\,\hat{N}^{-1}$. Согласно (45) и (53) имеем

$$\| W_{1,3}(N)\,\hat{N}^{-1} \| \leqslant \operatorname*{symm}_{s=-1} \| w_{1,3}(N,\, \sigma_{1,\,3}^{3})\,\hat{N}^{-1} +$$

$$+ w_{1,3}(N,\, \sigma_{1,\,3}^{1,\,2})\,\hat{N}^{-1} + w_{1,\,3}^{1,\,1,\,1}(N,\, \sigma_{1,\,3}^{1,\,1,\,1})\,\hat{N}^{-1} \|.$$

Переставляя оператор $\hat{N}^{-1}$ с операторами $w_{1,\,3}$ и учитывая, что симметризация операторов $w_{1,\,3}$ проводится по одному индексу $1 \leqslant i_1 \leqslant N$, т. е. имеется только N членов, получаем

$$\| W_{1,3}(N)\,\hat{N}^{-1} \| \leqslant N \,\| (\hat{N}+2)^{-1}\, w_{1,3}(N,\, \sigma_{1,\,3}^{3}) +$$

$$+ (\hat{N}+2)^{-1}\, w_{1,3}(N,\, \sigma_{1,\,3}^{1,\,2}) + (\hat{N}+2)^{-1}\, w_{1,3}(N,\, \sigma_{1,\,3}^{1,\,1,\,1}) \| \leqslant$$

$$\leqslant N \frac{1}{N} \frac{\sqrt{(N+1)!}}{\sqrt{(N-1)!}} \frac{1}{N+2} \left(\Big\| \sum_{\sigma_{1,\,3}^{2}} 1 \otimes \ldots \omega_{1,\,3}^{3} \ldots \otimes 1 \Big\| + \right.$$

$$+ \Big\| \sum_{\sigma_{1,\,3}^{1,\,2}} 1 \otimes \ldots \omega_{1,\,3}^{1,\,2} \otimes \ldots \otimes 1 \Big\| +$$

$$\left. + \Big\| \sum_{\sigma_{1,\,3}^{1,\,1,\,1}} 1 \otimes \ldots \omega_{1,\,3}^{1,\,1,\,1} \ldots \otimes 1 \Big\| \right). \tag{71}$$

Далее, так как суммирование в (71) проводится по ортогональным подпространствам, то

$$\| W_{1,3}(N)\,\hat{N}^{-1} \| \leqslant \frac{\sqrt{N(N+1)}}{N+2} \Big(\max_{\sigma_{1,\,3}^{3}} \| 1 \otimes \ldots \omega_{1,\,3}^{3} \ldots \otimes 1 \| +$$

$$+ \max_{\sigma_{1,\,3}^{1,\,2}} \| 1 \otimes \ldots \omega_{1,\,3}^{1,\,2} \ldots \otimes 1 \| +$$

$$+ \max_{\sigma_{1,\,3}^{1,\,1,\,1}} \| 1 \otimes \ldots \omega_{1,\,3}^{1,\,1,\,1} \ldots \otimes 1 \| \Big) \leqslant$$

$$\leqslant \| \omega_{1,\,3}^{3} \| + \| \omega_{1,\,3}^{1,\,2} \| + \| \omega_{1,\,3}^{1,\,1,\,1} \|.$$

Для остальных операторов W доказательство аналогично. Лемма доказана. Из леммы 3 немедленно следует

Теорема 3. Оператор $A\hat{N}^{-1}$ ограничен в h^T.

Следствие 1. Из теоремы 1 следует, что область определения оператора A плотна в h^I и $D(A) \supseteq D(\hat{N})$.

Следствие 2. Из теоремы 1 легко следует, что $\| A^n F^0 \| \leqslant \leqslant (\mathrm{const})^n n!$ Следовательно, ряд теории возмущений, полученный итерациями уравнения (43) $F = (1 + 4\sqrt{3}\, gA + \ldots \ldots + (4\sqrt{3}\, g)^n A^n + \ldots) F^0$, расходится не быстрее, чем ряд $1 + cg + \ldots + (cg)^n n! + \ldots$

5. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА A. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (1)

Оператор A плотно задан в h^I. Легко также проверить, что свободный член $F^0 \in h^I$. Следовательно, (43) имеет смысл строго определенного уравнения резольвентного типа в пространстве h^I. Решение этого уравнения можно формально записать в следующем виде:

$$F = \left(1 - 4\sqrt{3}\, gA\right)^{-1} F^0. \tag{72}$$

Строгое определение выражения (42) требует детального изучения свойств оператора A. Ввиду довольно сложной алгебраической структуры оператора A эта задача на первый взгляд кажется очень трудной, однако, как покажет дальнейшее изложение, совсем небезнадежной.

Приступим к изучению свойств оператора A. Так как он оставляет инвариантным подпространство h_s^T симметричных функций в h^T (конечно, те вектора, на которых он определен), то его можно рассматривать только в h_s^T и решения уравнений (43) и (1) должны быть симметричными функциями в h^T. Представим оператор A в виде:

$$A = S + P + C; \tag{73}$$

$$S = \sum_N \big(\operatorname*{symm}_{(s=-1)} w_{1,3}(N, \sigma^3_{1,3}) + 3^{1/2} \operatorname*{symm}_{(s=0)} w_{2,2}(N, \sigma^2_{2,2}) + \operatorname*{symm}_{(s=1)} w_{3,1}(N)\big); \tag{74}$$

$$P = \sum_N \big(\operatorname*{symm}_{(s=-1)} w_{1,3}(N, \sigma^{1;\,2}_{1;\,3}) + \operatorname*{symm}_{(s=-1)} w_{1,3}(N, \sigma^{1,\,1,\,1}_{1;\,3}) + 3^{1/2} \operatorname*{symm}_{(s=0)} w_{2,2}(N, \sigma^{1;\,1}_{2;\,2})\big); \tag{75}$$

$$C = 3^{-3/2} \sum_N \operatorname*{symm}_{(s=2)} w_{4,0}(N). \tag{76}$$

Оператор S в h^T представляет собой операторно-значную якобиеву матрицу

$$S' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & S_{1,3} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & S_{2,2} & 0 & S_{2,4} & 0 & \ldots & \ldots \\ S_{3,1} & 0 & S_{3,3} & 0 & S_{3,5} & 0 & \ldots \\ 0 & S_{4,2} & 0 & S_{4,4} & 0 & S_{4,6} & 0 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \qquad (77)$$

Операторы $S_{N,\,N+2}$ и $S_{N+2,\,N}$ действуют из h^T_{N+2} и h^T_N в h^T_N и h^T_{N+2} соответственно, а операторы $S_{N,\,N}$ заданы в h^T_N по формулам

$$S_{N,\,N+2} = \Big(\sum_N \underset{(s=-1)}{\operatorname{symm}}\, w_{1,\,3}(N, \sigma^3_{1,\,3})\Big)_{N,\,N+2} =$$

$$= \frac{1}{N} \underset{s=-1}{\operatorname{symm}} \sqrt{N(N+1)} \sum_{\sigma^3_{1,\,3}} (1 \otimes \ldots \omega^3_{1,\,3} \ldots \otimes 1)_{N,\,N+2}; \qquad (78)$$

$$S_{N+2,\,N} = \Big(\sum_N \underset{s=1}{\operatorname{symm}}\, w_{3,\,1}(N)\Big)_{N+2,\,N} =$$

$$= \frac{1}{N(N+1)(N+2)} \underset{s=1}{\operatorname{symm}} \sqrt{N(N+1)} \sum_{\sigma_{3,\,1}} (1 \otimes \ldots \omega^1_{3,\,1} \ldots \otimes 1)_{N+2,\,N}; \qquad (79)$$

$$S_{N,\,N} = \Big(3^{1/2} \sum_N \underset{s=0}{\operatorname{symm}}\, w_{2,\,2}(N, \sigma^2_{2,\,2})\Big)_{N,\,N} =$$

$$= 3^{1/2} \frac{1}{N(N-1)} \underset{s=0}{\operatorname{symm}} (N-1) \sum_{\sigma^2_{2,\,2}} (1 \otimes \ldots \omega^2_{2,\,2} \ldots \otimes 1)_{N,\,N}. \qquad (80)$$

Из формул (64), (68) и (69) легко получить оценки на нормы операторов $S_{N,\,N+2}$, $S_{N+2,\,N}$ и S_{NN}:

$$\| S_{N,\,N+2} \| \leqslant \sqrt{N(N+1)}\, c^3_{3,\,1}; \qquad (81)$$

$$\| S_{N+2,\,N} \| \leqslant \sqrt{N(N+1)}\, c^1_{3,\,1}; \quad \| S_{NN} \| \leqslant 3^{1/2} (N-1)\, c^2_{2,\,2}.$$

Лемма 4. Оператор S является симметрическим оператором в h^T_s.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что для $f, g \in D(S) \subseteq h^T_s$ выполняется следующее равенство:

$$(Sf, g) = (f, Sg). \qquad (82)$$

В силу равенств (81) $D(S)$ есть всюду плотная область финитных векторов в h^T_s. Учитывая структуру оператора S (77), а также векторов $f, g \in D(S)$, легко видеть, что равенство (82) можно заменить на два эквивалентных равенства

$$(S_{N,\,N+2}f_{N+2},\ g_N) = (f_{N+2},\ S_{N+2,\,N}g_N) \tag{83}$$

для $f_{N+2} \in h^T_{N+2}$ и $g_N \in h^T_N$ и

$$(S_{N,\,N}f_N,\ g_N) = (f_N,\ S_{NN}g_N) \tag{84}$$

для $f_N,\ g_N \in h^T_N$.

Докажем равенство (83). Выберем для этого f_{N+2} и g_N в таком виде:

$$\tilde{f}_{N+2;\,n_1,\,\ldots,\,n_k}(p_1,\ \ldots,\ p_{N+2}) =$$
$$= \sum_{\sigma\{j\}_2^{N+2}} \tilde{f}_{n_1,\,\ldots,\,n_k}(p_{j_1},\ \ldots,\ p_{j_{n_1}};\ \ldots;\ \ldots,\ p_{j_{N+1}}); \tag{85}$$

$$g_{N;\,n_1-2,\,n_2,\,\ldots,\,n_k}(p_1,\ \ldots,\ p_N) =$$
$$= \sum_{\sigma\{j\}_1^N} \tilde{g}_{n_1-2,\,n_2,\,\ldots,\,n_k}(p_{j_1},\ \ldots,\ p_{j_{n_1-2}};\ \ldots;\ \ldots,\ p_{j_N}), \tag{86}$$

где $\sigma\{j\}_1^M$ $(M = N$ или $M = N+2)$ представляет собой сумму по всем возможным разбиениям индексов $1, \ldots, M$ на k групп. Функции $f_{n_1,\ldots,n_k}(p_{j_1},\ \ldots,\ p_{j_{n_1}};\ \ldots;\ \ldots,\ p_{j_{N+2}})$ и $g_{n_1-2,\,n_2,\,\ldots,\,n_k}(p_{j_1},\ \ldots,\ p_{j_{n_1-2}};\ \ldots\ p_{j_N})$ являются симметричными по каждой группе переменных $\{n_j\}$, а также симметричны при перестановке групп $\{n_i\}$ и $\{n_j\}$, если $n_i = n_j$. Тогда функции $\tilde{g}$ и $\tilde{f}$ симметричны по переменным $p_1, \ldots, p_M$. Кроме того, выберем такие разбиения, для которых

$$n_1,\ n_1 - 2 \neq n_2,\ \ldots,\ n_k. \tag{87}$$

Представим операторы $S_{N+2,\,N}$ и $S_{N,\,N+2}$ в таком виде:

$$S_{N,\,N+2} = \sum_{i=1}^{k} S^{n_i}_{N,\,N+2};$$
$$S_{N+2,\,N} = \sum_{i=1}^{k} S^{n_i}_{N+2,\,N}, \tag{88}$$

где операторы S^{n_i} действуют таким образом, что переменные интегрирования этих операторов находятся в группе переменных $\{n_i\}$. Тогда для конкретно выбранных функций (85) и (86) будут выполняться следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} (S_{N,\,N+2}f_{N+2},\ g_N) &= (S^{n_1}_{N,\,N+2}f_{N+2},\ g_N); \\ (f_{N+2},\ S_{N+2,\,N}g_N) &= (f_{N+2},\ S^{n_1}_{N+2,\,N}g_N). \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Эти равенства (89) являются следствием условия (87) в силу которого $S^{n_i}_{N,\,N+2}f_{N+2} \perp g_N$ и $S^{n_i}_{N+2,\,N}\,g_N \perp f_{N+2}$, $i=2, \ldots, k$. Следовательно, для доказательства леммы в данном конкретном случае достаточно показать, что

$$(S^{n_1}_{N,\,N+2}f_{N+2}, g_N) = (f_{N+2}, S^{n_1}_{N+2,\,N}g_N). \tag{90}$$

Представим для этого операторы $S^{n_1}_{N,\,N+2}$ и $S^{n_1}_{N+2,\,N}$ в следующем виде:

$$S^{n_1}_{N,\,N+2} = \sqrt{N(N+1)}\,\frac{1}{N}\sum_{i_1=1}^{N} S^{n_1;\,i_1}_{N,\,N+2}; \tag{91}$$

$$S^{n_1}_{N+2,\,N} = \sqrt{N(N+1)}\,\frac{1}{N(N+1)(N+2)}\sum_{i_1\neq i_2\neq i_3=1}^{N+2} S^{n_1;\,i_1,\,i_2,\,i_3}_{N+2,\,N}. \tag{92}$$

Пусть сначала $i_1=1$, тогда

$$\widetilde{(S^{n_1;\,1}_{N,\,N+2}f_{N+2})}(p_1, \ldots, p_N) =$$
$$= \sum_{\sigma\{j\}_2^N}\int dk_1\,dk_2\,dk_3\,\frac{(2\pi)^2\,\delta(p_1-k_1-k_2-k_3)}{2\pi\sqrt{p_1^2+m^2}\ldots 2\pi\sqrt{k_3^2+m^2}}\,\times$$
$$\times \tilde{f}_{n_1,\ldots,n_k}(k_1, k_2, k_3, p_{j_2}, \ldots, p_{j n_1-2}; \ldots; \ldots, p_{j_N}).$$

Используя (86), получаем

$$(S^{n_1;\,1}_{N,\,N+2}f_{N+2}, g_N) = \sum_{\sigma\{j\}_2^N}\ \int\limits_{\Omega_{n_1-2}\cap\Omega_{n_2}\cap\ldots\cap\Omega_{n_k}} dp_1\,dp_{j_2}\ldots dp_{j_N}\,\times$$
$$\times\int dk_1\,dk_2\,\frac{(2\pi)^{-2}}{\sqrt{p_1^2+m^2}\ldots\sqrt{(p_1-k_1-k_2)^2+m^2}}\,\times$$
$$\times\,\overline{f_{n_1,\ldots,n_k}(k_1, k_2, p_1-k_1-k_2, p_{j_2}, \ldots, p_{j_{n_1-2}}; \ldots; p_{j_N})}\,\times$$
$$\times\, g_{n_1-2,\,n_2,\ldots,n_k}(p_1, p_{j_2}, \ldots, p_{j_{n_1-2}}; \ldots; \ldots, p_{j_N}) =$$
$$= \sum_{\sigma\{j\}_2^N}\ \int\limits_{\Omega_{n_1}\cap\ldots\cap\Omega_k} dp_1\,dp_{j_2}\ldots dp_{jN}\,dp_{N+1}\,dp_{N+2}\,\times$$
$$\times\,\overline{f_{n_1,\ldots,n_k}(p_1, p_{N+1}, p_{N+2}, p_{j_2}, p_{j_{n_1-2}}; \ldots; \ldots, p_{j_N})}\,\times$$
$$\times\,\frac{(2\pi)^{-2}}{\sqrt{p_1^2+m^2}\ldots\sqrt{(p_1+p_{N+1}+p_{N+2})^2+m^2}}\,\times$$
$$\times\, g_{n_1-2,\,n_2,\ldots,n_k}(p_1+p_{N+1}+p_{N+2}, p_{j_2}, \ldots, p_{jn_1-2}; \ldots; p_{j_N}). \tag{93}$$

В (93) выполнены замены $p_1-k_1-k_2\to p_1$, $k_1\to p_{N+1}$, $k_2\to p_{N+2}$. Выполняя это для $i_1=2, \ldots, N$, получаем (заменяя в каждом интеграле p_{i_1} на p_1 и складывая все равенства)

$$(S^{n_1}_{N,\,N+2}f_{N+2},\, g_N)=\sqrt{N(N+1)}\sum_{\sigma\{j\}_2^N}\int\limits_{\Omega_{n_1}\cap\ldots\cap\Omega_{n_k}} dp_1\,dp_{j_2}\,\ldots,\,dp_{j_N}\times$$
$$\times dp_{N+1}\,dp_{N+2}f_{n_1,\,\ldots,\,n_k}(p_1,\,p_{N+1},\,p_{N+2},\,p_{j_2},\,\ldots,\,p_{j_{n_1-2}};\,\ldots;\,\ldots,\,p_{j_N})\times$$
$$\times\frac{(2\pi)^{-2}}{\sqrt{p_1^2+m^2}\ldots\sqrt{(p_1+p_{N+1}+p_{N+2})^2+m^2}}\times$$
$$\times g_{n_1-2,\,n_2,\,n_k}(p_1+p_{N+1}+p_{N+2},\,p_{j_2},\,\ldots;\,\ldots;\,\ldots,\,p_{j_N}).\qquad(94)$$

Положим теперь в (92) $i_1=1$, $i_2=N+1$, $i_3=N+2$, тогда

$$\widetilde{(S^{n_1;\,1,\,N+1,\,N+2}_{N+2,\,N}}\widetilde{g}_N(p_1,\,\ldots,\,p_{N+2})=$$
$$=\sum_{\sigma\{j\}_2^N}\int dk\,\frac{(2\pi)^2\,\delta(p_1+p_{N+1}+p_{N+2}-k)}{2\pi\sqrt{p_1^2+m^2}\ldots2\pi\sqrt{k^2+m^2}}\times$$
$$\times g_{n_1-2,\,n_2,\,\ldots,n_k}(k,\,p_{j_2},\,\ldots,\,p_{j_{n_1-2}};\,\ldots;\,\ldots,\,p_{j_N}).\qquad(95)$$

Используя теперь (85), получаем

$$(f_{N+2},\,S^{n_1;\,N+1,\,N+2}_{N+2,\,N}g_N)=$$
$$=\sum_{\sigma\{j\}_2^N}\int\limits_{\Omega_{n_1}\cap\ldots\cap\Omega_{n_k}} dp_1\,dp_{j_2}\ldots dp_{j_N}\,dp_{N+1}\,dp_{N+2}\times$$
$$\times\overline{f_{n_1,\,\ldots,\,n_k}(p_1,\,p_{N+1},\,p_{N+2}\,p_{j_2},\,\ldots;\,\ldots,\,p_{j_N})}\times$$
$$\times\frac{(2\pi)^{-2}}{\sqrt{p_1^2+m^2}\ldots\sqrt{(p_1+p_{N+1}+p_{N+2})^2+m^2}}\times$$
$$\times g_{n_1-2,\,n_2,\,\ldots,\,n_k}(p_1+p_{N+1}+p_{N+2},\,p_{j_2},\,\ldots;\,\ldots;\,\ldots,\,p_{j_N}).$$

Выполняя теперь подобные расчеты для всех i_1, i_2, i_3, находим

$$(f_{N+2},\,S^{n_1}_{N+2,\,N}g_N)=\sqrt{N(N+1)}\sum_{\sigma\{j\}_2^N}\int\limits_{\Omega_{n_1}\cap\ldots\cap\Omega_{n_k}} dp_1\,dp_{j_2}\,\ldots\,dp_{j_N}\times$$
$$\times dp_{N+1}\,dp_{N+2}\overline{f_{n_1,\ldots,n_k}(p_1,\,p_{N+1},\,p_{N+2},\,p_{j_2},\,\ldots,\,p_{j_{n_1-2}};\ldots;\,\ldots,\,p_{j_N})}\times$$
$$\times\frac{(2\pi)^{-2}}{\sqrt{p_1^2+m^2}\ldots\sqrt{(p_1+p_{N+1}+p_{N+2})^2+m^2}}\times$$
$$\times g_{n_1-2,\,n_2,\ldots,n_k}(p_1+p_{N+1}+p_{N+2},\,p_{j_2},\,\ldots;\,\ldots;\,\ldots,\,p_{j_N}).\qquad(96)$$

Из (94) и (96) следует (90).

Пусть теперь $n_2 = n_1 - 2$, а $n_3, \ldots, n_k \neq n_1 - 2$ и n_1, тогда $(S^{n_1}_{N,\,N+2} f_{N+2}, g_N) = (f_{N+2}, (S^{n_1}_{N+2,\,N} + S^{n_2}_{N+2,\,N}) g_N)$, а $(S^{n_2}_{N,\,N+2} f_{N+2}, g_N) = 0$ и, следовательно, равенство (83) также выполняется. В случае произвольных $n_1, \ldots, n_k$ рассуждения проводятся аналогичным образом. Если функции f_{N+2} и g_N будут иметь несколько компонент, каждая из которых отвечает различным N, то правая и левая части равенства (83) распадутся на некоторое число слагаемых, отвечающих конкретным $n_1, \ldots, n_k$. В этом случае равенство (83) будет следовать из справедливости подобных равенств для конкретных $n_1, \ldots, n_k$. Совершенно аналогично доказывается равенство (84). Лемма доказана.

Лемма 5. Для того чтобы симметричный оператор S, заданный симметричной якобиевой матрицей S', имел нулевые индексы дефекта, достаточно, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$\sum_{N=N_0}^{\infty} \frac{1}{\max\left(\|S_{N,\,N+2}\|,\ \|S_{N,\,N}\|,\ \|S_{N+2,\,N}\|\right)} \to \infty. \tag{97}$$

Доказательство этой леммы можно выполнить, например, методом, который предложен в работах [35, 36]. Справедливость лемм 4 и 5 влечет за собой справедливость теоремы.

Теорема 4. Оператор S является существенно самосопряженным оператором в h^T_S.

Доказательство. В силу оценок (81) симметричный оператор S имеет нулевые индексы дефекта, так как удовлетворяет равенству (97) и, следовательно, существенно самосопряжен.

Оператор P имеет в h^T плотную область определения и для $f \in D(P)$ допускает оценку

$$\|Pf\| \leqslant \mathrm{const}\, \|(\hat{N} + 1) f\|.$$

Это следует из определения (75), (53) и (56) и оценки (71). Отметим одно важное свойство оператора P. Если $f \in D(P)$ и все f_N для $N = 1, 2, \ldots, \infty$ имеют только по одной связанной компоненте, то $Pf = 0$. Более того, если f_N для всех N имеют не более чем L связанных компонент, то $P^{L+1} f = 0$. Это является следствием того, что оператор P уменьшает число связанных компонент на 1.

Найдем оператор C.

Теорема 5. Оператор C ограничен, и для любого $f \in h^T$ справедлива оценка

$$\|Cf\| \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{3}\, c_{4,0}\, \|\hat{N}^{-1/2} f\|. \tag{98}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать существование неравенства (98). Выпишем для этого результат действия оператора C на $f \in h^T$:

$$(\widetilde{Cf})_N(p_1, \ldots, p_N) = \frac{3^{-3/2}}{N\sqrt{(N-1)\ldots(N-4)}} \times$$
$$\times \sum_{i_1 \neq \ldots \neq i_4} \frac{(2\pi)^2 \delta(p_{i_1} + \ldots + p_{i_4})}{2\pi\sqrt{p_{i_1}^2 + m^2} \ldots 2\pi\sqrt{p_{i_4}^2 + m^2}} \times$$
$$\times \tilde{f}_{N-4}(p_1, \ldots, \hat{p}_{i_1}, \ldots, \hat{p}_{i_4}, \ldots, p_N). \tag{99}$$

Рассмотрим два случая. Пусть $\tilde{f}_{N-4}(\cdot)$ не имеет связанных компонент с $n_i = 4$. Тогда легко видеть, что в сумме $\sum\limits_{i_1 \neq \ldots \neq i_4}$ $\binom{N}{4}$-членов ортогональны друг другу, так как все они принадлежат различным разбиениям импульсов $p_1, \ldots, p_N$. В этом случае

$$\|(\widetilde{Cf})_N\|^2 = \sum_{i_1 < i_2 < i_3 < i_4} \frac{27^{-1}(4!)^2}{N^2(N-1)\ldots(N-4)} \times$$
$$\times \int\limits_{\Omega_4} \frac{(2\pi)^{-4} dp_{i_1} \ldots dp_{i_4}}{(p_{i_1}^2 + m^2)\ldots(p_{i_4}^2 + m^2)} \|\tilde{f}_{N-4}\|^2 = \frac{(c_{4,0})^2\, 4!}{27N(N-4)} \|f_{N-4}\|^2,$$

откуда немедленно следует (98). Пусть теперь $\tilde{f}_{N-4}$ будет иметь r_{N-4} связанных компонент с $n_i = 4$, $i = 1, 2, \ldots, r_{N-4}$. Тогда (i_1, i_2, i_3, i_4)-й член суммы $\sum\limits_{i_1 \neq \ldots \neq i_4}$ не будет ортогонален к тем слагаемым, в которых переменные $P_{i_1}, \ldots, p_{i_4}$ поменялись местами с переменными из какой-либо компоненты $n_1, \ldots, n_{r_{N-4}}$ или между собой. Таким образом, для каждого набора индексов в сумме $\sum\limits_{i_1 \neq \ldots \neq i_4}$ имеется $4!\,(1 + r_{N-4})$ неортогональных членов, так как они принадлежат к одному и тому же разбиению. В сумме останется только $N(N-1)(N-2)(N-3)/[4!\,(r_{N-4}+1)]$ ортогональных слагаемых. Тогда

$$\|(\widetilde{Cf})_N\|^2 = \frac{27^{-1}}{N^2(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)} \times$$
$$\times \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4!\,(r_{N-4}+1)} (1 + r_{N-4})^2 c_{4,0}^2 \|\tilde{f}_{N-4}\|^2.$$

Следовательно,

$$\|(\widetilde{Cf})_N\|^2 \leqslant \frac{27^{-1}(4!)^2(r_{N-4}+1)}{N(N-4)\,4!} c_{4,0}^2 \|\tilde{f}_{N-4}\|^2.$$

Так как $s_{N-4} < N/4$, то неравенство (98) выполняется, что и завершает доказательство теоремы.

6. О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ (43).

Итерации уравнения (43) полностью восстанавливают ряд теории возмущений

$$F=\sum_{n=0}^{\infty}(4\sqrt{3}g)^n A^n F^0 \tag{100}$$

для коэффициентных функций S-матрицы, не содержащей вкладов от вакуумных диаграмм. Однако этот ряд расходится [37] в конечном и в бесконечном объемах, и его нельзя рассматривать как решение уравнения (43). Выше было показано, что ряд (100) является асимптотическим в слабом смысле. Кроме того, каждый член ряда является элементом пространства h^T. Все это дает основание надеяться, что (100) будет асимптотическим рядом в сильном смысле, т. е. в смысле нормы пространства h^T.

Сейчас докажем несколько строгих результатов, которые следуют из свойств операторов S, P и C. Прежде всего заметим, что в силу существенной самосопряженности оператора S можно построить ограниченный оператор

$$(1-g'\bar{S})^{-1}=-\frac{1}{g'}R_S\left(\frac{1}{g'}\right)$$

для констант g', для которых $\operatorname{Im} g'\neq 0$. Причем $g'=4\sqrt{3}\,g$, а $\bar{S}$ — замыкание оператора S. Рассмотрим сначала уравнение

$$F=g'SF+F^0 \text{ в } h_s^T. \tag{101}$$

Лемма 6.

Решение уравнения (101) существует для g', для которых $\operatorname{Im} g'\neq 0$, и задается выражением

$$F=-\frac{1}{g'}R_S\left(\frac{1}{g'}\right)F^0\in h_s^T. \tag{102}$$

Доказательство леммы следует из существования ограниченного оператора $(1-g'\bar{S})^{-1}$. Рассмотрим теперь более сложное уравнение

$$F=g'(S+P)F+F^0 \text{ в } h_S^T. \tag{103}$$

Лемма 7. Решение уравнения (103) существует для g', для которых $\operatorname{Im} g'\neq 0$, и задается выражением (102).

Доказательство этого факта следует из того, что оператор S, а следовательно, и оператор $R_S(1/g')$ не изменяют числа связанных компонент. Тогда последовательность $(R_S(1/g')F^0)_N$ имеет по одной связанной компоненте для каждого $N=1, 2, \ldots$ $\ldots, \infty$ и по определению оператора P

$$PR_S(1/g')F^0=0. \tag{104}$$

В силу (104) выражение (102) удовлетворяет уравнению (103). Отметим, что итерация уравнения (101) и (103) или же разложение (102) в ряд по степеням g' восстанавливают всю совокупность вкладов от всех топологически неэквивалентных связанных граф Фейнмана матрицы рассеяния, однако с кратностью меньшей, чем в S-матрице.

И наконец, рассмотрим уравнение

$$F = g'BF + F^0 \, (B = S + C). \tag{105}$$

Итерации этого уравнения восстанавливают всю совокупность вкладов от всех возможных топологически неэквивалентных диаграмм Фейнмана матрицы рассеяния, однако с кратностью меньшей, чем в S-матрице (см. приложение 3). С этой точки зрения решение уравнения (105), несомненно, представляет интерес.

Теорема 6. Решение уравнения (105) существует и задается сильно сходящимся в h^T рядом

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} (-R_S(1/g')\, C)^n f^{(0)}, \tag{106}$$

где

$$f^{(0)} = \frac{1}{g'} R_S \left(\frac{1}{g'}\right) F^0$$

для констант связи g', удовлетворяющих оценке

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} c_{4,0} \frac{|g'|^2}{|\operatorname{Im} g'|} < 1. \tag{107}$$

Доказательство теоремы следует из того, что выражение (106) является разложением резольвенты оператора B в ряд Неймана. Сходимость этого ряда следует из того, что

$$\|R_S(1/g')\| \leqslant |g'|^2/|\operatorname{Im} g'|, \quad \|C\| \leqslant 2\sqrt{2}\, c_{4,0}/3.$$

Теорема доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Теорема П.1.

Функция $\exp(g\mathscr{H}(\lambda))$, $\operatorname{Re} g \leqslant 0$ суммируема по мере μ:

$$\int_{\Lambda} \exp(g\mathscr{H}(\lambda))\, d\mu(\lambda) < \infty.$$

Проведем ряд вспомогательных построений. Выделим из оператора $H(h)$ полуограниченную снизу часть. Для этого представим функцию h в следующем виде:

$$h(k_1 + \ldots + k_4) = h_\varkappa(k_1, \ldots, k_4) + \Delta h_\varkappa(k_1, \ldots, k_4), \quad \varkappa > 0, \tag{П.1}$$

где

$$h_\varkappa(k_1, \ldots, k_4) = \begin{cases} h(k_1 + \ldots + k_4), & |k_i| \leqslant \varkappa, \quad i = 1, \ldots, 4; \\ 0, & |k_i| > \varkappa. \end{cases}$$

В результате разбиения (П.1) оператор $H(h)$ распадается на сумму $H(h_\varkappa) + H(\Delta h_\varkappa)$, причем $H(h_\varkappa)$ полуограничен снизу:

$$H(h_\varkappa) = \int dx h(x) \colon a_\varkappa^4(x) \colon = \int h(x) (a_\varkappa^2(x) - 3G_0^\varkappa(0))^2 \, dx -$$

$$- 9 (G_0^\varkappa(0))^2 \int h(x) \, dx \equiv B_\varkappa - c_\varkappa, \quad B_\varkappa \geqslant 0;$$

здесь

$$a_\varkappa(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|k| \leqslant \varkappa} \frac{\exp(ikx)}{(k^2+m^2)^{1/2}} a(k) \, dk;$$

$$G_0^\varkappa(0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{|k| \leqslant \varkappa} \frac{dk}{k^2+m^2} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\varkappa^2+m^2}{m^2}; \tag{П.2}$$

$$c_\varkappa = 9 (G_0^\varkappa(0))^2 \int h(x) \, dx < \infty.$$

Таким образом, оператор $H(h_\varkappa)$ эквивалентен умножению на функцию $\mathscr{H}_\varkappa(\lambda) \geqslant -c_\varkappa$, а оператор $H(\Delta h_\varkappa)$ — на функцию $\Delta\mathscr{H}_\varkappa(\lambda)$, причем функция $\Delta\mathscr{H}_\varkappa(\lambda)$, возможно, неограниченна на Λ.

Обозначим $[r]$ наименьшее целое число, превосходящее данное вещественное r.

Лемма П.1.

Существует такое число $\varkappa_0 > 0$, что для всех $\varkappa > \varkappa_0$ выполняется неравенство

$$\| (\Delta\mathscr{H}_\varkappa)^{n(\varkappa)} \|_{L^2(d\mu, \Lambda)} \leqslant \mathrm{const}(\alpha) \exp(-\varkappa^\alpha), \quad \alpha \in [0, 1/8], \quad n(\varkappa) = [\varkappa^\alpha].$$

Доказательство. Так как $H(h)$ является виковским полиномом степени 4, то справедлива следующая оценка:

$$\| H(h) f \|_{\mathscr{H}} \leqslant c_1 \| H(h) \Omega_0 \|_{\mathscr{H}} \| (\hat{N}+1)^2 f \|_{\mathscr{H}}, \tag{П.3}$$

где $f \in D_0$, $\hat{N}$ — оператор числа частиц. Непосредственно из (П.3) по индукции следует

$$\| H^n(h) \Omega_0 \|_{\mathscr{H}} \leqslant c_1 \| H(h) \Omega_0 \|_{\mathscr{H}} \| (\hat{N}+1)^2 H^{n-1}(h) \Omega_0 \|_{\mathscr{H}} \leqslant$$

$$\leqslant c_1^n \| H(h) \Omega_0 \|_{\mathscr{H}}^n (4(n-1)+1)^2 \cdot (4(n-2)+1)^2 \ldots \leqslant$$

$$\leqslant c^n (n!)^2 \| H(h) \Omega_0 \|_{\mathscr{H}}^n$$

или

$$\| \mathscr{H}^n \|_{2, \mu} \leqslant c^n (n!)^2 \| \mathscr{H} \|_{2, \mu}^n < c_2 (c_3 n^2)^n \| \mathscr{H} \|_{2, n}^n, \tag{П.4}$$

где c, c_1, c_2, c_3 — некоторые постоянные.

Применим неравенство (П.4) к оператору $H(\Delta h_\varkappa)$:

$$\| (\Delta\mathscr{H}_\varkappa)^n \|_{2, \mu} < c_2 (c_3 n^2 \| \Delta\mathscr{H}_\varkappa \|_{2, \mu})^n. \tag{П.5}$$

Так как

$$\| \Delta\mathscr{H}_\varkappa \|_{2, \mu}^2 = \| H(\Delta h_\varkappa) \Omega_0 \|_{\mathscr{H}}^2 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int |dk_1 \ldots dk_4 \frac{(\Delta h_\varkappa(k_1, \ldots, k_4))^2}{(k_1^2+m^2) \ldots (k_4^2+m^2)} < \frac{c_4}{\varkappa^\nu}, \tag{П.6}$$

где ν — некоторое число из интервала $[0, 1/4]$ [см. (П.2)], то, выбирая $n = n(\varkappa) = [\varkappa^{\alpha}]$, $2\alpha < \nu$, легко получаем из (П.5) и (П.6) формулировку леммы.

Докажем в заключение оценку (П.6). Не уменьшая общности, рассмотрим $h(k) = h_1(k^1)\, h_1(k^2)$. Далее, легко видеть, что, согласно определению (П.1), достаточно оценить следующий интеграл:

$$\int\limits_{|k_1|>\varkappa} dk_1 \ldots dk_4 \frac{|h_1(k_1+\ldots+k_4)|^2}{(k_1^2+m^2)\ldots(k_4^2+m^2)}.$$

Так как $(k^2+m^2)^{-1} \leqslant [(k_1^1)^2+m^2/2]^{-1/2}\,[(k_1^2)^2+m^2/2]^{-1/2}/2$, то достаточно оценить теперь только одномерный интеграл

$$\int\limits_{|k_1|>\varkappa} dk_1 \ldots dk_4 \frac{|h_1(k_1+\ldots+k_4)|^2}{(k_1^2+m^2/2)\ldots(k_4^2+m^2/2)} <$$

$$< c_5 \int\limits_{|k_1|>\varkappa} dk_1 \ldots dk_4 \frac{|h_1(k_1+\ldots+k_4)|^2}{|k_1|^{1-\varepsilon+\nu}\,|k_2|^{1-\varepsilon}\ldots|k_4|^{1-\varepsilon}},$$

где $0<\varepsilon<1/4$ и $0<\nu<\varepsilon$ ($k_i \in R^1$, $i=1, \ldots, 4$). Поэтому, чтобы доказать оценку (П.6), необходимо установить сходимость такого интеграла:

$$\int dk_1 \ldots dk_4 \frac{|h_1(k_1+\ldots+k_4)|^2}{|k_1|^{1-\varepsilon}\ldots|k_4|^{1-\varepsilon}} =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{dk_1}{k_1^{1-\varepsilon}} \ldots \frac{dk_4}{k_4^{1-\varepsilon}} (2\,|h_1(k_1+\ldots+k_4)|^2 +$$

$$+ 2\binom{4}{1} |h_1(k_1+k_2+k_3-k_4)|^2 + \binom{4}{2} |h_1(k_1+k_2-k_3-k_4)|^2) = \qquad \text{(П.7)}$$

$$= \frac{\Gamma^4(\varepsilon)}{\Gamma(4\varepsilon)} \Bigl(2\int\limits_0^\infty d\xi \frac{|h_1(\xi)|^2}{\xi^{1-4\varepsilon}} + 2\binom{4}{1}\int\limits_0^\infty d\xi\, d\eta \frac{|h_1(\xi-\eta)|^2}{\xi^{1-3\varepsilon}\eta^{1-\varepsilon}} +$$

$$+ \binom{4}{2}\int\limits_0^\infty d\xi\, d\eta \frac{|h_1(\xi-\eta)|^2}{\xi^{1-2\varepsilon}\eta^{1-2\varepsilon}}\Bigr). \qquad \text{(П.8)}$$

Все интегралы в последней строке конечны, так как $h_1(\xi) \in C(R^1) \cap L^2(R^1)$ и $0<\varepsilon<1/4$ (переход от (П.7) к (П.8) выполнен с помощью формулы Дирихле [см., например, работу [38], формулу (4.635)]). Оценка (П.7) доказана.

Доказательство теоремы П.1. Пусть $\mu\{\cdot\}$ мера множества ; имеем последовательно

$$\mu\{\lambda;\ \mathscr{H}(\lambda) \leqslant -(c_\varkappa+1)\} \leqslant \mu\{\lambda;\ \mathscr{H}_\varkappa(\lambda) \leqslant -1\} \leqslant$$

$$\leqslant \mu\{\lambda;\ |\mathscr{H}_\varkappa(\lambda)| \geqslant 1\} \leqslant \int\limits_\Lambda (\Delta\mathscr{H}_\varkappa(\lambda))^{2n(\varkappa)}\, d\mu(\lambda) \equiv \|(\Delta\mathscr{H}_\varkappa)^{n(\varkappa)}\|_{2,\mu}^2.$$

В силу леммы П.1 последняя величина не превышает $\mathrm{const}^2(\alpha)\exp(-2\varkappa^{\alpha})$ для всех $\varkappa > \varkappa_0$, поэтому

$$\int\limits_{\Lambda} \exp[g\mathscr{H}(\lambda)]\,d\mu(\lambda) = \int\limits_{\{\lambda;\ \mathscr{H}(\lambda)\leqslant -(c_{\varkappa_0}+1)\}} \exp[g\mathscr{H}(\lambda)]\,d\mu(\lambda) +$$

$$+ \int\limits_{\{\lambda;\ \mathscr{H}(\lambda)> -(c_{\varkappa_0}+1)\}} \exp[g\mathscr{H}(\lambda)]\,d\mu(\lambda) \leqslant \mathrm{const}^2(\alpha)\times$$

$$\times \int\limits_{\varkappa_0}^{\infty} \exp[-\mathrm{Re}\,g\,(c_\varkappa+1)]\,d[\exp(-2\varkappa^{\alpha})] + \exp[-\mathrm{Re}\,g\,(c_{\varkappa_0}+1)] < \infty.$$

В силу определения $c_\varkappa$ теорема доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Сформулируем условия (20), (21) более прозрачно. Прежде всего, напомним, что подалгебра $\mathfrak{m}_1$ порождена единственным самосопряженным оператором $a(f_1)$, следовательно, пространство $L^2(d\mu_1, \Lambda_1)$ можно унитарно отобразить на пространство $L^2(d\sigma, R^1)$, где $d\sigma(t) = d(\Omega_0, E_t\Omega_0)$; E_t — спектральная функция оператора $a(f_1)$. Далее заметим, что на линейной оболочке $\mathfrak{C}_1 = \exp[i\alpha a(f_1)]$ операция $[a^-(f_1), \cdot]$ унитарно эквивалентна дифференцированию

$$(m_1\Omega_0,\ [a^-(f_1),\ m_2]\,\Omega_0) = \int d\sigma(t)\,\overline{m_1(t)}\,\frac{dm_2(t)}{dt}.$$

Поэтому условие $c_l \xrightarrow{s} a$, $[a^-, c_l] \xrightarrow{s} 1$ равносильно $c_l(t) \xrightarrow{s} t$, $dc_l(t)/dt \xrightarrow{s} 1$ в $L^2(d\sigma, R^1)$. Последнее есть попросту сильная сходимость $c_l(t) \xrightarrow{s} t$ в пространстве Соболева $W_1^2(d\sigma, R^1) = W_{1,\sigma}^2$. Итак, случай $k = 1$, $f = 1$ очевиден.

Рассмотрим $k = 2$. Обозначим для краткости $\|\cdot\|_{p,\sigma} = \|\cdot\|_{L^p(d\sigma,\, R^1)}$;

$$\|c_l^2 - t^2\|_{2,\sigma} \leqslant \|c_l^2 - c_l t\|_{2,\sigma} + \|c_l t - t^2\|_{2,\sigma} \leqslant$$
$$\leqslant \|c_l\|_{4,\sigma}\,\|c_l - t\|_{4,\sigma} + \|t\|_{4,\sigma}\,\|c_l - t\|_{4,\sigma}; \qquad (\text{П}.9)$$

$$\left\|\frac{d}{dt}c_l^2 - 2t\right\|_{2,\sigma} \leqslant \left\|2c_l\frac{d}{dt}c_l - 2c_l\right\|_{2,\sigma} + \|2c_l - 2t\|_{2,\sigma} \leqslant$$
$$\leqslant \|2c_l\|_{4,\sigma}\left\|\frac{d}{dt}c_l - 1\right\|_{4,\sigma} + \|2(c_l - t)\|_{2,\sigma}. \qquad (\text{П}.10)$$

Так как $\|c_l - t\|_{2,\sigma} \leqslant \|c_l - t\|_{4,\sigma}$ (мера $d\sigma$ нормирована, то для одновременного стремления к нулю (П.9) и (П.10) достаточно потребовать, чтобы $c_l(t) \xrightarrow{s} t$ в $W_{1,\sigma}^4$.

Аналогично при произвольном k для выполнения условий (20), (21) при $f = 1$ достаточно, чтобы $c_l(t) \xrightarrow{s} t$ в $W_{1,\sigma}^{2k}$.

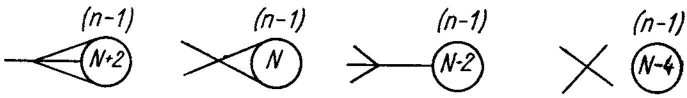
Наличие дополнительного вектора f в (20), (21) не вносит осложнений. Действительно, так как

$$\|(c_l^k - a^k)f\|_{2,\mu} \leqslant \|f\|_{4,\mu}\,\|c_l^k - a^k\|_{4,\mu} = \mathrm{const}\,\|c_l^k - t^k\|_{4,\sigma},$$

то можно ограничиться сходимостью в $W_{1,\sigma}^{2k+1}$. Таким образом, для существования пределов (20), (21) достаточно выбрать последовательность c_l так, чтобы ее образ $c_l(t) \xrightarrow{s} t$ в $W_{1,\sigma}^{2k+1}$.

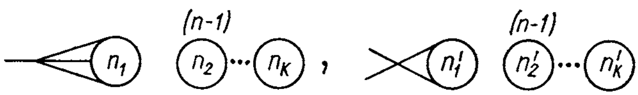
ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Как уже указывалось, ряд (100) содержит вклады от всех диаграмм S-матрицы без вакуумных петель. Причем вклады всех диаграмм n-го порядка получаются из вкладов от диаграмм $(n-1)$-го порядка применением оператора A. На языке диаграмм операция A означает присоединение вершины различными способами к диаграммам $(n-1)$-го порядка



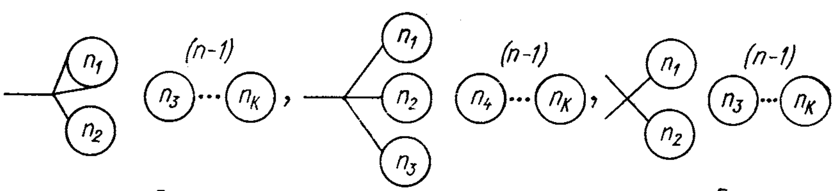
а б в г

При этом в случаях а) и б) эту вершину можно присоединить или к одной связанной компоненте (эти операции относятся к оператору S)



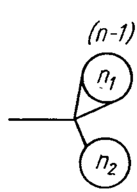
$а_1$ $б_1$

или к разным связанным компонентам, т. е. операция P



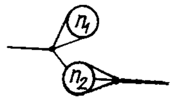
$а_2$ $а_3$ $б_2$

Покажем, что любую диаграмму n-го порядка можно получить из диаграмм $(n-1)$-го порядка, не прибегая к операциям $а_2$), $а_3$) и $б_2$). Для примера возьмем случай, когда операция $а_2$) связывает только два блока:



(П.11)

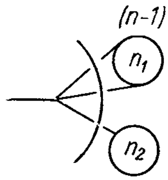
Так как $n_2 \geqslant 2$ и n_2 является связанным блоком, то его свободная внешняя линия присоединяется к n_2 одним из способов $а_1$), $б_1$) или $в$). Возьмем к примеру случай



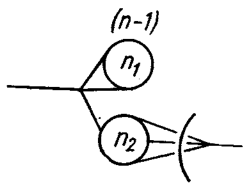
(П.12)

Таким образом, сравнивая (П.11) и (П.12), легко видеть, что одну и ту же диаграмму можно получить двумя различными способами:

1) действием оператора P на вклад от диаграммы $(n-1)$-го порядка



2) действием оператора S на вклад от диаграммы $(n-1)$-го порядка



Следовательно, ряд итераций уравнения (1) $F = \sum_{n=0}^{\infty} g'^n B^n F^0$ $(B = S + C)$ будет содержать вклады от всех топологически неэквивалентных диаграмм S-матрицы, однако кратность их будет меньшей, чем в матрице рассеяния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Glimm J., Jaffe A.** «Ann. Mat.», 1970, v. 91, p. 362; «Acta Math.», 1970, v. 125, p. 203.
2. **Guerra F., Rosen L., Simon B.** «Comm. Math. Phys.», 1972, v. 27, p. 10; 1973, v. 29, p. 233.
3. **Nelson E.** Report Amer. Math. Soc. Summer Inst. Berkley, 1971; «J. Fuct. Anal.», 1973, v. 12, p. 97—112, 211—227.
4. **Schwinger J.** «Phys. Rev.», 1959, v. 115, p. 72.
5. **Nakano T.** «Progr. Theor. Phys.», 1959, v. 21, p. 241.
6. **Fradkin E. S.** «Nucl. Phys.», 1963, v. 49, p. 624; **Фрадкин Е. С.** «Докл. АН СССР», 1954, т. 98, с. 47; «ЖЭТФ», 1954, т. 29, с. 751; В кн.: Труды физического ин-та АН СССР. Т. 29, 1965, М., «Наука», с. 7.
7. **Symanzik K.** «J. Math. Phys.», 1966, v. 7, p. 510; In: Proc. Intern. School of Physics. «E. Fermi», Academic Press, 1969.
8. **Taylor J. G.** «J. Math. Phys.», 1966, v. 7, p. 172.
9. **Efimov G. V.** «Comm. Math. Phys.», 1967, v. 5, p. 42; 1968, v. 7, p. 138; **Ефимов Г. В.** «Ядерная физика», 1966, т. 4, с. 432.
10. **Glimm J., Spencer T.** Preprint Courant Inst. N.Y., 1972.

11. **Fivel D.** «Phys. Rev.», 1971, v. 40, p. 1653.
12. **Петрина Д. Я., Скрипник В. И.** «ТМФ», 1971, т. 8, с. 369; **Petrina D. Ya., Skripnik V. I.** Preprint ITP-71.
13. **Albeverio S., Hegh-Krohn R.** Preprint Oslo Univ., 1972.
14. **Guerra F., Rosen L., Simon B.** «Phys. Lett. B»., 1972, v. 44, p. 102.
15. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. М., Гостехиздат, 1957.
16. **Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К.** Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., Физматгиз, 1958.
17. **Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.** Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М., «Наука», 1969.
18. **Петрина Д. Я.** «Изв. АН СССР, сер.мат.», 1968, т. 32, с. 1052; Докт. дис. Ин-т математики АН УССР, Киев, 1968.
19. **Медведев Б. В., Поливанов М. К.** В кн.: Лекции в Международной школе. Дубна, 1964; «ЖЭТФ», 1961, т. 41, с. 1130; «Докл. АН СССР», 1962, т. 143, с. 1071.
20. **Файнберг В. Я.** В кн.: Лекции в международной школе. Дубна, 1964; «ЖЭТФ», 1965, т. 47, с. 2285.
21. **Lehman H., Symanzik K., Zimmermann W.** «Nuovo cimento», 1965, v. 1, p. 205.
22. **Иванов С. С., Петрина Д. Я.** «Докл. АН СССР», 1968, т. 88, с. 776.
23. **Petrina D. Ya.** Preprint ITP-70-36, 1970; **Петрина Д. Я.** «ТМФ», 1970, т. 4, с. 389.
24. **Osterwalder K., Schrader R.** «Comm. Math. Phys.», 1973, v. 31, p. 83; **Glaser V.** Preprint CERN, 1973.
25. **Медведев Б. В. и др.** «ТМФ», 1972, т. 13, с. 3.
26. **Киржниц Д. А.** «ЖЭТФ», 1961, т. 41, с. 551.
27. **Ivanov S. S., Rebenko A. L.** Preprint ITP-71-38E, 1971; **Иванов С. С., Ребенко А. Л.** «ТМФ», 1972, т. 11, с. 190.
28. **Ivanov S. S.** Preprint ITP-70-27, 1970.
29. **Nelson E.** In: Mat. Theory of Elementary Particles. Cambredge, 1966.
30. **Ivanov S. S.** Preprint ITP-72-15E, 1972.
31. **Шварц Л.** Анализ. Т. I. Пер. с англ. М., «Мир», 1972, с. 658.
32. **Ivanov S. S., Petrina D. Ya., Rebenko A. L.** Preprint ITP-73-92E, 1973; **Иванов С. С., Петрина Д. Я., Ребенко А. Л.** «ТМФ», 1974, т. 19, с. 37.
33. **Dimock J.** Preprint Courant Inst. N. Y., 1973.
34. **Эдвардс Р.** Функциональный анализ. Пер. с англ. М., «Мир», 1972, с. 382.
35. **Березин Ф. А.** Метод вторичного квантования. М., «Наука», 1965.
36. **Березанский Ю. М.** Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, «Наукова думка», 1965.
37. **Jaffe A.** «Comm. Math. Phys.», 1965, v. 1, p. 127.
38. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов. Изд. 5-е. М., «Наука», 1971.