«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1976, ТОМ 7, ВЫП. 3

УДК 530.145: 538.3

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ НА МАЛЫХ РАССТОЯНИЯХ

П. И. Фомин

Институт теоретической физики
АН УССР, Киев

Дан обзор некоторых методов и результатов исследования квантовой электродинамики (КЭД) на малых расстояниях, выходящих за рамки теории возмущений. Показана возможность существования решения «сверхпроводящего типа» для динамической массы электрона и найдена структура этого решения. Рассмотрен вопрос об истинном (вне теории возмущений) характере расходимостей в КЭД. Показана справедливость принципа соответствия при $\hbar \to 0$ в задаче о собственной энергии электрона. С учетом гравитации в рамках общей теории относительности построена чисто полевая классическая ($\hbar = 0$) модель заряженной частицы, не содержащая расходимостей.

A review on methods and results in developing the quantum electrodynamics (QED) at small distances beyond the frames of the perturbation theory is given. The possibility of the existence of a «superconductivity type» solution for the dynamical electron mass is shown; the structure of this solution is found. The problem of true (beyond the perturbation theory) nature of divergences in QED is discussed. The validity of the correspondence principle at $\hbar \to 0$ is shown for the problem of the proper electron energy. Considering gravitation on the framework of general relativity, a pure field classical ($\hbar = 0$)-model of charged particle free of divergences is built.

ВВЕДЕНИЕ

Современная квантовая электродинамика (КЭД) является наиболее развитым и «реалистическим» [1] разделом квантовой теории поля. Установлено блестящее согласие перенормированной КЭД с экспериментом вплоть до расстояний 10^{-15} *см* [2], значительно меньших характерных электродинамических длин $\hbar/mc$, e^2/mc^2. Вместе с тем в КЭД остаются нерешенными некоторые «внутренние» вопросы, связанные со структурой теории на очень малых расстояниях (больших импульсах), в частности с проблемой расходимостей. Трудность задачи связана с тем, что она требует выхода за рамки теории возмущений, поскольку на малых расстояниях электродинамическое взаимодействие становится большим, несмотря на малость постоянной тонкой структуры.

Хотя с развитием метода перенормировок проблема расходимостей в КЭД утратила свою прежнюю остроту, она далеко не снята с повестки дня ни в самой электродинамике, ни тем более в других, менее развитых теориях, для которых КЭД служит примером и источником идей и методов. Методы перенормировки не решают проблему расходимостей по существу, а лишь обходят ее, вводя в теорию экспериментальные массы и заряд феноменологическим путем вместо формально расходящихся величин. Актуальность исследования структуры теории на малых расстояниях обусловлена прежде всего необходимостью поиска путей решения этой проблемы и выяснения возможностей теории поля в объяснении наблюдаемых масс и, возможно, также констант взаимодействий.

Тот факт, что из-за расходимостей современная теория поля принципиально неспособна объяснить значения масс электрона и других частиц, является многозначительным в эвристическом отношении. Именно здесь сосредоточен существенный разрыв теории с экспериментом, необходимость устранения которого должна послужить руководящей нитью в поисках более последовательной и содержательной теории. Он показывает, что для решения проблемы расходимостей важны не столько формальные усовершенствования, сколько поиски такого физического обобщения теории, которое приближало бы ее к решению проблемы масс.

Необходимым предварительным условием такого поиска, очевидно, является выяснение истинной (вне теории возмущений) ситуации с расходимостями в современной КЭД. Именно здесь следует искать информацию, позволяющую сузить априорно весьма широкий выбор возможных направлений обобщения.

В настоящем обзоре излагаются результаты проделанного в этом направлении анализа КЭД на малых расстояниях, полученные в основном автором с сотрудниками в последние годы. В этих работах используются и развиваются дальше методы, выходящие за рамки обычной теории возмущений, развитые ранее в работах Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосова и И. М. Халатникова [3], Е. С. Фрадкина [4] и др. (суммирование асимптотически наиболее важных фейнмановских диаграмм или асимптотическое решение интегральных уравнений Дайсона) и в работах Гелл-Манна и Лоу [5], Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова [6] и др. (функциональные уравнения ренормировок и дифференциальные уравнения ренормгруппы).

В физическом плане основной руководящей идеей, организующей направление анализа, является указанное выше соображение об органической связи проблемы расходимостей с проблемой масс. Эта связь подкрепляется анализом размерностей: в КЭД недостает по крайней мере одной размерной постоянной, чтобы можно было сконструировать массу,— именно с этим связана расходимость интеграла собственной энергии (введение «затравочной» массы m_0, как будет видно ниже, не спасает положения).

На первый взгляд, изложенному соображению противоречит тот факт, что в КЭД расходится не только собственная энергия электрона, но и такие безразмерные величины, как перенормировки волновых функций и поляризация вакуума, выражаемые дайсоновскими факторами Z_1, Z_2 и Z_3. Однако в действительности, как мы увидим, единственной истинно расходящейся величиной в КЭД является собственная энергия, расходимости безразмерных величин связаны с теорией возмущений и сокращаются при более последовательном рассмотрении.

Важным новым физическим моментом является реализация в КЭД идеи о возможной «сверхпроводящей» природе фермионных масс [7, 8] и вырождении фермионного вакуума.

Анализ КЭД будет проведен с обычным лагранжианом взаимодействия, предполагая, что вклад малых расстояний во взаимодействие обрезается некоторым лоренц-инвариантным параметром Λ. Вводя параметр Λ, будем рассматривать его как феноменологического представителя недостающей в теории фундаментальной постоянной, эффективно обрезающей взаимодействие на малых расстояниях, и в связи с этим особое внимание будем обращать на исследование зависимости от Λ основных величин теории.

Будет показано, в частности, что для физической массы электрона m, определяемой как полюс полной электронной функции Грина, при определенных условиях реализуется динамическое решение «сверхпроводящего типа»

$$m = \Lambda f(\alpha) + 0(m_0), \tag{1}$$

где

$$f(\alpha) = \exp\left\{-\frac{3\pi}{2\alpha} + \frac{9}{8}\ln\frac{1}{\alpha} + c_1 + c_2\alpha + \ldots\right\}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \ll 1; \tag{2}$$

$$f(\alpha) = \alpha/2; \quad \alpha = e^2/(\hbar c) \gg 1. \tag{3}$$

В силу неаналитичности $f(\alpha)$ в точке $\alpha = 0$ результат (1) нельзя получить методом разложения по α.

Подстановка выражения (1) для m в выражения для дайсоновских констант перенормировок приводит к сокращению в них параметра Λ:

$$\lim_{\Lambda\to\infty} Z_{1,2,3}(\Lambda/m, \alpha) = Z_{1,2,3}(f^{-1}(\alpha), \alpha), \tag{4}$$

и они становятся конечными функциями α. Для Z_3 при этом оказываются выполненными неравенства $0 \leqslant Z_3 \leqslant 1$ в соответствии со спектральными представлениями Челлена — Лемана.

7—01256

Эти результаты приводят к исчезновению известных трудностей с «нуль-зарядом» [9] и аномальными особенностями функций Грина («духами») [10]. Единственной реальной трудностью локальной ($\Lambda \to \infty$) КЭД оказывается линейная расходимость собственной энергии электрона. Истинная ситуация с расходимостями в КЭД, следовательно, качественно такая же, как и в классической электродинамике. Данный вывод подкрепляется далее доказательством выполнения принципа соответствия в задаче о собственной энергии при $\hbar \to 0$. Последнее, иными словами, означает, что расходимости в классической и квантовой теориях имеют единую природу.

Этот вывод является важным в том отношении, что делает разумным поиск физического обобщения электродинамики, содержащего новую фундаментальную постоянную и свободного от расходимостей, уже на уровне классической теории ($\hbar = 0$) с тем, чтобы развитый здесь подход обобщить затем на квантовую область.

Здесь излагается подход [11], реализующий в рамках классической электродинамики идею о регуляризующей роли гравитации. Он заключается в использовании свойства «динамической замороженности» поверхности горизонта (сферы Шварцшильда), которая возникает на малых расстояниях в метрике, создаваемой полем сосредоточенного заряда. Этот подход позволяет построить не содержащий расходимостей и удовлетворяющий принципу равенства инертной и гравитационной масс чисто полевой вектор энергии импульса заряженной частицы, из требования правильных трансформационных свойств которого вытекает следующая связь между «классической» массой частицы, зарядом и гравитационной постоянной:

$$m = eG^{-1/2}. \qquad (5)$$

Сравнение результатов (1), (3) и (5) позволяет произвести отождествление $\Lambda = 2\hbar c/(e\sqrt{G})$. Если это значение Λ подставить в формулу (2), учитывающую квантовые эффекты, придем к формуле

$$m = 2\hbar c e^{-1} G^{-1/2} \exp\{-3\pi/2\alpha + (9/8)\ln 1/\alpha + c_1 + c_2\alpha + \ldots\}, \qquad (6)$$

выражающей массу через три мировые постоянные и заряд.

Изложенную схему и результаты следует, конечно, рассматривать лишь как попытку решить некоторые принципиальные вопросы теории. О сравнении (6) с экспериментальным значением массы говорить преждевременно, поскольку здесь рассмотрена идеализированная однофермионная схема, не учитывающая вклада других частиц и полей.

1. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СТРУКТУРА АСИМПТОТИК ФУНКЦИЙ ГРИНА И КОНСТАНТ ПЕРЕНОРМИРОВОК [12]

Найдем здесь функциональную структуру асимптотик перенормированных по Дайсону функций Грина и вершинной функции, а также структуру дайсоновских констант перенормировок Z_1, Z_2, Z_3 и $Z_0 = m_0/m$, рассматриваемых как функции параметров Λ/m и α (Λ — инвариантный параметр обрезания; m и α — перенормированные масса и константа связи).

Вывод опирается на свойство перенормируемости КЭД и существования у неперенормированных (по заряду) функций пределов при $m \to 0$. Используемый метод близок к известному методу ренормализационной группы Гелл-Манна — Лоу [5] и Боголюбова — Ширкова [6], но отличается от него тем, что здесь не используются групповые свойства ренормировок и функциональные уравнения формулируются непосредственно для дайсоновских функций и перенормировочных констант, которые зависят от физического заряда e^2, определяемого по рассеянию при малых импульсах. Это обстоятельство упрощает рассмотрение и интерпретацию результатов, поскольку не вводятся дополнительные параметры λ', λ'', e^2_λ, связанные с группой ренормировок.

Полученные результаты в дальнейшем послужат, с одной стороны, основой для отыскания явного вида асимптотик функций Грина и констант перенормировок в «трехвершинном» и «пятивершинном» приближениях и, с другой стороны, для качественного анализа структуры КЭД на малых расстояниях.

Обратимся вначале к электронной функции. Запишем неперенормированную функцию Грина электрона в форме [13]

$$G_N^{-1}(p) = -\hat{p}A_N(p^2, m, \Lambda, \alpha_0) + \mathrm{i}m_0 B_N(p^2, m, \Lambda, \alpha_0). \qquad (7)$$

В скалярных функциях A_N и B_N затравочную массу m_0 предполагаем исключенной с помощью соотношения

$$m_0 = m - \mathrm{i}\Sigma_0(m, \Lambda, \alpha_0) \equiv mZ(\Lambda/m, \alpha_0), \qquad (8)$$

где $\mathrm{i}\Sigma_0$ — массовый оператор на массовой поверхности, т. е. в (7) произведена перенормировка массы. Множитель m_0 перед B_N можно, конечно, также представить в форме (8) и включить фактор Z в B_N, но не будем этого делать по следующей причине. Функции A_N и B_N обладают важным свойством, используемым в дальнейшем: у них существуют конечные пределы при $m \to 0$. Величина же $Z(\Lambda/m, \alpha_0)$ пределом при $m \to 0$ не обладает, и поэтому ее включение в B_N разрушило бы указанное свойство функции B_N.

Вводя перенормированную функцию Грина

$$G^{-1}(p, \lambda) = -\hat{p}A(p^2/m^2, \lambda/m, \alpha) + \mathrm{i}mB(p^2/m^2, \lambda/m, \alpha), \qquad (9)$$

которая связана с $G_N(p)$ соотношением Дайсона, выражающим свойство перенормируемости $G_N = Z_2 G$, получаем связь между скалярными функциями:

$$A_N(p^2, m, \Lambda, \alpha_0) = Z_2^{-1}(\Lambda/m, \lambda/m, \alpha)\, A(p^2/m^2, \lambda/m, \alpha); \tag{10}$$

$$(m_0/m)\, B_N(p^2, m, \Lambda, \alpha_0) = Z_2^{-1}(\Lambda/m, \lambda/m, \alpha)\, B(p^2/m^2, \lambda/m, \alpha)$$
$$(\lambda^2 \ll m^2,\ p^2 + m^2). \tag{11}$$

Здесь λ —«масса» фотона, вводимая для устранения инфракрасной расходимости, возникающей в методе регуляризации Дайсона — Уорда за счет вычитания на массовой поверхности $p^2 + m^2 = 0$, на которой функции A_N и B_N имеют особенность (точка ветвления). При условии $p^2 + m^2 \gg \lambda^2 > 0$, т. е. вне массовой поверхности, в неперенормированных функциях A_N и B_N можно перейти к пределу $\lambda \to 0$.

Из того факта, что параметр λ, входящий в функции A, B и Z_2, не входит в левые части соотношений (10) и (11), следует, что зависимость от λ факторизуется:

$$\left.\begin{aligned} A(p^2/m^2, \lambda/m, \alpha) &= r(\lambda/m, \alpha)\, A(p^2/m^2, \alpha);\\ B(p^2/m^2, \lambda/m, \alpha) &= r(\lambda/m, \alpha)\, B(p^2/m^2, \alpha);\\ Z_2(\Lambda/m, \lambda/m, \alpha) &= r(\lambda/m, \alpha)\, Z_2(\Lambda/m, \alpha). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Функция $r(\lambda/m, \alpha)$ определена в работе [14] и имеет вид (поперечная калибровка)

$$r(\lambda/m, \alpha) = \exp[-(3\alpha/2\pi)\ln(\lambda/m)]. \tag{13}$$

Легко показать, что точно такой же инфракрасный фактор выделяется и у вершинной функции.

Для дальнейшего является важным существование пределов при $m \to 0$ у функций A_N и B_N:

$$A_N(p^2, 0, \Lambda, \alpha_0) \equiv A_N(\Lambda^2/p^2, \alpha),\ \ B_N(p^2, 0, \Lambda, \alpha_0) \equiv$$
$$\equiv B_N(\Lambda^2/p^2, 0, \alpha_0). \tag{14}$$

Это свойство легко доказать с помощью анализа соответствующих диаграмм Фейнмана в любом порядке: в фейнмановских интегралах m всегда входит в сумме с электронным импульсом и пренебрежение m не влияет ни на ультрафиолетовые, ни на инфракрасные расходимости. Можно предполагать, что это свойство имеет место и безотносительно к теории возмущений. Вычеркивание аргумента m соответствует пренебрежению членами порядка m^2/p^2 и т. п. по сравнению с единицей.

С учетом (12) и (14) соотношения (10) и (11) переходят в

$$A_N(\Lambda^2/p^2, \alpha_0) = Z_2^{-1}(\Lambda/m, \alpha)\, A(p^2/m^2, \alpha); \tag{15}$$

$$B_N(\Lambda^2/p^2, \alpha_0) = Z_0^{-1}(\Lambda/m, \alpha)\, Z_2^{-1}(\Lambda/m, \alpha)\, B(p^2/m^2, \alpha). \tag{16}$$

Аналогичное соотношение для поперечной фотонной функции Грина

$$D_{\mu\nu}(k) = (\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2)\, d(k^2/m^2, \alpha)/ik^2. \tag{17}$$

имеет вид

$$d_N(\Lambda^2/k^2, \alpha_0) = Z_3(\Lambda/m, \alpha)\, d(k^2/m^2, \alpha), \tag{18}$$

$$\alpha_0 = \alpha Z_3^{-1}(\Lambda/m, \alpha). \tag{19}$$

В (16) введена функция

$$Z_0(\Lambda/m, \alpha) \equiv Z(\Lambda/m, \alpha Z_3^{-1}(\Lambda/m, \alpha)) = m_0/m, \tag{20}$$

которая получается после подстановки (19) в функцию Z в равенстве (8).

Можно показать, что соотношения, аналогичные (15) и (16), справедливы и для скалярных функций, через которые выражается вершинная функция, но для краткости не будем их здесь выписывать.

Соотношения (15) — (19) представляют собой систему функциональных уравнений, определяющих функциональную структуру всех входящих в них функций, в том числе перенормировочных факторов $Z_{0,\,2,\,3}$. Разделив равенства (18), (15) и (16) на такие же равенства с некоторыми другими значениями импульсов и используя вытекающее из (18) и (19) соотношение $\alpha_0 d_N(\Lambda^2/\mu^2, \alpha_0) = \alpha d(\mu^2/m^2, \alpha) \equiv \alpha_\mu$, легко получить три уравнения, общее решение которых имеет следующий вид [5,15]:

$$d(k^2/m^2, \alpha) = \alpha^{-1} F(\varphi(\alpha) + \ln(k^2/m^2)); \tag{21}$$

$$A(p^2/m^2, \alpha) = a(\alpha)\, H_1(\varphi(\alpha) + \ln(p^2/m^2)); \tag{22}$$

$$B(p^2/m^2, \alpha) = b(\alpha)\, H_2(\varphi(\alpha) + \ln(p^2/m^2)) \tag{23}$$

$$(\Lambda^2 \gg k^2,\ p^2 \gg m^2),$$

где φ, a, b, F, H_1 и H_2 — некоторые функции одного аргумента.

Таким образом, асимптотики перенормированных по Дайсону — Уорду функций Грина имеют следующую функциональную структуру (калибровка поперечная):

$$D_{\mu\nu}(k) = (\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2)\, F(\varphi(\alpha) + \ln(k^2/m^2))/(i\alpha k^2); \tag{24}$$

$$G^{-1}(p, \lambda) = \exp\left\{-\frac{3\alpha}{2\pi}\ln\frac{\lambda}{m}\right\} \times$$
$$\times \left[-\hat{p}a(\alpha)\, H_1\left(\varphi(\alpha) + \ln\frac{p^2}{m^2}\right) + imb(\alpha)\, H_2\left(\varphi(\alpha) + \ln\frac{p^2}{m^2}\right)\right]. \tag{25}$$

Для вершинной функции аналогичное рассмотрение приводит к результату

$$\Gamma_\mu(p, q, \lambda, \alpha) = \exp\left\{-\frac{3\alpha}{2\pi}\ln\frac{\lambda}{m}\right\} a(\alpha) \times$$
$$\times \sum_i O_\mu^{(i)} \gamma^{(i)}\left(\varphi(\alpha) + \ln\frac{p^2}{m^2},\ \varphi(\alpha) + \ln\frac{pq}{m^2},\ \varphi(\alpha) + \ln\frac{q^2}{m^2}\right), \tag{26}$$

где $a(\alpha)$ — та же одноаргументная функция, что и в (22); $\gamma^{(i)}$ — некоторые функции трех аргументов; $O_\mu^{(i)}$ — векторные линейно независимые безразмерные комбинации из векторов p_μ, q_μ и матриц γ_μ.

Так как масса m должна выпадать из правых частей уравнений (15) — (18) после того, как α выражено через α_0 с помощью (19) (в этом, собственно, состоит смысл этих уравнений), и так как входящие в них перенормированные функции имеют структуру (21) — (23), то и константы перенормировок $Z_{0,\,2,\,3}$, рассматриваемые как функции Λ/m и α, должны обладать характерной функциональной структурой. Отыскать ее можно функциональными методами и с помощью дифференцирования по массе. Изложим здесь второй способ.

Учитывая (19) и (21), запишем уравнение (18) в форме

$$\alpha_0 d_N(\Lambda^2/k^2,\ \alpha_0) = F(\varphi(\alpha) + \ln(k^2/m^2)) \tag{27}$$

и возьмем частную производную по $\ln m^2$ при фиксированном α_0 от обеих частей этого равенства, что приведет к уравнению

$$\varphi'(\alpha)(\partial\alpha/\partial\ln m^2)_{\alpha_0} = 1. \tag{28}$$

Дифференцируя соотношение (19), имеем

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\ln m^2}\right)_{\alpha_0} = \alpha_0\left\{\frac{\partial Z_3}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\ln m^2}\right)_{\alpha_0} + \frac{\partial Z_3}{\partial\ln m^2}\right\}.$$

Находя отсюда $(\partial\alpha/\partial\ln m^2)_{\alpha_0}$ и подставляя в (28), получаем следующее уравнение для Z_3:

$$\varphi'(\alpha)\frac{\partial Z_3}{\partial\ln m^2} + \frac{\partial Z_3}{\partial\alpha} - \frac{Z_3}{\alpha} = 0. \tag{29}$$

Его общее решение имеет вид

$$Z_3(\Lambda/m,\ \alpha) = \alpha X_3(\varphi(\alpha) + \ln(\Lambda^2/m^2)), \tag{30}$$

где X_3 — некоторая функция одного аргумента. На основании (30) и (19), находим

$$\alpha_0 = X_3^{-1}(\varphi(\alpha) + \ln(\Lambda^2/m^2)). \tag{31}$$

Структура $Z_2(\Lambda/m,\ \alpha)$ вытекает из уравнения (15) и результатов (22) и (31). Подставим (22) в (15) и продифференцируем обе части равенства по m при фиксированном α_0, т. е. с учетом (31) при фиксированной комбинации $\varphi(\alpha) + \ln(\Lambda^2/m^2)$. При этом

$$(\partial/\partial m)_{\alpha_0} H_1(\varphi(\alpha) + \ln(p^2/m^2)) = 0.$$

В результате приходим к уравнению

$$(\partial/\partial m)_{\alpha_0}[Z_2^{-1}(\Lambda/m,\ \alpha)\,a(\alpha)] = 0.$$

Отсюда

$$Z_2^{-1}(\Lambda/m,\ \alpha)\, a(\alpha) = f(\alpha_0)$$

или, учитывая (31),

$$Z_2(\Lambda/m,\ \alpha) = a(\alpha)\, X_2(\varphi(\alpha) + \ln(\Lambda^2/m^2)), \tag{32}$$

где $a(\alpha)$ — та же функция, что и в (22); X_2 — новая функция одного аргумента.

Подставим теперь результаты (23) и (32) в (16):

$$B_N\left(\frac{\Lambda^2}{p^2},\ \alpha_0\right) = Z_0^{-1}\left(\frac{\Lambda}{m},\ \alpha\right)\frac{b(\alpha)}{a(\alpha)}\frac{H_2(\varphi(\alpha)+\ln(p^2/m^2))}{X_2(\varphi(\alpha)+\ln(\Lambda^2/m^2))}. \tag{33}$$

Аналогично выводу (32) находим отсюда

$$Z_0(\Lambda/m,\ \alpha) = [b(\alpha)/a(\alpha)]\, X_0(\varphi(\alpha) + \ln(\Lambda^2/m^2)), \tag{34}$$

где X_0 — еще одна одноаргументная функция.

Соотношение

$$m_0/m = [b(\alpha)/a(\alpha)]\, X_0(\varphi(\alpha) + \ln(\Lambda^2/m^2)) \tag{35}$$

представляет собой уравнение, определяющее перенормированную (физическую) массу m как функцию m_0, Λ и α. При выводе результата (35), равно как (30) и (32), пренебрегли лишь членами порядка m/Λ, логарифмические же члены типа $\alpha^k\,[\alpha \ln(\Lambda/m)]^n$ все учтены.

Найдем, наконец, функциональную структуру неперенормированных функций. На основании (31) можно написать

$$\varphi(\alpha) + \ln(\Lambda^2/m^2) = \overline{X}_3(\alpha_0^{-1}) \equiv \psi(\alpha_0). \tag{36}$$

Далее, используя (15) — (19), (21) — (23), (30), (32) и (34), можно получить

$$d_N(\Lambda^2/k^2,\ \alpha_0) = \alpha_0^{-1} F(\psi(\alpha_0) - \ln(\Lambda^2/k^2)); \tag{37}$$

$$A_N(\Lambda^2/p^2,\ \alpha_0) = a_N(\alpha_0)\, H_1(\psi(\alpha_0) - \ln(\Lambda^2/p^2)); \tag{38}$$

$$B_N(\Lambda^2/p^2,\ \alpha_0) = b_N(\alpha_0)\, H_2(\psi(\alpha_0) - \ln(\Lambda^2/p^2)), \tag{39}$$

где

$$a_N(\alpha_0) = X_2^{-1}(\psi(\alpha_0)); \quad b_N(\alpha_0) = a_N(\alpha_0)\, X_0^{-1}(\psi(\alpha_0)). \tag{40}$$

2. АСИМПТОТИКИ ФУНКЦИЙ ГРИНА И ПЕРЕНОРМИРОВОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ В «ТРЕХВЕРШИННОМ» И «ПЯТИВЕРШИННОМ» ПРИБЛИЖЕНИЯХ [16, 17]

Полученные выше результаты о функциональной структуре функций Грина и констант перенормировок содержат неопределенные одноаргументные функции, которые можно приближенно определить, используя дополнительно результаты вычислений по теории возмущений. Определим здесь таким способом явный вид асимптотик функций Грина и констант Z_i в так называемых «трехвершинном» и «пятивершинном» приближениях, которые соответствуют суммированию всех членов вида $(\alpha L)^n$ и $\alpha(\alpha L)^n$, являющихся главными в рядах, представляющих рассматриваемые величины, если выполнены условия $\alpha \ll 1$, $\alpha L \lesssim 1$.

Заметим, что все найденные выше функциональные соотношения имеют общую структуру

$$f(L, \alpha) = g(\alpha)\, h(\varphi(\alpha) + L); \quad L \equiv \ln(k^2/m^2); \quad \ln(p^2/m^2); \quad \ln(\Lambda^2/m^2). \tag{41}$$

Если $g(\alpha)$ — известная функция, как это имеет место в случае d и Z_3, то (41) позволяет найти $f(L, \alpha)$ по $\varphi(\alpha)$, $g(\alpha)$ и $f(0, \alpha)$. Действительно, вводя функцию $\bar{\varphi}$, обратную φ, так что

$$\bar{\varphi}[\varphi(\alpha)] = \alpha, \tag{42}$$

на основании (41) имеем

$$h(\varphi) = f(0, \bar{\varphi}[\varphi])/g(\bar{\varphi}[\varphi]) \tag{43}$$

и, следовательно,

$$f(L, \alpha) = g(\alpha)\, g^{-1}(\bar{\varphi}[\varphi(\alpha) + L])\, f(0, \bar{\varphi}[\varphi(\alpha) + L]). \tag{44}$$

Переходя конкретно к функциям d и Z_3 и учитывая, что для них $g(\alpha)$ равно соответственно α^{-1} и α, получаем

$$d(\ln(k^2/m^2), \alpha) = \\ = \alpha^{-1}\bar{\varphi}[\varphi(\alpha) + \ln(k^2/m^2)]\, d(0, \bar{\varphi}[\varphi(\alpha) + \ln(k^2/m^2)]); \tag{45}$$

$$Z_3(\ln(\Lambda/m), \alpha) = \\ = \alpha Z_3(0, \bar{\varphi}[\varphi(\alpha) + \ln(\Lambda^2/m^2)])/\bar{\varphi}[\varphi(\alpha) + \ln(\Lambda^2/m^2)]. \tag{46}$$

Если $g(\alpha)$ неизвестна, как, например, в случае функций A, B, Z_2 и Z_0, то для определения $f(L, \alpha)$ нужно знать $\varphi(\alpha)$, $f(0, \alpha)$ и $\frac{\partial}{\partial L} f(L, \alpha)\,|_{L=0}$. Действительно, из (41) нетрудно найти

$$f(L, \alpha) = f(0, \alpha) \exp\left\{ \int\limits_{\alpha}^{\bar{\varphi}[\varphi(\alpha)+L]} \xi(\bar{\varphi})\, \varphi'(\bar{\varphi})\, d\bar{\varphi} \right\}, \tag{47}$$

где

$$\xi(\bar{\varphi}) = \frac{\partial}{\partial L} \ln f(L, \bar{\varphi})\,|_{L=0}. \tag{48}$$

Обратимся теперь к теории возмущений. Для асимптотик $f(L, \alpha)$ теория возмущений приводит к двойным рядам по α и αL следующего вида:

$$f(L, \alpha) = (1 + f_{01}\alpha + f_{02}\alpha^2 + \ldots) + \\ + (f_{10} + f_{11}\alpha + f_{12}\alpha^2 + \ldots)\,\alpha L + \ldots \tag{49}$$

Обычно структуру (49) получают из конкретных вычислений с диаграммами или уравнениями Дайсона. Интересно отметить [15], что она автоматически вытекает из того факта, что $f(L, \alpha)$ представимы в форме (41) и дополнительного предположения о разложимости $f(L, \alpha)$ по α. Продемонстрируем это на примере фотонной функции. Для нее имеем на основании (21)

$$\alpha d(L, \alpha) = F(\varphi(\alpha) + L), \quad L = \ln(k^2/m^2). \tag{50}$$

Из (50) видно, что если αd разложима в ряд по α, то разложима и функция $1/\varphi'(\alpha)$. Подставив в (50) разложение

$$d(L, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(L)\alpha^n; \quad 1/\varphi'(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\alpha^n, \tag{51}$$

находим, что $a_0 = 0$ и

$$d_n'(L) = \sum_{m=0}^{n} (m+1)\, a_{n-m+1} d_m(L). \tag{52}$$

Из (52) последовательно получаем, учитывая, что $d_0(L) = 1$, $d_0'(L) = 0$:

$$1)\ a_1 = 0;$$

$$2)\ d_1'(L) = a_2; \quad d_1(L) = a_2 L + b_1;$$

$$3)\ d_2'(L) = a_3 + 2a_2(a_2 L + b_1),$$

$$d_2(L) = (a_2 L)^2 + (a_3 + 2a_2 b_1)L + b_2 \text{ и т. д.}$$

Таким образом, $d_n(L)$ — полином n-й степени по L. Подставляя этот результат в (51), придем к структуре (49).

Заметим, что если в области $L \gg 1$ удержать в $d_n(L)$ только старший член $d_n(L) \approx (a_2 L)^n$, то ряд (51) для d легко суммируется:

$$d(L, \alpha) = (1 - a_2\alpha L)^{-1}. \tag{53}$$

Теория возмущений дает $a_2 = 1/3\pi$, и таким путем приходим к известной асимптотической формуле, впервые полученной в работе [3] решением уравнений Дайсона.

Вернемся теперь к (49). Из этого разложения следует

$$\left.\begin{aligned} &f(0, \alpha) = 1 + f_{01}\alpha + f_{02}\alpha^2 + \ldots; \\ &\frac{\partial}{\partial L} f(L, \alpha)\Big|_{L=0} = \alpha(f_{10} + f_{11}\alpha + f_{12}\alpha^2 + \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Найдем вначале функцию $\varphi(\alpha)$. Из (50) вытекает

$$\varphi(\alpha) = \int^{\alpha} \frac{\dfrac{\partial}{\partial\alpha}[\alpha d(0, \alpha)]}{\alpha\left[\dfrac{\partial}{\partial L} d(L, \alpha)\right]_{L=0}} d\alpha + \varphi_0. \tag{55}$$

Постоянную интегрирования φ_0 можно взять равной нулю, $\varphi_0 = 0$, так как, согласно (41), ее можно включить в определение функции h. Подставляя разложение (54) для d в (35) и интегрируя почленно, получаем следующее разложение:

$$\varphi(\alpha) = -\frac{1}{\alpha d_{10}} + \frac{1}{d_{10}}\left(2d_{01} - \frac{d_{11}}{d_{10}}\right)\ln\alpha + \varphi_1\alpha + \varphi_2\alpha^2 + \ldots, \qquad (56)$$

где коэффициенты φ_1, φ_2, ... строятся определенным образом из коэффициентов d_{0k} и d_{1k}. Первые из них

$$d_{01} = -5/9\pi; \quad d_{10} = 1/3\pi, \quad d_n = -13/108\pi^2. \qquad (57)$$

Поэтому

$$\varphi(\alpha) = -3\pi/\alpha + (9/4)\ln(1/\alpha) + \varphi_1\alpha + \varphi_2\alpha^2 + \ldots \qquad (58)$$

Таким образом, функция $\varphi(\alpha)$ обладает особенностями в точке $\alpha = 0$. Далее увидим, что это обстоятельство имеет важное значение для существования решения «сверхпроводящего типа».

Подставив (48), (54) в (47) и выполнив интегрирование, найдем

$$f(L, \alpha) = (1 + f_{01}\alpha + f_{02}\alpha^2 + \ldots)(\bar{\varphi}[\varphi(\alpha) + L]/\alpha)^{3\pi f_{10}} \times$$
$$\times \exp\{[3\pi(f_{11} - f_{10}f_{01}) - 9f_{10}/4](\bar{\varphi}[\varphi(\alpha) + L] - \alpha) + \ldots\}. \qquad (59)$$

Функция $\bar{\varphi}[y]$ определяется уравнением

$$y = -3\pi/\bar{\varphi}[y] + (9/4)\ln(1/\bar{\varphi}[y]) + \varphi_1\bar{\varphi}[y] + \ldots, \qquad (60)$$

вытекающим из определения обратной функции $\varphi(\bar{\varphi}[y]) = y$ и выражения (58) для φ.

Формулы (58) — (60) дают схему приближений, определяющую функции $f(L, \alpha)$ в виде рядов по степеням $\bar{\varphi}[\varphi(\alpha) + L]$, причем коэффициенты этого ряда выражаются через коэффициенты разложений функций $f(0, \alpha)$ и $\frac{\partial}{\partial L} f(L, \alpha)|_{L=0}$ по степеням α.

Сравнивая (59) с (41), находим выражение для $g(\alpha)$ и h:

$$g(\alpha) = \alpha^{-3\pi f_{10}}\{1 + [9f_{10}/4 + f_{01}(1 + 3\pi f_{10}) - 3\pi f_{11}]\alpha + \ldots\}; \qquad (61)$$

$$h(\varphi(\alpha) + L) = (\bar{\varphi}[\varphi(\alpha) + L]^{3\pi f_{10}} \times$$
$$\times \{1 + 3\pi(f_{11} - f_{10}f_{01} - 3f_{10}/4\pi)\bar{\varphi}[\varphi(\alpha) + L] + \ldots\}). \qquad (62)$$

Двойные ряды теории возмущений (49) можно записать более компактно:

$$f(L, \alpha) = f_0(\alpha L) + \alpha(f_1(\alpha L) + \alpha^2 f_2(\alpha L) + \ldots), \qquad (63)$$

где

$$f_m(\alpha L) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn}(\alpha L)^n. \qquad (64)$$

Произведение αL [$L = \ln(k^2/m^2)$, $\ln(p^2/m^2)$, $\ln(\Lambda^2/m^2)$] в области больших импульсов не является малым и поэтому функции $f_m(\alpha L)$

нужно знать точно. Так как физическая константа связи $\alpha \ll 1$, можно ожидать, что уже несколько первых членов ряда (63) хорошо аппроксимируют $f(L, \alpha)$, во всяком случае вдали от особых точек функций $f_m(\alpha L)$ более высокого индекса.

Учет первого члена $f_0(\alpha L)$ в (63) будем называть $(\alpha L)^n$ или также «трехвершинным» приближением (ему соответствует ограничение трехвершинными скелетными диаграммами в представлении вершинной функции). Учет второго члена $\alpha f_1(\alpha L)$-пятивершинным или $\alpha(\alpha L)^n$-приближением (ему соответствует учет пятивершинных диаграмм) и т. д.

Функции $f_0(\alpha L)$, $f_1(\alpha L)$ и т. п. можно вычислить прямыми методами суммирования соответствующих членов рядов теории возмущений или, что удобнее, асимптотическим решением интегральных уравнений Дайсона с соответствующей точностью. С ростом номера функции эти вычисления, однако, очень быстро усложняются.

Изложенная выше схема приближений, основанная на использовании функциональных соотношений ренормировок, дает более удобную схему для отыскания функций $f_m(\alpha L)$: в этой схеме все дело сводится к вычислению конечного числа коэффициентов f_{mn} в разложениях (49). Продемонстрируем, как эта схема позволяет найти $(\alpha L)^n$- и $\alpha(\alpha L)^n$-приближения. В $(\alpha L)^n$-приближении достаточно взять [см. (58) и (60)]

$$\varphi(\alpha) \approx -3\pi/\alpha, \quad \bar{\varphi}[y] \approx -3\pi/y, \tag{65}$$

откуда

$$\alpha/\bar{\varphi}[\varphi(\alpha)+L] \approx -(\alpha/3\pi)(-3\pi/\alpha+L) = 1-\alpha L/3\pi. \tag{66}$$

Для d и Z_3 в рассматриваемом приближении согласно (45) и (46) находим

$$d(\ln(k^2/m^2), \alpha) = \bar{\varphi}[\varphi(\alpha)+\ln(k^2/m^2)]/\alpha = \\ = [1-(\alpha/3\pi)\ln(k^2/m^2)]^{-1}; \tag{67}$$

$$\alpha/\alpha_0 = Z_3(\ln(\Lambda^2/m^2), \alpha) = \alpha/\bar{\varphi}[\varphi(\alpha)+\ln(\Lambda^2/m^2)] = \\ = 1-(\alpha/3\pi)\ln(\Lambda^2/m^2). \tag{68}$$

Для A, B, Z_2 и Z_0, согласно (59), с $(\alpha L)^n$-точностью имеем

$$f(L, \alpha) = \{\alpha/\bar{\varphi}[\varphi(\alpha)+L]\}^{-3\pi f_{10}} = (1-\alpha L/3\pi)^{-3\pi f_{10}}. \tag{69}$$

Вычисления по теории возмущений дают $A_{10} = Z_{10}^{(2)} = 0$, $B_{10} = Z_{10}^{(0)} = -3/4\pi$ и поэтому в $(\alpha L)^n$-приближении (в поперечной калибровке):

$$A(\ln(p^2/m^2), \alpha) = Z_2(\ln(\Lambda^2/m^2), \alpha) \approx 1; \tag{70}$$

$$B(\ln(p^2/m^2), \alpha) = (1-(\alpha/3\pi)\ln(p^2/m^2))^{9/4}; \tag{71}$$

$$m_0/m = Z_0(\ln(\Lambda^2/m^2), \alpha) = (1-(\alpha/3\pi)\ln(\Lambda^2/m^2))^{9/4}. \tag{72}$$

Перейдем к $\alpha(\alpha L)^n$-приближению. При этом, согласно (58), (60), (45) и (46), имеем:

$$\varphi(\alpha) \approx -3\pi/\alpha + (9/4)\ln(1/\alpha); \tag{73}$$

$$1/\bar{\varphi}[y] \approx -y/3\pi + (3/4\pi)\ln(-y/3\pi); \tag{74}$$

$$\alpha/\bar{\varphi}[\varphi(\alpha)+L]/ \approx (1-\alpha L/3\pi) + (3\alpha/4\pi)\ln(1-\alpha L/3\pi); \tag{75}$$

$$d(L, \alpha) \approx \frac{\bar{\varphi}[\varphi(\alpha)+L]}{\alpha}\{1 + d_{01}\bar{\varphi}[\varphi(\alpha)+L]\}; \tag{76}$$

$$Z_3(L, \alpha) \approx \frac{\alpha}{\bar{\varphi}[\varphi(\alpha)+L]}\{1 + Z_{01}^{(3)}\bar{\varphi}[\varphi(\alpha)+L]\}. \tag{77}$$

Вычисления дают $d_{01} = -5/9\pi$, $Z_{01}^{(3)} = 1/18\pi$ и поэтому

$$d\left(\ln\frac{k^2}{m^2}, \alpha\right) = \frac{1}{\eta}\left[1 - \frac{5\alpha}{9\pi}\frac{1}{\eta} - \frac{3\alpha}{4\pi}\frac{\ln\eta}{\eta}\right]; \tag{78}$$

$$d^{-1}\left(\ln\frac{k^2}{m^2}, \alpha\right) = \eta + \frac{3\alpha}{4\pi}\ln\eta + \frac{5\alpha}{9\pi}, \quad \eta \equiv 1 - \frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{k^2}{m^2}; \tag{79}$$

$$Z_3\left(\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}, \alpha\right) = \zeta + \frac{3\alpha}{4\pi}\ln\zeta + \frac{\alpha}{18\pi}, \quad \zeta \equiv 1 - \frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}. \tag{80}$$

Рассмотрим теперь A, B, Z_2 и Z_0. Формула (59) с $\alpha(\alpha L)^n$-точностью приобретает вид

$$f(L, \alpha) \approx \left\{\frac{\alpha}{\bar{\varphi}[\varphi(\alpha)+L]}\right\}^{-3\pi f_{10}}\left\{1 + f_{01}\alpha + \right.$$
$$\left. + \left[3\pi(f_{11} - f_{10}f_{01}) - \frac{9}{4}f_{10}\right](\bar{\varphi}[\varphi(\alpha)+L] - \alpha)\right\}. \tag{81}$$

Комбинация в первой фигурной скобке дается (75), а комбинация во второй фигурной скобке может быть взята из (66), т. е.

$$\bar{\varphi}[\varphi(\alpha)+L] - \alpha = \alpha[1/(1-\alpha L/3\pi) - 1]. \tag{82}$$

Вычисления коэффициентов по теории возмущений дают $A_{01} = B_{01} = -3/4\pi$, $A_{11} = 7/32\pi^2$; $B_{11} = 59/48\pi^2$; $Z_{01}^{(2)} = -9/8\pi$; $Z_{11}^{(2)} = 3/32\pi^2$; $Z_{01}^{(0)} = -3/8\pi$, $Z_{11}^{(0)} = 29/48\pi^2$ и поэтому

$$A\left(\ln\frac{p^2}{m^2}, \alpha\right) = 1 - \frac{3\alpha}{4\pi}\left[1 + \frac{7}{8}\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\right], \quad \xi \equiv 1 - \frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{p^2}{m^2}; \tag{83}$$

$$B\left(\ln\frac{p^2}{m^2}, \alpha\right) = \xi^{9/4}\left\{1 + \frac{3\alpha}{4\pi}\left[\frac{9}{4}\frac{\ln\xi}{\xi} - 1 + \frac{59}{12}\left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\right]\right\}; \tag{84}$$

$$Z_2\left(\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}, \alpha\right) = 1 - \frac{9\alpha}{4\pi}\left[1 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)\right], \quad \zeta = 1 - \frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}; \tag{85}$$

$$\frac{m_0}{m} = Z_0 = \zeta^{5/4}\left(\zeta + \frac{27\alpha}{16\pi}\ln\zeta + \frac{85\alpha}{32\pi} - \frac{97\alpha}{32\pi}\zeta\right). \tag{86}$$

Опираясь на результаты предыдущего и этого разделов, перейдем теперь к обсуждению вопросов структуры КЭД на малых расстояниях.

3. РЕШЕНИЕ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ТИПА ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ МАССЫ ЭЛЕКТРОНА [12, 17, 18]

Вскоре после создания теории сверхпроводимости [19] Намбу [7], а также В. Г. Ваксом и А. И. Ларкиным [8] была высказана идея о том, что в рамках квантовой теории поля у возбуждений безмассового (затравочная масса $m_0 = 0$) фермионного поля может возникнуть динамическая масса m с помощью механизма, формально аналогичного механизму возникновения энергетической щели в теории сверхпроводимости, в результате динамической перестройки вакуума. Иными словами, фермионные массы могут иметь «сверхпроводящую» природу.

Эта интересная идея была подтверждена на модельных примерах [7, 20]. Несомненный интерес представляет ее подтверждение в такой реалистической теории, какой является КЭД. Покажем здесь, что при определенных условиях в КЭД действительно реализуется сверхпроводящее решение для физической массы электрона [12, 17, 18].

Электродинамический лагранжиан

$$\mathcal{L} = -(\partial_\nu A_\mu)^2/2 - \bar{\psi}(\gamma\partial + m_0)\psi/2 - \bar{\psi}^c(\gamma\partial + m_0)\psi^c/2 + j_\mu A_\mu \tag{87}$$

при нулевой затравочной массе $m_0 = 0$ приобретает дополнительную симметрию по отношению к киральному преобразованию

$$\psi(x) \to \exp(i\lambda\gamma_5)\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}\exp(i\lambda\gamma_5). \tag{88}$$

Наличие этой группы приводит к тому, что при вычислениях по теории возмущений для физической (перенормированной) массы $m(0, \Lambda, \alpha)$ получается нулевой результат в каждом конечном порядке теории возмущений. Это означает фактически, что имеем дело с решением $m \sim m_0$. Это явно видно, например, из результатов первых порядков теории возмущений

$$m(m_0, \Lambda, \alpha) = m_0\left\{1 + \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{3}{2}\ln\frac{\Lambda}{m_0} + \frac{3}{8}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha^2}{\pi^2}\left(\frac{13}{8}\ln^2\frac{\Lambda}{m_0} - \frac{7}{3}\ln\frac{\Lambda}{m_0} + c\right) + \ldots\right\}. \tag{89}$$

Из (83), однако, можно заметить, что хотя каждый член в пределе $m_0 \to 0$ обращается в нуль, относительная величина последовательных членов имеет порядок $\alpha \ln \Lambda/m_0$ и неограниченно растет при $m_0 \to 0$. Это означает, что теория возмущений не применима для рассмотрения собственной энергии электрона в случае $m_0 = 0$.

Из соображений размерности следует ожидать, что ненулевое решение, если оно существует, будет иметь вид

$$m(0, \Lambda, \alpha) = \Lambda f(\alpha), \tag{90}$$

причем функция $f(\alpha)$ должна обладать особенностью при $\alpha = 0$, не позволяющей получить решение (90) методом разложения по α. Покажем, что, опираясь на свойство перенормируемости КЭД, можно существенно выйти за рамки обычной теории возмущений в задаче о собственной энергии и при этом действительно получить решение вида (90).

В силу перенормируемости КЭД собственную энергию электрона можно выразить через полную (перенормированную) массу m, и, если воздерживаться от разложения m по α, получим вместо (89) ряд следующего вида:

$$m = m_0 + m\frac{\alpha}{\pi}\left[\frac{3}{2}\ln\frac{\Lambda}{m} + \frac{3}{8} - \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{5}{8}\ln^2\frac{\Lambda}{m} + \frac{29}{24}\ln\frac{\Lambda}{m} + c\right) + \ldots\right]. \tag{91}$$

Соотношение (91) представляет собой уравнение для m. Положив в нем $m_0 = 0$, видим, что помимо $m = 0$ это уравнение в принципе допускает ненулевое решение, определяемое из «условия самосогласованности»:

$$\frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{3}{2}\ln\frac{\Lambda}{m} + \frac{3}{8}\right) + \frac{\alpha^2}{\pi^2}\left(-\frac{5}{8}\ln^2\frac{\Lambda}{m} - \frac{29}{24}\ln\frac{\Lambda}{m} + c\right) + \ldots = 1. \tag{92}$$

Решение уравнения (92) имеет структуру

$$m = \Lambda \exp\{-B/\alpha + \chi(\alpha)\}, \tag{93}$$

где B — число; $\chi(\alpha)$ — функция, менее сингулярная, чем $1/\alpha$, т. е. такая, что $\lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha\chi(\alpha) = 0$.

Ниже определим число B и с некоторой неопределенностью функцию $\chi(\alpha)$. Начнем рассмотрение с $(\alpha L)^n$-приближения, отвечающего учету старших членов в (91) и (92) вида $[(\alpha/\pi)\ln(\Lambda/m)]^n$, затем учтем $\alpha\,(\alpha L)^n$-члены и, наконец, рассмотрим ситуацию при учете всех $\alpha^k\,(\alpha L)^n$-членов.

В $(\alpha L)^n$-приближении уравнение для массы имеет вид [см. (72)]

$$m_0/m = [1 - (\alpha/3\pi)\ln(\Lambda^2/m^2)]^{9/4}. \tag{94}$$

При $m_0 = 0$ (94) допускает помимо $m = 0$ ненулевое решение сверхпроводящего типа

$$m = \Lambda \exp\{-3\pi/2\alpha\}. \tag{95}$$

Сравнивая с (93), находим, что $B = 3\pi/2$.

При учете также всех $\alpha\,(\alpha L)^n$-членов уравнение для массы приобретает вид (86), где ζ приведено в (85). Будем искать при

$m_0 = 0$ решение уравнения (86) вида (93). Подставляя (93) в (85), находим $\zeta = 2\alpha X(\alpha)/3\pi$. Для $X(\alpha)$ на основании (86) получаем уравнение

$$\chi^{5/4}\left[\chi + \frac{81}{32}\ln\left(\frac{2\alpha}{3\pi}\chi\right) + \frac{3}{2}\frac{85}{32} - \frac{97}{32}\frac{\alpha}{\pi}\chi\right] = 0. \tag{96}$$

Корень $X = 0$ не представляет интереса, поскольку он, как будет видно ниже, «не выживает» при учете высших приближений вида $\alpha^k(\alpha L)^n$. Корень выражения в квадратных скобках имеет вид $\chi(\alpha) = \frac{32}{81}\ln\frac{1}{\alpha} + \ldots$, где многоточием обозначены менее сингулярные, чем $\ln\alpha^{-1}$, члены. Ниже увидим, что учет $\alpha^k(\alpha L)^n$-приближений влияет на вид $\chi(\alpha)$, сохраняя, однако, ее логарифмический характер.

При учете всех логарифмических членов вида $\alpha^k(\alpha L)^n$ наша информация об уравнении для массы выражается функциональным соотношением (35), содержащим неопределенные одноаргументные функции. В силу малости α функции $\varphi(\alpha)$, $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ достаточно хорошо аппроксимируются выражениями (58) и [ср. (22), (23) и (83), (84)]

$$a(\alpha) = 1 - \frac{45}{32}\frac{\alpha}{\pi} + \ldots; \quad b(\alpha) = \alpha^{9/4}\left(1 - \frac{71}{16}\frac{\alpha}{\pi} + \ldots\right). \tag{97}$$

Вид функции $X_0(v)$, где $v = \varphi(\alpha) + \ln(\Lambda^2/m^2)$, был найден выше в $(\alpha L)^n$- и $\alpha(\alpha L)^n$-приближениях, в которых явным образом демонстрируются возможность существования решения сверхпроводящего типа и его структура. Покажем, что функциональные соотношения (35) и (30) позволяют сформулировать условия «выживания» этого решения при учете всех $\alpha^k(\alpha L)^n$-приближений и более точно установить его вид.

При $m_0 = 0$ на основании (35) приходим к уравнению

$$X_0(\varphi(\alpha) + \ln(\Lambda^2/m^2)) = 0. \tag{98}$$

Условием существования решения сверхпроводящего типа является наличие вещественного корня v_0 у функции $X_0(v)$. При этом

$$\varphi(\alpha) + \ln(\Lambda^2/m^2) = v_0 \tag{99}$$

и с учетом (58) приходим к решению

$$m(0, \Lambda, \alpha) = \Lambda\exp[\varphi(\alpha)/2 - v_0/2] =$$
$$= \Lambda\exp\{-3\pi/2\alpha + (9/8)\ln(1/\alpha) - v_0/2 + (\varphi_1/2)\alpha + \ldots\}, \tag{100}$$

подтверждающему сделанные выше утверждения.

Заметим, что подстановка (99) в (31) дает

$$\alpha_0 = X_3^{-1}(v_0) \tag{101}$$

и, следовательно, затравочная константа связи фиксируется теорией как условие разрешимости задачи. Естественно ожидать, что v_0 и $X_3(v_0)$ не могут сильно отличаться от единицы и, таким образом, затравочная константа связи не может быть малой.

Возникновение динамической массы $m > 0$ при нулевой затравочной массе связано со спонтанным нарушением киральной симметрии (88) исходного лагранжиана (87) при $m_0 = 0$ и соответствующим вырождением физического вакуума. Если бы физический вакуум был, как и лагранжиан, инвариантен относительно преобразования (88), то массовый член в электронной функции Грина [член $m_0 B_N$ в (7) или член mB в (9)] не мог возникнуть. Действительно, пусть преобразованию (88) отвечает унитарный оператор U:

$$U^{-1}\psi(x)\,U = \exp(i\lambda\gamma_5)\,\psi(x);$$
$$U^{-1}\overline{\psi}(y)\,U = \overline{\psi}(y)\exp(i\lambda\gamma_5) \tag{102}$$

и пусть вакуум инвариантен:

$$U\,|\,0\rangle \exp(i\beta)\,|\,0\,\rangle. \tag{103}$$

Тогда из определения функции Грина и свойств симметрии (103) и (102) следует

$$G(x-y) = \langle 0\,|\,T\psi(x)\,\overline{\psi}(y)|\,0\rangle = \langle 0\,|\,TU^{-1}\psi(x)\,UU^{-1}\overline{\psi}(y)\,U\,|\,0\rangle =$$
$$= \exp(i\lambda\gamma_5)\,G(x-y)\exp(i\lambda\gamma_5)$$

и, следовательно,

$$\{\gamma_5, G\} = 0. \tag{104}$$

Подставляя сюда $G^{-1} = -\hat{p}A + mB$, находим $mB = 0$.

Таким образом, массовый член может возникнуть только при нарушении условия (103), т. е. в случае неинвариантного (вырожденного) вакуума. Справедливо и обратное утверждение: появление в полной функции Грина массового члена mB, где m — динамическая масса, т. е. возникающая целиком в результате взаимодействия, в теории с $m_0 = 0$ свидетельствует о нарушении симметрии физического вакуума (103), причем это нарушение является динамическим и спонтанным: вакуум невзаимодействующих полей симметричен, включение же взаимодействия приводит к динамической перестройке вакуума с потерей исходной симметрии и понижением энергии. Можно показать [7], что эта перестройка обусловлена энергетически выгодным процессом образования в вакууме связанных пар затравочных безмассовых ($m_0 = 0$) фермионов с противоположными импульсами и киральностями и «выпадением» этих пар в бозе-конденсат. Это явление аналогично «феномену Купера» в теории сверхпроводимости. Указанные «спаривания» приводят к образованию энергетической щели в спектре однофермионных возбуждений, которая играет роль массы фермиона.

Покажем явным образом, что в нашей задаче о сверхпроводящем решении в КЭД с $m_0 = 0$ появление массового члена mB в перенормированной функции Грина, что в силу равенства (10) эквивалентно «выживанию» члена $m_0 B_N$ при $m_0 \to 0$ в неперенормированной функции Грина (7), действительно является целиком динамическим эффектом, связанным с появлением особенности у функции B_N при включении взаимодействия. Проще всего продемонстрировать это в $(\alpha L)^n$-приближении, в котором на основании формул (70) — (72) и (68) легко получить:

$$B_N(\Lambda^2/p^2, \alpha_0) = [1 + (\alpha_0/3\pi) \ln (\Lambda^2/p)^2]^{9/4} =$$
$$= [1 + (m/m_0)^{4/9} (\alpha/3\pi) \ln (\Lambda^2/p^2)]^{9/4} \xrightarrow[m_0 \to 0]{}$$
$$\to (m/m_0) [(\alpha/3\pi) \ln (\Lambda^2/p^2)]^{9/4}. \qquad (105)$$

Таким образом, при условии $\alpha > 0$ и $m = \Lambda f(\alpha) > 0$ функция B_N в пределе $m_0 \to 0$ приобретает особенность $\sim 1/m_0$, что и позволяет «выжить» произведению $m_0 B_N$.

Этот метод рассмотрения фактически соответствует методу квазисредних Боголюбова [21]: в лагранжиан вводится вначале член, пропорциональный m_0, нарушающий симметрию (88), затем производятся вычисления динамических эффектов и лишь в конце устремляется $m_0 \to 0$. Наличие в системе динамической неустойчивости по отношению к малому возмущению проявляется в появлении у некоторых функций сингулярности по малому параметру m_0 и «выживанию» при $m_0 \to 0$ эффектов, связанных с этими функциями.

С другой стороны, наш метод отыскания сверхпроводящего решения в КЭД аналогичен также методу Горькова [22], в котором наличие бозе-конденсата куперовских пар в физическом вакууме отражается введением в однофермионную функцию Грина дополнительных компонент (в нашем случае члена mB), нарушающих исходную симметрию лагранжиана, для которых затем формулируются уравнения Дайсона и доказывается наличие, при определенных условиях, ненулевого решения у этих уравнений.

4. О ХАРАКТЕРЕ РАСХОДИМОСТЕЙ В КЭД ВНЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Вопрос о характере расходимостей вне теории возмущений, т. е. об истинном поведении констант перенормировок при $\Lambda \to \infty$, является одной из принципиальных проблем современной КЭД. Важно выяснить, какие из «ультрафиолетовых» расходимостей имеют принципиальную природу и связаны с несовершенством локальной теории поля на малых расстояниях, а какие обусловлены использованием теории возмущений. Важно установить

8—01256

также истинный тип расходимости действительно расходящихся величин.

Выше было показано, что в КЭД с $m_0 = 0$ «сверхпроводящая» масса электрона линейно зависит от Λ: $m = \Lambda f(\alpha)$. Подстановка этого выражения для m в выражении для перенормировочных констант приводит к сокращению в них параметра обрезания:

$$Z_{1,2,3}(\Lambda/m, \alpha) = Z_{1,2,3}(f^{-1}(\alpha), \alpha), \tag{106}$$

и они превращаются в некоторые конечные функции α.

В терминах функциональных представлений это выражается следующим образом. Для «сверхпроводящего» решения справедливо равенство (99). Подставляя (99) в (30) и (32), находим

$$Z_3(\Lambda/m(0, \Lambda, \alpha), \alpha) = \alpha X_3(v_0); \tag{107}$$

$$Z_2(\Lambda/m(0, \Lambda, \alpha), \alpha) = a(\alpha) X_2(v_0). \tag{108}$$

Поскольку функции X_0, X_3 и X_2 не содержат каких-либо малых или больших параметров, то естественно ожидать, что числа v_0, $X_3(v_0)$ и $X_2(v_0)$ имеют порядок единицы. Можно сказать поэтому, учитывая (107), (108) и (97), что перенормировочные константы имеют следующий порядок: $Z_3 \sim \alpha$, $Z_2 \sim 1$.

Явные выражения для перенормировочных констант в $(\alpha L)^n$- и $\alpha(\alpha L)^n$-приближениях, полученные в разд. 2, подтверждают, с соответствующей этим приближениям точностью, такую оценку. Как нетрудно проверить, значение константы Z_3 попадает в интервал $0 \leqslant Z_3 \leqslant 1$ в соответствии со спектральными представлениями Челлена — Лемана [23].

Таким образом, в КЭД с $m_0 = 0$ и «сверхпроводящим» решением для физической массы единственной величиной, существенно зависящей от параметра обрезания Λ и расходящейся в пределе $\Lambda \to \infty$, является собственная энергия электрона, причем она расходится линейно, а не логарифмически, в отличие от результатов теории возмущений. Заметим, что эта ситуация с расходимостями качественно аналогична ситуации в классической электродинамике, которая служит предельным случаем КЭД при $\hbar \to 0$. К этому вопросу вернемся в разд. 6.

Покажем теперь, что полученные выводы о характере расходимостей в КЭД не связаны с условием $m_0 = 0$, а являются следствием выхода за рамки теории возмущений. Рассмотрим для этого КЭД с $m_0 > 0$, причем будем считать m_0 некоторым независимым параметром, который не меняется при $\Lambda \to \infty$. Уравнение, определяющее функцию $m(m_0, \Lambda, \alpha)$ с учетом $(\alpha L)^n$- и $\alpha(\alpha L)^n$-приближений, дается (86). Покажем, что из него вытекает асимптотически линейный характер роста m с Λ при фиксированных m_0 и $\alpha \ll 1$.

Ограничимся вначале $(\alpha L)^n$-приближением (94). Из (94) следует, что

$$0 \leqslant m_0/m \leqslant 1. \tag{109}$$

Разрешим уравнение (94) относительно m/Λ, рассматривая m_0/m как параметр, лежащий в пределах (109):

$$m = \Lambda \exp\left\{-\frac{3\pi}{2\alpha}\left[1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^{4/9}\right]\right\}. \tag{110}$$

Отсюда видно, что m растет с Λ неограниченно и, так как параметр m_0/m при этом асимптотически приближается к нулю, характер роста m с Λ асимптотически становится линейным, причем предельная форма $m = \Lambda \exp(-3\pi/2\alpha)$ имеет существенную особенность в точке $\alpha = 0$.

Отметим, что в неасимптотической области (не очень большое Λ/m_0) рост $m(m_0, \Lambda, \alpha)$ с Λ является логарифмическим и достаточно хорошо представляется теорией возмущений. Действительно, в этой области m близко к m_0 и соответствующую формулу для $m(m_0, \Lambda, \alpha)$ можно получить из (94) заменой m на m_0 под знаком логарифма:

$$m(m_0, \Lambda, \alpha) = m_0\left(1-\frac{2\alpha}{3\pi}\ln\frac{\Lambda}{m_0}\right)^{-9/4}, \tag{111}$$

$$\frac{2\alpha}{3\pi}\ln\frac{\Lambda}{m_0} < 1, \quad \frac{\Lambda}{m_0} < \exp(3\pi/2\alpha). \tag{112}$$

Результат (111), очевидно, представляет собой сумму всех членов вида $(\alpha \ln \Lambda/m_0)^n$ ряда (89). Таким образом, область применимости теории возмущений в задаче об $m(m_0, \Lambda, \alpha)$ ограничена условием (112). Теория возмущений, следовательно, не позволяет рассмотреть ни предел $\Lambda \to \infty$, ни $m_0 \to 0$.

Обратимся теперь к полному уравнению (86). Легко видеть, что учет $\alpha(\alpha L)^n$-членов качественно не меняет характер уравнения и его решения. Из определения ζ (85) видно, что, пока рост m с Λ не вышел на линейный режим, параметр ζ уменьшается с ростом Λ. В пределе $\Lambda \to \infty$ он, очевидно, должен достигнуть значения $\zeta_0(\alpha)$, являющегося корнем правой части равенства (86), точнее, корнем выражения в скобках. Этот корень имеет порядок $\alpha \ln \alpha^{-1}$ и лежит в интервале

$$0 < \zeta_0(\alpha) \ll 1. \tag{113}$$

Таким образом, $\zeta \xrightarrow[\Lambda\to\infty]{} \zeta_0(\alpha)$ и, следовательно:

$$m(m_0, \Lambda, \alpha) \to \Lambda \exp\left\{-\frac{3\pi}{2\alpha}[1-\zeta_0(\alpha)]\right\}, \tag{114}$$

т. е. $m(m_0, \Lambda, \alpha)$ при $\Lambda \to \infty$ асимптотически приближается к сверхпроводящему решению (93), отвечающему $m_0 = 0$ при произвольном Λ.

Рассмотрим теперь константу Z_3. Начнем с анализа результатов $(\alpha L)^n$-приближения. При этом

$$Z_3(\Lambda/m,\ \alpha)=1-\frac{2\alpha}{3\pi}\ln\frac{\Lambda}{m}. \tag{115}$$

Учитывая (94) и (110), находим

$$Z_3=(m_0/m)^{4/9}=(m_0/\Lambda)^{4/9}\exp\left\{\frac{2\pi}{3\alpha}\left[1-(m_0/m)^{4/9}\right]\right\}. \tag{116}$$

В силу (109) это выражение заключено в интервале (0, 1); при $\Lambda\to\infty$ значение Z_3 стремится к нулю [к краю интервала (0, 1)].

Учтем теперь вклад $\alpha\,(\alpha L)^n$-приближения. При этом

$$Z_3=\zeta+\frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{3}{4}\ln\zeta+\frac{1}{18}\right);\quad \zeta=1-\frac{2\alpha}{3\pi}\ln\frac{\Lambda}{m}. \tag{117}$$

Учитывая, что $\zeta\underset{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow}\zeta_0(\alpha)$, где $\zeta_0(\alpha)$ — корень уравнения

$$\zeta+\frac{\alpha}{\pi}\left[\frac{27}{16}\ln\zeta+\frac{85}{32}-\frac{97}{32}\zeta\right]=0, \tag{118}$$

находим

$$\lim_{\Lambda\to\infty}Z_3\left(\frac{\Lambda}{m\,(m_0,\ \Lambda,\ \alpha)},\ \alpha\right)=\zeta_0(\alpha)+\frac{\alpha}{\pi}\left[(3/4)\ln\zeta_0(\alpha)+(1/18)\right], \tag{119}$$

т. е. предельное при $\Lambda\to\infty$ значение Z_3 в КЭД с $m_0>0$ совпадает со значением Z_3 в КЭД с $m_0=0$. Так как, согласно (118), $\zeta_0(\alpha)$ имеет порядок $\alpha\ln\alpha^{-1}$, заключаем из (119), что в общем случае $m_0\geqslant 0$ для Z_3 выполняются неравенства $0\leqslant Z_3\leqslant 1$.

Аналогично для Z_2 можно получить

$$\lim_{\Lambda\to\infty}Z_2(\Lambda/m\,(m_0,\ \Lambda,\ \alpha),\ \alpha)=1+\frac{\alpha}{\pi}\left[\frac{9}{32}\,\frac{1}{\zeta_0(\alpha)}-\frac{45}{32}\right]\approx$$

$$\approx 1+\frac{1}{6\ln\alpha^{-1}}-\frac{45\alpha}{32\pi}\approx 1. \tag{120}$$

Таким образом, при рассмотрении в $(\alpha L)^n$- и $\alpha\,(\alpha L)^n$-приближениях в КЭД не обнаруживается иных трудностей с расходимостями, кроме линейной расходимости собственной энергии электрона.

Рассмотрим, наконец, функциональные представления для констант перенормировок (35), (30) и (32), учитывающие все $\alpha^k\,(\alpha L)^n$-приближения. Пусть $\overline{X}_0$ — символ функции, обратной по отношению к $X_0(v)$. Тогда на основании (35) имеем:

$$\varphi(\alpha)+\ln(\Lambda^2/m^2)=\overline{X}_0\,(m_0a(\alpha)/[mb(\alpha)]); \tag{121}$$

$$Z_3=\alpha X_3\,[\overline{X}_0(m_0a(\alpha)/[mb(\alpha)])]; \tag{122}$$

$$Z_2=a(\alpha)\,X_2\,[\overline{X}_0\,(m_0a(\alpha)/[mb(\alpha)])]. \tag{123}$$

Если при $m_0 = 0$ имеет место равенство $\overline{X}_0(0) = v_0$, где v_0 — конечный вещественный корень функции $X_0(v)$ и если функция $\overline{X}_0$ непрерывна (предполагать обратное нет оснований), можно заключить из (121), что m растет с увеличением Λ, так что аргумент $m_0 a(\alpha)/[mb(\alpha)]$ функции $\overline{X}_0$ уменьшается и, следовательно, асимптотически при $\Lambda \to \infty$ ситуация в теории с $m_0 > 0$ приближается к ситуации в теории с $m_0 = 0$.

О том, что роль затравочной массы m_0 не является определяющей в вопросе о расходимостях, можно заключить уже из того факта, что m_0 входит в лагранжиан теории в форме члена $m_0\overline{\psi}\psi$, который на малых расстояниях растет значительно слабее члена взаимодействия $e_0\overline{\psi}\hat{A}\psi$, поскольку именно этот последний, а не первый, порождает расходимости, так что на малых расстояниях членом $m_0\overline{\psi}\psi$ можно просто пренебречь.

Поскольку все же точный вид функции $X_0(v)$ пока неизвестен (результаты $(\alpha L)^n$- и $\alpha(\alpha L)^n$-приближений достаточно хорошо аппроксимируют эту функцию лишь в области $(-v) \gg 1$), представляет интерес обсудить кроме изложенной выше ситуации, реализующейся в $(\alpha L)^n$- и $\alpha(\alpha L)^n$-приближениях, также другие качественные возможности, допускаемые функциональными представлениями для Z_0 и Z_3:

$$m_0/m = g(\alpha) X_0[\varphi(\alpha) + \ln(\Lambda^2/m^2)]; \tag{124}$$

$$\alpha/\alpha_0 = Z_3 = \alpha X_3[\varphi(\alpha) + \ln(\Lambda^2/m^2)]. \tag{125}$$

Предположим вначале, что решение уравнения (124) $m(m_0, \Lambda, \alpha)$ при $\Lambda \to \infty$ неограниченно растет; тогда при достаточно больших Λ левой частью уравнения (124) можно пренебречь и оно асимптотически приобретает вид

$$X_0(\varphi(\alpha) + \ln(\Lambda^2/m)) = 0, \tag{126}$$

такой же, как при $m_0 = 0$. При этом характер роста m с Λ, т. е. характер расходимости собственной энергии электрона, зависит от того, конечен или бесконечен корень v_0 функции $X_0(v)$.

Если $v_0 < \infty$, приходим к решению, асимптотически приближающемуся при $\Lambda \to \infty$ к сверхпроводящему решению (100) с вытекающими отсюда изложенными выше следствиями.

Если $v_0 \to \infty$, это означает, что

$$\lim_{\Lambda\to\infty} (\Lambda/[m(m_0, \Lambda, \alpha)]) \to \infty, \tag{127}$$

т. е. m растет медленнее первой степени Λ. Для удовлетворения условия $0 \leqslant Z_3 \leqslant 1$ в этом случае необходимо, чтобы функция $X_3(v)$ имела конечный предел $X_3(\infty)$, такой, что

$$\alpha^{-1} \geqslant X_3(\infty) \geqslant 0. \tag{128}$$

Записав $m(m_0, \Lambda, \alpha) = \Lambda f(\Lambda/m_0, \alpha)$, находим из (127), что $f(\infty, \alpha) = 0$. Отсюда следует, что $m(0, \Lambda, \alpha) = 0$, т. е. решение, обладающее поведением (127), не имеет сверхпроводящего характера.

Предположим теперь, что при $\Lambda \to \infty$ решение $m(m_0, \Lambda, \alpha)$ имеет конечный предел $m(m_0, \infty, \alpha)$. Этот случай реализуется, если $X_0(\infty)$ — конечное положительное число. При этом из (124) следует

$$m(m_0, \infty, \alpha) = m_0/[X_0(\infty)\, g(\alpha)]. \tag{129}$$

Условие $0 \leqslant Z_3 \leqslant 1$ в этом случае будет снова иметь вид (128).

Итак, чтобы выяснить, какая из трех указанных возможностей реализуется, достаточно определить, каким из трех следующих способов ведет себя функция $X_0(v)$: 1) у нее имеется конечный вещественный корень; 2) она имеет бесконечный корень; 3) при $v \to \infty$ она стремится к конечному положительному пределу.

В рамках $(\alpha L)^n$- и $\alpha(\alpha L)^n$-приближений реализуется возможность 1). Есть основания ожидать, что это решение «выживает» и при учете всех $\alpha^k(\alpha L)^n$-приближений. Его физическая предпочтительность — в отсутствии существенной зависимости от затравочной массы.

Полное решение вопроса требует анализа уравнений, определяющих функции $X_0(v)$ и $X_3(v)$. Эта задача носит качественный характер, и можно надеяться получить ответ с помощью качественных методов, минуя значительно более сложную проблему отыскания явного вида $X_0(v)$ и $X_3(v)$.

5. ВОПРОС О НУЛЬ-ЗАРЯДЕ И НЕФИЗИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЯХ ФУНКЦИЙ ГРИНА В ОБЛАСТИ СВЕРХВЫСОКИХ ИМПУЛЬСОВ

Проблема нуль-заряда была сформулирована в работе [9] на основании результатов вычислений в $(\alpha L)^n$-приближении и заключается в следующем. В этом приближении связь между физическим и затравочным зарядами дается формулой

$$\alpha/\alpha_0 = 1 - (2\alpha/3\pi)\ln(\Lambda/m). \tag{130}$$

Если в (130) устремить $\Lambda \to \infty$ при фиксированном m, то $\alpha \to 0$ при любом $\alpha_0 > 0$.

Существенным условием этой теоремы о нуль-заряде является предположение о фиксированности m при рассмотрении предела $\Lambda \to \infty$. Замечаем, однако, что это предположение противоречит массовому уравнению (94). Согласно (94), обеспечить фиксированность m при $\Lambda \to \infty$ можно, только устремив одновременно $\alpha \to 0$. Но это означало бы, что доказательство нулификации заряда на основании соотношения (130) для поляризации вакуума опирается на допущение (фиксированность m), уже предполагающее сведение заряда к нулю.

Если не фиксировать искусственно m в (130), а взять для m выражение (95), вытекающее из массового уравнения (94), то (130) превратится в соотношение

$$\alpha/\alpha_0 = (1 + (\alpha_0/\alpha)\,[1 - (m_0/m)^{4/9}])^{-1}, \tag{131}$$

которое в пределе $\Lambda \to \infty$, $m_0/m \to 0$ переходит в

$$\alpha/\alpha_0 = (1 + \alpha_0/\alpha)^{-1}. \tag{132}$$

Из последнего видно, что α можно сохранить конечным и произвольным при $\alpha_0 \to \infty$. Условие $\alpha_0 \to \infty$, обеспечивающее конечность α, связано с ограничением $(\alpha L)^n$-приближением. При учете вклада $\alpha(\alpha L)^n$-приближения это условие становится менее жестким Связь между α и α_0 дается теперь соотношением (119) или

$$\alpha/\alpha_0 = \zeta_0(\alpha) + (\alpha/\pi)\,[(3/4)\ln \zeta_0(\alpha) + 1/18]. \tag{133}$$

Из уравнения (118), определяющего $\zeta_0(\alpha)$, вытекает

$$\frac{3\alpha}{4\pi}\ln \zeta_0(\alpha) \approx -\frac{4}{9}\zeta_0(\alpha) - \frac{85\alpha}{72\pi}.$$

Исключив таким образом $\ln \zeta_0(\alpha)$ в (133) и взяв в грубом приближении для ζ_0 значение $\zeta_0(\alpha) \approx (27\alpha/16\pi)\ln \alpha^{-1}$, получим оценку

$$\alpha_0^{-1} \approx \frac{1}{\pi}\left(\frac{15}{16}\ln \alpha^{-1} - \frac{9}{8}\right), \tag{134}$$

и уже не требуется, чтобы α_0 было бесконечным. Заметим, что для $\alpha = 1/137$ из (134) следует $\alpha_0 \sim 1$, т. е. α_0 не может быть и малым.

Подчеркнем, что снятие равенства нулю заряда в рассматриваемом подходе связано с тем нетривиальным фактом, что перенормированная масса m (m_0, Λ, α) растет асимптотически линейно с Λ. Если бы величина m (m_0, Λ, α) росла слабее первой степени Λ (например, логарифмически — как в теории возмущений), то учет зависимости m от Λ не спасал бы α в (130) от обращения в нуль.

Заметим, что хотя при этом трудность локальной ($\Lambda \to \infty$) теории фактически лишь переносится с нуль-заряда на линейную расходимость массы, это дает совершенно иное освещение ситуации на малых расстояниях в КЭД, концентрируя все трудности на проблеме массы, и по-иному направляет поиск физического обобщения теории, которое конструктивным образом решило бы проблему расходимости и проблему массы. К этому вопросу вернемся ниже.

Покажем теперь, что при учете асимптотически линейной зависимости m от Λ вместе с нуль-зарядом снимается и трудность с нефизическими особенностями, возникающими в перенормированных функциях Грина в области сверхвысоких импульсов.

В $(\alpha L)^n$-приближении особенность при $\eta = 1 - (\alpha/3\pi) \ln k^2/m^2 = 0$ появляется прежде всего в виде полюса в фотонной функции Грина

$$d(k^2/m^2, \alpha) = \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln k^2/m^2\right)^{-1}, \quad \Lambda^2 \gg k^2 \gg m^2. \tag{135}$$

Можно показать [18], что она появляется также в вершинной функции $\Gamma_\nu(p, q)$ в области $p \gg q \sim m$ в форме степенного ветвления. В $(\alpha L)^n$-приближении особенности при $\eta = 0$ и $\xi = 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln p^2/m^2 = 0$ проникают в электронную функцию Грина и «размножаются» в фотонной и вершинной функциях [см. (78), (83) и (84)].

С точки зрения развиваемого здесь подхода решение вопроса заключается в следующем: в области применимости полученных формул

$$\Lambda^2 \gg k^2, \; p^2 \gg m^2(m_0, \Lambda, \alpha) \tag{136}$$

особенности при $\eta = 0$ и $\xi = 0$ не достигаются при учете зависимости m от Λ, в области же $k^2, p^2 \gtrsim \Lambda^2$, которую можно формально рассмотреть, эти формулы должны быть заменены другими, в которых особенности не возникают. Продемонстрируем это на примере «полюса» фотонной функции Грина.

Рассмотрим вначале вопрос о полюсе в $(\alpha L)^n$-приближении. Учитывая (115), перепишем выражение (135) в форме

$$d^{-1} = 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{k^2} = Z_3 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda}{k^2} > Z_3 \geqslant 0. \tag{137}$$

Поскольку $0 \leqslant Z_3 \leqslant 1$, то всегда $d^{-1} > 0$ в области применимости результата (135).

Отсутствие полюса видно также, если с помощью соотношения $d = Z_3^{-1} d_N$ выразить перенормированную функцию d через неперенормированную d_N:

$$d^{-1} = Z_3 \left[1 + \left(\frac{\alpha_0}{3\pi}\right) \ln \left(\frac{\Lambda^2}{k^2}\right)\right]. \tag{138}$$

Из этого представления очевидно, что при $\alpha_0 \geqslant 0$ в области $\Lambda^2 \gtrsim k^2$ полюса не может быть, условие же $\alpha_0 \geqslant 0$, в силу (130), обеспечивается при всех Λ линейной зависимостью m от Λ.

За этой областью, т. е. при $k^2 > \Lambda^2$, формулы (135) и (138) не верны, так как становятся существенными обычно отбрасываемые «остаточные» члены $O(k^2/\Lambda^2)$. Правильное поведение функции d с учетом остаточных членов — обозначим ее при этом $d(k^2/m^2, k^2/\Lambda^2, \alpha)$ — в области $k^2 \gg \Lambda^2$ легко найти на основании следующих соображений.

В соответствии с определением d эта функция связана с поляризационным оператором $\Pi(k^2)$ равенством [13]

$$d^{-1}=\left\{1+\frac{i}{k^2}Z_3[\Pi(k^2)-\Pi(0)-k^2\Pi'(0)]\right\}=$$
$$=Z_3\left\{1+\frac{i}{k^2}[\Pi(k^2)-\Pi(0)]\right\}, \tag{139}$$

где было учтено, что $Z_3^{-1}=1+i\Pi'(0)$. С помощью анализа поведения фейнмановских диаграмм для $\Pi(k^2)$ нетрудно убедиться, что $\Pi(k^2)-\Pi(0)\sim\Lambda^4/k^2$ при $k^2\gg\Lambda^2$. Поэтому

$$d(k^2/m^2,\ k^2/\Lambda^2,\ \alpha)=Z_3^{-1}[1+0(\Lambda^4/k^4)],\quad k^2\gg\Lambda^2, \tag{140}$$

и, следовательно,

$$\lim_{k^2\to\infty} d(k^2/m^2,\ k^2/\Lambda^2,\ \alpha)=Z_3^{-1}(\Lambda/m,\ \alpha). \tag{141}$$

Такой же результат можно получить, как это обычно делается, на основании спектральных представлений [23]. В теории спектральных представлений выводятся соотношения,

$$d=1+k^2\int_0^\infty\frac{\sigma(M^2)\,dM^2}{k^2+M^2-i0}$$

$$Z_3^{-1}=1+\int_0^\infty\sigma(M^2)\,dM^2,\quad \sigma(M^2)>0,$$

из которых непосредственно следует (141).

Эффективно вклад остаточных членов $O(k^2/\Lambda^2)$ можно учесть, заменив (135) выражением

$$d(k^2/m^2,\ k^2/\Lambda^2,\ \alpha)=\left[1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{k^2}{m^2(1+k^2/\Lambda^2)}\right]^{-1}. \tag{142}$$

Это выражение переходит в (135) при $k^2\ll\Lambda^2$ и вместе с тем обладает свойством (141).

Обратим внимание, что характерный для области $\Lambda^2\gg k^2\gg m^2$ параметр разложения $(\alpha/\pi)\ln(k^2/m^2)$ перестает играть эту роль в области $k^2\gtrsim\Lambda^2$ и заменяется параметром $(\alpha/\pi)\ln(\Lambda^2/m^2)$, который в силу (114) имеет порядок единицы.

Приведенные рассуждения переносятся, очевидно, и на результаты $\alpha(\alpha L)^n$-приближения. В этом приближении на основании (79) и (80) можно представить

$$d^{-1}=Z_3+\frac{\alpha}{3\pi}\left[\ln\frac{\Lambda^2}{k^2}+\frac{9}{4}\ln\left(1+\frac{\alpha}{3\pi\zeta}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)+\frac{3}{2}\right]. \tag{143}$$

Отсюда следует $d^{-1} > Z_3 \geqslant 0$. Следовательно, нефизического полюса у фотонной функции нет и при учете $\alpha\,(\alpha L)^n$-приближения.

Изложенная аргументация легко распространяется и на вопрос об особенностях электронной функции Грина и вершинной функции.

6. ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ В ЗАДАЧЕ О СОБСТВЕННОЙ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНА

Выше было показано, что уже при частичном выходе за рамки теории возмущений, которого удается здесь достичь, ситуация с расходимостями в КЭД коренным образом меняется по сравнению с результатами теории возмущений. Расходимость собственной энергии электрона превращается из логарифмической в линейную, а расходимости в константах перенормировок Z_3, Z_2 сокращаются из-за асимптотически линейного роста m с Λ. Таким образом, ситуация с расходимостями в КЭД оказывается качественно такой же, как и в классической электродинамике.

О полном соответствии между КЭД и классической электродинамикой в вопросе о расходимостях на основании результатов, полученных в $(\alpha L)^n$- и $\alpha(\alpha L)^n$-приближениях, судить все же нельзя, так как используемая при этом схема приближений предполагает малость перенормированной константы связи $\alpha = e^2/(\hbar c) \ll 1$ (при $\alpha L \sim 1$), тогда как в классическом пределе ($\hbar \to 0$) эта константа велика.

В настоящем разделе покажем [24] при непосредственном рассмотрении предельного значения квантовоэлектродинамического оператора массы электрона при $\hbar \to 0$, что в задаче о собственной энергии выполняется принцип соответствия и можно утверждать, что расходимости в классической и квантовой теориях имеют единую природу.

Последний вывод имеет важное значение с точки зрения проблемы поиска обобщения электродинамики, связанного с введением в теорию дополнительной фундаментальной постоянной, органическим образом устраняющей расходимости на малых расстояниях, поскольку становится разумным и эвристически полезным начинать поиск такого обобщения на уровне более простой классической теории поля с тем, чтобы развитую здесь идеологию и метод обобщить затем на квантовую область. Ниже покажем, что роль такого обобщения может играть последовательный учет эффектов гравитации.

Распространенное в литературе (см., например, книгу [25]) мнение о том, что принцип соответствия не выполняется в задаче о собственной энергии электрона и что проблема собственной энергии в квантовой теории имеет совсем иную природу, чем в классической, связано с неадекватностью при $\hbar \to 0$ обычно используемого метода разложения по параметру $e^2/\hbar c$. Это мнение возникло на основании сравнения выражения для собственной массы электрона в КЭД во втором порядке теории возмущений [13, 26]

$$\delta m_{\mathrm{qu}} = m_0 \left[\frac{3e^2}{2\pi\hbar c} \left(\ln \frac{\hbar}{r_0 m_0 c} + \frac{1}{4} \right) + O\left(\frac{e^4}{\hbar^2 c^2} \right) \right] \tag{144}$$

(m_0 — затравочная масса; r_0 — длина обрезания) с известным выражением для собственной массы в классической электродинамике

$$\delta m_{\mathrm{Cl}} = e^2/2r_0c^2. \tag{145}$$

Видно, однако, что при $\hbar \to 0$ отброшенные в (144) члены растут и становятся определяющими.

Покажем, без использования разложения по $e^2/\hbar c$, что точное квантовоэлектродинамическое выражение для массового оператора на массовой поверхности

$$\mathrm{i}\Sigma(p_0) = \frac{\mathrm{i}e_0^2}{4\pi^3\hbar c} \int \gamma_\mu G(p_0 - q)\, \Gamma_\nu (p_0 - q, p_0)\, D_{\mu\nu}(q)\, d^4q, \tag{146}$$

где $p_0^2 = -m^2c^2$ и $\hat{p}_0 \to \mathrm{i}mc$ после выполнения всех матричных операций, в пределе $\hbar \to 0$ дает классический результат (145). Используемый метод близок к методу Тирринга [27], развитому для доказательства справедливости формулы Томпсона для точного сечения комптон-эффекта в пределе мягких фотонов.

Чтобы сравнение предела выражения (146) при $\hbar \to 0$ с классическим результатом (145) имело смысл, необходимо прежде всего обеспечить введение параметра обрезания в квантовой и классической теориях эквивалентным образом. Условимся для обеспечения сходимости интеграла (146) вводить фейнмановскую модификацию свободного фотонного пропагатора

$$1/q^2 \to (1/q^2)\,[\Lambda^2/(q^2 + \Lambda^2)]. \tag{147}$$

Введем далее соответствующую импульсу обрезания Λ длину обрезания $r_0 = \hbar/\Lambda$. При этом замена (147) примет вид

$$\frac{1}{q^2} \to \frac{1}{\hbar^2k^2} \frac{1}{r_0^2k^2 + 1}, \tag{148}$$

где $k = q/\hbar$ — волновой вектор фотона. В классической электродинамике, очевидно, необходимо модифицировать эквивалентным образом функцию Грина волнового уравнения

$$D(k^2) = \frac{1}{k^2} \to \frac{1}{k^2(r_0^2k^2 + 1)}. \tag{149}$$

Найдем сначала вид классической собственной энергии электрона при введении обрезания способом (149). Для покоящегося в начале координат электрона имеем: $\rho(\mathbf{x}) = e\,\delta(\mathbf{x})$

$$\delta m_{\text{Cl}} = \frac{1}{2c^2}\int \rho(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \frac{e}{2c^2}\varphi(0); \tag{150}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi(\mathbf{x}) = 4\pi\int D(\mathbf{x}-\mathbf{y},\ x_0-y_0)\,\rho(\mathbf{y})\,d^4y;\\
&\varphi(0) = 4\pi e\int D(0,\ x_0-y_0)\,dy_0 =\\
&\qquad = \frac{e}{4\pi^3}\int D(k^2)\exp[\mathrm{i}k_0(x_0-y_0)]\,d^4k\,dy_0 =\\
&\qquad\qquad = \frac{e}{2\pi^2}\int D(k^2)\,\delta(k_0)\,d^4k.
\end{aligned}\right\} \tag{151}$$

Подставляя это выражение в (150) и учитывая (149), находим

$$\delta m_{\text{Cl}} = \frac{e^2}{4\pi^2c^2}\int \frac{\delta(k_0)}{k^2}\,\frac{d^4k}{r_0^2k^2+1} = \frac{e^2}{2r_0c^2}, \tag{152}$$

т. е. получается в точности формула (145).

Покажем теперь, что квантовоэлектродинамический оператор массы (146) с регуляризацией (148) дает в пределе $\hbar \to 0$ тот же результат (152). Перейдем для этого в (146) к интегрированию по волновому вектору

$$\mathrm{i}\Sigma(p_0) = \frac{\mathrm{i}e_0^2\hbar^3}{4\pi^3c}\int \gamma_\mu G(p_0-\hbar k)\,\Gamma_\nu(p_0-\hbar k,\ p_0)\,D_{\mu\nu}(\hbar k)\,d^4k \tag{153}$$

и рассмотрим предел этого выражения при $\hbar \to 0$. Так как интеграл (153) после введения регуляризации (148) сходится, можно выполнять предельный переход под знаком интеграла. Из-за наличия в (153) множителя $\hbar^3$ достаточно, очевидно, выделить в подынтегральном выражении наиболее сингулярные при $\hbar \to 0$ члены, которые, как мы увидим, имеют поведение $\sim\hbar^{-3}$.

У вершинной функции нет особенности при $\hbar \to 0$ [13]:

$$\lim \Gamma_\nu(p_0-\hbar k,\ p_0) = \lim \Gamma_\nu(p_0,\ p_0) = \gamma_\nu \lim Z_1^{-1}. \tag{154}$$

(Здесь и ниже lim означает предел при $\hbar \to 0$.) Функции же Грина $G(p_0 - \hbar k)$ и $D_{\mu\nu}(\hbar k)$, как легко видеть, имеют в точке $\hbar = 0$ полюсы соответственно первого и второго порядка. Действительно, в соответствии со спектральными свойствами электронной функции Грина, имеет место представление [13]:

$$G(p) = Z_2S_c(p)\,[1 + C_1(p^2) + \hat{p}C_2(p^2)],$$

где $S_c(p) = (-\hat{p} + \mathrm{i}\,mc)^{-1}$; $C_1(p^2)$ и $C_2(p^2)$ — скалярные функции, имеющие нули на массовой поверхности: $C_1(p_0^2) = C_2(p_0^2) = 0$. С учетом этих свойств находим, удерживая в пределе лишь наиболее сингулярный член:

$$\lim G(p_0-\hbar k)=\lim Z_2(\hbar\hat{k}-\hat{p}_0+\mathrm{i}mc)^{-1}=$$
$$=Z_2^0(\hat{p}^0+\mathrm{i}mc)/2\hbar(kp_0), \tag{155}$$

где $Z_2^0=\lim Z_2$.

Аналогично для фотонной функции Грина, в силу ее спектральных свойств, при учете фейнмановской модификации (148) имеем (так как величина (153) не зависит от калибровки, выбираем простейшую калибровку для $D_{\mu\nu}$) [13]:

$$D_{\mu\nu}(\hbar k)=\delta_{\mu\nu}\frac{Z_3}{\mathrm{i}\hbar^2k^2}\,\frac{1}{r_0^2k^2+1}\,[1+d_1(\hbar^2k^2)],$$

где скалярная функция $d_1(q^2)$ имеет нуль при $q^2=0$: $d_1(0)=0$. В результате, удерживая лишь наиболее сингулярный член, находим

$$\lim D_{\mu\nu}(\hbar k)=\frac{Z_3^0\delta_{\mu\nu}}{\mathrm{i}\hbar^2k^2(r_0^2k^2+1)}, \tag{156}$$

где $Z_3^0=\lim Z_3$.

Подставляя предельные выражения (154) — (156) в (153) и сделав (после выполнения всех матричных операций) подстановку $\hat{p}_0\to\mathrm{i}mc$, приходим к интегралу

$$\lim\mathrm{i}\Sigma(p_0)=\frac{e_0^2Z_3^0}{4\pi^3c^2}\int\frac{\mathrm{i}mc}{(kp_0)}\,\frac{d^4k}{k^2(r_0^2k^2+1)}, \tag{157}$$

в котором подразумевается обычное (фейнмановское) правило обхода полюсов. Так как выражение (157) лоренц-инвариантно, вычислим его в системе покоя электрона. При этом

$$\frac{\mathrm{i}mc}{(kp_0+\mathrm{i}0)}\to\frac{\mathrm{i}}{-k_0+\mathrm{i}0}=\frac{1}{\mathrm{i}}P\frac{1}{k_0}+\pi\delta(k_0). \tag{158}$$

Первый член в (158) дает нулевой вклад в интеграл (157) из-за нечетности подынтегральной функции по переменной k_0. Второй член приводит к интегралу

$$\lim\mathrm{i}\Sigma(p_0)=\frac{e_0^2Z_3^0}{4\pi^3c^2}\int\frac{\delta(k_0)\,d^4k}{k^2(r_0^2k^2+1)}=\frac{e_0^2Z_3^0}{2r_0c^2}, \tag{159}$$

который совпадает с выражением (152), возникающим в классической электродинамике, при $e_0^2Z_3^0=e^2$.

7. ГРАВИТАЦИЯ КАК РЕГУЛЯРИЗАТОР РАСХОДИМОСТЕЙ. КЛАССИЧЕСКАЯ СОБСТВЕННАЯ ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОНА В ОТО [11]

В современной КЭД недостает постоянной (обозначим ее $\varkappa$) размерности длины или такой, чтобы из $\varkappa$, $\hbar$, c и e можно было построить длину и, следовательно, массу. Именно с этим следует связать расходимость собственной энергии электрона.

Весьма привлекательная идея — предположение [28] о том, что искомым обобщением КЭД, вводящим в теорию дополнительную постоянную и решающим проблему расходимостей, может явиться последовательный учет гравитации и гравитационной постоянной G. Размерность G подходящая для этого:

$$l_1 = \hbar^{1/2} c^{-3/2} G^{1/2} \approx 10^{-33} \text{ см}, \quad l_2 = e c^{-2} G^{1/2} \approx 10^{-34} \text{ см}. \qquad (160)$$

Малость гравитационных длин l_1 и l_2 часто служит аргументом для отрицания роли гравитации в структуре частиц. Однако, как легко оценить, например, на основании (100), в электромагнитной теории электронной массы при учете поляризации вакуума нужна длина именно масштаба (160).

Так как в полном объеме задача учета гравитации в КЭД является трудной, представляется естественным решать ее по этапам. В качестве первого этапа полезно провести рассмотрение проблемы в рамках классической электродинамики, являющейся предельным случаем КЭД при $\hbar \to 0$. Ниже покажем (см. также [35]), что учет гравитации действительно позволяет регуляризовать классическую собственную энергию электрона. Это происходит, однако, не «автоматически», а связано с необходимым при учете гравитации пересмотром некоторых понятий. Такая необходимость возникает в результате появления в метрике на малых расстояниях от заряда так называемой «поверхности горизонта» (сфера Шварцшильда).

Связанная система уравнений Эйнштейна и Максвелла в области вне заряда имеет следующий вид:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}; \qquad (161)$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\sigma} F^{\sigma}_{\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} \right); \qquad (162)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 0, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \qquad (163)$$

Эта система допускает следующее сферически-симметричное статическое решение, которое ведет себя нужным образом на бесконечности:

$$ds^2 = f(r)\, dt^2 - f^{-1}(r)\, dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \varphi\, d\varphi^2), \qquad (164)$$

где

$$f(r) = 1 - \frac{2Gm}{r} + \frac{Ge^2}{r^2}, \quad (c = 1); \qquad (165)$$

$$F^{0r} = e/r^2, \quad \text{остальные } F^{\mu\nu} = 0. \qquad (166)$$

Здесь m и e — константы интегрирования, имеющие смысл гравитационной массы и заряда, определяемых по поведению полей на больших расстояниях.

Так как m и e входят в решение как независимые постоянные, может показаться на первый взгляд [29], что между массой и зарядом нет никакой связи. Дело, однако, в том, что решение (164) — (166) неявно предполагает наличие произвольной сосредоточенной затравочной массы, в силу чего и отсутствует однозначная связь m с e. Примем условие, что затравочной массы нет, и это вместе с некоторыми другими требованиями приведет к связи m с e.

При $m^2 \geqslant e^2$ метрика (164) содержит поверхность горизонта

$$r = r_g = m + \sqrt{m^2 - e^2}, \quad (G = 1), \tag{167}$$

так называемую сферу Шварцшильда S_g. Свойства геодезических и характеристик в пространстве (164) таковы, что внешние возмущения не могут достичь S_g за конечное время по часам удаленного наблюдателя [30]. Это означает, что внешние поля не оказывают воздействия на область, заключенную под S_g. Если, кроме того, принять естественное предположение, что область $r \leqslant r_g$ не излучает в смысле «белой дыры» [31], то эта часть пространства окажется полностью исключенной из динамики частицы [32]. В работе [32] показано, что, несмотря на «замороженность» области $r \leqslant r_g$ по отношению к внешнему воздействию, из уравнений поля Эйнштейна — Максвелла в силу их нелинейности вытекают обычные по виду уравнения движения заряженной частицы во внешних полях, однако эти уравнения описывают не движение истинной сингулярности поля частицы $r = 0$, которая остается замороженной, а движение «горловины», т. е. области поля $r_g \ll r \ll \lambda$, где λ — размер неоднородностей внешних полей. Частица при этом проявляет себя в динамике как существенно неточечный объект радиуса r_g, в некотором смысле как топологическая «дырка» в пространстве. Замечательно, что эта естественная нелокальность не приводит в силу ее «замороженности» ни к каким затруднениям с причинностью [35].

Основная физическая идея, которая реализуется ниже, состоит в предположении, что из-за динамической замороженности области $r \leqslant r_g$ под поверхностью горизонта эта область не должна давать вклада и в динамические характеристики — в энергию, импульс и массу покоя. В соответствии с этим вектор энергии-импульса частицы P_μ должен определяться как интеграл от квазитензора плотности энергии-импульса θ_μ^ν:

$$P_\mu = \int\limits_\Sigma \theta_\mu^\nu \, d\Sigma_\nu, \tag{168}$$

взятый лишь по области $r \geqslant r_g$ (трехмерная гиперповерхность интегрирования Σ обрывается на S_g). Мы покажем, что определенный таким образом P_μ является сохраняющейся величиной, удовлетворяет принципу равенства инертной и гравитационной масс и не содержит расходимостей. Обеспечение правильных трансформационных свойств P_μ (это требование эквивалентно условию устойчивости чисто полевой модели частицы) оказывается при этом возможным только при определенной связи между массой частицы, зарядом и гравитационной постоянной.

Задание квазитензора θ_μ^ν в ОТО не является вполне однозначным [33], однако он всегда может быть представлен в форме дивергенции от антисимметричного суперпотенциала:

$$\theta_\mu^\nu = U_{\mu,\sigma}^{\nu\sigma}; \quad U_\mu^{\nu\sigma} = -U_\mu^{\sigma\nu}, \tag{169}$$

в силу чего выполняется дифференциальный закон сохранения

$$\theta_{\mu,\nu}^\nu = 0. \tag{170}$$

Подставляя (169) в (168) и применяя теорему Гаусса, имеем

$$P_\mu = \int_\Sigma U_{\mu,\sigma}^{\nu\sigma}\, d\Sigma_\nu = \frac{1}{2} \oint_\sigma U_\mu^{\nu\sigma}\, d\sigma_{\nu\sigma}, \tag{171}$$

где σ — двумерная граница пространственно-подобной области Σ. Согласно нашему основному предположению $\sigma = \sigma_\infty + \sigma_g$, где σ_∞ — бесконечно удаленная поверхность, а σ_g — пересечение Σ и S_g. В соответствии с этим (171) принимает вид

$$P_\mu = \frac{1}{2} \oint_{\sigma_\infty} U_\mu^{\nu\sigma}\, d\sigma_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} \oint_{\sigma_g} U_\mu^{\nu\sigma}\, d\sigma_{\nu\sigma}. \tag{172}$$

Знак минус перед вторым интегралом связан с внешним направлением нормали к поверхности.

Область интегрирования Σ в (168) в случае покоящейся частицы удобно выбрать в следующей форме ($\Sigma^{(0)}$):

$$\Sigma^{(0)}: t = \mathrm{const}, \quad r_g \leqslant r \leqslant \infty. \tag{173}$$

При этом

$$d\sigma_{kl}^{(0)} = 0, \quad d\sigma_{0k}^{(0)} \equiv d\sigma_k \tag{174}$$

и, согласно (172),

$$P_\mu = \oint_{r\to\infty} U_\mu^{0k}\, d\sigma_k - \oint_{r=r_g} U_\mu^{0k}\, d\sigma_k. \tag{175}$$

Обратимся к вопросу о трансформационных свойствах выражения (172) для P_μ относительно асимптотически лоренцевых преобразований координат. Рассмотрим переход к движущейся системе, осуществляемый преобразованием координат, переходящим на бесконечности в преобразование Лоренца:

$$\bar{x}^\mu = L_\nu^\mu x^\nu, \tag{176}$$

и заменой гиперповерхности интегрирования Σ новой поверхностью $\overline{\Sigma}$, переходящей на бесконечности в поверхность $\overline{t} = \text{const}$, а в остальной произвольной. При этом вектор энергии-импульса должен преобразовываться по закону

$$\overline{P}_{\mu} = (L^{-1})^{\nu}_{\mu} P_{\nu}, \tag{177}$$

т. е. как ковариантный вектор.

Заметим, что θ^{ν}_{μ} является аффинной тензорной плотностью, а $U^{\nu\sigma}_{\mu}$ и $d\sigma_{\nu\sigma}$ — истинными тензорными плотностями противоположных весов. Чтобы при асимптотически лоренцевых преобразованиях координат первый интеграл в (172) преобразовывался как ковариантный вектор, достаточно, чтобы он не зависел от лоренцева поворота поверхности интегрирования: $\sigma_{\infty} \to \overline{\sigma}_{\infty}$. Для этого требуется, чтобы равнялась нулю разность

$$\frac{1}{2} \oint\limits_{\overline{\sigma}_{\infty}} U^{\nu\sigma}_{\mu}\, d\overline{\sigma}_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} \oint\limits_{\sigma_{\infty}} U^{\nu\sigma}_{\mu}\, d\sigma_{\nu\sigma} = \int\limits_{\Sigma_{\infty}} \theta^{\nu}_{\mu}\, d\Sigma_{\nu}, \tag{178}$$

где Σ_{∞} — трехмерная гиперповерхность, натянутая на σ_{∞} и $\overline{\sigma}_{\infty}$. Последний интеграл в (178) будет равен нулю, если при $r \to \infty$ θ^{ν}_{μ} достаточно быстро убывает: $\theta^{\nu}_{\mu} = 0\,(1/r^4)$. Это требование выполняется для тетрадного [34] и эйнштейновского [33] квазитензоров. Мы используем здесь тетрадный квазитензор Мёллера [34] (эйнштейновский квазитензор также может быть использован в рассматриваемой задаче — с тем же результатом):

$$U^{\nu\sigma}_{\mu} = -U^{\sigma\nu}_{\mu} = \frac{\sqrt{-g}}{8\pi} (\Phi^{\nu\sigma}_{\cdot\cdot\mu} - \delta^{\nu}_{\mu}\Phi^{\sigma} + \delta^{\sigma}_{\mu}\Phi^{\nu}), \tag{179}$$

где

$$\Phi_{\nu\sigma\mu} = h^{a}_{\nu} h_{a\sigma;\,\mu} = -\Phi_{\sigma\nu\mu}; \quad \Phi^{\sigma} = \Phi^{\nu\sigma}_{\cdot\cdot\nu}, \tag{180}$$

h^{a}_{μ} — компоненты тетрад.

Вычислим вначале P_{μ} для покоящейся частицы. Перейдем для этого в метрике (164) к квазидекартовым координатам:

$$ds^2 = f(r)\,dt^2 - \left[\delta_{ik} + \left(\frac{1}{f(r)} - 1\right)\frac{x^i x^k}{r^2}\right] dx^i\, dx^k. \tag{181}$$

Компоненты тетрад в этих координатах удобно выбрать в виде (вопрос о классе допустимых преобразований тетрад обсудим ниже):

$$h_{0(0)} = f^{1/2}; \quad h_{0(k)} = h_{k(0)} = 0;$$
$$h_{k(s)} = \delta_{ks} + \left(\frac{1}{\sqrt{f}} - 1\right)\frac{x^k x^s}{r^2}. \tag{182}$$

Подставив эти выражения в (179), после несложных вычислений получим

$$U_0^{ik} = U_i^{0k} = 0; \quad U_0^{0k} = \frac{x^k}{4\pi r^2}\left(\sqrt{f} - f\right); \tag{183}$$

$$U_i^{kl} = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{f-\sqrt{f}}{r} + \frac{1}{2}f'\right]\left(\frac{x^k}{r}\,\delta_i^l - \frac{x^l}{r}\,\delta_i^k\right). \tag{184}$$

Подставив (165) в (183), найдем

$$U_\mu^{0k}\Big|_{r=r_g} = 0, \quad U_\mu^{0k}\Big|_{r\to\infty} = \delta_\mu^0\,\frac{mx^k}{4\pi r^3}. \tag{185}$$

Используя эти значения, из (175) получаем

$$P_\mu = \delta_\mu^0 m. \tag{186}$$

Таким образом, определенный нами согласно (168) вектор P_μ удовлетворяет принципу равенства инертной и гравитационной массы. Это подтверждает исходное предположение о том, что область внутри сферы Шварцшильда не дает вклада в энергию частицы.

Вернемся к вопросу о трансформационных свойствах P_μ. Как было показано выше, для тетрадного квазитензора первый интеграл в (172) преобразуется как ковариантный вектор. Рассмотрим теперь второй интеграл в (172). Для этого интеграла в системе покоя в координатах (181) при интегрировании по поверхности $\sigma_g^{(0)}$, лежащей на пересечении $\Sigma^{(0)}$ (173) и S_g, в силу (174) и (185) мы имели

$$\frac{1}{2}\oint\limits_{\sigma_g^{(0)}} U_\mu^{\nu\sigma}\,d\sigma_{\nu\sigma}^{(0)} = \oint\limits_{r=r_g} U_\mu^{0k}\,d\sigma_k = 0. \tag{187}$$

Правильные трансформационные свойства P_μ будут обеспечены, если этот результат сохранится и в преобразованной системе координат $\bar{x}^\mu$. Равенство

$$U_\mu^{\nu\sigma}\,d\sigma_{\nu\sigma}^{(0)}\Big|_{r=r_g} = 0 \tag{188}$$

является тензорным и потому справедливым в любой системе координат. Однако при преобразовании поверхности интегрирования $\sigma_g^{(0)} \to \bar{\sigma}_g$ появляются ненулевые компоненты $d\sigma_{kl}$ и поэтому равенство

$$\frac{1}{2}\oint\limits_{\sigma_g} U_\mu^{\nu\sigma}\,d\sigma_{\nu\sigma} = 0 \tag{189}$$

сохранится только при условии $U_i^{kl}\Big|_{r=r_g} = 0$, т. е. [в силу (184)] при условии

$$\left[\frac{f-\sqrt{f}}{r} + \frac{1}{2}f'\right]_{r=r_g} = 0. \tag{190}$$

Так как $f(r_g)=0$, то (190) сводится к

$$f'(r_g)=2(m-e^2/r_g)r_g^{-2}=0. \tag{191}$$

Используя (165) и (167), находим отсюда

$$m^2=e^2 \quad (G=1). \tag{192}$$

Только при таком соотношении между массой и зарядом частицы конструкция (168) для P_μ имеет правильные трансформационные свойства ковариантного вектора.

Обсудим в заключение вопрос о допустимых калибровках тетрад. Можно показать [11], что построенный выше вектор энергии-импульса P_μ инвариантен относительно произвольных преобразований тетрад, совпадающих с тождественным преобразованием на границе $\sigma_\infty+\sigma_g$ области интегрирования Σ. Обобщая соображения Мёллера [34] относительно физически допустимых калибровок тетрад на бесконечности, примем требование, чтобы на поверхностях σ_∞ и σ_g выбиралась «максимально подвижная» тетрадная решетка, т. е. такая, которая при движениях из группы симметрии пространства переходит сама в себя с точностью до некоторого поворота как целое. При $r\to\infty$ этому требованию удовлетворяет асимптотически галилеева решетка, а при $r\to r_g$ — решетка, связанная с (182) преобразованием

$$\bar{h}^a_\mu(x)=\Lambda^a_b h^b_\mu(x)$$

с постоянными Λ^a_b, удовлетворяющими условиям $\eta^{cd}\Lambda^a_c\Lambda^b_d=\eta^{ab}$, где $\eta^{ab}=\mathrm{diag}(+1,\ -1,\ -1,\ -1)$.

Заметим, что, подставив результат (8.33) в (8.5), приходим к метрике

$$ds^2=\left(1-\frac{|e|}{r}\right)^2dt^2-\frac{dr^2}{\left(1-\frac{|e|}{r}\right)^2}-r^2(d\theta^2+\sin^2\varphi\, d\theta^2), \tag{193}$$

обладающей тем свойством, что радиальное расстояние от любой внешней точки $r>|e|$ до поверхности горизонта $r=|e|$ является бесконечным:

$$l(r,m)=\int\limits_{|e|}^{r>|e|}dr\left(1-\frac{|e|}{r}\right)^{-1}=\infty.$$

Частица, таким образом, представляет собой как бы бесконечно глубокую «воронку» в пространстве.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведем в заключение сводку основных результатов:

1) найдена функциональная структура (типа Гелл-Манна — Лоу [5]) асимптотик функций Грина, а также дайсоновских констант перенормировок $Z_i(\Lambda/m,\ \alpha)$;

2) получены асимптотики функций Грина и явные значения перенормировочных констант Z_i с точностью до «пятивершинного» или $\alpha\,(\alpha L)^n$-приближения;

3) показано, что в КЭД с $m_0 = 0$ принципиально существует ненулевое решение «сверхпроводящего» типа для физической массы электрона $m = \Lambda f\,(\alpha)$, линейно зависящее от параметра обрезания Λ и неаналитически (в нуле) от α; придавая физический смысл этому решению, мы должны сделать вывод, что импульс обрезания Λ является существенным параметром теории и должен интерпретироваться как феноменологический представитель недостающей в КЭД третьей мировой постоянной; затравочная масса m_0, напротив, не играет существенной роли в КЭД — это обстоятельство становится ясным только благодаря выходу за рамки теории возмущений и учету вырождения вакуума, связанного с нарушением киральной симметрии;

4) после подстановки «сверхпроводящего» решения $m = \Lambda f(\alpha)$ в выражения для констант перенормировок $Z_i\,(\Lambda/m,\ \alpha)$ зависимость от Λ в них сокращается и они становятся только функциями α;

5) при этом значение константы $Z_3\,(\alpha)$ попадает в интервал $0 < Z_3 \ll 1$; неравенство $Z_3 \ll 1$ $(Z_3 \sim \alpha)$ означает, что затравочная константа связи $\alpha_0 = \alpha Z_3^{-1}$ не мала; неравенство $0 < Z_3$ означает, что в рассматриваемом подходе нет трудности с нуль-зарядом (см. также [6], [10]), дополнительные соображения показывают, что нет также трудности с «ду́хами»;

6) найдено, что теория возмущений не позволяет рассматривать не только КЭД с $m_0 = 0$, но и КЭД с $m_0 > 0$ при достаточно большом отношении Λ/m_0; с ростом Λ/m_0 электродинамика с $m_0 > 0$ непрерывным образом смыкается с электродинамикой при $m_0 = 0$ со всеми вытекающими следствиями; при $\Lambda/m \ll e^{c/\alpha}$ справедлива теория возмущений;

7) показано, что выполняется принцип соответствия в задаче о собственной энергии электрона и что расходимости в квантовой и классической электродинамике имеют единую природу;

8) показано, что в классической электродинамике учет эффектов гравитации (наличие «поверхности горизонта» на малых расстояниях) позволяет построить чисто полевую модель заряженной частицы с конечной собственной энергией $m = eG^{-1/2}$, удовлетворяющую принципу причинности и другим требованиям [35].

Последний результат позволяет надеяться, что на этом же пути (учет «поверхности горизонта») гравитация позволит органическим образом устранить расходимости и в квантовой электродинамике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Йост Р.** Общая теория квантованных полей. М., «Мир», 1967.
2. **Proceedings** of the XV th Intern. Conf. on High Energy Physics, Kiev, 1970.
3. **Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М.** «Докл. АН СССР», 1954, т. 95, с. 773, 1177; «Докл. АН СССР», 1954, т. 96, с. 261.
4. **Фрадкин Е. С.** Докторская диссертация.—«Труды ФИАН им. П. Н. Лебедева», 1965, т. 29.
5. **Gell-Mann M., Low F.** «Phys. Rev.», 1954, v. 95, p. 1300.
6. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. М., «Наука», 1973.
7. **Nambu Y.** «Phys. Rev. Lett.», 1960, v. 4, p. 380; **Nambu Y., Jona-Lasinio G.** «Phys. Rev.», 1961, v. 122, p. 345.
8. **Вакс В. Г., Ларкин А. И.** «ЖЭТФ», 1961, т. 40, с. 282.
9. **Ландау Л. Д., Померанчук И. Я.** «Докл. АН СССР», 1955, т. 102, с. 489; **Померанчук И. Я.** «Докл. АН СССР», 1955, т. 103, с. 1005.
10. **Redmond P.** «Phys. Rev.», 1958, v. 112, p. 1404; **Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Ширков Д. В.** «ЖЭТФ», 1959, т. 37, с. 85.
11. **Виленкин А. В., Фомин П. И.** Препринт ИТФ-74-98Р, Киев, 1974.
12. **Трутень В. И., Фомин П. И.** «ТМФ», 1970, т. 5, с. 219.
13. **Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.** Квантовая электродинамика. М., «Наука», 1969.
14. **Yennie D., Frautschi S., Suura H.** «Ann. Phys.», 1961, v. 13, p. 379.
15. **Фомин П. И.** «ЖЭТФ», 1962, т. 43, с. 1934.
16. **Трутень В. И., Фомин П. И.** «ЖЭТФ», 1969, т. 57, с. 1280.
17. **Фомин П. И., Трутень В. И.** «ЖЭТФ», 1970, т. 59, с. 890.
18. **Фомин П. И.** «Письма в ЖЭТФ», 1967, т. 6, с. 972; **Фомин П. И., Трутень В. И.** «Ядерная физика», 1969, т. 9, с. 838.
19. **Bardeen J., Cooper L., Schriffer J.** «Phys. Rev.», 1957, v. 106, p. 162; 1958, v. 108, p. 1175; **Боголюбов Н. Н.** «ЖЭТФ», 1958, т. 34, с. 58.
20. **Арбузов Б. А., Тавхелидзе А. Н., Фаустов Р. Н.** «Докл. АН СССР», 1961, т. 139, с. 345.
21. **Боголюбов Н. Н.** Избранные труды. Том 3. Киев, «Наукова Думка», 1971.
22. **Горьков Л. П.** «ЖЭТФ», 1958, т. 34, с. 735.
23. **Källen G.** «Helv. Phys. acta», 1952, v. 25, p. 417; **Lehmann H.** «Nuovo cimento», 1954, v. 11, p. 342.
24. **Виленкин А. В., Фомин П. И.** «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1974, т. 67, с. 12.
25. **Швебер С.** Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., Изд-во иностр. литературы, 1963.
26. **Weisskopf V.** «Phys. Rev.», 1939, v. 56, p. 72; **Feynman R.** «Phys. Rev.», 1949, v. 76, p. 769.
27. **Thirring W.** «Phil. Mag.», 1950, v. 41, p. 1193.
28. **De Witt B. S.** «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 13, p. 114; **Хриплович И. Б.** «Ядерная физика», 1966, т. 3, с. 575; **Марков М. А.** «ЖЭТФ», 1973, т. 64, с. 1105.
29. **Тонелла М. А.** Основы электромагнетизма и теории относительности. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. литературы, 1962.
30. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория поля. М., «Наука», 1973; **Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.** Релятивистская астрофизика. М., «Наука», 1967.
31. **Новиков И. Д.** «Астр. ж.», 1964, т. 41, с. 1075.
32. **Виленкин А. В., Фомин П. И.** Препринт ИТФ-74-82Р, Киев, 1974.
33. **Мицкевич Н. В.** Физические поля в общей теории относительности. М., «Наука», 1969.
34. **Мёллер X.** В сб.: Гравитация и топология. Пер. с англ. М., «Мир», 1966, с. 34.
35. **Марков М. А., Фролов В. П.** «ТМФ», 1970, т. 3, с. 3; «ТМФ», 1972, т. 13.