

МЕТОД K -ГАРМОНИК И МОДЕЛЬ ОБОЛОЧЕК

Ю. Ф. Смирнов, Е. В. Шитикова

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

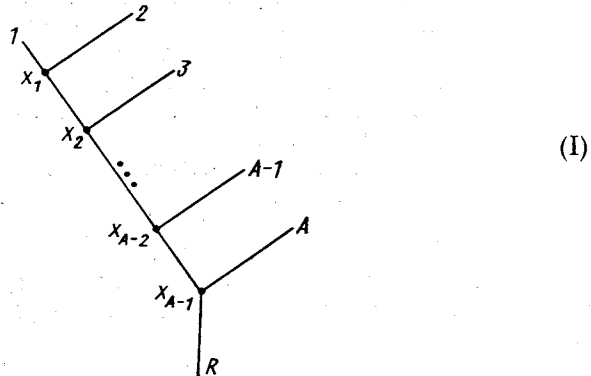
Целью обзора является сопоставление метода K -гармоник и трансляционно-инвариантной модели оболочек (ТИМО). Речь пойдет только о ядрах с $A > 4$. Для них, как будет видно из дальнейшего, многие результаты метода K -гармоник оказываются весьма сходными с соответствующими результатами оболочечных расчетов. Указанная близость результатов связана с тем, что волновые функции метода K -гармоник и ТИМО имеют много общего. Кратко рассматривается структура волновых функций обоих методов, анализируется их взаимосвязь друг с другом, а затем сопоставляются результаты расчетов некоторых свойств ядер, полученные этими методами.

The aim of this review is to compare the K -harmonics method with the translational-invariant shell model (TISM). We shall consider only nuclei with $A > 4$. It will be shown, that many results for such nuclei obtained by the K -harmonics method and from shell model calculations are very similar. This similarity is due to the fact, that the structures of the wave functions of the K -harmonics method and the TISM closely resemble each other. First, we consider in brief structure of the wave functions of the two methods, analyze their interrelation and then compare the results of calculations of some nuclear properties obtained by these methods.

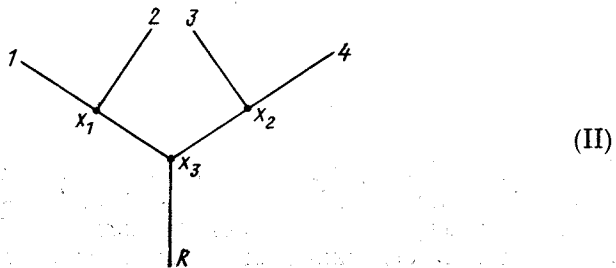
ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в теории легких ядер получил развитие новый интересный метод — метод K -гармоник, предложенный Ю. А. Симоновым [1]. Первоначально он применялся главным образом к ядрам из трех и четырех нуклонов и оказался весьма эффективным [2]. Однако метод легко обобщить и на случай произвольного числа нуклонов [3]. В настоящее время в литературе описан ряд расчетов в основном приближении метода K -гармоник для ряда легких ядер с $A > 4$, выполненных под руководством А. И. Базя [4]. Для этой же области ядер в течение многих лет успешно используются модель оболочек, метод Хартри — Фока

Здесь \bar{r}_i — координаты i -го нуклона; каждая координата \bar{x}_i стандартного набора определяет расстояние между $i + 1$ -м нуклоном и центром масс группы нуклонов с номерами $1, 2, \dots, i$. Прочие наборы координат Якоби будем называть *нестандартными*. В частности, если в наборе (1) произвести некоторую перестановку координат нуклонов \bar{r}_i , то получится нестандартный набор координат Якоби. Выбор координат Якоби можно иллюстрировать графиком в виде «дерева» Якоби:



Свободные концы этого графика отвечают координатам нуклонов \bar{r}_i , каждая внутренняя линия означает координаты центров масс той группы p нуклонов, номера которых обозначены на свободных концах, «произрастающих» из этой внутренней линии. Внутренней линии сопоставляется масса pm , а свободному концу — масса t . Каждому узлу отвечает определенная координата Якоби, составленная из координат центров масс двух группировок p и q нуклонов, соответствующих линиям, идущим вверх из этого узла. Если линия уходит влево, то соответствующая ей координата берется со знаком плюс, а если вправо — со знаком минус. Разность координат двух центров масс надо умножить на $[pq/(p + q)]^{1/2}$. Стандартному набору координат Якоби (1) отвечает приведенное выше «дерево» Якоби. «Нестандартное дерево» Якоби, показанное на графике:



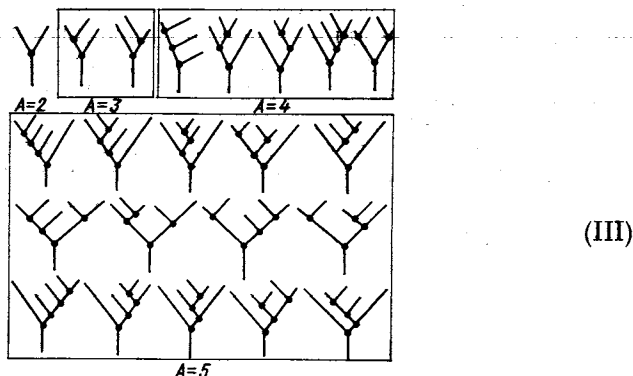
описывает следующий набор координат Якоби:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1 &= (1/\sqrt{2})(\bar{r}_1 - \bar{r}_2); \\ \bar{x}_2 &= (1/\sqrt{2})(\bar{r}_3 - \bar{r}_4); \\ \bar{x}_3 &= (1/2)(\bar{r}_1 + \bar{r}_2 - \bar{r}_3 - \bar{r}_4). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Общие свойства «древовидных» графиков. В дальнейшем нам придется встречаться с другими древовидными графиками, поэтому рассмотрим некоторые общие свойства таких графиков. Прежде всего выясним, каково общее число деревьев с A свободными концами. Ясно, что если есть одно какое-то дерево такого типа, например изображенное в виде (I), то можно получить $A!$ деревьев такой же структуры, переставляя всевозможными способами номера свободных концов. Поэтому нас должно интересовать, сколько будет различных деревьев, если отвлечься от перестановок номеров свободных концов. Древовидные графики, у которых опущены номера свободных концов, назовем *скелетными*. Обозначим число скелетных графиков с A свободными концами индексом $K(A)$, тогда для этой величины можно написать рекуррентное соотношение [5]:

$$K(A) = \sum_{A_1 + A_2 = A} K(A_1) K(A_2). \quad (3)$$

Численные значения $K(A)$ для $A = 2 \div 6$ приведены в табл. 1, а соответствующие скелетные графики для $A = 2 \div 5$ имеют следующий вид:



В работе Г. И. Кузнецова, Я. А. Смородинского [6] получена общая формула для $K(A) = (2A - 2)!! / [(A - 1)! A!]$. Из приведенного выше графика видно, что скелетные графики можно объединить в пары, связанные зеркальным отражением относительно

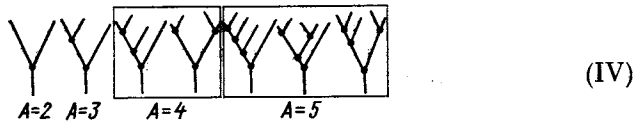
Таблица 1
Зависимость числа скелетных графиков от числа нуклонов A

A	2	3	4	5	6
$K(A)$	1	2	5	14	49
$M(A)$	1	1	2	3	6
Общее число	2	12	120	1 680	35 280

ствола дерева. Если выделить те графики, которые нельзя получить друг из друга зеркальным отражением, то мы приходим к существенно различным деревьям. Обозначим их число $M(A)$, для него снова получим рекуррентное соотношение типа (3):

$$M(A) = \sum_{\substack{A_1 > A_2 \\ A_1 + A_2}} M(A_1) M(A_2). \tag{4}$$

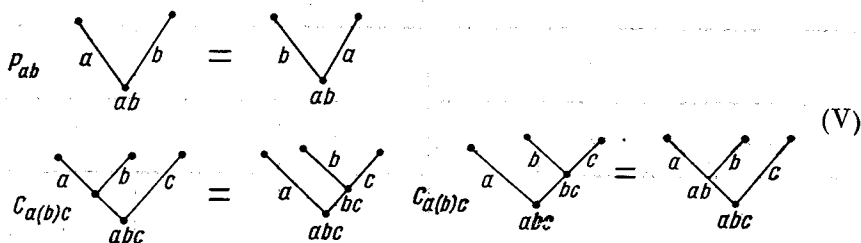
Значения $M(A)$ для $A \leq 6$ приведены в табл. 1, а существенно различные деревья для $A \leq 5$ иллюстрируются графиком



Заметим, что $M(A)$, $K(A)$ и общее число деревьев, равное $K(A) A! = [(2A - 2)!!] / [(A - 1)!]$, очень резко возрастают при увеличении A .

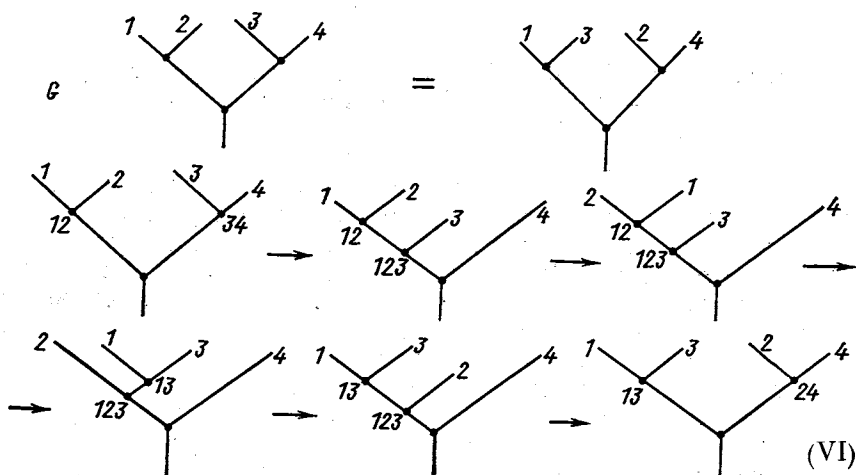
Операции над деревьями. Рассмотрим переходы от одного дерева к другому. Совокупность всех преобразований от одного дерева к другому называется *группоидом перестройки* [5]. Это множество отличается от группы тем, что не для всех его элементов определено произведение и не для всех произведений умножение ассоциативно. Подробности о структуре группоидов перестройки для различных A и их представлениях изложены в работе [5]. Здесь только отметим, что количество элементов группоида также чрезвычайно быстро растет с увеличением A . Однако любое сколь угодно сложное преобразование деревьев можно свести к последовательности некоторого числа элементарных преобразований. Этими элементарными операциями над деревьями являются сле-

дующие (мы пользуемся терминологией работы [6]):



1) отражение P_{ab} в развилке дерева ab , из которой выходят ветви a и b ; структура кроны, основанием которой является ветвь a , и структура кроны над ветвью b не изменяются, а эти кроны просто перемещаются в новое положение; 2) пересадка $C_{a(b)c}$ одной ветви b в развилке abc с левого сучка на правый или наоборот. При этом, как и в случае отражения структуры кроны, расположенных над ветвями a , b и c , не изменяются. В дальнейшем будем рассматривать только такие случаи, когда матрицы преобразования $C_{a(b)c}$ будут унитарными и вещественными, т. е. обе пересадки, изображенные на графике, будут характеризоваться одними и теми же коэффициентами преобразования, поэтому оба таких взаимобратных перехода обозначим единым символом $C_{a(b)c}$.

Итак, любую перестройку деревьев можно свести к последовательности элементарных операций P , C , производя на каждом этапе пересадку только одной ветви с одного сучка на другой, выходящий из того же узла. В качестве примера представим переход между двумя деревьями с четырьмя свободными концами следующим образом:



Здесь же указаны все промежуточные преобразования. Результирующее преобразование G имеет вид

$$G = C_{13(2)4} P_{13,2} C_{2(1)3} P_{12} C_{12(3)4}. \quad (5)$$

Это представление G через операции C и P не является единственным, можно, например, записать, что

$$\{G = C_{1(3)24} P_{24,3} C_{2(4)3} P_{34} C_{1(2)34} \text{ и т. д.} \quad (6)$$

Однако запись (5), (6) минимальна в том смысле, что нельзя свести преобразование G к меньшему числу операций P, C .

Дерево Вигнера и разбиение операций перестройки деревьев на элементарные операции. Были рассмотрены операции над деревьями общего характера, безотносительно к тому, какой конкретный смысл имеют свободные концы и другие линии этих деревьев. Если свободные концы означают координаты отдельных нуклонов, а внутренние линии — координаты центров масс нуклонных группировок, то это будет дерево Якоби. Если свободные концы означают некоторую совокупность складываемых моментов l_1, l_2, \dots, l_A , то соответствующее дерево (назовем его деревом Вигнера) описывает схему связи этих моментов, внутренние линии означают промежуточные моменты (суммы отдельных групп моментов из числа l_1, l_2, \dots, l_A), ствол дерева — суммарный момент $\bar{L} = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \dots + \bar{l}_A$.

Если в какой-то развилке *левый* момент равен l_i , а *правый* l_j , то подразумевается, что их сложение производится с помощью коэффициентов Клебша — Гордана ($l_i m_i l_j m_j / l_i m_i j$). Переход от одного дерева Вигнера к другому означает некоторое изменение схемы связи моментов, которое осуществляется с помощью определенного $3nj$ -символа. Диаграмму соответствующего $3nj$ -символа можно получить из графиков двух деревьев, между которыми совершается переход путем соединения соответствующих свободных ветвей с одинаковыми номерами и объединения двух стволов в одну общую линию. Элементарными операциями над деревьями Вигнера являются следующие: а) $Pj_1 j_2$ означает просто изменение фазы $(-1)^{j_1+j_2-j_3}$; б) коэффициент перехода $Cj_1(j_2)j_3$ сводится к коэффициенту Рака:

$$Cj_1(j_2)j_3 = U(j_1 j_2 j_3; j_{12} j_{23}).$$

Следовательно, разбиение сложного преобразования G над деревьями на элементарные операции P, C типа (5), (6) эквивалентно разбиению сложного $3nj$ -символа, отвечающего преобразованию G , на $6j$ -символы. Это можно сделать разрезанием диаграммы $3nj$ -символа на более простые диаграммы методами, описанными в работе [7]. Алгоритм разрезания в диаграммах $3nj$ -символа на $6j$ -символы развит в работе [8]. Выражение (5) для деревьев Вигне-

ра означает, что $9j$ -символ сводится к сумме произведений трех коэффициентов Рака:

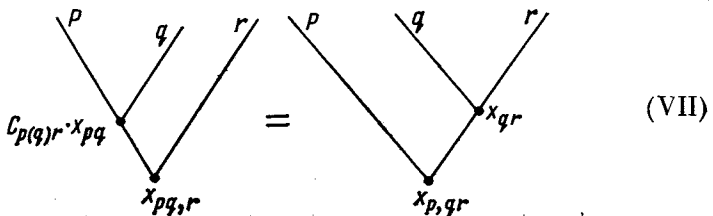
$$\begin{aligned} & [(2j_{12} + 1)(2j_{34} + 1)(2j_{13} + 1)(2j_{24} + 1)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & j_{1234} \end{matrix} \right\} = \\ & = \sum_{j_{123}} U(j_{12}j_3j_{1234}j_4; j_{123}j_{34}) (-1)^{j_1+j_2-j_{12}} \times \\ & \times U(j_2j_1j_{123}j_3; j_{12}j_{13}) (-1)^{j_{13}+j_{12}-j_{123}} U(j_{13}j_2j_{1234}j_4; j_{123}j_{24}). \quad (7) \end{aligned}$$

Переход от одного дерева Якоби к другому в базисе гармонического осциллятора. В трансляционно-инвариантной модели оболочек мы будем иметь дело с произведениями осцилляторных функций от координат Якоби $\Psi = \prod_{i=1}^{A-1} \Psi_{n_i l_i m_i}(\bar{x}_i)$, где n, l, m — число квантов, орбитальный момент и его проекция для соответствующего осцилляторного состояния. Полезно сложить каким-нибудь способом моменты $l_1 \dots l_{A-1}$ в полный момент L ; полученную в результате волновую функцию мы обозначим

$$|l_1 l_2 \dots l_{A-1} : LMD_W D_J\rangle, \quad (8)$$

где \mathcal{D}_J означает дерево Якоби, которое определяет структуру используемых координат Якоби $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{A-1}$; \mathcal{D}_W — дерево Вигнера, задающее схему сложения моментов количества движения по отдельным координатам Якоби $l_1 l_2 \dots l_{A-1}$ в полный момент L . В дальнейшем нам придется преобразовывать функции (8) к другим наборам координат Якоби. Поэтому получим матрицы элементарных преобразований P, C в базисе (8). Операция отражения P в некотором узле дерева Якоби означает изменение знака координаты Якоби \bar{x}_i , которая соответствует этому узлу. В итоге функция (8) просто умножается на фазу $(-1)^{l_i}$.

Рассмотрим операцию пересадки ветки $C_{p(q)r}$:



Здесь свободные концы означают координаты центров масс R_p, R_q, R_r трех нуклонных группировок с массами p, q, r соответ-

ственно. Узлы отвечают двум парам координат Якоби:

$$\left. \begin{aligned} x_{pq} &= \sqrt{\frac{pq}{p+q}} (R_p - R_q); \quad x_{pq, r} = \\ &= \sqrt{\frac{r}{(p+q+r)(p+q)}} [pR_p + qR_q - (p+q)R_r]; \\ x_{qr} &= \sqrt{\frac{qr}{q+r}} (R_q - R_r); \quad x_{p, qr} = \\ &= \sqrt{\frac{p}{(p+q+r)(q+r)}} [(q+r)R_p - qR_q + rR_r]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Эти два набора координат Якоби связаны следующим ортогональным преобразованием:

$$\left. \begin{aligned} x_{p, qr} &= \sqrt{\frac{pr}{(p+q)(q+r)}} x_{pq, r} + \sqrt{\frac{q(p+q+r)}{(p+q)(q+r)}} x_{pq}; \\ x_{qr} &= \sqrt{\frac{q(p+q+r)}{(p+q)(q+r)}} x_{pq, r} - \sqrt{\frac{pr}{(p+q)(q+r)}} x_{pq}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

которое можно рассматривать как кинематический поворот на угол

$$\varphi = \text{arctg} \sqrt{pr/[q(p+q+r)]}.$$

Выделим ту часть функции (8), которая связана с координатами Якоби $x_{pq}, x_{pq, r}$. Тогда согласно [10, 11] имеем

$$\begin{aligned} & |n_1 l_1(x_{pq, r}), n_2 l_2(x_{pq}) : \Lambda M\rangle = \\ &= \sum_{n'_1 l'_1 n'_2 l'_2} \langle n_1 l_1 n_2 l_2 : \Lambda | pr/q(p+q+r) | n'_1 l'_1 n'_2 l'_2 : \Lambda \rangle \times \\ & \times |n'_1 l'_1(x_{p, qr}) n'_2 l'_2(x_{qr}) : \Lambda M\rangle, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\langle n_1 l_1 n_2 l_2 : \Lambda | \mu_1/\mu_2 | n'_1 l'_1 n'_2 l'_2 : \Lambda \rangle$ — обобщенные коэффициенты Тальми — Мошинского [12]. Таким образом, имеем

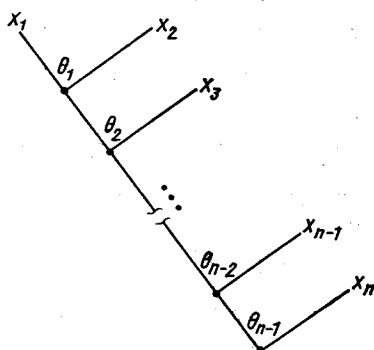
$$\begin{aligned} \langle n_1 l_1(x_{pq}) n_2 l_2(x_{pq, r}) : \Lambda M | C_{pq, r} | n'_1 l'_1(x_{p, qr}) n'_2 l'_2(x_{qr}) : \Lambda \rangle = \\ = \langle n_2 l_2 n_1 l_1 : \Lambda | pr/q(p+q+r) | n'_2 l'_2 n'_1 l'_1 : \Lambda \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что если осцилляторные состояния $|n_1 l_1 m_1\rangle, |n_2 l_2 m_2\rangle$ в (11) не просто векторно сложены, а из них образована комбинация с определенной симметрией $(\lambda\mu)$ относительно $SU(3)$, т. е.

$$|n_1 n_2 : (\lambda\mu) LM\rangle = \sum_{l_1 l_2} \langle l_1^{(n_1 0)} l_2^{(n_2 0)} | L^{(\lambda\mu)} \rangle |n_1 l_1 n_2 l_2 : LM\rangle, \quad (13)$$

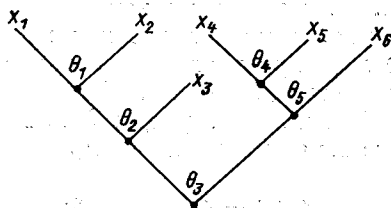
где $\langle l_1^{(n_1 0)} l_2^{(n_2 0)} | L^{(\lambda\mu)} \rangle$ — коэффициенты Клебша — Гордана для $SU(3)$ -группы в редукции $SU(3) \supset SO(3)$ [13], то матричный

Набор гиперсферических координат, которые удовлетворяют соотношениям (15), можно изобразить графически в виде канонического гиперсферического дерева:



(VIII)

Возможны и другие варианты выбора гиперсферических углов. Каждый из них можно изобразить своим гиперсферическим деревом. В общем случае свободным ветвям гиперсферического дерева отвечают декартовы координаты точки в n -мерном пространстве. Узлы отвечают гиперсферическим углам Θ_i . Внутренние линии можно трактовать как гиперрадиус в подпространстве, натянутом на те оси x_i , номера которых обозначены на свободных концах, «произрастающих» из этой внутренней линии. Для того чтобы записать выражение декартовой координаты x_i через гиперсферические углы, необходимо проследить путь от нижнего узла гиперсферического дерева к ветви x_i , и если по ходу дела при движении из некоторого узла Θ_k приходится идти влево, то в выражении, связывающем x_i и ρ , добавляется множитель $\sin \Theta_k$; если же движение происходит вправо, то пишется множитель $\cos \Theta_k$. Если из вершины Θ_k уходят вверх две свободные ветви, то угол Θ_k изме-



(IX)

няется в пределах $0 \leq \Theta_k < 2\pi$; если из нее выходят две внутренние линии, то $0 \leq \Theta_k \leq \pi/2$; если одна из линий внутренняя, а вторая — свободная, то $0 \leq \Theta_k \leq \pi$. Так, дерево, изображенное выше, означает такой выбор гиперсферических углов $\Theta_1 \dots \Theta_5$, при котором связь декартовых координат с гиперсферическими имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \rho \sin \Theta_3 \sin \Theta_2 \sin \Theta_1; \\ x_2 &= \rho \sin \Theta_3 \sin \Theta_2 \cos \Theta_1; \\ x_3 &= \rho \sin \Theta_3 \cos \Theta_2; \\ x_4 &= \rho \cos \Theta_3 \sin \Theta_5 \sin \Theta_4; \\ x_5 &= \rho \cos \Theta_3 \sin \Theta_5 \cos \Theta_4; \\ x_6 &= \rho \cos \Theta_3 \cos \Theta_5, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$0 \leq \Theta_1; \Theta_4 \leq 2\pi; 0 \leq \Theta_2; \Theta_5 \leq \pi; 0 \leq \Theta_3 \leq \pi/2.$$

Вернемся к каноническому набору гиперсферических углов, задаваемому соотношениями (15). Совокупность всех поворотов в пространстве \mathcal{L}_n с координатами x_1, x_2, \dots, x_n образует группу n -мерных вращений $O(n)$. Если мы ограничимся поворотами в подпространстве \mathcal{L}_{n-1} с координатами x_1, \dots, x_{n-1} , то перейдем к подгруппе $O(n-1)$. Переход от \mathcal{L}_n к \mathcal{L}_{n-1} связан с обращением в нуль угла Θ_{n-1} в наборе (15). Вектор, параллельный n -й оси, имеет координату $\Theta_{n-1} = 0$. Он инвариантен по отношению к группе $O(n-1)$. В связи с этим каноническому гиперсферическому дереву (VIII) можно придать определенный теоретико-групповой смысл: это дерево отвечает редукции группы $O(n)$ на цепочку вложенных друг в друга подгрупп

$$O(n) \supset O(n-1) \supset \dots \supset O(3) \supset O(2), \quad (17)$$

которая называется канонической редукцией Гельфанда — Цетлина. В цепочке (17) каждая группа $O(i)$ действует в подпространстве \mathcal{L}_i с координатами $x_1 x_2 \dots x_i$, переход от \mathcal{L}_n к \mathcal{L}_i осуществляется обращением в нуль углов $\Theta_i \Theta_{i+1} \dots \Theta_{n-1}$.

Точно так же некоторую цепочку подгрупп можно поставить в соответствие и гиперсферическому дереву общего вида. Для выделения этой цепочки нужно только иметь в виду, что обращение в нуль угла Θ_k , отвечающего вершине, в которой сходятся две внутренние линии, из которых произрастает m и n свободных \mathcal{L} ветвей соответственно, означает переход из пространства \mathcal{L}_{m+n} размерности $m \oplus n$ в пространство, которое является прямой суммой подпространств $\mathcal{L}_m \oplus \mathcal{L}_n$. Следовательно, обращение в нуль такого угла Θ_k ведет к редукции $O_{m+n} \supset O_m \times O_n$. Из этого замечания ясно, что дереву, приведенному на (V), отвечает редукция

$$O(6) \supset O(3) \times O(3) \\ \cup \quad \cup \\ O(2) \quad O(2), \quad (18)$$

где первая $O(3)$ группа действует в подпространстве с координатами x_1, x_2, x_3 , а вторая — в подпространстве с координатами x_4, x_5, x_6 . Угол Θ_3 связывает радиусы-векторы ρ_1, ρ_2 в этих под-

пространствах с гиперрадиусом ρ :

$$\rho_1 = \rho \sin \Theta_3, \quad \rho_2 = \rho \cos \Theta_3, \quad 0 \leq \Theta_3 \leq \pi/2; \quad (19)$$

остальные углы $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ — это обычные сферические углы в указанных трехмерных подпространствах.

Элемент объема и оператор Лапласа (каноническое дерево). Если используется канонический набор гиперсферических координат (15), то элемент объема dV в n -мерном пространстве имеет вид

$$dV = dx_1 dx_2 \dots dx_n = \rho^{n-1} d\rho d\Omega, \quad (20)$$

где элемент телесного угла $d\Omega$ равен

$$d\Omega = \sin^{n-2}\Theta_{n-1} \sin^{n-3}\Theta_{n-2} \dots \sin \Theta_2 d\Theta_{n-1} d\Theta_{n-2} \dots d\Theta_1. \quad (21)$$

Полный телесный угол легко подсчитать, интегрируя (21) по всем углам Θ_i в пределах, указанных в (15). В результате получаем, что

$$\Omega = \int d\Omega = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2). \quad (22)$$

Оператор Лапласа задается выражением

$$\Delta_n = \sum_n \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \frac{1}{\rho^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \Delta_{\Omega_n}, \quad (23)$$

где для угловой части n -мерного оператора Лапласа справедливо рекуррентное соотношение

$$\Delta_{\Omega_n} = \frac{1}{\sin^{n-2}\Theta_{n-1}} \frac{\partial}{\partial \Theta_n} \left(\sin^{n-2}\Theta_{n-1} \frac{\partial}{\partial \Theta_{n-1}} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Theta_{n-1}} \Delta_{\Omega_{n-1}}. \quad (24)$$

Гиперсферические гармоники (каноническое дерево). Гиперсферические гармоники — это собственные функции угловой части оператора Лапласа Δ_{Ω_n} , регулярные на n -мерной сфере. Собственные значения оператора Лапласа равны $-l_n(l_n + n - 2)$, где l_n — целые неотрицательные числа, и имеют большую кратность вырождения. Для отличия друг от друга вырожденных ГГ с одним и тем же n -мерным гипермоментом l_n можно потребовать, чтобы эти функции были собственными функциями всех лапласианов Δ_{Ω_i} ($i = 2, \dots, n - 1$) в пространствах меньшей размерности \mathcal{L}_i с координатами x_1, x_2, \dots, x_i . Тогда ГГ будет характеризоваться не только гипермоментом l_n , но и гипермоментами l_2, \dots, l_{n-1} в пространствах меньшей размерности. Обозначим такую ГГ символом $Y_{LM}(\Theta_1, \dots, \Theta_{n-1})$, где $L = l_n$, M заменяет собой совокупность гипермоментов $l_{n-1} \dots l_2$.

Тогда получаем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\Omega_n} Y_{LM}(\Theta_q) &= -l_n(l_n + n - 2) Y_{LM}(\Theta_q); \\ \Delta_{\Omega_i} Y_{LM}(\Theta_q) &= -l_i(l_i + i - 2) Y_{LM}(\Theta_q); \\ -i \frac{\partial}{\partial \Theta_2} Y_{LM}(\Theta_q) &= l_2 Y_{LM}(\Theta_q). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Набор гипермоментов M является достаточным для полной и однозначной нумерации вырожденных ГГ. Допустимы следующие значения гипермоментов:

$$l_n \geq l_{n-1} \geq l_{n-2} \geq \dots \geq l_3 \geq |l_2|; \quad (26)$$

l_2 может быть отрицательным и принимает целочисленные значения, удовлетворяющие условию

$$-l_3 \leq l_2 \leq l_3. \quad (27)$$

Соответствующая ГГ имеет аналитический вид:

$$\begin{aligned} Y_{LM}(\Theta_q) &= NC_{l_n - l_{n-1}}^{(n-2)/2 + l_{n-1}} (\cos \Theta_{n-1}) \sin^{l_{n-1}} \Theta_{n-1} < \\ &< C_{l_{n-1} - l_{n-2}}^{(n-3)/2 + l_{n-2}} (\cos \Theta_{n-2}) \sin^{l_{n-2}} \Theta_{n-2} - \dots \\ &\dots C_{l_3 - |l_2|}^{1/2 + l_2} (\cos \Theta_2) \sin^{|l_2|} \Theta_2 \begin{cases} \exp(i l_2 \Theta_1), & l_2 > 0; \\ (-1)^{l_2} \exp(i l_2 \Theta_1), & l_2 < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} N^2 &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \prod_{j=0}^{n-3} \frac{2^{2l_{n-j-1} + n - j - 4} (l_{n-j} - l_{n-j-1})! (n - j + 2l_{n-j} - 2) \Gamma^2\left(\frac{n-j-2}{2} + l_{n-j-1}\right)}{\Gamma(l_{n-j} + l_{n-j-1} + n - j - 2) \pi}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$C_m^p(t) = \frac{2^m \Gamma(p+m)}{m! \Gamma(p)} \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \frac{m! (p+m-1-k)!}{(m-2k)! 2^{2k} k! (p+m-1)!} t^{m-2k}. \quad (29)$$

В формуле (29) для полиномов Гегенбауэра $C_m^p(t)$ символ $[m/2]$ означает целую часть числа $m/2$. В случае $n = 3$ формула (28) строго переходит в известное выражение для обычных сферических функций:

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\Theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{(l-m)! (2l+1)}{(l+m)! 4\pi}} \times \\ &\times \sum_{s=0} (-1)^s \frac{(2l-2s-1)!! (\cos \Theta)^{l-m-2s}}{2^s s! (l-m-2s)!} \sin^m \Theta \exp(im\varphi), \quad m \geq 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Гармоники (28) ортонормированы:

$$\int d\Omega Y_{LM}(\Theta_q) Y_{L'M'}^*(\Theta_q) = \delta_{LL'} \delta_{MM'}; \delta_{MM'} \equiv \delta_{l_{n-1} l'_{n-1}} \dots \delta_{l_2 l'_2}. \quad (31)$$

Из соотношений (25) следует, что гипермомент l_n характеризует неприводимое \mathcal{D}^{l_n} -представление $O(n)$ -группы, по которому преобразуется ГГ $Y_{LM}(\Theta_q)$. Это представление принадлежит к числу так называемых неприводимых представлений класса I по отношению к $O(n-1)$ -подгруппе.

Гипермоменты l_i ($i = 2, \dots, n-1$) характеризуют неприводимые представления $O(i)$ -подгрупп из цепочки (17), к которым принадлежат соответствующие ГГ. Гиперсферические гармоники Y_{LM} образуют канонический базис Гельфанда — Цетлина для неприводимого $D^{l(n)}$ представления класса I $O(n)$ -группы [19]. Согласно работе [15] оно обозначается сигнатурой $(l_n 0, \dots, 0)$ (всего в скобках должно быть $[n/2]$ чисел). Поэтому матричные элементы операторов бесконечно малых поворотов по функциям (28) можно находить по формулам Гельфанда — Цетлина [19, 20]. Однако они в дальнейшем не потребуются и мы их выписывать не будем. Отметим только некоторые свойства ГГ, аналогичные свойствам обычных сферических гармоник.

Некоторые свойства гиперсферических гармоник. Положим в (28) $\Theta_{n-1} = 0$. Тогда $Y_{LM}(\Theta_{n-1} = 0)$ отлично от нуля только при $l_{n-1} = 0$ и не зависит от остальных гиперсферических углов. При этом согласно (26) $l_{n-2} = l_{n-3} = \dots = l_2 = 0$ и $Y_{LM}(\Theta_{n-1} = 0)$ не зависит от углов $\Theta_{n-2}, \Theta_{n-3}, \dots, \Theta_2, \Theta_1$, которые можно также считать равными нулю. В итоге имеем соотношение

$$Y_{LM}(0, 0) = \delta_{M0} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma(n+l_n-2) (2l_n+n-2)}{2\pi^{n/2} l_n! \Gamma(n-1)}}; \quad (32)$$

$$\delta_{M0} \equiv \delta_{l_{n-1} 0} \delta_{l_{n-2} 0} \dots \delta_{l_2 0},$$

являющееся аналогом известного свойства трехмерных сферических функций

$$Y_{lm}(0, 0) = \delta_{m0} \sqrt{(2l+1)/4\pi}. \quad (33)$$

Обращение $l_{n-1}, l_{n-2}, \dots, l_2$ в нуль при $\Theta_{n-1} = 0$ вполне естественно, ибо, переходя к $\Theta_{n-1} = 0$, мы получаем функцию, которая зависит только от декартовой переменной x_k и является инвариантом по отношению к подгруппам $O(n-1), O(n-2), \dots, O(2)$ из цепочки (17), т. е. соответствует нулевым гипермоментам в пространствах \mathcal{L}_i с координатами x_1, x_2, \dots, x_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$).

Нетрудно доказать также соотношение

$$\begin{aligned}
 & Y_{L_1 M_1}(\Theta) Y_{L_2 M_2}(\Theta) = \\
 & = \sum_{L=|L_1-L_2|}^{L_1+L_2} (L_1 M_1 L_2 M_2 | L M) (L_1 0 L_2 0 | L 0) Y_{L M}(\Theta) \times \\
 & \times \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma(n+L_1-2) \Gamma(n+L_2-2) (2L_1+n-2) (2L_2+n-2) L!}{2\pi^{n/2} L_1! L_2! \Gamma(n-1) (2L+n-2) \Gamma(n+L-2)}}, \quad (34)
 \end{aligned}$$

позволяющее разложить произведение двух $\Gamma\Gamma$ от одних и тех же аргументов по $\Gamma\Gamma$ от того же аргумента. $(L_1 M_1 L_2 M_2 | L M)$ — это коэффициенты Клебша — Гордана для O_n -групп *. Заметим, что в прямом произведении $\mathcal{D}^{L_1} \times \mathcal{D}^{L_2}$ неприводимых представлений O_n -группы содержатся не только неприводимые \mathcal{D}^L -представления класса 1, но и более общие. Однако наличие коэффициента $(L_1 0 L_2 0 | L 0)$ обеспечивает то, что в сумму в правой части (34) входят фактически только неприводимые \mathcal{D}^L -представления класса 1 ** и, кроме того, как и в аналогичном соотношении для обычных сферических функций, должно быть

$$L_1 + L_2 + L = \text{четное число}, \quad (35)$$

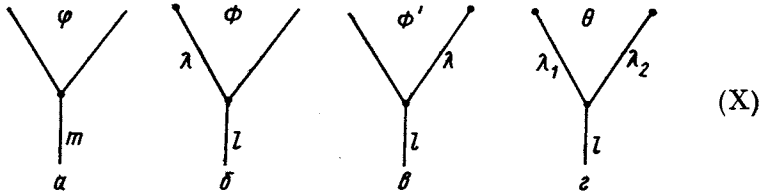
что легко понять, сравнивая четности левой и правой частей соотношения (34). Четность $\Gamma\Gamma$ $Y_{L M}$ определяется значением $(-1)^L$. Последнее становится очевидным, если вместо $\Gamma\Gamma$ рассмотреть гармонические полиномы $J_{L M}(x_1 x_2 \dots x_n) = \rho^L Y_{L M}(\Theta_q)$. Легко видеть, что $J_{L M}(x_1 \dots x_n)$ — это однородные полиномы степени L , которые являются решениями уравнения Лапласа.

Гиперсферические гармоники (неканонические деревья). Теперь сформулируем правила записи гиперсферических гармоник для произвольного гиперсферического дерева. Чтобы задать графически $\Gamma\Gamma$, необходимо каждой внутренней ветви гиперсферического дерева поставить в соответствие некоторый гипермомент l_i , указывающий неприводимое представление подгруппы вращений в пространстве переменных x_i, x_j, \dots, x_k , которым соответствуют свободные ветви, произрастающие из ветви l_i . Общая n -мерная гиперсферическая функция будет произведением $n - 1$ множителей, каждый из которых зависит от одного из гиперсферических углов.

* Формулы для вычисления этих величин получены в работе [24].

** Напомним, что неприводимое представление G -группы называется представлением класса 1 по отношению к подгруппе H , если в пространстве D -представления имеется вектор, инвариантный по отношению к подгруппе H . Из смысла коэффициента $(L_1 0 L_2 0 | L 0)$ видно, что неприводимое \mathcal{D}^L -представление должно быть таким, чтобы в нем был вектор с $M = 0$, т. е. вектор инвариантный по отношению к $O(n-1)$. Поэтому данный коэффициент Клебша — Гордана отличен от нуля только для \mathcal{D}^L -представлений класса 1 по отношению $O(n-1)$ -подгруппе.

Поскольку каждому гиперсферическому углу отвечает узел гиперсферического дерева, то достаточно указать, какие выражения следует сопоставлять каждому типу узлов. На гиперсферическом дереве общего вида могут встречаться четыре типа узлов или развилок, изображенных на следующих графиках:



Рассмотрим каждый тип в отдельности [17, 22].

1. Узел с двумя свободными концами (а).
 Такому узлу сопоставляется угол $0 \leq \varphi < 2\pi$. В выражение элемента общего телесного угла $d\Omega$ эта развилка дает вклад $d\Omega_a = d\varphi$. Зависимость Γ от этого угла имеет вид

$$J_m^a(\varphi) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(im\varphi), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (36)$$

где m указывает на неприводимое представление $SO(2)$ -группы, действующей в пространстве переменных x_i, x_j , отвечающих двум свободным концам, выходящим из этого узла.

Впрочем, по причинам, которые будут ясны из дальнейшего, нам иногда будет удобнее использовать вместо комплексных величин (36) вещественные выражения

$$(1/\sqrt{\pi}) \cos m\varphi, (1/\sqrt{\pi}) \sin m\varphi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (36a)$$

Этим выражениям сопоставляется диаграмма вида (X), а, но около узла ставится знак «+» для косинусоидальной и «-» для синусоидальной зависимости.

2. Узел с одним свободным концом (б и в).
 Ему сопоставляется угол $0 \leq \Phi \leq \pi$ ($0 \leq \Phi' \leq \pi$). В элемент общего телесного угла этот угол дает вклад $d\Omega_b = \sin^{p-2} \Phi d\Phi$, а в Γ зависимость от этого угла имеет вид, аналогичный (28):

$$J_{l\lambda}^\delta(\Phi) = N_{l\lambda}^\delta C_{l-\lambda}^{(p-2)/2+\lambda} \cos \Phi \sin^\lambda \Phi, \quad (37)$$

где

$$N_{l\lambda}^\delta = \left[\frac{2^{2\lambda+p-4} (l-\lambda)! (2l+p-2) \Gamma^2(\lambda+(p-2)/2)}{\pi \Gamma(l+\lambda+p-2)} \right]^{1/2}.$$

Здесь p — число свободных ветвей, связанных с рассматриваемым узлом. Индекс l указывает на неприводимое представление $SO(p)$ -группы, действующей в пространстве переменных, отвечающих свободным линиям, связанным с данным узлом. Индекс $\lambda = l$,

$l - 1, l - 2, 1$ или 0 указывает на неприводимое представление $SO(p-1)$ -подгруппы, действующей в пространстве переменных, отвечающих свободным линиям, связанным с внутренней линией λ . Используя связь полиномов Гегенбауэра с полиномами Якоби [23], можно переписать (37) в виде [22]

$$\left. \begin{aligned} J_{l\lambda}^{\delta}(\Phi) &= \bar{N}_{l\lambda}^{\delta} \sin^{\lambda} \Theta P_{l-\lambda}^{\lambda+(p-3)/2, \lambda+(p-3)/2} \cos \Theta; \\ \bar{N}_{l\lambda}^{\delta} &= \left[\frac{\Gamma(l+\lambda+p-2) (2l+p-2) (l-\lambda)!}{\pi 2^{2\lambda+p-2} \Gamma(l+(p-1)/2) \Gamma(l+(p-1)/2)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Переход от развилки графика b к графику e , очевидно, совершается тривиальной заменой $\Phi' = \pi/2 - \Phi$. Однако для полноты приведем результирующее выражение

$$J_{l\lambda}^b(\Phi') = N_{l\lambda}^{\delta} \cos^{\lambda} \Phi' (-1)^{l-\lambda} C_{l-\lambda}^{\lambda+(p-2)/2}(\sin \Phi'). \quad (39)$$

В (38) и ниже используется стандартное определение полиномов Якоби [17, 23]:

$$\begin{aligned} P_k^{\alpha\beta}(Z) &= \frac{(-1)^k}{2^k k!} (1-Z)^{-\alpha} (1+Z)^{-\beta} \frac{d^k}{dZ^k} [(1-Z)^{\alpha+k} (1+Z)^{\beta+k}] = \\ &= \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k! \Gamma(\alpha+1)} F\left(-k, k+\alpha+\beta+1, \alpha+1; \frac{1-Z}{2}\right) = \\ &= \frac{(-1)^k \Gamma(k+\beta+1)}{k! \Gamma(\beta+1)} F\left(-k+\alpha+\beta+1, \beta+1, \frac{1+Z}{2}\right). \end{aligned} \quad (40)$$

3. Узел без свободных ветвей (e). Ему сопоставляется угол Θ ($0 \leq \Theta \leq \pi/2$). В элемент общего телесного угла этот угол дает вклад $d\Omega_{\Gamma} = \sin^{p-1} \Theta \cos^{q-1} \Theta d\Theta$, где p — число свободных ветвей, связанных с линией λ_1 , q — число таких же ветвей, связанных с линией λ_2 . Соответствующая часть $\Gamma\Gamma$ имеет вид

$$J_{l\lambda_1\lambda_2}^r(\Theta) = N_{l\lambda_1\lambda_2}^r \sin^{\lambda_1} \Theta \cos^{\lambda_2} \Theta P_{\frac{l}{2}}^{\lambda_1+\frac{p}{2}-1, \lambda_2+\frac{q}{2}-1}(\cos 2\Theta), \quad (41)$$

где

$$N_{l\lambda_1\lambda_2}^r = \left[\frac{(2l+p+q-2) \Gamma\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2+l+p+q-2}{2}\right) \left(\frac{l-\lambda_1-\lambda_2}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{l+\lambda_1-\lambda_2+p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l+\lambda_2-\lambda_1+q}{2}\right)} \right].$$

Допустимые значения $\lambda_1, \lambda_2 = 0, 1, 2, \dots$ при фиксированном l определяются соотношением

$$l - \lambda_1 - \lambda_2 = \text{четное число}. \quad (42)$$

В качестве иллюстрации приведем явное выражение для ГГ, отвечающей дереву, представленному на графике (с. 857):

$$\begin{aligned}
 & Y_{l_1 m_1 l_2 m_2}(\Theta_1 \Theta_2 \dots \Theta_5) = \\
 & = \sqrt{\frac{(2l+4) \left(\frac{l-l_1-l_2}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{l_1+l_2+l+4}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{l+l_1-l_2+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l+l_2-l_1+3}{2}\right)!}} \times \\
 & \times (\sin \Theta_3)^{l_1} (\cos \Theta_3)^{l_2} P_{(l-l_1-l_2)/2}^{l_1+1/2, l_2+1/2}(\cos 2\Theta_3) Y_{l_1 m_1}(\Theta_2 \Theta_1) \times \\
 & \times Y_{l_2 m_2}(\Theta_5 \Theta_4), \tag{43}
 \end{aligned}$$

где $Y_{l_i m_i}(\Theta_j \Theta_k)$ — обычные трехмерные сферические гармоники. Функцию вида (43), которая составлена из произведения обычных сферических функций, назовем полисферической функцией. В дальнейшем нам придется иметь дело с пространствами размерности $3A - 3$, поэтому будет удобно использовать гиперсферические деревья, у которых все свободные ветви объединены в тройки (это будут три декартовы компоненты соответствующей координаты Якоби). Соответствующая ГГ будет полисферической функцией, так как она составлена аналогично (27) из обычных сферических гармоник, отвечающих каждой координате Якоби. Деревья такой структуры также назовем полисферическими. Тем самым при переходе от одного набора координат Якоби к другому придется иметь дело с преобразованием одного полисферического дерева в другое. Однако не будем ограничиваться этим случаем, а рассмотрим в общем виде вопрос о преобразовании ГГ для произвольного гиперсферического дерева при переходе к любому другому дереву.

«Деревянные» коэффициенты. Пусть имеется n -мерная ГГ

$$J_{k_1 k_2 \dots k_{n-2}}(\Theta_1 \dots \Theta_{n-1}) \mathcal{D}_\Gamma, \tag{44}$$

которая отвечает какому-то гиперсферическому дереву \mathcal{D}^Γ и в которой k — общий гипермомент, $k_1 k_2 \dots k_{n-2}$ — гипермоменты в подпространствах n -мерного пространства с базисом x_1, x_2, \dots, x_n . Рассмотрим переход G от дерева \mathcal{D}^Γ к другому гиперсферическому дереву $\mathcal{D}^{\Gamma'}$. Тогда гиперсферические функции для двух деревьев связаны друг с другом следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & J_{k k_1 k_2 \dots k_{n-2}}(\Theta_i) \mathcal{D}_\Gamma = \\
 & = \sum_{k_1 k_2 \dots k_{n-2}} \langle k_1 k_2 \dots k_{n-2} : k \mathcal{D}_\Gamma | k'_1 k'_2 \dots k'_{n-2} : k \mathcal{D}^{\Gamma'} \rangle \times \\
 & \times J_{k k_1 k_2 \dots k_{n-2}}(\Theta_1) \mathcal{D}_\Gamma. \tag{45}
 \end{aligned}$$

Коэффициенты перехода от одних гармоник к другим

$$\langle k_1 k_2 \dots k_{n-2} : k \mathcal{D}_\Gamma | k'_1 k'_2 \dots k'_{n-2} : k \mathcal{D}^{\Gamma'} \rangle \tag{46}$$

назовем «деревянными» коэффициентами. Операция такого перехода G сводится к произведению элементарных преобразований P и C . Поэтому и матрица перехода (46) будет произведением матриц отдельных переходов C и P .

Рассмотрим действие отражения P на функцию (44). Если отражение происходит в узле, в котором сходятся две свободные ветви (см. (X), а), то операция P отвечает замене $\varphi \rightarrow \pi/2 - \varphi$:

$$PJ_m^a(\varphi) = J_m^{a'}(\varphi) = \exp(im\pi/2) J_{-m}^{(a)}(\varphi). \quad (47)$$

Узел типа (см. (X), б) под действием отражения P превращается в узел (см. (X), в) и наоборот:

$$PJ_{l\lambda}^b(\Phi) = J_{l\lambda}^b(\Phi) = (-1)^{l-\lambda} J_{l\lambda}^b(\Phi); \quad (48)$$

$$PJ_{l\lambda}^b(\Phi) = J_{l\lambda}^b(\Phi) = (-1)^{l-\lambda} J_{l\lambda}^b(\Phi). \quad (49)$$

Наконец, для случая (см. (X), з) имеем

$$PJ_{l\lambda_1\lambda_2}^r(\Theta) = J_{l\lambda_2\lambda_1}^r(\Theta) = (-1)^{l-\lambda_1-\lambda_2} J_{l\lambda_1\lambda_2}^r(\Theta). \quad (50)$$

Таким образом, коэффициенты преобразования ГГ при перестройках деревьев типа отражений P находятся тривиальным образом. Используя явный вид ГГ, можно получить коэффициенты дерева и для операций пересадки ветвей $C_{a(b)c}$. Это было сделано в работе [22] для всех вариантов пересадок. Однако дальнейший анализ [24, 25] показал, что эти коэффициенты совпадают с $6j$ -символами для некомпактной $SU(1,1)$ -группы. Поэтому в данном обзоре рассмотрим только такую наглядную трактовку деревянных коэффициентов (см. разд. 4).

Для изложения этого подхода необходимо знать связь между осцилляторными функциями в координатах Якоби и теми же функциями в многомерных сферических координатах.

3. ОСЦИЛЛЯТОРНЫЕ ФУНКЦИИ В КООРДИНАТАХ ЯКОБИ И ГИПЕРСФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Решение уравнения Шредингера для n -мерного осциллятора в гиперсферических координатах. Гамильтониан ТИМО для A частиц, записанный в координатах Якоби, имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^{A-1} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{x_i} + \frac{m}{2} \omega^2 x_i^2 \right], \quad (51)$$

и его собственные функции являются произведениями трехмерных осцилляторных функций от отдельных координат Якоби x_i . В $(3A - 3)$ -мерном пространстве координат Якоби можно ввести

гиперсферические координаты: гиперрадиус

$$\rho^2 = \sum_{i=1}^{A-1} x_i^2 = \sum_{i=1}^A (r_i - R)^2$$

(r_i — координата отдельных нуклонов; R — центр массы ядра) и гиперсферические углы Θ_j ($j = 1, \dots, 3A - 4$). Тогда гамильтониан (51) переписывается следующим образом:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{\rho^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \Delta_{\Theta_i} \right] + \frac{1}{2} m \omega^2 \rho^2, \quad (51a)$$

где $n = 3A - 3$, Δ_{Θ_i} — угловая часть оператора Лапласа. При этом собственные значения энергии задаются формулой

$$E_N = (2\kappa + K + n/2) \hbar \omega \quad (52)$$

(здесь $2\kappa + K = N$ — полное число квантов), а собственные функции имеют вид

$$\Psi_{NK\nu} = R_{\kappa K}(\rho) Y_{K\nu}(\Theta_i) \mathcal{D}_\Gamma, \quad (53)$$

где $Y_{K\nu}(\Theta_i)$ — некоторая ГТ с общим гипермоментом K , отвечающая выбранному гиперсферическому дереву \mathcal{D}_Γ ; ν — набор остальных гипермоментов, характеризующих состояние

$$R_{\kappa K}(\rho) = \sqrt{\frac{2\kappa!}{\Gamma(\kappa + K + n/2)}} e^{-(1/2)\rho^2} \rho^K L_\kappa^{K+(1/2)(n-2)}(\rho^2). \quad (54)$$

Здесь ρ дано в единицах $r_0^2 = \hbar/m\omega$, а присоединенные полиномы Лагерра определены обычным образом [24]:

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n+\alpha)!}{(n-k)! (\alpha+k)! k!} x^k. \quad (55)$$

Известно [10], что набор осцилляторных функций с фиксированным числом квантов N образует базис симметричного неприводимого представления со схемой Юнга $[N]$ группы $U(n) = U(3A - 3)$, генераторами которой являются операторы

$$A_{i\alpha, j\beta} = a_{i\alpha}^+ a_{j\beta}, \quad i, j = 1, 2, \dots, A-1, \quad \alpha, \beta = x, y, z, \quad (56)$$

где $a_{i\alpha}^+$, $a_{i\alpha}$ — операторы рождения и уничтожения квантов по α -й декартовой компоненте координаты Якоби x_i . Ясно, что волновые функции вида (53) с фиксированным NK и всевозможными значениями ν принадлежат к неприводимому представлению группы $SO(n) = SO(3A - 3)$ с гипермоментом K .

Поэтому набор функции (53) отвечает редукции $SU(3A - 3) \supset SO(3A - 3)$. Нам будет интересно задать вопрос: как связаны между собой функции (53) и осцилляторные функции в координатах Якоби (8). Чтобы ответить на него, решим такую вспомога-

тельную задачу. Пространство с базисом x_1, x_2, \dots, x_n разобьем на два подпространства размерности n_1 и n_2 ($n_1 + n_2 = n$) с базисами $x_1 x_2 \dots x_{n_1}$ и $x_{n_1+1} \dots x_n$ соответственно. Введем гиперсферические координаты $\rho_1 \Theta_1^1$ и $\rho_2 \Theta_2^2$ в этих подпространствах и построим осцилляторные функции $\Psi_{N_1 K_1 \nu_1}$, $\Psi_{N_2 K_2 \nu_2}$ типа (53) в каждом из этих подпространств. Выразим функции (53) от ρ, Θ через функции от $\rho_1 \Theta_1^1, \rho_2 \Theta_2^2$:

$$\Psi_{NK\nu} = \sum_{N_1 N_2} \langle N_1 K_1 N_2 K_2 | NK \rangle \Psi_{N_1 K_1 \nu_1} \Psi_{N_2 K_2 \nu_2}. \quad (57)$$

Здесь предполагается, что сферическая функция $Y_{K\nu}$ в левой части выбрана в соответствии с редукцией $SO(n) \supset SO(n_1) \times SO(n - n_1)$, т. е. она совпадает с функцией (43). Поэтому коэффициенты перехода (57) не зависят от квантовых чисел ν, ν_1, ν_2 и справедливо равенство

$$\sum_{N_1 + N_2 = N} \langle N_1 K_1 N_2 K_2 | NK \rangle R_{N_1 K_1}(\rho_1) R_{N_2 K_2}(\rho_2) = R_{NK}(\rho) N_{KK_1 K_2}^2 \sin^{K_1} \Theta \cos^{K_2} \Theta P_{\frac{(K_1 + n_1/2 - 1)(K_2 + n_2/2 - 1)}{(K - K_1 - K_2)/2}}(\cos 2\Theta), \quad (58)$$

где

$$\rho_2 = \rho \cos \Theta, \quad \rho_1 = \rho \sin \Theta.$$

Оказывается, коэффициенты разложения в (57) можно связать с коэффициентами Клебша — Гордана для $Sp(2, R)$ -группы или локально-изоморфной ей $SU(1, 1)$ -группы [25, 26]. В результате «деревянные» коэффициенты будут пропорциональны $3nj$ -символам для этой группы, которые будут содержать моменты кратные $1/4$. Указанная связь между соответствующими величинами для двух разных $SO(n)$ - и $Sp(2, R)$ -групп основана на том, что эти две группы дополнительные в смысле определения, предложенного М. Мошинским с сотр. [27].

Дополнительные группы. Пусть имеется прямое произведение $H_1 \times H_2$ двух групп H_1 и H_2 и дано некоторое линейное пространство \mathcal{L} , в котором реализуется D -представление (вообще говоря, приводимое) группы $H_1 \times H_2$. Назовем группы H_1 и H_2 дополнительными внутри \mathcal{L} -пространства, если существует взаимно-однозначное соответствие между всеми неприводимыми представлениями групп H_1 и H_2 , содержащимися в D -представлении, т. е. в прямой сумме

$$D = \sum_i D^{j_i \lambda_i} \quad (59)$$

каждое неприводимое D^{j_i} -представление группы H_1 встречается в комбинации только с одним определенным неприводимым D^{λ_i} -представлением группы H_2 (и наоборот), причем каждая такая

комбинация D^j_i, D^{λ}_i встречается в разложении D -представления не более одного раза.

Известно, что группой неинвариантности системы p частиц в q -мерном осцилляторе является $\text{Sp}(2pq; R)$ -группа канонических преобразований, генераторами которой служат операторы $a_{i\alpha}^+ a_{j\beta}^+$, $(1/2)(a_{i\alpha}^+ a_{j\beta} + a_{j\beta} a_{i\alpha}^+)$, $a_{i\alpha} a_{j\beta}$ ($i = 1, 2, \dots, p; \alpha = 1, 2, \dots, q$). Совокупность всех состояний с четным числом квантов $N = 0, 2, \dots, \infty$ образует базис бесконечномерного представления с младшим весом $[1/4 \ 1/4 \ \dots \ 1/4] \equiv [1/4^{pq}]$ этой некомпактной группы. Все нечетные состояния осциллятора входят в другое представление с весом $[3/4 \ 1/4 \ \dots \ 1/4] \equiv [3/4 \ 1/4^{pq-1}]$. Мошинским с сотр. показано [27], что внутри пространств этих представлений $\text{Sp}(2q; R)$ - и $O(p)$ -группы являются дополнительными. Нас в дальнейшем будет интересовать случай $\text{Sp}(2n, R) \rightarrow \text{Sp}(2, R) \times O(n)$. Для этого случая имеем, что D^K -представление класса 1 $O(n)$ -группы с глобальным моментом K комбинирует с одним определенным D^J -представлением $\text{Sp}(2, R)$ -группы, которая локально-изоморфна $SU(1,1)$ -группе. Если K четно, то «момент» J в обозначениях, принятых для $SU(1,1)$ -группы, следующим образом связан с глобальным моментом K :

$$J = (1/2)(K + n/2) - 1. \tag{60}$$

Это означает, что осцилляторная функция для состояния с числом квантов N и глобальным моментом K , которая имеет вид (52), принадлежит к неприводимому представлению $\text{Sp}(2, R)$ -группы с моментом $J = (1/2)(K - 2) + n/4$ и характеризуется его проекцией $M = (1/2)N + n/4$. Тем самым мы встречаемся в этой задаче с двузначными унитарными неприводимыми представлениями $SU(1,1)$ -группы из положительной дискретной серии [17]. Отметим то, что каждой функции ортогональной схемы, а следовательно, и соответствующей ГГ можно естественным образом сопоставить момент кратный $[1/4]$. Это обстоятельство в конечном счете и приводит к тому, что «деревянные» коэффициенты будут пропорциональны n_j -символам с четвертьцелыми моментами.

«Деревянные» коэффициенты и j -символы для $\text{Sp}(2, R)$ -группы. Рассмотрим n -мерный гармонический осциллятор в пространстве с базисом x_1, x_2, \dots, x_n . Его гамильтониан равен сумме осцилляторных гамильтонианов для каждой из этих переменных, а волновая функция строится из произведений волновых функций n одномерных осцилляторов. Напомним, что согласно [27] все собственные функции одномерного осциллятора положительной четности принадлежат к одному неприводимому представлению $\text{Sp}(2, R)$ -группы канонических преобразований с моментом $j = -3/4$, а совокупность функций отрицательной четности образует базис другого неприводимого представления этой группы с моментом $j = -1/4$. $\text{Sp}(2, R)$ -группа локально-изоморфна группе $SU(1,1)$

и задается генераторами

$$J_+ = a^+ a^+, \quad J_- = -a^* a^*; \quad J_0 = (1/2) (a^+ a + a a^+), \quad (61)$$

удовлетворяющими обычным коммутационным соотношениям для операторов углового момента

$$[J_0, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}; \quad [J_+, J_-] = 2J_0, \quad (62)$$

но с другими свойствами по отношению к эрмитовому сопряжению

$$(J_0)^+ = J_0; \quad (J_{\pm})^+ = -J_{\mp}. \quad (63)$$

Нас будет интересовать положительная дискретная серия унитарных неприводимых представлений этой группы. Эти представления задаются вещественным числом j [собственное значение оператора $J^2 = J_+ J_- + J_0^2 - J_0$ равно $j(j+1)$]. Базисные векторы Ψ_{jm} D^j -представления нумеруются проекциями m момента j , причем $m = j+1, j+2, \dots$. Младший вектор с минимальной проекцией удовлетворяет условию

$$J_- \Psi_{jj+1} = 0; \quad (64)$$

$$J^2 \Psi_{jj+1} = j(j+1) \Psi_{jj+1}. \quad (65)$$

Поскольку минимальное значение проекции m для четных состояний одномерного осциллятора равно $1/4$, то $j = -3/4$; для нечетных состояний $m_{\min} = 3/4$ и $j = -1/4$. Впрочем, имея в виду зеркальную симметрию $j \rightarrow -j - 1$ [7], можно считать, что четные состояния также характеризуются моментом $j = -1/4'$. Мы снабдили его штрихом, чтобы отличать от неэквивалентного представления, имеющего базисом нечетные состояния.

Возьмем теперь произведения осцилляторных функций, зависящих от переменных x_1 и x_2 , и произведем векторное сложение соответствующих моментов j_1 и j_2 , равных $-3/4$ или $-1/4$ соответственно:

$$\begin{aligned} & |j_1 j_2 : j_{12} m_{12}\rangle = \\ & = \sum_{m_1 + m_2 = m_{12}} (j_1 m_1 j_2 m_2 | j_{12} m_{12}) |j_1 m_1(x_1)\rangle |j_2 m_2(x_2)\rangle. \end{aligned} \quad (66)$$

Напомним, что правило векторного сложения для рассматриваемых нами моментов дает следующие допустимые значения для суммарного момента:

$$j_{12} = j_1 + j_2 + 1, \quad j_1 + j_2 + 2 \dots \quad (67)$$

Функция (66) описывает состояние двумерного осциллятора с числом квантов $2m_{12} - 1$. Кроме того, в соответствии с дополнительностью $Sp(2, R)$ - и $O(2)$ -группы оно принадлежит к определенному D^{Λ} -представлению $O(2)$ -группы. Квантовое число Λ задает модуль вращательного момента в плоскости $x_1 x_2 \dots$. Поэтому функцию

(66) можно сопоставить с волновой функцией двумерного осциллятора в цилиндрических координатах:

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2; \quad \text{tg } \varphi = x_1/x_2;$$

$$|j_1 j_2 : j_{12} m_{12}\rangle \rightarrow |n_{\perp} \Lambda\rangle_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} R_{n_{\perp} \Lambda}(\rho) \begin{cases} \cos \Lambda \varphi, \\ \sin \Lambda \varphi. \end{cases} \quad (68)$$

При этом $n_{\perp} = 2m_{12} - 1$; $\Lambda = 2j_{12} + 1$; $j_1 = -3/4$, $j_2 = -3/4$ соответствуют четным значениям Λ и угловой функции типа $\cos \Lambda \varphi$ (нижний индекс «+»); $j_1 = -3/4$ и $j_2 = -1/4$ соответствуют нечетным Λ и угловой функции типа $\sin \Lambda \varphi$; при $j_1 = -1/4$ и $j_2 = -3/4$ имеем нечетное Λ и зависимость от угла φ типа $\cos \Lambda \varphi$; наконец, случай $j_1 = -1/4$, $j_2 = -1/4$ приводит к четному Λ и угловой функции типа $\sin \Lambda \varphi$. В силу этого соответствия можно рассматривать (66) как разложение волновой функции двумерного осциллятора в цилиндрических координатах через функции в декартовых координатах:

$$|n_1(x_1)\rangle |n_2(x_2)\rangle > |n_{\perp} \Lambda\rangle_{\pm} = \sum_{n_1+n_2=n_{\perp}} \langle n_{\perp} \Lambda | n_1 n_2 \rangle |n_1(x_1)\rangle |n_2(x_2)\rangle. \quad (69)$$

Если использовать для радиальной функции осциллятора стандартное выражение

$$R_{n_{\perp} \Lambda}(\rho) = \sqrt{2 (n_{\perp}/2 + \Lambda/2)! (n_{\perp}/2 - \Lambda/2)!} \times$$

$$\times \sum_{b=|\Lambda|, |\Lambda|+2, \dots, n_{\perp}} (-1)^{\frac{1}{2}(b-|\Lambda|)} \exp(-\rho^2/2) \times$$

$$\times \frac{\rho^b}{(b/2 - \Lambda/2)! (b/2 + \Lambda/2)! (n_{\perp}/2 - b/2)!},$$

то для матрицы перехода от цилиндрических координат к декартовым получаем следующее выражение:

$$\langle n_{\perp} \Lambda | n_1 n_2 \rangle =$$

$$= \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle \begin{cases} (-1)^{n_{\perp}/2}, & \text{если } n_{\perp} \text{ — четное;} \\ (-1)^{n_{\perp}/2-1/2}, & \text{если } n_{\perp} \text{ — нечетное.} \end{cases} \quad (70)$$

Связь между параметрами в левой и правой частях этого равенства была указана выше.

Складывая момент j_{12} с моментом $j_3 = -3/4$ или $-1/4$, отвечающим координате x_3 , получаем волновую функцию $|j_1 j_2 (j_{12}), j_3 : j_{123} m_{123}\rangle$, которая соответствует решению уравнения Шредингера для трехмерного осциллятора в сферических координатах: $|n l \Lambda\rangle_{\pm} = R_{n l}(r) Y_{l \Lambda}^{\pm}(\Theta, \varphi)$. При этом число квантов

$n = 2 (m_{123} - 3/4)$, $l = 2j_{123} + 1/2$. Заметим, что здесь и далее используются вещественные сферические гармоники

$$Y_{l\Lambda}^{\pm}(\Theta, \varphi) = \left\{ \begin{array}{l} (1/\sqrt{2}) [Y_{l\Lambda}(\Theta, \varphi) (-1)^m + Y_{l, -\Lambda}(\Theta, \varphi)] \\ (1/\sqrt{2}) [Y_{l\Lambda}(\Theta, \varphi) (-1)^m - Y_{l, -\Lambda}(\Theta, \varphi)] \end{array} \right\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Theta_{l\Lambda}(\Theta) \begin{cases} \cos \Lambda\varphi; \\ \sin \Lambda\varphi, \end{cases} \quad (71)$$

где $Y_{l, \pm\mu}$ — обычные сферические гармоники.

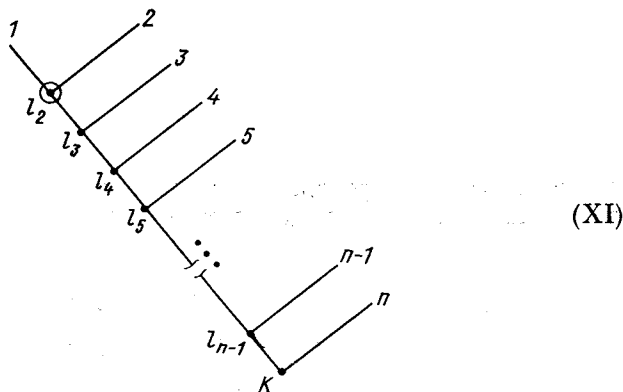
Добавляя к j_{123} последовательно j_4, j_5, \dots, j_n , получаем функцию вида

$$|j_1 j_2(j_{12}), j_3(j_{123}), j_4 \dots j_{n-1}(j_{12} \dots j_{n-1}); j_n : JM\rangle,$$

которая соответствует решению осцилляторного гамильтониана в n -мерных сферических координатах:

$$|j_1 j_2(j_{12}), j_3 \dots j_n : JM\rangle = \Psi_{NK\nu} = R_{NK}(\rho) Y_{K\nu}(\Theta_1 \Theta_2 \dots \Theta_{n-1}), \quad (72)$$

где $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$; $Y_{K\nu}$ — гиперсферическая гармоника, соответствующая дереву [25, 26], изображенному на следующем графике:



ν — совокупность гипермоментов l_1, l_2, \dots, l_{n-1} в пространстве размерности $2, 3, \dots, n - 1$. Эти гипермоменты указаны около узлов дерева. K -глобальный момент в n -мерном пространстве. Заметим, что в отличие от [22, 26] мы используем вещественные сферические гармоники. Поэтому в развилке дерева с двумя сво-

бодными концами, приведенными на следующем графике:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \diagup \\ \text{+} \\ \text{L} \circ \\ \diagdown \end{array} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos L\varphi \\
 & \begin{array}{c} \diagup \\ \text{-} \\ \text{L} \circ \\ \diagdown \end{array} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin L\varphi
 \end{aligned}
 \tag{XII}$$

нужно указать знак «+» или «-».

Дерево, приведенное на графике выше, можно рассматривать в двух аспектах: с одной стороны, оно характеризует выбор гиперсферических углов, а с другой — задает схему сложения моментов типа $-3/4, -1/4$. Если использовать не последовательное сложение, а какую-то другую схему сложения, то она будет соответствовать другому выбору гиперсферических углов. Отсюда ясно, что скалярное произведение двух n -мерных осцилляторных функций $\Psi_{NK\nu}$ и $\Psi_{NK\nu'}$ с фиксированными N, K для двух вариантов ν и ν' выбора гиперсферических координат совпадает с некоторым j -символом для $Sp(2, R)$ -группы, отвечающим переходу от схемы связи ν моментов $j_1 j_2 \dots j_n$ к схеме связи ν' :

$$\langle \Psi_{NK\nu} | \Psi_{NK\nu'} \rangle \equiv \langle Y_{K\nu} | Y_{K\nu'} \rangle = \langle (j_1 j_2 \dots j_n)_{\nu} | (j_1 j_2 \dots j_n)_{\nu'} \rangle. \tag{73}$$

Таким образом, мы убедились, что «деревянный» коэффициент $\langle Y_{K\nu} | Y_{K\nu'} \rangle$, характеризующий унитарное преобразование ГГ при переходе от одного дерева к другому, совпадает с j -символом для $Sp(2, R)$ -группы, содержащим моменты кратные $1/4$.

Можно показать, что эти j -символы являются аналитическим продолжением обычных j -символов, известных в квантовой теории углового момента. В частности, коэффициенты Клебша — Гордана вычисляются по формуле

$$\begin{aligned}
 & \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle = \\
 & = (-1)^{M-J-1} \sqrt{\frac{(2J+1) \Gamma(j_1+m_1+1) \Gamma(j_2+m_2+1) \Gamma(J-j_1-j_2)}{\Gamma(J+M+1) \Gamma(M-J) \Gamma(m_1-j_1)}} \times \\
 & \quad \times \sqrt{\frac{\Gamma(J+j_2-j_1-1) \Gamma(m_2-j_2)}{\Gamma(J+j_1-j_2+1) \Gamma(J+j_1+j_2+2)}} \times \\
 & \quad \times \sum_{r=M-J-1} \frac{(-1)^r \Gamma(r+1) \Gamma(M+J-r)}{\Gamma(r+J-M+2) \Gamma(r+j_1-m_1+2) \Gamma(j_2-j_1+M-r) \Gamma(M-r-j_1-j_2-1)}. \tag{74}
 \end{aligned}$$

Если сравнить полученное выражение с формулой для коэффициентов Клебша — Гордана $SU(2)$ -группы, приведенной в работе [28], то видно, что (74) получается из последней формулы заменой каждого j на $-j - 1$ и m на $-m$, т. е.

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle_{SU(2)} \rightarrow \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle_{Sp(2, R)}, \quad (75)$$

если $j_1 \rightarrow -j_1 - 1$; $j_2 \rightarrow -j_2 - 1$; $J \rightarrow -J - 1$;

$$m_1 \rightarrow -m_1; m_2 \rightarrow -m_2; M \rightarrow -M.$$

Переход от коэффициентов Клебша — Гордана $SU(2)$ -группы к соответствующим величинам для $Sp(2, R)$ подобен операции зеркального отражения в теории обычного углового момента [24]*.

Для коэффициентов Клебша — Гордана группы $Sp(2, R)$ справедливо соотношение симметрии

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - J - 1} \langle j_2 m_2 j_1 m_1 | JM \rangle. \quad (76)$$

Численные значения коэффициентов Рака можно найти с помощью формулы [24]

$$\begin{aligned} U(j_1 j_2 J j_3; J_{12} J_{23}) &= (-1)^{J_{12} - j_2 - J + J_{23}} \times \\ &\times \sqrt{\frac{\Gamma(J_{12} - j_2 + j_1 + 1) \Gamma(J_{12} + j_1 + j_2 + 2) \Gamma(J_{23} + j_2 - j_3 + 1)}{\Gamma(J_{23} + j_2 + j_3 + 2)}} \times \rightarrow \times \\ &\times \sqrt{\frac{(2J_{12} + 1)(2J_{23} + 1) \Gamma(J - J_{23} - j_1) \Gamma(j_1 + J - J_{23} + 1) \Gamma(j_2 + J_{12} - j_1 + 1)}{\Gamma(J_{12} - j_1 - j_2)}} \times \rightarrow \\ &\times \sqrt{\frac{\Gamma(J + J_{12} - j_3 + 1) \Gamma(J + J_{12} + j_2 + 2) \Gamma(J + J_{23} - j_1 + 1) \Gamma(J + J_{23} + j_1 + 2)}{\Gamma(J + J_{12} - j_3 + 1) \Gamma(J + J_{12} + j_2 + 2) \Gamma(J + J_{23} - j_1 + 1) \Gamma(J + J_{23} + j_1 + 2)}} \times \\ &\times \sqrt{\frac{\Gamma(j_3 + J - J_{12} + 1) \Gamma(J - J_{12} - j_3) \Gamma(J_{23} - j_2 - j_3) \Gamma(j_3 - j_2 + J_{23} + 1)}{\sum_{r=0} (-1)^r \Gamma(2J - r + 1)}} \times \\ &\times \frac{\Gamma(r + 1) \Gamma(j_1 + J - J_{23} + 1 - r) \Gamma(j_3 + J - J_{12} + 1 - r) \Gamma(J - j_3 - J_{12} - r)}{\Gamma(J_{23} - J + j_2 + 2 + J_{12} + r) \Gamma(J - J_{23} - j_1 - r) \Gamma(J_{23} - j_2 - J + J_{12} + 1 + r)}, \end{aligned} \quad (77)$$

которую снова можно получить из общего выражения для коэффициентов Рака $SU(2)$ -группы, если в последнем заменить все j на $-j - 1$.

* Заметим, что хотя формулы для коэффициентов Клебша — Гордана $SU(2)$ - и $Sp(2, R)$ -групп и сходны друг с другом, нужно иметь в виду, что в эти коэффициенты входят совершенно различные моменты j_1, j_2, J_1 , ибо эти тройки моментов в случае $SU(2)$ - и $Sp(2, R)$ -групп подчиняются абсолютно различным правилам векторного сложения [см. (65)]. Впрочем, все же можно показать, что коэффициенты Клебша — Гордана для $Sp(2, R)$ -группы, содержащие только целые и полужелые моменты, совпадают численно с некоторыми коэффициентами $SU(2)$ -группы. Явные соотношения такого рода получены в работе [29].

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ ФУНКЦИЙ В ГИПЕРСФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ ОДНОГО НАБОРА КООРДИНАТ ЯКОБИ К ДРУГОМУ

Выше мы рассматривали преобразование осцилляторных функций при переходе от одного набора координат Якоби к другому. Аналогичная задача возникает и в методе К-гармоник. Для того чтобы ее решить, необходимо оперировать с осцилляторными функциями в многомерных сферических координатах. Будем использовать полисферические координаты, выбранные таким образом, что общая гиперсферическая функция $Y_{Kl_1 l_2 \dots l_{A-1}}^{\mathcal{D}_\Gamma, \kappa_i}$ конструируется из сферических функций с моментами l_1, l_2, \dots, l_{A-1} для отдельных координат Якоби x_1, x_2, \dots, x_{A-1} по правилам, сформулированным в разд. 2. Символ \mathcal{D}_Γ указывает вид гиперсферического дерева, задающего конструкцию ГГ; κ_i — это промежуточные гипермоменты данного дерева. Целесообразно сложить каким-то способом моменты l_1, l_2, \dots, l_{A-1} в полный момент L . В связи с этим укажем дерево Вигнера \mathcal{D}_W , которое задает схему сложения моментов и промежуточные моменты λ_i . Полученную в итоге гиперсферическую функцию обозначим $Y_{KLMl_1 l_2 \dots l_{A-1}}^{\mathcal{D}_\Gamma \kappa_i, \mathcal{D}_W \lambda_i}$. Теперь осцилляторная функция с числом квантов N в выбранных гиперсферических координатах будет иметь вид

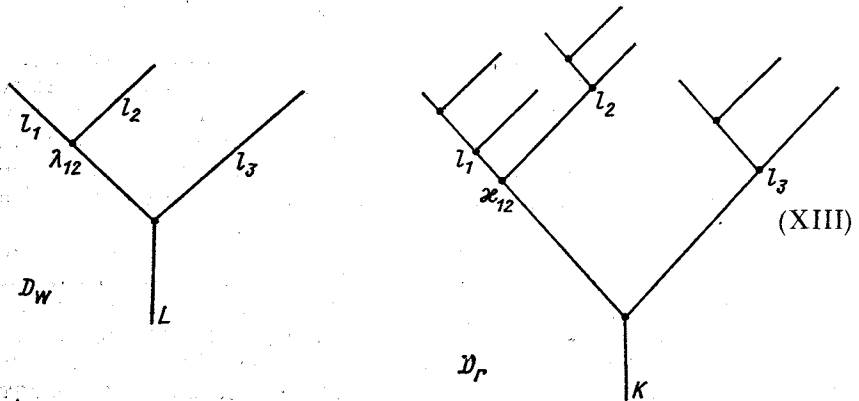
$$|l_1 l_2 \dots l_{A-1}, \mathcal{D}_\Gamma \kappa_i, \mathcal{D}_W \lambda_i : NKLM\rangle = R_{NK}(\rho) Y_{KLM, l_1 l_2 \dots l_{A-1}}^{\mathcal{D}_\Gamma \kappa_i, \mathcal{D}_W \lambda_i} \quad (78)$$

В предыдущем разделе мы отмечали, что конструирование осцилляторной функции в многомерных сферических координатах по заданному гиперсферическому дереву \mathcal{D}_Γ можно рассматривать как сложение $A - 1$ моментов вида $j_i = (l_i - 1/2)/2$ с помощью коэффициентов Клебша — Гордана для $Sp(2, R)$ - или $SU(1, 1)$ -группы в полный момент $[K + (3A - 7)/2]/2$ с промежуточными моментами j_i , значения которых определяются промежуточными гипермоментами κ_i . Для краткости будем называть эту процедуру просто сложением моментов l_1, l_2, \dots, l_{A-1} в полный момент K в смысле $Sp(2, R)$ -группы с промежуточными моментами κ_i . Далее, для определенности примем, что схема сложения моментов l_i в смысле $Sp(2, R)$ -группы, такая же, как и по отношению к обычной группе вращений, т. е. структура деревьев \mathcal{D}_Γ и \mathcal{D}_W одинакова. Функцию (78) такого типа будем обозначать

$$|l_1 l_2 \dots l_{A-1}; \lambda_i : NKLM\rangle. \quad (79)$$

Такую функцию нетрудно выразить через волновые функции трехмерного осциллятора для каждой из координат Якоби. Например,

для $A = 4$ при выборе деревьев $\mathcal{D}_W, \mathcal{D}_T$, представленных на следующем графике:



функция (79) имеет вид

$$\begin{aligned}
 & |l_1 l_2 l_3; \overset{l_{12}}{x_{12}} : N K L M \rangle = \\
 & = \sum_{\substack{M_{12} N_{12} \\ m_1 m_2 n_1 n_2 m_3 n_3}} \langle n_1 l_1 n_2 l_2 | N_{12} x_{12} \rangle \langle l_1 m_1 l_2 m_2 | l_{12} m_{12} \rangle \times \\
 & \times \langle N_{12} x_{12} n_3 l_3 | N K \rangle \langle l_{12} m_{12} l_3 m_3 | L M \rangle | n_1 l_1 m_1(x_1) \rangle \times \\
 & \times | n_2 l_2 m_2(x_2) \rangle | n_3 l_3 m_3(x_3) \rangle. \tag{80}
 \end{aligned}$$

Аналогично устроены и функции для более сложных систем: имеет место параллелизм в сложении моментов l_1, l_2, \dots, l_{A-1} по группе вращений и по $\text{Sp}(2, R)$ -группе.

Теперь обсудим переход от одних координат Якоби x_1, x_2, \dots, x_{A-1} к другим x'_1, \dots, x'_{A-1} в функциях (79). Операция отражения P какой-то координаты x_i производится тривиальным образом:

$$P = (-1)^{l_i}. \tag{81}$$

Рассмотрим элементарный кинематический поворот (10) на угол φ , связывающий две координаты Якоби, изображенный (VII):

$$\begin{aligned}
 & |l_1 l_2; N K L M(x_{pq}, x_{pq}, \varphi) \rangle = \\
 & = \sum_{l'_1 l'_2} \langle l_1 l_2 | l'_1 l'_2 \rangle_{\varphi}^{K\Lambda} |l'_1 l'_2 : N K L M(x_{qr}, x_p, qr) \rangle. \tag{82}
 \end{aligned}$$

Коэффициенты преобразования (82) были введены в работе [30] и называются коэффициентами Рейнала — Реваи. Поскольку при преобразовании (10) радиус-вектор

$$\rho = [x_{pq}^2 + x_{pq1r}^2]^{1/2}$$

не изменяется, то по существу преобразование (82) относится только к угловым частям осцилляторных функций — гиперсферическим гармоникам:

$$Y_{l_1 l_2 K \Lambda M}(\bar{x}_{pq}, \bar{x}_{pq}, r) = \sum_{l'_1 l'_2} \langle l_1 l_2 | l'_1 l'_2 \rangle_{\Phi}^{K \Lambda} Y_{l'_1 l'_2 K \Lambda M}(\bar{x}_{qr}, \bar{x}_p, qr). \quad (83)$$

С помощью соотношений (82) и (11) нетрудно найти связь коэффициентов Рейнала — Ревай с коэффициентами Тальми — Мошинского (12):

$$\begin{aligned} & \langle l_1 l_2 | l'_1 l'_2 \rangle_{\Phi}^{K \Lambda} = \\ & = \sum_{\substack{n_1 + n_2 = K \\ n'_1 + n'_2 = K}} \langle n_1 l_1 n_2 l_2 | K \Lambda \rangle \langle n'_1 l'_1 n'_2 l'_2 | K \Lambda \rangle \times \\ & \times \langle n_1 l_1 n_2 l_2 : \Lambda | pr/q(p+q+r) | n'_1 l'_1, n'_2 l'_2 : \Lambda \rangle = \\ & = \sum_{\substack{m_1 + m_2 = m \\ m'_1 + m'_2 = m'}} (j_1 m_1 j_2 m_2 | jm) (j'_1 m'_1 j'_2 m'_2 | jm) \times \\ & \times \langle n_1 l_1 n_2 l_2 : \Lambda | pr/q(p+q+r) | n'_1 l'_1, n'_2 l'_2 : \Lambda \rangle, \quad (84) \end{aligned}$$

где $j_i = (l_i - 1/2)/2$, $j = (K + 1)/2$. Впрочем, в сумме по n_1, n_2 и n'_1, n'_2 можно взять не только ограничение $n_1 + n_2 = n'_1 + n'_2 = K$; результат не изменится, если положить $n_1 + n_2 = n'_1 + n'_2 = N$ с любым $N = K, K + 2, \dots$. Соотношения типа (84) были получены Я. А. Эфросом [31]. Матрицы преобразования гиперсферических функций при переходе от одного набора координат Якоби к другому представляют собой в общем случае суммы произведений нескольких коэффициентов Рейнала — Ревай. Эти матрицы также можно связать с коэффициентами Тальми [32] или простыми коэффициентами Рейнала — Ревай.

Отсюда становится ясным способ получения матриц преобразования ГГ при переходе от одного набора координат Якоби к другому, если известно выражение для матрицы преобразования осцилляторных функций, зависящих от таких же координат Якоби. Способ состоит в том, что нужно в этом выражении заменить все коэффициенты Тальми соответствующими коэффициентами Рейнала — Ревай и каждый коэффициент Рака или более высокий символ для моментов $l_1 l_2 \dots$ следует продублировать соответствующим n_j -символом для Sp(2R)-группы, а к каждой фазе $(-1)^{-L_{ij} + l_i + l_j}$ добавить фазу $(-1)^{-J_{ij} + j_i + j_j + 1}$. Ниже используем это правило для получения генеалогических коэффициентов в методе К-гармоник.

5. РЕКУРРЕНТНЫЙ МЕТОД АНТИСИММЕТРИЗАЦИИ K -ГАРМОНИК

Генеалогические коэффициенты в методе K -гармоник. В предыдущих разделах рассматривался вопрос о том, как построить ГГ с заданным орбитальным моментом L и гипермоментом K для того или иного набора координат Якоби. Теперь нужно выяснить, как скомбинировать эти гармоники со спин-изоспиновыми волновыми функциями в полную антисимметричную волновую функцию. Для этого нужно прежде всего построить ГГ $Y_{KLM}[f](r)$, которые обладают определенной перестановочной симметрией, т. е. преобразуются по неприводимому представлению $\mathcal{D}^{[f]}$ со схемой Юнга $[f]$ группы перестановок A частиц S_A и по строке (r) этого представления $((r)$ — символ Яманочи, см., например, [33]). Если это сделано, то полная антисимметричная функция Ψ строится из $Y_{KLM}[f](r)$ и спин-изоспиновых функций $\chi_{ST[\tilde{f}](\tilde{r})}$ с сопряженной схемой Юнга и символом Яманочи по известной формуле

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{n_f}} \sum_r Y_{KLM}[f](r) \chi_{ST[\tilde{f}](\tilde{r})}, \quad (85)$$

где n_f — размерность неприводимого представления $\mathcal{D}^{[f]}$ группы S_A . В свою очередь, гармоники с определенной перестановочной симметрией можно построить из гармоник типа $Y_{l_1 l_2 \dots l_{A-1} KLM}$ с помощью операторов Юнга

$$C_{(r)(r')}^{[f]} = \frac{n_f}{A!} \sum_P \langle [f](r) | P | [f](r') \rangle P, \quad (86)$$

где сумма берется по всем перестановкам P группы S_A , $\langle [f](r) | P | [f](r') \rangle$ — элемент матрицы перестановки P в стандартном ортогональном неприводимом представлении Юнга — Яманочи [33].

Оператор Юнга обладает тем свойством, что, действуя на произвольную функцию Φ , он превращает ее в функцию с перестановочной симметрией $[f](r)$:

$$\Psi_{[f](r)} = \frac{1}{N} C_{(r)(r')}^{[f]} \Phi, \quad (87)$$

где нормировочный коэффициент задается формулой

$$N^2 = \langle \Phi | C_{(r)(r')}^{[f]} | \Phi \rangle. \quad (88)$$

Переписывая эту формулу применительно к ГГ, получаем

$$Y_{KLM}[f](r)_\varepsilon = \frac{1}{N} C_{(r)(r')}^{[f]} Y_{l_1 l_2 \dots l_{A-1} KLM}. \quad (89)$$

Здесь индекс ε различает разные гармоники с одинаковыми наборами квантовых чисел KLM $[f](r)$. Конкретный вид гармоники (89)

зависит от выбора вспомогательного символа Яманочи (r') и характеристик $l_1, l_2, \dots, l_{A-1} \mathcal{D}_{\Gamma \kappa_i} \mathcal{D}_W \lambda_i$ «затравочной» гармоник, стоящей в правой части (89). Если разложить гармоники (89) по гармоникам $Y_{l'_1 l'_2 \dots l'_{A-1} \kappa_i \lambda_i} \mathcal{D}_{\Gamma \kappa_i} \mathcal{D}_W \lambda_i$, то найдем, что

$$Y_{KLM [f] (r) \varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{l'_1 l'_2 \dots l'_{A-1} \kappa_i \lambda_i} \langle l'_1 l'_2 \dots l'_{A-1} \kappa_i \lambda_i : KL | C_{(r') (r)}^{[f]} | \rangle \left. \vphantom{\sum} \right\} \quad (90)$$

$$| l_1 \dots l_{A-1} \kappa_i \lambda_i : KL \rangle Y_{l'_1 l'_2 \dots l'_{A-1} \kappa_i \lambda_i} \mathcal{D}_{\Gamma \kappa_i} \mathcal{D}_W \lambda_i$$

Коэффициенты разложения в (90) сводятся к матричным элементам от перестановок частиц, т. е. к матричным элементам операций перехода от одного набора координат Якоби к другому. Вычисление таких величин было рассмотрено в предыдущем разделе. Поэтому формула (90) в принципе решает задачу построения Γ с определенной симметрией. Однако с практической точки зрения эти вычисления являются довольно громоздкими для больших значений A и K . Более удобна рекуррентная процедура построения гармоник с заданной перестановочной симметрией. При этом задача формулируется так: пусть известны Γ с перестановочной симметрией $Y_{K'L'M' [f'] (r') \varepsilon'}$ для $A - 1$ частиц и их нужно объединить со сферическими гармониками $Y_{l_{A-1} m_{A-1}}$ для степени свободы

$$x_{A-1} = \sqrt{(A - 1)/A} \left(r_A - \frac{1}{A-1} \sum_{i=1}^{A-1} r_i \right)$$

в полную Γ с j фиксированной перестановочной симметрией.

Образуем теперь произведения осцилляторной функции $| N' K' L' M' [f'] (r') \varepsilon' \rangle$ для $A - 1$ частиц на осцилляторную функцию для последней координаты Якоби x_{A-1} и подействуем на нее оператором Юнга. В результате получим некоторую осцилляторную функцию A частиц с заданной перестановочной симметрией

$$| N K L M [f] (r) \varepsilon \rangle = \frac{1}{N} C_{(r') (r)}^{[f]} \sum_{N'n} \langle N' K' n l | NK \rangle | N' K' L' \varepsilon' [f'] (r'), n l : LM \rangle. \quad (91)$$

Для того чтобы общая функция соответствовала гипермоменту K , мы произвели сложение моментов по отношению к группе $Sp(2R)$ *.

* Следует заметить, что функции (91) с одними и теми же квантовыми числами $N K L M [f]$, полученные путем симметризации состояний с различными значениями $[f']$, (r') , ε' , не обязательно ортогональны друг другу и даже не все из них линейно независимы. Поэтому для нахождения полного набора состояний необходимо из общего количества функций (91) сконструировать нужное число линейно-независимых и ортонормированных состояний. Указанная перестройка функций (91) приведет к соответствующему изменению генеалогических коэффициентов (92)–(96).

Разложим функцию (91) по произведениям функций $A - 1$ частиц на функцию движения последней частицы относительно центра масс группировки $A - 1$ частиц:

$$|ANKLM[f](r)\varepsilon\rangle = \sum_{N''K''n'l'\varepsilon''L''} \langle AK[f]L\varepsilon | A - 1K''[f'']L''\varepsilon'', l' \rangle \times \\ \times \langle N''K''n'l' | NK \rangle | N''K''L'', \varepsilon'' [f'](r'), n'l' : LM \rangle. \quad (92)$$

Коэффициенты разложения в правой части (92) называются *генеалогическими коэффициентами* отделения одной частицы в ортогональной схеме [33]. Если они известны, то задача построения симметризованных функций для A частиц из симметризованных функций $A - 1$ частиц решается полностью. Для вычисления этих коэффициентов можно воспользоваться формулами, полученными в ТИМО, слегка видоизменив их в соответствии со способом, изложенным в предыдущем разделе. А именно, формулы (7.23 — 7.25) работы [10], в которых генеалогические коэффициенты $\langle A | A - 1 \rangle$ выражаются через $\langle A - 1 | A - 2 \rangle$, переписываются следующим образом:

$$\langle AK[f]L\varepsilon | A - 1K_1[f]L_1\varepsilon_1 l_1 \rangle = \frac{1}{n_{f_1}} \sqrt{\frac{n_{f_1} n_{f_2}}{A}} \frac{1}{Q} \left\{ \delta_{[f_1][f']} \delta_{L_1 L'} \delta_{K_1 K'} \delta_{l_1 l_2} + \right. \\ \left. + (A - 1) \sum_{\substack{K'_1[f'_1]L'_1\varepsilon'_1 \\ l'_2 l'_1 L_0 K_0}} \frac{n_{f'_1}}{n_{f'}} \langle [f'_1][f_1] | P_{A-1} A | [f'_1][f'] \rangle^{[f]} \times \right. \\ \times (-1)^{l'_1+l_1} (-1)^{j'_1-j_1+j_2-j'_2} U(L'_1 l'_2 L l_1; L_1 L_0) U(L'_1 l'_1 L l_2; L' L_0) \times \\ \times \langle A - 1K_1[f_1]L_1\varepsilon_1 | A - 2K'_1[f'_1]L'_1\varepsilon'_1; l'_2 \rangle \times \\ \times \langle A - 1K'_1[f']L'\varepsilon' | A - 2K'_1[f'_1]L'_1\varepsilon'_1, l'_1 \rangle U[J'_1 j'_2 J j_1; J_1 J_0] \times \\ \left. \times U[J'_1 j'_1 J j_2; J' J_0] \langle l_1 l'_2 | l_2 l'_1 \rangle_{\Phi}^{L_0 K_0} \right\}; \quad (93)$$

$$Q^2 = 1 + (A - 1) \sum_{\substack{K'_1[f'_1]L'_1\varepsilon'_1 \\ l'_2 l'_1 L_0 K_0}} \frac{n_{f'_1}}{n_{f'}} \langle [f'_1][f'] | P_{A-1} A | [f'_1][f'] \rangle^{[f]} \times \\ \times \langle A - 1K'_1[f']L'\varepsilon' | A - 2K'_1[f'_1]L'_1\varepsilon'_1, l'_2 \rangle \times \\ \times \langle A - 1K'_1[f']L'\varepsilon' | A - 2K'_1[f'_1]L'_1\varepsilon'_1, l'_1 \rangle \times \\ \times (-1)^{l_2+l'_1} (-1)^{j'_1-j'_2} U(L_1 l'_2 L l_2; L' L_0) U(L'_1 l'_1 L l_2; L' L_0) \times \\ \times U[J'_1 j'_2 J j_2; J' J_0] U[J_1 j_1 J j_2; J' J_0] \langle l_2 l'_2 | l_2 l'_1 \rangle_{\Phi}^{L_0 K_0}, \quad (94)$$

$$\varphi = \arctg \sqrt{\frac{1}{(A-2)A}}; \quad j_i = \frac{1}{2} \left(l_i - \frac{1}{2} \right); \quad J = \frac{1}{2} \left(K + \frac{3A-7}{2} \right); \\ J'_1 = \frac{1}{2} \left(K'_1 + \frac{3A-13}{2} \right); \quad J_1 = \frac{1}{2} \left(K_1 + \frac{3A-10}{2} \right); \\ J' = \frac{1}{2} \left(K' + \frac{3A-10}{2} \right); \quad J_0 = \frac{1}{2} (K_0 + 1); \quad (95)$$

n_f — размерность неприводимого представления $[f]$ группы S_A ; $\langle [f_1] [f_1] | P_{A-1, A} | [f_1'] [f_1'] \rangle^{[f]}$ — элемент матрицы стандартного неприводимого представления той же группы.

Заметим, что коэффициенты типа $\langle A = 2 | (A - 1) \equiv 1 \rangle \equiv 1$. Поэтому с помощью рекуррентных формул (93) — (95) можно последовательно вычислить все необходимые генеалогические коэффициенты. Символом $U [\dots]$ обозначены коэффициенты Рака для группы $Sp(2, R)$; $U (\dots)$ — обычные коэффициенты Рака. Если выделить в (92) только угловые части функций, то при использовании (58) можно написать разложение ГГ для A частиц с перестановочной симметрией по таким же гармоникам для $A - 1$ частиц:

$$\begin{aligned}
 & Y_{KLM[f](r)e} = \\
 & = \sum_{\substack{K''L''l''e'' \\ M''m''}} \langle AK [f] L e | A - 1 K'' [f'] L'' e'', l' \rangle (L'' M'' l' m' | LM) \times \\
 & \times Y_{K''L''M''[f'](r'e'')} Y_{l''m''} N_{KK''l''}^L \sin^{K''} \Theta \cos^{l''} \Theta \times \\
 & \times P_{K-K''-l''}^{K''+(3A-6)/2-1; l''+1/2} (\cos 2\Theta); \tag{96}
 \end{aligned}$$

генеалогические коэффициенты для метода К-гармоник были введены в работах [34, 35].

Аналогичным образом можно ввести генеалогические коэффициенты отделения двух и более частиц. В частности, двухчастичные генеалогические коэффициенты определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & Y_{KLM[f](r)e} = \sum_{\substack{[f_0]L_2e_2K_2 \\ L'K'AL_0M'M_0\mu M_2}} \langle [f](r) | [f_2](r_2), [f_0] \rangle \times \\
 & \times \langle AK [f] L e | A - 2 K_1 [f_2] L_2 e_2, \Lambda \{L'K'\}; L_0 \rangle (L'M'L_0M_0 | LM) \times \\
 & \times (L_2M_2\Lambda\mu | L'M') Y_{K_2L_2M_2[f_2](r_2)e_2} Y_{\Lambda\mu} (R_{A-2} - R_2) \times \\
 & \times Y_{L_0M_0} (r_{A-1} - r_A) N_{KK'L_0} N_{K'K_2\Lambda} \sin^{K_2'} \Theta_1 \cos^{L_0} \Theta_1 \times \\
 & \times \sin^{K_2} \Theta_2 \cos^{\Lambda} \Theta_2 P_{K-K'-L_0}^{K_2+(3A-9)/2-1; \Lambda+1/2} (\cos 2\Theta_2) \times \\
 & \times P_{K-K'-L_0}^{K'+(3A-6)/2-1; L_0+1/2} (\cos 2\Theta_1). \tag{97}
 \end{aligned}$$

Предполагается следующая схема сложения моментов по группе вращений и группе $Sp(2, R)$:

$$\left. \begin{aligned}
 & L_2 + \Lambda = L'; \quad L' + L_0 = L; \quad J_2 + J_\Lambda = J'; \quad J' + J_0 = J; \\
 & J_\Lambda = \frac{1}{2} (\Lambda - 1/2); \quad J_0 = \frac{1}{2} \left(L_0 - \frac{1}{2} \right); \quad J = \frac{1}{2} \left(K + \frac{3A-7}{2} \right); \\
 & J' = \frac{1}{2} \left(K' + \frac{3A-10}{2} \right); \quad J_2 = \frac{1}{2} \left(K_2 + \frac{3A-13}{2} \right).
 \end{aligned} \right\} \tag{98}$$

Здесь L_0 — момент количества относительного движения пары нуклонов $A - 1$ и A [степени свободы $x_{A-1} = (r_A - r_{A-1})/\sqrt{2}$],

а Λ — момент этой пары относительно остальных $A - 2$ частиц (степень свободы $x'_{A-2} = [(1/2)(\bar{r}_{A-1} + \bar{r}_A) - (1/A - 2) \sum_{i=1}^{A-2} r_i] \times \sqrt{2(A-2)/A}$). Двухчастичные генеалогические коэффициенты выражаются через одночастичные следующим образом *:

$$\begin{aligned} & \langle AK [f] L\varepsilon | A - 2K_2 [f_2] L_2\varepsilon_2, \Lambda \{L'K'\}; L_0 \rangle = \\ & = \langle [f] (r) | [f_2] (r_2), [f_0] (r) \rangle^{-1} \times \\ & \times \sum_{K_1\varepsilon_1 L_1 l_1 l_2 \lambda \kappa} \langle AK [f] L\varepsilon | A - 1K_1 [f_1] L_1\varepsilon_1, l_1 \rangle \times \\ & \times \langle A - 1K_1 [f_1] L_1\varepsilon_1 | A - 2K_2 [f_2] L_2\varepsilon_2, l_2 \rangle (-1)^{\lambda - l_1 - l_2} \times \\ & \times (-1)^{J_\kappa - j_1 - j_2 - 1} U(L_2 l_2 L l_1; L_1 \lambda) U[J_2 j_2 J j_1; J_1 J_\kappa] \times \\ & \times \langle l_1 l_2 | \Lambda L_0 \rangle_{\varphi}^{\lambda} U(L_2 \Lambda L L_0; L' \lambda) U[J_2 J_\Lambda J J_0; J' J_\kappa]. \end{aligned} \quad (99)$$

Генеалогические разложения (96), (97) удобны для вычисления матричных элементов операторов в методе K -гармоник.

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОПЕРАТОРОВ В МЕТОДЕ K -ГАРМОНИК

Рассмотрим вопрос о вычислении матричных элементов гамильтониана в методе K -гармоник. Обозначим антисимметричные комбинации ГГ со спин-изоспиновыми функциями $\chi_{SM_S T_T}^{[\tilde{f}](\tilde{r})}$ символом

$$|AK [f] \varepsilon L S T M_L M_S M_T \rangle = \frac{1}{\sqrt{n_f}} \sum_r Y_{KLM[f](r)} \chi_{SM_S T_T}^{[\tilde{f}](\tilde{r})}. \quad (100)$$

Здесь $[\tilde{f}](\tilde{r})$ — схема Юнга и символ Яманочи, сопряженные к $[f](r)$; n_f — размерность неприводимого представления $D^{[f]}$ группы перестановок S_A .

Введем полные двухчастичные генеалогические коэффициенты для K -гармоник (100):

$$\begin{aligned} & |AK [f] \varepsilon L S T M_L M_S M_T \rangle = \\ & = \sum_{\substack{K_2 [f_2] \varepsilon_2 S_2 T_2 \Lambda \\ K' L' L_0 S_0 T_0 \\ M' M_0 \\ M_{S_0} M_{T_0}}} \langle AK [f] \varepsilon L S T | A - 2 [f_2] \varepsilon_2 L_2 S_2 T_2, \Lambda (L'K'); L_0 S_0 T_0 \rangle \times \\ & \times (L' M' L_0 M_0 | L M) (S_2 M_{S_2} S_0 M_{S_0} | S M_S) (T_2 M_{T_2} T_0 M_{T_0} | T M_T) \times \\ & \times N_{KK' \lambda} \sin^{K'} \Theta_1 \cos^{L_0} \Theta_1 P_{K-K'}^{K'+[(3A-6)/2]-1} (\cos 2\Theta_1) \times \\ & \times |A - 2 [f_2] \varepsilon_2 S_2 T_2 L_2 K_2, \Lambda (L'K') M' M_{S_2} M_{T_2} \rangle | L_0 M_0 S_0 M_{S_0} T_0 M_{T_0} \rangle. \end{aligned} \quad (101)$$

* $\varphi = \arctg \sqrt{A-2/A}$, схема $[f_1]$ и соответствующие символы Яманочи (r_2) и (r) выбираются произвольным, но фиксированным образом (см. формулу (2.43) в книге [10]).

Здесь последний множитель зависит от угловых переменных взаимного движения частиц $A - 1$ и A , а предпоследний множитель включает в себя угловые переменные взаимного движения $A - 2$ частиц, а также координаты радиус-вектора, соединяющего центры масс $A - 2$ частиц и отдельной пары нуклонов; $r_{A-1, A} = \rho \cos \Theta_1$.

Полный генеалогический коэффициент конструируется из орбитальных и спин-изоспиновых генеалогических коэффициентов:

$$\begin{aligned} \langle AK [f] \varepsilon LST | A - 2 K_2 [f_2] \varepsilon_2 L_2 S_2 T_2, \Lambda (L'K'); L_0 S_0 T_0 \rangle = \\ = \sqrt{n_f / n_f} \langle AK [f] \varepsilon L | A - 2 K [f_2] \varepsilon_2 L_2, \Lambda (L'K'); L_0 \rangle \times \\ \times \langle (st)^A [\tilde{f}] ST | (st)^{A-2} [f'] S'T', (st)^2 S_0 T_0 \rangle. \end{aligned} \quad (102)$$

В силу антисимметрии функций (100) матричный элемент потенциальной энергии взаимодействия между нуклонами

$$V = \sum_{i < j}^A V(r_{ij}) \text{ и } V(r_{ij}) = f(r_{ij}) W_{\sigma\tau} \quad (103)$$

можно записать в виде

$$\begin{aligned} \langle AK [f] \varepsilon LSTM_L M_S M_T | \hat{V} | AK \bar{K} [\bar{f}] \varepsilon \bar{L} \bar{S} \bar{T} M_L M_S M_T \rangle = \\ = \frac{A(A-1)}{2} \langle AK [f] \varepsilon LST | V(r_{A-1, A}) | AK \bar{K} [\bar{f}] \varepsilon \bar{L} \bar{S} \bar{T} \rangle = \\ = \frac{A(A-1)}{2} \sum_{\substack{K_2 [f_2] \varepsilon_2 L_2 \\ S_2 T_2 L_0 S_0 T_0 \\ \Delta L' K'}} \langle AK [f] \varepsilon LST | A - 2 K_2 [f_2] \times \\ \times \varepsilon_2 L_2 S_2 T_2, \Lambda (L'K'); L_0 S_0 T_0 \rangle \times \\ \times \langle AK \bar{K} [\bar{f}] \varepsilon \bar{L} \bar{S} \bar{T} | A - 2 K_2 [\bar{f}_2] \varepsilon_2 L_2 S_2 T_2, \Lambda (L'K'); L_0 S_0 T_0 \rangle \times \\ \times \langle S_0 T_0 | W_{\sigma\tau} | S_0 T_0 \rangle R_{K \bar{K}', L_0}^{K \bar{K}}(\rho). \end{aligned} \quad (104)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_{K \bar{K}', L_0}^{K \bar{K}}(\rho) = \int d\Theta_1 (\sin \Theta_1)^{3A-7} (\cos \Theta_1)^2 N_{K \bar{K}' L_0} N_{\bar{K} \bar{K}' L_0} f(\rho \cos \Theta_1) \times \\ \times (\sin \Theta_1)^{2K'} (\cos \Theta_1)^{2L_0} P_{K-K'-L_0}^{K'+(3A-6)/2-1, L_0+1/2}(\cos 2\Theta_1) \times \\ \times P_{\bar{K}-\bar{K}'-L_0}^{\bar{K}'+(3A-6)/2-1, L_0+1/2}(\cos 2\Theta_1); \end{aligned} \quad (105)$$

$\langle S_0 T_0 | W_{\sigma\tau} | S_0 T_0 \rangle$ — спин-изоспиновая часть матричного элемента взаимодействия. Для простоты мы взяли только центральные силы. Формулу (104) несложно обобщить на случай тензорных и векторных сил, а также сил, зависящих от скорости.

Если воспользоваться тем, что при $N = N_{\text{мин}}$ волновая функция ТИМО, с одной стороны, очень простым образом связана

с K -гармониками ($K = N_{\text{мин}}$):

$$|AN_{\text{мин}}\varepsilon[f]LST\rangle = R_{N_{\text{мин}}K=N_{\text{мин}}}(\rho) |AK[f]\varepsilon LST\rangle; \quad (106)$$

$$R_{KK} = \sqrt{\frac{2}{\Gamma[K+(3A-3)/2]}} \rho^K \exp(-\rho^2/2r_0^2) (r_0)^{-(1/2)(2K+3A-3)}, \quad (107)$$

а с другой стороны, ее можно также просто связать с оболочечной волновой функцией, то возможно существенно упростить вычисление матричных элементов (106). Действительно, например, для ядер P -оболочки имеем, что оболочечная функция $|s^4 p^{A-4}[f]LST\rangle$ выражается через функцию ТИМО следующим образом:

$$|s^4 p^{A-4}[f]LST\rangle = \psi_{00}(R_A) |AN_{\text{мин}}[f]\varepsilon LST\rangle, \quad (108)$$

где $\psi_{00}(R_A)$ — волновая функция нулевых колебаний центра масс. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \langle s^4 p^{A-4}[f]\varepsilon LST | V | s^4 p^{A-4}[\bar{f}]\varepsilon \bar{L}\bar{S}\bar{T} \rangle = \\ = \langle AN_{\text{мин}}[f']\varepsilon LST | V | AN_{\text{мин}}[\bar{f}]\varepsilon \bar{L}\bar{S}\bar{T} \rangle. \end{aligned} \quad (109)$$

Матричный элемент по оболочечным волновым функциям обычными методами [10, 36] можно свести к двухчастичным матричным элементам типа $\langle nl | V(r_{A-1,A}) n'l' \rangle$ и в конечном счете к интегралам Тальми вида

$$\begin{aligned} I_K = \int \exp(r^2/r_0^2) r^{K+2} V(r) dr / \langle AN_{\text{мин}}[f']\varepsilon LST | V | AN_{\text{мин}}[\bar{f}]\varepsilon \bar{L}\bar{S}\bar{T} \rangle = \\ = \sum_k I_k Q_k. \end{aligned} \quad (110)$$

Если в левой части этого равенства провести интегрирование не по всем переменным, а только по гиперсферическим углам, то, учитывая (107), получаем, что

$$\langle AK[f]\varepsilon LST | V | AK[f]\varepsilon LST \rangle = \sum_k I_k(\rho) Q_k, \quad (111)$$

где

$$I_k(\rho) = N_k \int_0^1 (1-Z)^{K-k+1/2} Z^{k+3/2} V(\rho\sqrt{z}) dz; \quad (112)$$

$$N_k = \Gamma(K+3/2, A-3/2) / \Gamma(K-k+3/2) \Gamma(k+3/2);$$

$$\rho_{A-2} = \rho \sin \Theta; \quad r_{A-1,A} = \rho \cos \Theta; \quad Z = \cos^2 \Theta; \quad 1-Z = \sin^2 \Theta.$$

Таким образом, при вычислении матричных элементов потенциальной энергии по K -гармоникам с низшим допустимым для данного A гипермоментом $K_{\text{мин}}$ можно воспользоваться оболочечными результатами, в которых следует заменить обычные интег-

ралы Тальми I_K (110) функциями $I_K(\rho)$ (112). Этот результат был получен в [35]. Подобным способом можно получать матричные элементы не только потенциальной энергии, но и других операторов. Результат (111) можно также найти из формулы (104), расписывая в явном виде полином Якоби в (105) через тригонометрические функции от Θ .

Выше мы рассмотрели расчет матричных элементов потенциальной энергии нуклонов. Добавим несколько слов о том, какую роль они играют в методе K -гармоник. В этом методе волновая функция ядра A ищется в виде разложения по K -гармоникам $|AK [f] \varepsilon LST\rangle$:

$$\Psi = \sum_{K \geq K_{\min}} \Phi_K^{K[f] \varepsilon LST}(\rho) |AK [f] \varepsilon LST\rangle, \quad (113)$$

где

$$\int \Phi_K^2(\rho) \rho^{3A-4} d\rho = 1.$$

Гамильтониан ядра имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\rho^{3A-4}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{3A-4} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{\hbar^2}{2m\rho^2} \Delta_{\Theta} + V. \quad (114)$$

Если подставить функцию (113) в уравнение Шредингера и результат умножить слева на $\langle AK [f] \varepsilon LST |$, то получим систему уравнений вида

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\hbar^2 L_K (L_K + 1)}{2m\rho^2} - E \right\} \chi_K^{K\varepsilon[f]LST}(\rho) + \sum_{\overline{K\varepsilon[f]LST}} W_{\overline{K\varepsilon[f]LST}}^{\overline{K\varepsilon[f]LST}}(\rho) \chi_{\overline{K\varepsilon[f]LST}}^{\overline{K\varepsilon[f]LST}} = 0. \quad (115)$$

Здесь $L_K = K + (3A - 6)/2$, $\chi_K = \rho^{(3A-4)/2} \Phi_K(\rho)$; количество уравнений в этой системе и число членов в сумме (115) равно числу слагаемых, включенных в разложение (113).

Потенциалы $W_{\overline{K\varepsilon[f]LST}}^{\overline{K\varepsilon[f]LST}}(\rho)$ как раз и есть те матричные элементы, которые обсуждались выше:

$$W_{\overline{K\varepsilon[f]LST}}^{\overline{K\varepsilon[f]LST}}(\rho) = \langle AK [f] \varepsilon LST | V | \overline{AK} [\overline{f}] \overline{\varepsilon LST} \rangle. \quad (116)$$

Обратим внимание на чрезвычайно сильный «центробежный потенциал» $L_K(L_K + 1)/\rho^2$, который входит в эти уравнения и является следствием принципа Паули, ибо высокие значения L_K связаны с тем, что большими являются уже значения K_{\min} , совместимые с принципом Паули.

Выше мы показали, что методы, развитые в модели оболочек, довольно легко переносятся и обобщаются на случай метода K -гармоник. Особенно эффективен оболочечный подход для приближенных вычислений потенциалов $W_{\overline{K\varepsilon[f]LST}}^{\overline{K\varepsilon[f]LST}}(\rho)$ по методу Базя —

Жукова — Суркова [4]. Этот метод является асимптотическим и может давать аккуратные результаты лишь при достаточно больших массовых числах A . Суть его сводится к следующему. Используя равенства (106), (107), (109), (116), мы приходим к результату:

$$\langle s^4 p^{A-4} [f] \varepsilon LST | V | s^4 p^{A-4} [\bar{f}] \bar{\varepsilon} \bar{L} \bar{S} \bar{T} \rangle \equiv V_{[f] \varepsilon LST}^{[\bar{f}] \bar{\varepsilon} \bar{L} \bar{S} \bar{T}}(r_0) = \\ = \text{const} \int d\rho \rho^{3A-4+2K} \exp(-\rho^2/r_0^2) W_{K[f] \varepsilon LST}^{K[\bar{f}] \bar{\varepsilon} \bar{L} \bar{S} \bar{T}}(\rho). \quad (117)$$

Представим интеграл в правой части этой формулы в виде

$$\int d\rho W_{K[f] \varepsilon LST}^{K[\bar{f}] \bar{\varepsilon} \bar{L} \bar{S} \bar{T}}(\rho) \exp(3A-4+2K) \left(\ln \rho/r_0 - \frac{\rho^2}{(3A-4+2K)r_0^2} \right)$$

и вычислим его по методу Лапласа [37]. Ограничиваясь низшим членом по степеням $(3A-4+2K)^{-1}$, получаем, что

$$V_{[f] \varepsilon LST}^{[\bar{f}] \bar{\varepsilon} \bar{L} \bar{S} \bar{T}}(r_0) = W_{K[f] \varepsilon LST}^{K[\bar{f}] \bar{\varepsilon} \bar{L} \bar{S} \bar{T}} \left(r_0 \sqrt{K + \frac{3A-4}{2}} \right). \quad (118)$$

Таким образом, чтобы получить приближенные значения потенциала W в точке ρ , достаточно вычислить оболочечный матричный элемент (117) при значении оболочечного параметра

$$r_0 = \frac{\rho}{\sqrt{K + (3A-4)/2}}.$$

7. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА В ТИМО И ПО МЕТОДУ К-ГАРМОНИК ДЛЯ ЯДЕР 1р-ОБОЛОЧКИ

Метод K -гармоник в плане изучения структуры ядер был использован главным образом для описания систем трех и четырех нуклонов; что касается более тяжелых ядер, то рассматривались лишь магические ядра. Правда, есть расчет для ядра ^{12}C [38], но применяемая в нем схема вычислений также соответствует ядру с заполненными оболочками в $j-j$ -связи. В работе [39] проведено более широкое исследование метода K -гармоник в минимальном приближении в случае немагических ядер p -оболочки с использованием единого нуклон-нуклонного потенциала.

Там же делается первая попытка изучить спектры низших возбужденных состояний немагических ядер в методе K -гармоник. В качестве метода расчета используется приближенный вариант Базя — Жукова — Суркова, описанный в предыдущем разделе. Все расчеты [39] проводятся в минимальном приближении, когда в разложении (113) учитывается только один член с $K = K_{\text{мин}}^*$.

* В литературе имеются более точные расчеты, учитывающие состояния с глобальным моментом $K_{\text{мин}}$ и $K_{\text{мин}} + 2$ [40], но такие вычисления достаточно сложны и выполнены пока только для одного ядра ^{16}O .

В этом приближении система (415) сводится к уравнению

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{L_K(L_K + 1)}{\rho^2} - \frac{2m}{\hbar^2} [E + W_V^Y(\rho)] \right\} \chi_Y(\rho) = 0. \quad (119)$$

Это уравнение с потенциалом, найденным по формуле (418), численно решалось на ЭВМ, находились энергия связи, волновые функции и другие физические величины как основных, так и возбужденных состояний ядер $1p$ -оболочки положительной и отрицательной четности для различных вариантов нуклон-нуклонного потенциала [41].

Результаты расчетов для основных состояний ядер $1p$ -оболочки. На рис. 1 показаны результаты расчетов энергии связи ядер p -оболочки в методе К-гармоник и сравнение их с результатами расчета в модели оболочек из работы [42], а также с экспериментальными значениями [43] энергий связи соответствующих ядер.

Как видно из рис. 1, энергия связи ядер $1p$ -оболочки для выбранного потенциала (вариант № 1 потенциала Волкова) сильно занижена (за исключением ядра ^{16}O) по сравнению с экспериментальными значениями.

Этот результат не является неожиданным, так как расчет проведен в приближении $K = K_{\text{мин}}$ и учет следующих гармоник приведет к увеличению энергии связи. Кроме того, абсолютное значение энергии связи сильно зависит от выбора варианта нуклон-нуклонного потенциала, как было показано в работе [44]; это видно и из табл. 2. Поэтому расхождение теории с экспериментом можно связать не только с недостаточностью приближения $K_{\text{мин}}$, но и неадекватным выбором нуклон-нуклонного потенциала. По форме рассчитанная кривая энергий связи в зависимости от массового числа повторяет ход экспериментальной кривой, так что аномальное увеличение энергии связи для ядер, имеющих α -частичную структуру, хорошо воспроизводится

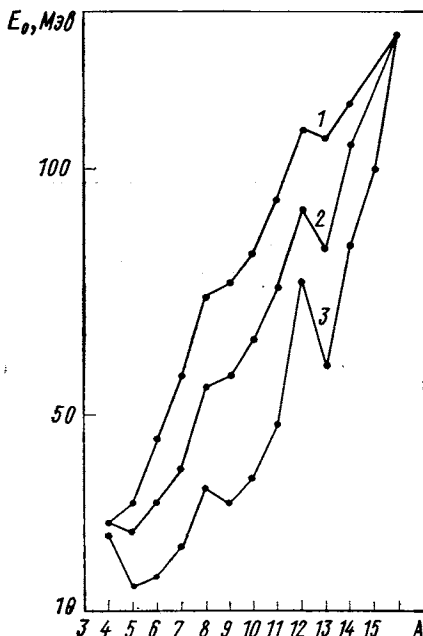


Рис. 1. Энергии связи ядер p -оболочки:

1 — результаты расчета по модели оболочек; 2 — экспериментальные значения; 3 — результаты расчета в нижнем приближении метода К-гармоник

Зависимость энергии связи ядер p -оболочки от выбора варианта нуклон-нуклонного потенциала

Ядро	$E_{\text{св}}^{\text{теор}}$, Мэв	Вариант потенциала	$E_{\text{св}}^{\text{эксп}}$, Мэв	Ядро	$E_{\text{св}}^{\text{теор}}$, Мэв	Вариант потенциала	$E_{\text{св}}^{\text{эксп}}$, Мэв
${}^4\text{He}$	23,46	1 [5]	28,3	${}^7\text{Li}$	26,1	1 [5]	39,25
	25,79	6 [5]			13,675	1 [6]	
	26,05	3 [5]			142,4	1 [5]	
${}^6\text{Li}$	16,98	1 [5]	31,99	${}^{16}\text{O}$	158,4	2 [5]	127,62
	20,86	6 [5]			151,4	3 [5]	
	13,03	1 [6]					

в K -гармоническом расчете, так же как и в расчетах по модели оболочек. На рис. 2 показано изменение расстояний между соседними уровнями возбуждения по коллективной переменной ρ с ростом A (для функций с одним, двумя и тремя узлами соответственно). Видно, что интервалы между возбуждениями проявляют при увеличении A ту же периодичность по четыре, которую имеет энергия связи. Из рис. 2 также видно, что уровни, возбужденные по коллективной переменной ρ и эквидистантные в осцилляторной модели, значительно сближаются при K -гармоническом подходе.

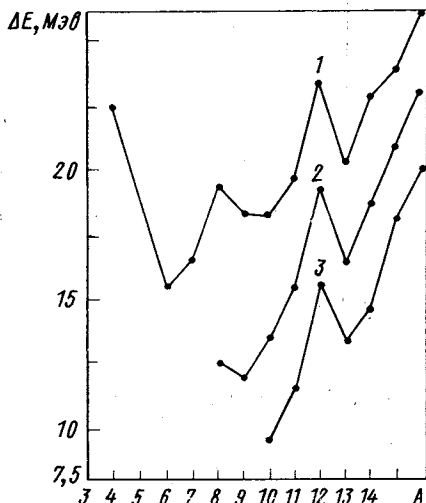


Рис. 2. Расстояние ΔE между монополярными возбуждениями в ядрах p -оболочки, рассчитанные по методу K -гармоник: 1 — интервал между основным и первым возбужденными состояниями $E_{1K} - E_{0K}$; 2 — разности энергий второго и первого возбужденных состояний $E_{2K} - E_{1K}$; 3 — разности энергий третьего и второго возбужденных состояний $E_{3K} - E_{2K}$

В табл. 3 приведены результаты расчета среднеквадратических радиусов ядер p -оболочки по функциям, которые соответствуют значениям энергии связи, приведенным на рис. 1. Видно, что теоретический расчет дает завышенные значения среднеквадратического радиуса по сравнению с экспериментальными данными. По-видимому, это обусловлено выбором исследуемого варианта потенциала Волкова. Более глубокий потенциал

даст большие значения энергии связи и уменьшит ширину ямы, так что значение среднеквадратического радиуса также уменьшится.

Описание возбужденных состояний ядер в методе К-гармоник. Описание возбужденных состояний ядер выдвигает большие требования к точности расчета. Обсудим некоторые результаты спектроскопических расчетов по методу К-гармоник для легких ядер. На рис. 3 показаны спектры низших возбужденных состояний ядер ${}^6\text{Li}$ и ${}^7\text{Li}$ в К-гармоническом подходе для двух видов центрального потенциала Волкова [41] и Эйкемейера — Хакенбройха [45], а также проведено сравнение с экспериментальными спектрами этих

Таблица 3

Сравнение расчетных среднеквадратических радиусов основных состояний ядер p -оболочки с экспериментальными

A	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{\text{теор.}} / \text{ферми}$	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{\text{эксп.}} / \text{ферми}$	A	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{\text{теор.}} / \text{ферми}$	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{\text{эксп.}} / \text{ферми}$
4	1,81	1,708	11	2,87	2,25
5	2,31	—	12	2,94	2,496
6	2,74	2,535	13	2,92	—
7	2,65	—	14	2,85	2,48
8	2,71	—	15	2,80	—
9	2,84	2,26	16	2,75	2,741
10	2,72	—			

ядер. Поскольку расчет проводился с центральными силами без учета спин-орбитального расщепления, то в ядре ${}^6\text{Li}$ следует сравнивать относительное положение уровней $LST-010$

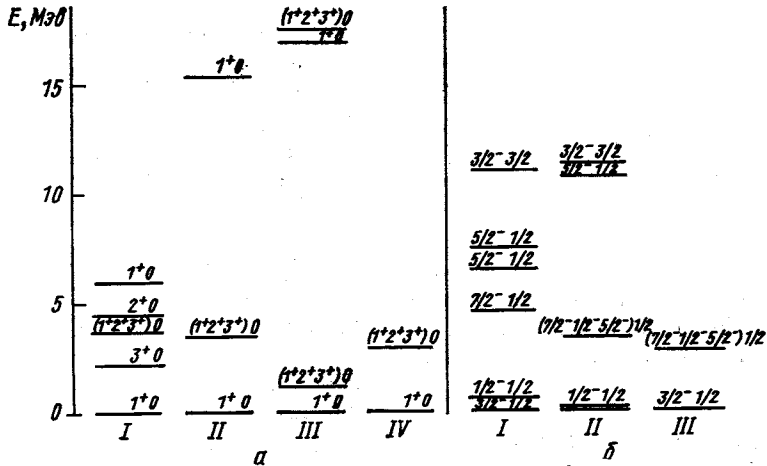


Рис. 3. Спектры низших уровней ядер для ${}^6\text{Li}$ (а) и ${}^7\text{Li}$ (б): I — экспериментальный спектр; II — результаты расчета с вариантом 1 сил Волкова; III — то же, для варианта б сил Волкова (а); IV — то же, для сил Эйкемейера — Хакенбройха

и $LST-210$ с экспериментальным значением центра тяжести низших уровней $J^\pi = 1^+, 2^+, 3^+, T = 0$. Как видно из рис. 3, для исследуемых вариантов центрального потенциала относительное положение уровней меняется от 1 до 3,5 $Mэв$, в то время как экспериментальное значение центра тяжести уровней равно 3,74 $Mэв$. Однако во всех случаях порядок следования уровней сохраняется. Обнаруживается также первое возбужденное по коллективной переменной состояние с $J^\pi = 1^+, T = 0$, которое для нескольких вариантов потенциала лежит в области 15—17 $Mэв$. При эксперименте в этом ядре наблюдается уровень с энергией 15,6 $Mэв$ с $J^\pi = 1^+$. Полученные результаты позволяют сделать заключение, что относительное положение в спектрах уровней менее чувствительно к выбору параметров потенциала, чем абсолютное значение энергии связи. Аналогичные выводы можно сделать

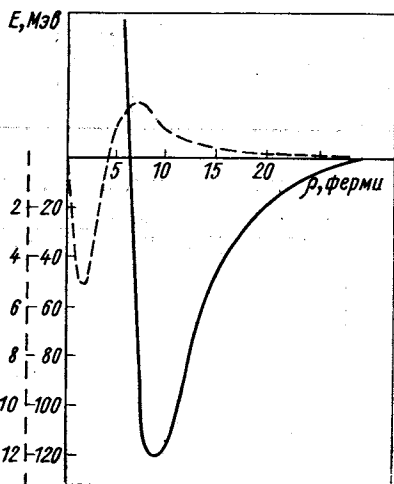


Рис. 4. Матричные элементы $W_{1d}^{1d}(\rho) + L(L+1)/\rho^2$ (сплошная кривая) и $W_{1d}^{2s}(\rho)$ (пунктирная кривая) для первого набора потенциала Волкова

по результатам расчетов спектров низших возбужденных состояний ядра 7Li . Порядок следования уровней и относительное их положение разумным образом воспроизводятся при различных вариантах нуклон-нуклонного потенциала.

Состояния аномальной четности ядра ${}^{16}O$ в методе K -гармоник. Возбужденные состояния аномальной четности, имеющие четность противоположную четности основного состояния, нельзя получить в приближении $K = K_{\min}$. В этом случае разложение волновой функции в методе K -гармоник начинается с приближения $K = K_{\min} + 1$.

В работе [44] был проведен расчет как основного состояния ядра ${}^{16}O$, так и возбужденных дипольных состояний с $J^\pi = 1^-, T = 1$. Также оценивались вероятности дипольных переходов из основного состояния в воз-

бужденные состояния $J^\pi = 1^-, T = 1$. При описании дипольных состояний в ядре ${}^{16}O$ в методе K -гармоник следует учитывать как минимум две компоненты в разложении (113), одна из которых соответствует переходу нуклона из оболочки $1p$ в $2s$, а другая — переходу $1p \rightarrow 1d$. Соответствующие угловые,

радиальные функции и потенциалы обозначены индексами $2s, 1d$.

Итак, волновая функция записывалась в виде

$$\Psi(\bar{r}) = [\chi_{2s}(\rho) Y_{K=13,2s} + \chi_{1d}(\rho) Y_{K=13,2d}] \frac{1}{\rho^{(3A-4)/2}}. \quad (120)$$

На рис. 4 показаны матричные элементы $W_{1d}^{1d}(\rho)$ и $W_{1d}^{2s}(\rho)$ для первого набора потенциала Волкова [41], входящие в эту систему.

Для оценки вероятности дипольных переходов и плотности распределения нуклонов в ядре необходимо знать матричные элементы оператора плотности и оператора дипольного перехода.

Матричный элемент оператора дипольного перехода из основного состояния $J^\pi = 0^+, T = 0$ ядра ^{16}O в возбужденное состояние $J^\pi = 1^-, T = 1$ после выполнения всех промежуточных интегрирований принимает вид

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\text{возб}} | \hat{d} | \Psi_{\text{осн}} \rangle &= \frac{3 \cdot 691!}{2^{96} \cdot 35!} e \left(\int_0^\infty \chi_0(\rho) \chi_{2s}(\rho) \rho d\rho + \right. \\ &\left. + \sqrt{5} \int_0^\infty \chi_0(\rho) \chi_{1d}(\rho) \rho d\rho, \right) \quad (121) \end{aligned}$$

где e — заряд протона; $\chi_0(\rho)$ — радиальная функция основного состояния. Плотность нуклонов $n(\bar{r})$ в состоянии Ψ ядра A находят после вычисления среднего значения оператора

$$\hat{n}(r) = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \delta(\bar{r} - \bar{r}_i),$$

т. е.

$$n(r) = \langle \Psi | \hat{n}(r) | \Psi \rangle. \quad (122)$$

Здесь плотность $n(r)$ нормирована на одну частицу в объеме. При этом среднеквадратический радиус равен

$$\bar{r}^2 = \int_0^\infty r^4 n(r) dr. \quad (123)$$

Результаты расчетов показаны на рис. 5 и 6 и в табл. 4. Плотность распределения нуклонов в ядре ^{16}O для состояний $J = 1^-, T = 1$ приведена на рис. 7, а, б, в.

Проведенное исследование позволяет сделать ряд заключений.

1. Абсолютное значение энергии связи уровней как в приближении $K_{\text{мин}}$, так и в приближении $K_{\text{мин}} + 1$ меняется на 10—17 Мэв для разных вариантов потенциала, так что при этом энер-

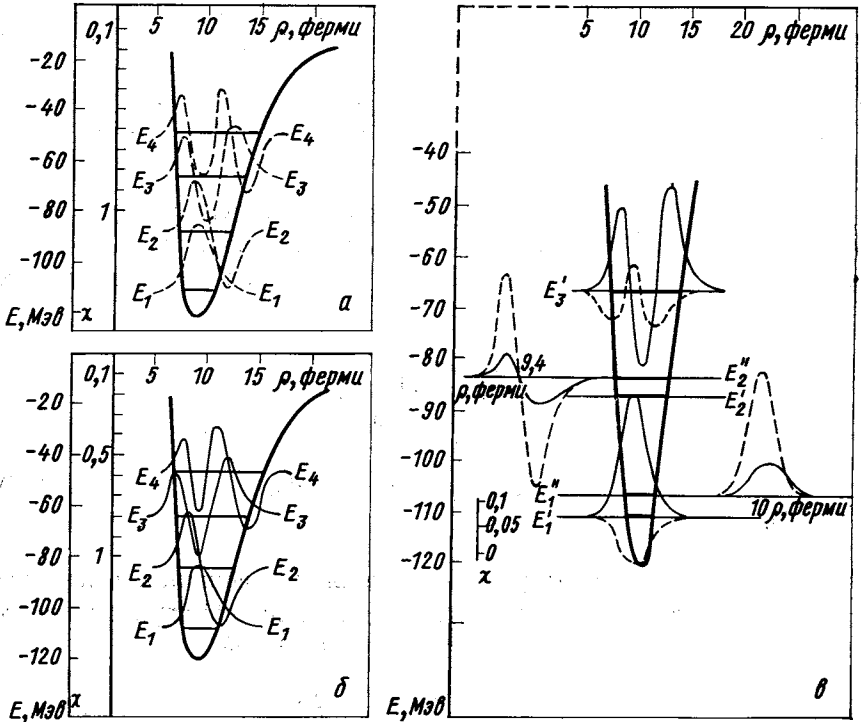


Рис. 5. Энергии связи и волновые функции нескольких первых уровней для первого набора потенциалов Волкова:

пунктир — волновая функция основного состояния ядра ^{16}O в приближении $K_{\text{мин}}$; а, б — положения уровней и волновые функции для потенциалов соответственно $W_{2s}^{2s}(\rho)$ и $W_{1d}^{1d}(\rho)$ при $W_{1d}^{2s}(\rho) = 0$; в — те же характеристики с учетом смешивания $2s - 1d$ -состояний

гия возбуждения $\Delta E_{K_{\text{мин}}, K_{\text{мин}}+1}$ слабо меняется — приблизительно на 3 Мэв. При этом интервал между состояниями $1d - 2s$ остается постоянным и составляет около 3 Мэв.

Учет кулоновской энергии поднимает абсолютное положение энергий связи уровней на 16—17 Мэв в приближении как $K_{\text{мин}}$, так и $K_{\text{мин}} + 1$; при этом относительные энергии $\Delta E_{K_{\text{мин}}, K_{\text{мин}}+1}$

и ΔE_{1d-2s} не изменяются. Поэтому все данные расчета приведены без учета кулоновских поправок.

2. Учет эффекта смешивания $1d - 2s$ -состояний приводит к дополнительному расщеплению уровней на величину порядка 1 Мэв . Этот эффект практически не зависит от варианта потенциала и слабо меняется при росте энергии возбуждения. Как видно из рис. 4, матричный элемент связи $1d - 2s$ -состояний мал.

3. Как видно из таблицы, среднеквадратический радиус ядра в возбужденных состояниях меняется на 10% по мере роста энергии возбуждения.

4. В работе [46] по измерениям сечений полного поглощения γ -квантов ядром ^{16}O было обнаружено, что в области энергий гигантского резонанса находится около половины интегрального сечения, определяемого дипольным правилом сумм (больше поло-

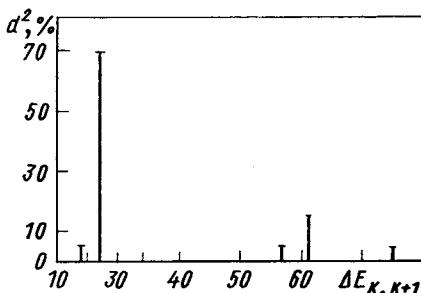


Рис. 6. Силы дипольных переходов $J = -1^-$, $T = 1$ ядра ^{16}O в процентах для первого набора потенциала Волкова:
 а, б — сила дипольных переходов для $W_{1d}^{2s} = 0$ и $W_{1d}^{2s} = 10$ соответственно

Таблица 4

Результаты расчета состояния $J = 1^-$, $T = 1$ ядра O^{16} в приближении $K_{\text{мин}} + 1$

	Набор I потенциала Волкова					Набор II потенциала Волкова			
	$E_{K_{\text{мин}}+1}^{\text{СВ}}$		$d^2, \%$		$\sqrt{\overline{r^2}},$ ферми	$E_{K_{\text{мин}}+1}^{\text{СВ}}$		$d^2, \%$	
	$W_{1d}^{2s}=0$	$W_{1d}^{2s}\neq 0$	$W_{1d}^{2s}=0$	$W_{1d}^{2s}\neq 0$		$W_{1d}^{2s}=0$	$W_{1d}^{2s}\neq 0$	$W_{1d}^{2s}=0$	$d^2, \%$
2s	109,5	110,3	13,4	9,2	2,26	120,9	121,5	14,2	21,5
1d	107,2	106,7	66,3	67,8	2,28	118,4	118,1	71,2	57,9
2s	86,6	87,2	3,0	4,5	2,56	99,3	99,6	2,3	4,7
1d	83,5	83,3	14,2	15,7	2,70	96,9	96,1	11,4	14,5
2s	66,4	66,8	0,5	—	2,87	80,1	80,5	0,1	0,4
1d	63,7	63,5	2,2	2,7	2,92	77,6	77,3	0,7	0,8
2s	48,9	49,1	0,1	—	3,15	63,0	63,3	—	0,01
1d	46,6	46,2	0,5	0,1	3,15	60,8	60,4	—	0,06

Примечание. $E^{\text{СВ}}$ — полная энергия связи; d^2 — квадрат матричного элемента оператора дипольного перехода; $\overline{r^2}$ — среднеквадратический радиус для четырех состояний с различным числом узлов по коллективной переменной ρ . Все результаты даны для двух вариантов потенциала Волкова как с учетом связи $1d-2s$ -состояний, так и без учета.

вины интегрального сечения фотопоглощения приходится на область более высоких энергий γ -квантов). Попытка дать объяснение этому явлению была сделана в работе [47], в которой было

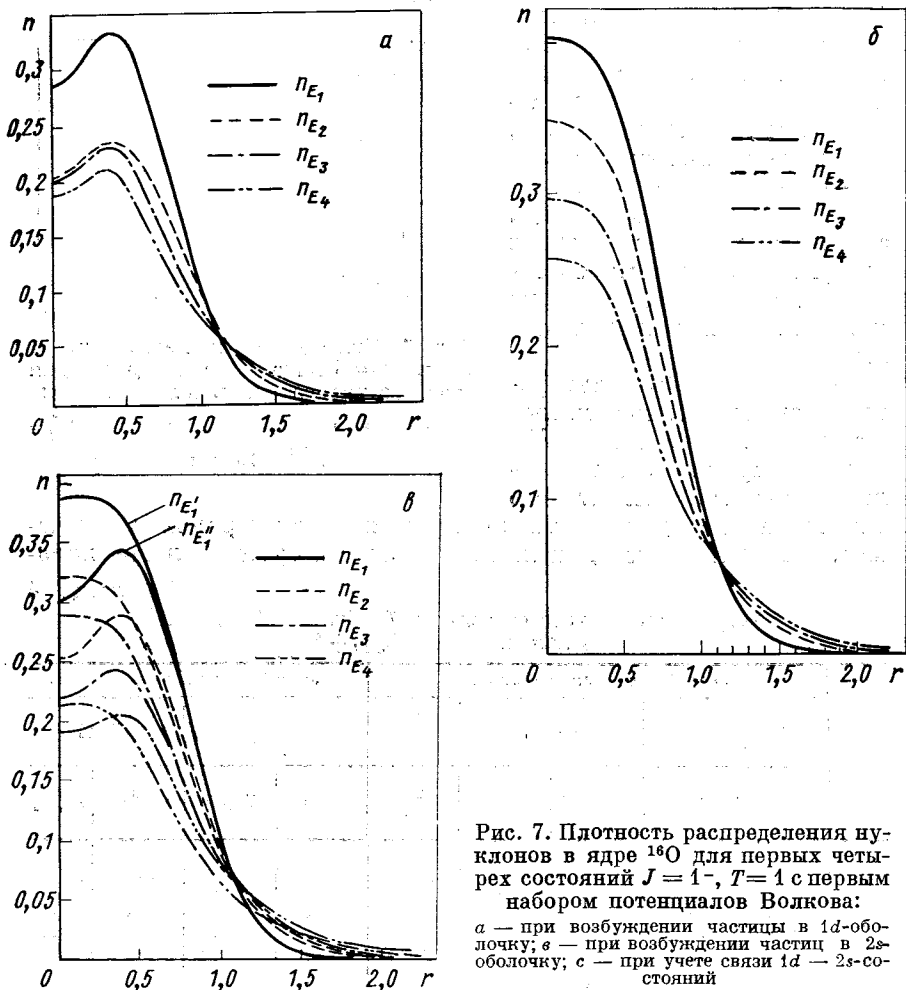


Рис. 7. Плотность распределения нуклонов в ядре ^{16}O для первых четырех состояний $J=1^-$, $T=1$ с первым набором потенциалов Волкова:

a — при возбуждении частицы в $1d$ -оболочку; *б* — при возбуждении частиц в $2s$ -оболочку; *в* — при учете связи $1d-2s$ -состояний

показано, что при учете примеси к дипольному гигантскому резонансу состояний 3 частицы — 3 дырки ($3p-3h$) около 18% общей дипольной суммы приходится на область энергий выше гигантского резонанса. Этот эффект в значительной степени принят во внимание в методе K -гармоник; в приближении $K_{\text{мин}}$ учитывается бесконечное количество $|prnh\rangle$ монополярных оболоч-

чечных конфигураций. В результате 20% силы дипольных переходов приходится на состояние с одним узлом по переменной ρ и 5% — на состояния с двумя узлами по этой переменной. На языке частично-дырочных возбуждений это соответствует тому, что в дипольном резонансе существенна примесь как $|3p - 3h\rangle$ -, так и $|5p - 5h\rangle$ -состояний. Можно надеяться, что качественно этот результат не изменится и при выборе нуклон-нуклонных

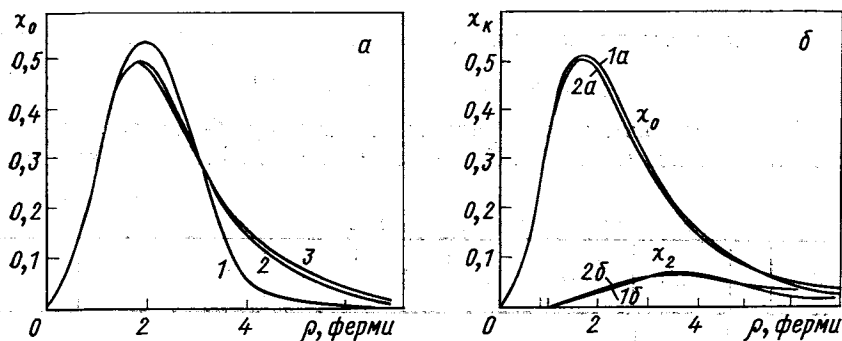


Рис. 8. Результаты расчета продольных (а) и поперечных (б) форм-факторов неупругого рассеяния электронов на ядре ^{16}O с возбуждением дипольных состояний $J = 1^-$, $T = 1$ в методе K -гармоник (сплошные кривые) и в оболочечной модели (пунктирные кривые)

потенциалов, которые дадут правильные значения энергии связи основного и возбужденных состояний ядра ^{16}O и при добавлении следующих членов в ряд по K -гармоникам.

В работе [48] были рассчитаны форм-факторы неупругого рассеяния электронов на ядре ^{16}O с возбуждением дипольных состояний $J = 1^-$, $T = 1$. Результаты показаны на рис. 8, а, б, где сплошными кривыми изображены форм-факторы, вычисленные по методу K -гармоник, а пунктирными — форм-факторы, полученные в оболочечной модели. Из рис. 8, а, б видно, что неупругие электронные форм-факторы, найденные по методу K -гармоник, не имеют того глубокого дифракционного минимума, который характерен для расчетов по модели оболочек. Заполнение минимума обусловлено вкладом монопольных возбуждений, которые учтены в методе K -гармоник. Существенно различаются результаты метода K -гармоник и модели оболочек в области больших переданных импульсов.

Сравнение результатов метода K -гармоник с результатами ТИМО для ядер p -оболочки. Результаты работы [39] позволяют провести количественное сравнение метода K -гармоник в низшем приближении и ТИМО. С этой целью были рассчитаны значения $E_{\text{св}}$ всех ядер p -оболочки с помощью волновых функций ТИМО для

числа квантов $N = K_{\text{мин}}$. Кроме того, проведено разложение волновых функций метода K -гармоник по функциям ТИМО. Эти вычисления были выполнены по (53) — (55), из которых видно, что разложение функций метода K -гармоник по функциям ТИМО сводится к разложению $\chi_{k\nu}(\rho)$ по радиальным волновым функциям $3A - 3$ -мерного гармонического осциллятора:

$$\chi_K^\nu(\rho) = \sum_x C_{xK}^\nu R_{xK}(\rho), \quad (124)$$

а коэффициенты разложения определяются следующим образом:

$$C_{xK}^\nu(\rho) = \int \chi_K^\nu(\rho) R_{xK}(\rho) \rho^{3A-4} d\rho. \quad (125)$$

Сравнение результатов расчетов по методу K -гармоник в низшем приближении и в ТИМО проведено в табл. 5. В ней даны зна-

Таблица 5

Сравнение результатов расчетов по методу K -гармоник и ТИМО

A	ν	$E_{K\nu}$	$E_{\text{ТИМО}}$	C_0	C_1	C_2	$\hbar\omega$	K_0	K_1
^5He	0	-15,55	-14,01	0,980	0,093	0,173	16,84	—	—
^6Li	0	-16,98	-15,43	0,984	-0,061	0,158	13,87	24,77	—
	1	-1,56	11,7	0,123	0,863	-0,361			
^7Li	0	-26,11	-25,31	0,988	-0,071	0,133	16,17	26,33	—
	1	-9,64	-1,89	0,171	0,671	-0,375			
^8Be	0	-40,09	-39,45	0,984	-0,071	0,142	16,44	38,45	16,16
	1	-20,67	-15,22	0,119	0,830	-0,352			
	2	-8,08	8,31	-0,034	0,497	0,257			
^9Be	0	-39,16	-38,42	0,983	-0,083	0,146	15,76	37,38	16,23
	1	-20,8	-15,71	0,123	0,818	-0,337			
	2	-8,7	6,86	-0,052	0,469	0,264			
^{10}B	0	-43,99	-43,31	0,989	-0,055	0,146	15,6	38,77	21,33
	1	-25,8	-21,05	0,083	0,853	-0,307			
	2	-12,3	0,78	-0,075	0,463	0,404			
^{11}B	0	-57,8	-57,34	0,988	-0,064	0,140	16,44	44,22	27,02
	1	-38,1	-33,45	0,119	0,897	-0,300			
	2	-22,7	-9,98	-0,066	0,486	0,456			
^{12}C	0	-88,6	-87,71	0,987	-0,085	0,132	16,01	66,68	44,38
	1	-65,3	-63,91	0,143	0,900	-0,298			
	2	-46,0	-40,61	-0,073	0,531	0,453			
^{13}C	0	-70,63	-70,13	0,986	-0,092	0,115	16,58	48,57	32,34
	1	-50,35	-46,08	0,109	0,910	-0,295			
	2	-33,8	-22,43	-0,103	0,519	0,470			
^{14}C	0	-96,5	-95,75	0,993	-0,082	0,061	18,2	56,6	38,07
	1	-73,7	-68,76	0,187	0,913	0,294			
	2	-55,0	-42,21	-0,016	0,486	0,504			
^{15}N	0	-115,6	-115,13	0,994	-0,042	0,093	18,5	61,05	48,94
	1	-91,7	-87,61	0,105	0,907	-0,268			
	2	-70,3	-60,49	-0,077	0,398	0,621			
^{16}O	0	-142,4	-141,8	0,995	-0,034	0,112	19,39	88,22	55,5
	1	-113,4	-110,5	0,098	0,902	-0,264			
	2	-90,4	-85,74	-0,050	0,370	0,653			

чения энергии связи, вычисленные по методу *K*-гармоник и в ТИМО частота осциллятора $\hbar\omega$, при которой максимум низшей осцилляторной функции $R_{0K}(\rho)$ совпадает с максимумом, а также коэффициенты разложения функций связанных состояний метода *K*-гармоник по функциям ТИМО с описанной выше частотой:

$$\chi_{K\gamma}(\rho) = C_0 R_{0K}(\rho) + C_1 R_{1K}(\rho) + C_2 R_{2K}(\rho) + \dots \quad (126)$$

Поскольку приведена только часть коэффициентов разложения, то для них не должны выполняться соотношения ортонормируемости, в особенности для состояний, возбужденных по ρ . Анализ табл. 5 показывает, что значения энергии связи всех ядер *p*-оболочки, полученные для потенциала Волкова (вариант 1) и в низшем приближении метода *K*-гармоник, и в ТИМО при учете только одной низшей конфигурации отличаются друг от друга не более чем на 0,5 Мэв. Подобное близкое соответствие между низшими состояниями модели оболочек и метода *K*-гармоник имеет место для всех ядер 1*p*-оболочки*. Причина этого сходства видна из рис. 9, где показаны эффективный потенциал $W(\rho)$ (с включением «центробежного» члена $L_K(L_K + 1)/\rho^2$) метода *K*-гармоник для ядра ${}^8\text{Be}$, волновые функции основного и первого возбужденного состояний в этом потенциале, а также низшие осцилляторные функции R_{0K} и R_{1K} и осцилляторный потенциал (также с включением «центробежного» члена и с описанным выше выбором частоты $\hbar\omega$). Начало отсчета для осцилляторного потенциала (пунктирная линия) выбрано так, чтобы энергии основных состояний в обоих ямах совпадали

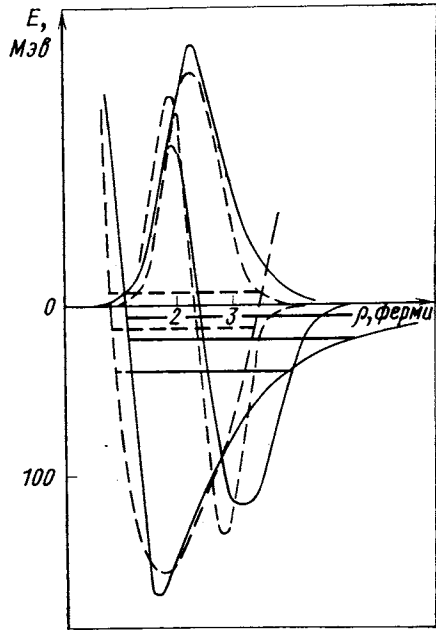


Рис. 9. Результаты расчета эффективного потенциала $W(\rho)$ с включением «центробежного» члена $L_K(L_K + 1)/\rho^2$ метода *K*-гармоник для ядра ${}^8\text{Be}$, волновые функции основного и первого возбужденного состояний в этом потенциале, а также низшие осцилляторные функции R_{0K} и R_{1K} и осцилляторный потенциал (также с включением «центробежного» члена и с описанным выше выбором частоты $\hbar\omega$). Начало отсчета для осцилляторного потенциала (пунктирная линия) выбрано так, чтобы энергии основных состояний в обоих ямах совпадали

* Этот факт впервые был установлен на примере ядра ${}^{16}\text{O}$ в работе [49].

выбором частоты $\hbar\omega$). Начало отсчета для осцилляторного потенциала, который изображен пунктирной линией, выбрано так, чтобы энергии основных состояний в обоих ямах совпадали. Из рис. 9 видно, что осцилляторный потенциал близок к K -гармоническому вблизи дна ямы, несколько уже вблизи первого безузлового решения и сильно различается в области возбужденных по коллективной переменной ρ состояний. Поэтому естественно, что энергии основного состояния в обоих потенциалах близки друг к другу. Видно, что и волновые функции основных состояний мало различаются друг от друга, за исключением асимптотической области. В то же время в методе K -гармоник и в ТИМО весьма существенно различаются энергии и волновые функции возбужденных по ρ состояний. Эти выводы справедливы не только для ядра ${}^8\text{Be}$, которое выбрано в качестве типичного примера, но и для остальных ядер $1p$ -оболочки (см. табл. 5). В табл. 5 обращает на себя внимание тот факт, что интеграл перекрывания K -гармонической функции основного состояния $\chi_{k0}(\rho)$ с низшей осцилляторной функцией составляет 98%. При этом исключительно малым является вклад в $\chi_{k0}(\rho)$ двухквантового осцилляторного возбуждения. Очень малые значения коэффициента C_1 не случайны, а вполне закономерны.

Дубовым и Флоресом [50] была доказана теорема, которую в применении к нашей задаче можно сформулировать следующим образом: если частота осциллятора $\hbar\omega$ выбрана так, что интеграл перекрывания низшей осцилляторной функции $R_{0k}(\rho)$ с функцией $\chi_{k0}(\rho)$ имеет максимальное значение, то интеграл перекрывания функции $\chi_{k0}(\rho)$ со следующей осцилляторной функцией $R_{1k}(\rho)$ строго равняется нулю. Отметим, что эта теорема была доказана в работе [50] только для трехмерного осциллятора, но она легко обобщается на радиальные функции осциллятора любой размерности [51].

Как уже отмечалось, при выборе $\hbar\omega$ мы не добивались максимального значения интеграла перекрывания низшей функции ТИМО и волновой функции метода K -гармоник, а следили только за совпадением максимумов этих функций. Однако при выполнении такого условия значение интеграла перекрывания этих функций достаточно близко к максимуму и коэффициенты C_1 оказываются очень малыми, хотя и ненулевыми. Это обстоятельство проливает свет на причины близкого совпадения результатов ТИМО и метода K -гармоник для основного состояния. Поскольку к волновой функции R_{0k} не может примешиваться функция R_{1k} , то улучшение оболочечной функции в методе K -гармоник происходит за счет примеси состояний с осцилляторной энергией $4\hbar\omega$ и более высокими энергиями. Из-за большого различия энергий этих состояний и основного состояния их примесь мала. Что касается состояний, возбужденных по ρ , то их структура

значительно сложнее, их волновые функции не сводятся к какой-либо одной оболочечной функции. Поэтому следует ожидать, что метод K -гармоник будет гораздо лучше описывать свойства монополюсных гигантских резонансов, чем модель оболочек в простейшем одноконфигурационном приближении.

Метод K -гармоник и монополюсные возбуждения легких ядер. Монополюсные возбуждения соответствуют колебаниям плотности ядерного вещества и могут давать вклад в различные физические эффекты. Выше было показано, что эти состояния оказывают существенное влияние на вероятности дипольных переходов. Новый интерес к таким возбуждениям (так называемым «дыхательным состояниям») возник в последнее время в связи с обнаружением при неупругом рассеянии электронов и адронов на ряде ядер [52] гигантских резонансов коллективного типа, которые, по-видимому, можно отождествить с $E0$ - и $E2$ -переходами. В работах [49, 53] было показано, что результаты феноменологической гидродинамической модели для дыхательных O^+ -возбуждений естественным образом вытекают из микроскопического метода K -гармоник с $K = K_{\text{мин}}$. Численные расчеты показали, что гидродинамическая модель монополюсных колебаний является следствием микроскопического метода K -гармоник в пределе больших значений массового числа. В этих работах была прослежена связь параметров жесткости гидродинамической модели и метода гиперсферических функций. Было показано, что обе модели дают близкие результаты в области $A > 16$ и наблюдаются сильные расхождения в области ядер $A < 16$. Стало ясно, что вопрос о поведении параметра жесткости ядра K в зависимости от числа нуклонов (в области легких ядер), энергии возбуждения ядра, характеристик уровней ($JLST$) заслуживает специального изучения. В работе [54] был проведен расчет сжимаемости ядра для всех ядер p -оболочки в рамках единого нуклон-нуклонного потенциала. Изучались состояния как типа $K_{\text{мин}}$, так и типа $K_{\text{мин}} + 1$. Оценки параметра сжимаемости K производятся по формуле гидродинамической модели, которая для метода K -гармоник записывается в виде [53]:

$$K = (m/\hbar^2) r_0^2 (\Delta E)^2; \quad r_0 = \rho/\sqrt{A}, \quad (127)$$

где r_0 — радиус основного состояния ядра; ΔE — разность энергий возбуждения соседних монополюсных состояний. Отметим, что в формуле (127) использовался радиус r_0 , соответствующий основному состоянию ядра в полосе возбуждения с заданными квантовыми числами, независимо от того, какое возбужденное состояние рассматривалось. Естественно, что при таком выборе r_0 оценка для K лучше для нижних возбужденных состояний. Соответствующие значения параметра сжимаемости для высоких возбужденных состояний могут претендовать лишь на качественное описание зависимости этого параметра от энергии возбуждения. Резуль-

Таблица 6

Результаты расчета в методе K -гармоник параметра сжимаемости для основного состояния K_0 первого возбужденного состояния K_1 ядер p -оболочки

Ядро	${}^6\text{Li}$	${}^7\text{Li}$	${}^8\text{Be}$	${}^9\text{Be}$	${}^{10}\text{B}$	${}^{11}\text{B}$	${}^{12}\text{C}$	${}^{13}\text{C}$	${}^{14}\text{C}$	${}^{15}\text{N}$	${}^{16}\text{O}$
$E_0, \text{Мэв}$	16,98	26,11	40,09	39,16	44	57,8	88,6	70,63	96,5	115,6	142,4
$r_0, \text{ферми}$	2,12	2,05	2,1	2,19	2,25	2,22	2,27	2,26	2,17	2,15	2,13
$\Delta E_{10}, \text{Мэв}$	15,42	16,47	19,42	18,36	18,2	19,7	23,3	20,28	22,8	23,9	29
$\Delta E_{21}, \text{Мэв}$	—	—	12,59	12,1	13,5	15,4	19,3	16,55	18,7	21,4	23
$K_0, \text{Мэв}$	24,77	26,33	38,45	37,38	38,77	44,22	66,68	48,57	56,6	61,05	88,22
$K_1, \text{Мэв}$	—	—	16,16	16,23	21,33	27,02	44,38	32,34	38,07	48,94	55,5
K_1/K_0	—	—	0,43	0,43	0,55	0,61	0,69	0,66	0,67	0,8	0,63

таты расчета приведены в табл. 6, где даны значения параметра сжимаемости для основного состояния K_0 , а также параметра сжимаемости для первого возбужденного состояния K_1 . Из этой таблицы видно, что параметр сжимаемости увеличивается с ростом числа A внутри p -оболочки примерно в 3,5 раза. С ростом энергии возбуждения для данного ядра параметр сжимаемости уменьшается в ряде случаев весьма значительно, причем для разных A по-разному. На α -кластерных ядрах этот параметр испытывает аномальное увеличение по сравнению со значениями для соседних ядер. Зависимость параметра сжимаемости от энергии возбуждения, от квантовых чисел состояния и от потенциалов демонстрируется на примере ядра ${}^{16}\text{O}$ в табл. 7. Из нее видно,

Таблица 7

Зависимость результатов расчета параметра сжимаемости в методе K -гармоник от энергии возбуждения, квантовых чисел состояния и выбора потенциала на примере ядра ${}^{16}\text{O}$

Параметр	$J\pi = 0^+, \text{потен-}$ циал 1	$J\pi = 1^-, \text{потен-}$ циал 1	$J\pi = 1^-, \text{потен-}$ циал 2	Параметр	$J\pi = 0^+, \text{потен-}$ циал 1	$J\pi = 1^-, \text{потен-}$ циал 1	$J\pi = 1^-, \text{потен-}$ циал 2
	$E_0, \text{Мэв}$	142,4	110,3		121,5	$\Delta E_{32}, \text{Мэв}$	20
$r_0, \text{ферми}$	2,13	2,31	2,26	$K_0, \text{Мэв}$	88,22	65,83	56,64
$\Delta E_{10}, \text{Мэв}$	29	23,1	21,9	$K_1, \text{Мэв}$	55,5	51,34	43,08
$\Delta E_{21}, \text{Мэв}$	23	20,4	19,1	$K_2, \text{Мэв}$	41,96	38,65	34,9

что жесткость зависит от квантовых чисел состояния даже в том случае, когда энергии этих состояний практически совпадают. Наблюдается некоторая зависимость сжимаемости ядра от выбора параметров парного нуклон-нуклонного взаимодействия, однако

различие результатов для разных вариантов взаимодействия уменьшается с ростом энергии возбуждения.

К теме данного обзора непосредственно примыкает еще один вопрос: о связи метода K -гармоник и метода генераторных координат. Он интересен в связи с тем, что, как показано в работе [55], с помощью генераторных координат можно сформулировать подход, с одной стороны, полностью эквивалентный методу K -гармоник, а с другой стороны, удобный тем, что вычисления в нем проводятся целиком с помощью стандартного вычислительного математического аппарата модели оболочек: ни на одном из этапов расчета не приходится использовать многомерные сферические координаты.

8. СВЯЗЬ МЕТОДА К-ГАРМОНИК С МЕТОДОМ ГЕНЕРАТОРНЫХ КООРДИНАТ

Генераторная формулировка метода K -гармоник. Запишем функцию метода K -гармоник (113) в генераторной форме, используя в качестве генераторной координаты параметр α (или, что то же самое, радиус осциллятора r_0):

$$\Psi_{K_0}(r_1 \dots r_A, \sigma_i \tau_i) = \int_0^{\infty} d\alpha f_{K\nu}(\alpha) |AKK\nu\rangle_{\alpha}. \quad (128)$$

Это равенство означает, что мы разложили волновую функцию метода K -гармоник в интеграл по осцилляторным оболочечным функциям с разными радиусами или частотами. Какой смысл имеет запись (128) и когда она возможна? Используя явный вид волновой функции $\Psi_{K\nu}$ в методе K -гармоник (113), получаем выражение для радиальной части волновой функции:

$$\varphi_{K\nu}(\rho) = \int f_{K\nu}(\alpha) \exp(-\alpha\rho^2) \rho^K d\alpha, \quad (129)$$

т. е. переход к генераторной форме волновой функции означает просто представление функции $\varphi_{K\nu} \rho^{-K}$ в виде интеграла Лапласа. Если мы рассматриваем связанные состояния и функция $\varphi_{K\nu}(\rho)$ убывает на бесконечности, то такое представление возможно. Отсюда ясно, что генераторная процедура эквивалентна методу K -гармоник (по крайней мере, для связанных состояний) и сущность такой процедуры заключается в замене неизвестных радиальных функций метода K -гармоник их лапласовскими оригиналами $f_{K\nu}(\alpha)$.

Для этих новых неизвестных функций можно написать уравнение движения, вытекающее из уравнения Шредингера для функции (113). Это будет обычная система связанных интегральных уравнений типа Хилла — Уилера метода генераторных коор-

динат [5]:

$$\sum_{K\nu} \int d\alpha f_{K\nu}(\alpha) [H_{K'\nu', K\nu}(\alpha', \alpha) - \delta_{K\nu, K'\nu'} I_{K\nu}(\alpha, \alpha') E] = 0, \quad (130)$$

где

$$H_{K'\nu', K\nu}(\alpha', \alpha) = \langle AN = K'K'\nu' | H | AN = KK\nu \rangle_{\alpha'\alpha} \quad (131)$$

есть матричный элемент гамильтониана H по оболочечным волновым функциям с разными осцилляторными радиусами $r'_0 = \sqrt{2/\alpha'}$ (в левой части матричного элемента) и $r_0 = \sqrt{2/\alpha}$ (в правой части этого элемента). Интеграл перекрывания

$$I_{K\nu}(\alpha, \alpha') = \langle AN' = KK\nu | AN = KK\nu \rangle_{\alpha'\alpha} \quad (132)$$

отличен от нуля и единицы, ибо оболочечные функции с разными r_0 неортогональны друг другу. Только при $\alpha' = \alpha$ $I_{K\nu}(\alpha, \alpha) = 1$. Итак, выражения (128) и (129) можно рассматривать как разложение радиальной волновой функции метода K -гармоник по системе неортогональных волновых функций гауссова типа или как разложение полной гармоники с фиксированными значениями K, ν по оболочечным функциям с теми же $K\nu$ и разными радиусами r_0 .

Вместо системы дифференциальных уравнений для $\phi_{K\nu}(\rho)$ получим систему интегральных уравнений (130). Примечательно, что в этих уравнениях совершенно не фигурируют многомерные сферические координаты, а входят в них только матричные элементы (131), (132) по оболочечным волновым функциям. Правда, платой за это удобство является то, что используется неортогональная система функций. В работе [55] показано, что это не вносит каких-либо существенных трудностей; приведены рабочие формулы для расчета интегралов $I_{K\nu}(\alpha, \alpha')$, $H_{K'\nu', K\nu}(\alpha, \alpha')$ для ядер p -оболочки в приближении $K_{\text{мин}}$. Заметим также, что волновые функции (128) и (130) буквально совпадают с соответствующими выражениями работ [56], в которых рассматривались монополярные колебания в ядре ^{16}O . В этих работах волновая функция ядра аппроксимировалась лишь одной функцией (128), отвечающей нижней оболочечной конфигурации s^4p^{12} , т. е. этот расчет соответствовал приближению $K_{\text{мин}}$ метода K -гармоник.

В литературе [56, 57] разработаны интересные приближенные способы решения уравнений типа (130), относящиеся к тому случаю, когда интеграл перекрывания с хорошей точностью можно представить в виде гауссовой функции $I(\alpha, \alpha') \sim \exp[E(\alpha - \alpha')^2]$. В работе [56] сделан несколько иной выбор монополярной генераторной координаты и показано, что в этом случае гауссова аппроксимация интеграла перекрывания справедлива с очень высокой точностью. Тем самым имеются безусловные предпосылки для

того, чтобы исследовать методы решения, предложенные в работах [56, 57]. Более того, рассмотрение этого вопроса представляет значительный интерес, поскольку, как показано в работе [57], гауссова аппроксимация интеграла перекрытия естественным образом приводит к приближению случайных фаз. Следовательно, открывается возможность проследить связь между большим числом разнообразных методов современной теории ядра.

Однако не будем сейчас рассматривать эту интересную возможность, а воспользуемся стандартной процедурой решения интегральных уравнений, при которой интеграл по переменной α заменяется конечной суммой по дискретным значениям α_i (или r_{0i}):

$$\Psi_{K\nu}(r_1 \dots r_A, \sigma_j \tau_j) = \sum_{i=1}^n C_{K\nu}(i) \Phi_{K\nu}(\alpha_i). \quad (133)$$

Тогда значения коэффициентов $C_{K\nu}(i)$ в этих точках находятся из системы алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^n C_{K\nu}(i) [H_{K'\nu', K\nu}(\alpha_j, \alpha_i) - I_{K\nu}(\alpha_j, \alpha_i) E] = 0, \quad (134)$$

где $j = 1, 2, \dots, n$. Для простоты в (134) мы ограничились учетом только одного значения $K\nu$ в (128).

Для обобщения на случай нескольких наборов $K\nu$, очевидно, нужно просто ввести для каждого набора квантовых чисел свое n , определяющее количество учитываемых членов в квадратурной формуле (133) для этих значений $K\nu$, и записать систему уравнений для коэффициентов $C_{K\nu}(i)$, в которую войдут также недиагональные по $K\nu$ матричные элементы гамильтониана H . Значение энергии основного состояния $E_0^{(n)}$ определяется низшим корнем секулярного уравнения

$$\det |H_{K\nu, K\nu}(\alpha_j, \alpha_i) - EI_{K\nu}(\alpha_j, \alpha_i)| = 0. \quad (135)$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$

Из теории интегральных уравнений Фредгольма известно, что при увеличении n низший корень этого уравнения равномерно сходится к точному собственному значению уравнения (130), а приближенная волновая функция (133) — к истинной собственной функции основного состояния. Вопрос заключается только в скорости сходимости. Последняя существенным образом зависит от выбора значений параметра α_i .

Для определения оптимальных значений параметров α_i можно воспользоваться вариационным принципом и выбрать параметры $\alpha_1 \dots \alpha_n$ из условия минимума собственного значения детерминанта (136).

Итак, процедура расчета такова:

1. Строят оболочечные волновые функции $|ANK\nu\rangle_\alpha$ с осцилляторным параметром α .

2. Вычисляют матричные элементы $H_{K'\nu', K\nu}(\alpha', \alpha)$, $I_{K\nu}(\alpha', \alpha)$ по этим функциям с разными параметрами осциллятора α , α' .

3. Задают значения n в формуле (133) для каждого из учитываемых значений $K\nu$ и вычисляют матрицу секулярного уравнения (135).

4. Находят низшее решение этого секулярного уравнения и минимизируют его по параметрам α_i .

5. После того как оптимальные параметры α_i найдены и определены корни секулярного уравнения, можно найти коэффициенты $C_{K\nu}(i)$, а вместе с ними приближенные волновые функции (133).

Сходимость по n разложения (133) детально изучалась в задачах по квантовой химии для разложения по гауссоидам слэтеровских или хартри-фоковских атомных орбиталей [58, 59]. Опыт расчетов показывает, что достаточно учесть 3—6 гауссоид, чтобы добиться хорошей точности различных физических величин. Можно думать, что в ядерных задачах сходимость будет не хуже, чем в атомных. Что касается сходимости по квантовым числам K , ν , то здесь ситуация та же самая, что и в обычном методе K -гармоник.

6. Те же вычисления повторяют с увеличенным числом учитываемых членов и т. д., пока не будут получены устойчивое значение энергии основного состояния (или интересующего нас возбужденного состояния) и практически не меняющаяся волновая функция, которую в дальнейшем можно будет использовать для расчета различных свойств ядер.

Количественная проверка генераторной версии метода K -гармоник. Для практической проверки работоспособности описанного выше подхода был повторен расчет Ю. А. Симонова и А. М. Бадалян [2] для ядра ${}^3\text{H}$ с нуклон-нуклонными силами в виде прямоугольной ямы. Вычисления проводились с учетом в волновой функции только членов с $K = 0$ и 2, которые согласно [2] дают главный вклад в решение. Параметры потенциала были взяты те же, что и в работах [62]: $V_S = -13,639 \text{ Мэв}$, $R_S = 2,583 \text{ ферми}$, $V_T = -35,303 \text{ Мэв}$, $R_T = 2,043 \text{ ферми}$. Взаимодействием в нечетных состояниях пренебрегали. Использовались волновые функции ТИМО, а именно значению $K = 0$ ставилась в соответствие функция ТИМО вида $|A = 3 \ N = 0 \ [3] \ L = 0 \ S = 1/2 \ T = 1/2\rangle$, а для $K = 2$ бралась функция $|A = 3 \ N = 2 \ [21] \ L = 0 \ S = 1/2 \ T = 1/2\rangle$; генеалогические коэффициенты для них приведены в работах [10, 33, 60].

Неортогональность волновых функций вносит лишь минимальные изменения в технику вычислений в ТИМО. Так, напри-

мер, матричные элементы центральных сил $V = \sum_{i < j} V_{ij}$ вычисляются по следующей формуле:

$$\begin{aligned} & \langle A=3 N' [f'] LST | \sum V_{ij} | A=3 N [f] LST \rangle_{\alpha' \alpha} = \\ & = 3 \sum_{vv' \Delta n n' l S_0 T_0} \langle A=3 N' [f'] LST | A=2 v' \Lambda S_0 T_0, n' l \rangle \times \\ & \times \langle A=3 N [f] LST | A=2 v \Lambda S_0 T_0, n l \rangle I_{n', n}^l(\alpha' \alpha) \times \\ & \times V_{v' v}^{\Lambda S_0 T_0}(\alpha', \alpha) B_{S_0 T_0}, \end{aligned} \quad (136)$$

где

$$I_{n', n}^l(\alpha', \alpha) = \int R_{n' l}(r/r'_0) R_{n l}(r/r_0) r^2 dr \quad (137)$$

— интеграл перекрыwania волновых функций трехмерного осциллятора с разными радиусами r'_0 и r_0 ;

$$V_{v' v}^{\Lambda S_0 T_0} = \int R_{v' \Lambda}(r_{12}) V_{12} R_{v \Lambda}(r_{12}) r^2 dr \quad (138)$$

— двухчастичный матричный элемент взаимодействия; $B_{S_0 T_0}$ — обычные спин-изоспиновые множители. Интеграл перекрыwania $I(\alpha', \alpha)$ вычисляется по (136) (нужно учесть, что он диагонален по K), в которой нужно заменить множитель $V_{v' v}^{\Lambda S_0 T_0}(\alpha' \alpha)$ на $I_{v' v}^{\Lambda}(\alpha', \alpha)$.

Для того чтобы проследить сходимость разложения по гауссоидам, были выполнены вычисления для нескольких вариантов значений n_0 (число учтенных функций с $K=0$) и n_2 (количество гауссоид в разложении компоненты с $K=2$). Результаты расчета энергии связи ${}^3\text{H}$, волновых функций и среднеквадратических радиусов основного состояния этого ядра приведены в табл. 8.

Таблица 8

Результаты расчета энергии связи ${}^3\text{H}$ волновых функций среднеквадратических радиусов основного состояния этого ядра

Количество функций		r_{K_i}	C_{KU}	$E_{св}$	$\langle r^2 \rangle$	Количество функций		r_{K_i}	C_{KU}	$E_{св}$	$\langle r^2 \rangle$
$K=0$	$K=2$					$K=0$	$K=2$				
1	—	1,36	1	-5,96	1,85	1	1	1,36	—	-6,85	—
		1,17	0,59					1,78			
2	—	2,11	0,49	-7,35	2,35	2	1	1,16	0,61	-8,12	2,60
		1,12	0,51					2,08	0,46		
		1,78	0,47					1,75	0,15		
3	—	2,86	0,18	-7,38	2,53	2	2	1,16	0,62	-8,19	2,70
		—	—					2,08	0,46		
								1,48	0,10		
								2,62	0,10		

В третьем столбце этой таблицы вместо значений параметров гауссоид α_i^K , найденных с помощью минимизации, даны эквивалентные им значения радиусов осциллятора $r_{K_i} = \sqrt{2/\alpha_i^K}$.

Если вспомнить, что точный расчет по методу K -гармоник при учете только гармоники с $K = 0$ дает результат для энергии

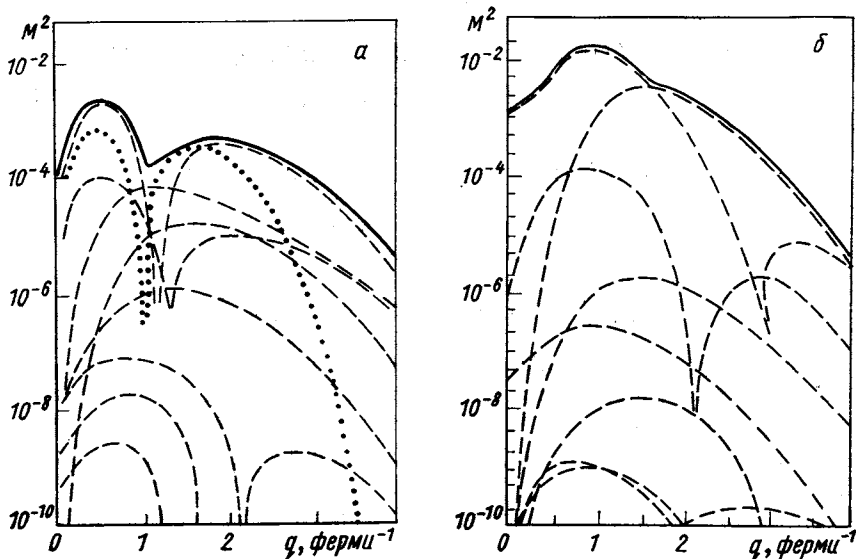


Рис. 10. Волновые функции ядра ${}^3\text{H}$ в методе генераторных координат:
 а — функция $\Psi_{K=0}(\rho)$. Кривые получены с учетом соответственно одного, двух и трех слагаемых в разложении (39). Состояние с $K=2$ не учитывается;
 б — функции $\chi_{K=0}(\rho)$ и $\chi_{K=2}(\rho)$. Кривые 1а) и 1б) получены при учете двух членов с $K=0$ и двух членов с $K=2$

связи $E_{\text{св}} = -7,375 - 7,5 \text{ Мэв}$, а при учете гармоники с $K = 2$ $E_{\text{св}} = -8,094 - 8,125 \text{ Мэв}$, то сходимость разложения по гауссоидам довольно хорошая. Значение энергии связи, совпадающее с точным расчетом до второго знака после запятой, получается уже при учете двух-трех гауссоид для каждого значения K . Отчетливо прослеживается быстрое насыщение энергии связи при увеличении значений n_0, n_2 . Хорошая точность получается и для среднеквадратического радиуса ядра (последний результат следует сравнивать с результатом $2,11 \text{ ферми} = \langle r_0^2 \rangle$ из работы [2], а не с зарядовым радиусом ядра ${}^3\text{H}$, в который входит также радиус распределения заряда в протоне).

Из рис. 10, а, б видно, что переход от $n_0 = 1$ к $n_0 = 2$ резко изменяет волновую функцию $\chi_{K\nu}(\rho) = \rho\Phi_{K\nu}(\rho)$ с $K = 0$. Дальнейшее же увеличение n_0 , практически не меняя формы волновой функции, только улучшает ее асимптотику. Полученная нами

функция $\chi_{00}(\rho)$ хорошо согласуется с результатом точного расчета [1].

Менее точной оказывается функция $\chi_{K=2}(\rho)$, у которой максимум несколько смещен вправо по сравнению с соответствующей функцией работы [1]. Переход от $n_2 = 1$ к $n_2 = 2$ улучшает функцию $\chi_{K=2}(\rho)$, но все еще не приводит к полному согласию с точным решением. Впрочем, это естественно, ибо $\chi_{K=2}(\rho)$ представляет собой малую добавку к волновой функции ${}^3\text{H}$, и, следовательно, относительная точность, с которой она вычисляется, должна быть более низкой, чем для функции χ_0 в том же приближении. Однако эти дефекты функции χ_2 , как мы видим, слабо сказываются на значениях $E_{\text{св}}$ и $\langle r^2 \rangle$, которые практически совпадают с точными.

Итак, результаты показывают, что сходимость разложения по гауссоидам (136) радиальных функций метода К-гармоник хорошая. Эти функции можно аппроксимировать с достаточно высокой точностью набором трех-четырех гауссоид для каждого значения K, ν . Если вспомнить, что при разложении функций ${}^3\text{H}$ по набору ортогональных осцилляторных функций для получения такого же значения энергии связи потребовалось учесть шесть — восемь компонент [61] вместо наших четырех, то можно заключить, что использованный нами метод по числу членов разложения, которые играют главную роль в волновой функции ядра, занимает промежуточное положение между методом К-гармоник и разложением по ортогональному осцилляторному базису. Удобство этого подхода заключается в том, что с его помощью удается полностью исключить из расчета многомерные сферические координаты и в то же время отпадает необходимость строить большое число волновых функций ортогонального набора, количество и сложность которых быстро нарастают с увеличением числа квантов N . В разложение (139) входят функции абсолютно одинаковой структуры, отличающиеся друг от друга только радиусом осциллятора. Неортогональность этих функций не вносит каких-либо осложнений. Особенно удобен такой подход для проведения расчетов в приближении, учитывающем только гармоника с $K = K_{\text{мин}}$. Недавно метод разложения волновой функции по гауссоидам был успешно применен к задаче трех-четырех тел [63]. Хорошее соответствие результатов, получаемых по методу К-гармоник и методу генераторных координат, было подтверждено на примере ядер ${}^{16}\text{O}$ и ${}^{40}\text{Ca}$ в работе [64].

Итак, выше мы рассмотрели ряд вопросов, касающихся метода К-гармоник в сравнении с моделью оболочек и другими методами теории ядра. Такое сопоставление позволяет понять место этого метода среди других микроскопических подходов в теории ядра. Ясно, что метод К-гармоник в принципе более гибкий и более точный, чем простая модель оболочек, ибо конструкция оболочечной

функции жесткая и в ней имеется, по-существу, только один варьируемый параметр — частота осциллятора $\hbar\omega$. В методе K -гармоник одна из степеней свободы — гиперрадиус ρ — является «размороженной», волновая функция для этой степени свободы находится из уравнения Шредингера, т. е. отвечает абсолютному минимуму энергии по этой степени свободы, что позволяет получить лучшие результаты, чем по модели оболочек. Правда, как показывают оценки, количественно такой выигрыш в энергии для основного состояния оказывается невелик и результаты близки к модели оболочек. Однако для возбужденных состояний ситуация иная и в области монополюльных гигантских резонансов качество метода K -гармоник должно быть значительно выше, чем модели оболочек. Говоря о достоинствах метода K -гармоник, нельзя не упомянуть о применении метода в области непрерывного спектра, где он оказался очень ценным, например, при рассмотрении многочастичных резонансов [65], при формулировке асимптотических граничных условий для ядерных реакций с образованием трех и более частиц [66], а также при развитии интерполяционного подхода к теории ядерных реакций с участием кластеров [67]. В целом тенденция «размораживания» отдельных степеней свободы ядра, которая проявляется при переходе от модели оболочек к методу K -гармоник, является весьма своевременной и прогрессивной. Она нашла свое дальнейшее развитие в методе обобщенных гиперсферических функций [68]. В последнем освобожденными оказываются уже три коллективные степени свободы (ρ -, β - и γ -колебания). обстоятельное изложение и анализ этого метода содержатся в обзорах [69].

Авторы благодарны В. В. Ванасагу, И. Н. Михайлову, В. Г. Неудачину, Я. А. Смородинскому, Г. Ф. Филиппову, В. Д. Эфросу, многочисленные обсуждения с которыми оказали существенную помощь в написании обзора, а также В. М. Жукову и В. А. Кныру, в совместных работах с которыми были получены некоторые результаты, вошедшие в обзор.

Примечание при корр.

В дополнение к разд. 6 можно указать еще одну интересную возможность получения точных выражений для потенциалов $W_{Kv}^{K'v}(\rho)$, описанную в работах [70, 71]. С помощью обратного преобразования Лапласа авторы сводят вычисление этих потенциалов к нахождению интегралов типа Тальми

$$\int_0^{\rho} r^{2p+2}(\rho^2 - r^2)^{(K+K'+1)/2-p} V(\sqrt{2}r) dr$$

от двухчастичного нуклон-нуклонного взаимодействия $V(\sqrt{2}r)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Симонов Ю. А. «Ядерная физика», 1966, т. 3, с. 630; 1968, т. 7, с. 1210.
2. Бадалян А. М., Симонов Ю. А. «Ядерная физика», 1966, т. 3, с. 1032; 1967, т. 5, с. 88.
3. Бадалян А. М., Симонов Ю. А. «Ядерная физика», 1969, т. 9, с. 69.
4. Базь А. И. и др. «ЭЧАЯ», 1972, т. 3, вып. 2.
5. Клепиков Н. П. «Ядерная физика», 1974, т. 19, с. 462.
6. Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А. «Ядерная физика», 1975, т. 21, с. 1136.
7. Ванагас В. В., Левинсон И. Б., Юцис А. П. Математический аппарат теории момента количества движения. Вильнюс, «Минтис», 1960; Юцис А. П., Бандзайтис А. А. Теория момента количества движения в квантовой механике. Вильнюс, «Минтис», 1965.
8. Румтас П. Д., Бандзайтис А. А., Юцис А. П. «Лит. физ. сборник», 1965, т. 5, с. 197.
9. Smith F. T. «Phys. Rev.», 1960, v. 120, p. 1058.
10. Неудачин В. Г., Смирнов Ю. Ф. Нуклонные ассоциации в легких ядрах. М., «Наука», 1969.
11. Kurdyumov I. V. et al. «Nucl. Phys.», 1970, v. 145, p. 593.
12. Smirnov Yu. F. «Nucl. Phys.», 1961, v. 27, p. 177.
13. Horie H. «J. Phys. Soc. Japan», 1964, v. 19, p. 1783.
14. Verhaar B. F. «Physica», 1960, v. 26, p. 1045.
15. Ванагас В. В. Алгебраические методы в теории ядра. Вильнюс, «Минтис», 1970.
16. Эдмонде А. Угловые моменты в квантовой механике. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
17. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., «Наука», 1965.
18. Виленкин Н. Я., Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А. «Ядерная физика», 1965, т. 2, с. 906.
19. Гельфанд И. М., Петлин М. Я. «Докл. АН СССР», 1950, т. 71, с. 1070.
20. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М., Физматгиз, 1968.
21. Норвайшас Э. З., Алишаускас С. И. «Лит. физ. сборник», 1974, т. 14, с. 715.
22. Кильдюшов М. С. «Ядерная физика», 1972, т. 15, с. 197.
23. Някифоров А. Ф., Уваров В. Б. Основы теории специальных функций. М., «Наука», 1974.
24. Кампе Ж. и др. Функции математической физики. Пер. с англ. М., Физматгиз, 1963.
25. Кныр В. А. и др. «Ядерная физика», 1975, т. 22, с. 1063.
26. Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А. «Письма в ЖЭТФ», 1975.
27. Moshinsky M., Quesne C. «J. Math. Phys.», 1970, v. 11, p. 1631.
28. Shapiro J. «J. Math. Phys.», 1965, v. 6, p. 1680.
29. Chacon E. et al. «J. Math. Phys.», 1976, v. 17, p. 900; Rasmussen W. «J. Phys. A», (1975), v. 8, p. 1038.
30. Raynal J., Revai J. «Nuovo cimento», 1970, v. 68, p. 612.
31. Смородинский Я. А., Эфрос В. Д. «Ядерная физика», 1973, т. 17, с. 210.
32. Джибути Р. И., Томчинский В. Ю., Шубитидзе Н. И. «Ядерная физика», 1975, т. 18, с. 1164.
33. Каплан И. Г. Симметрия многоэлектронных систем. М., «Наука», 1969.
34. Курдюмов И. В., Смирнов Ю. Ф., Шитикова К. В. «Теор. матем. физ.», 1971, т. 7, с. 45.
35. Ванагас В. В., Петраускас А. К., Янкаускас К. И. «Ядерная физика», 1971, т. 14, с. 724.

36. Эллиот Дж., Лейн А. М. Строение атомного ядра. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1959; Мошинский М. М. Гармонический осциллятор в современной физике. Пер. с англ. М., «Мир», 1972.
37. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
38. Рыбаченко В. Ф., Садовой А. А. «Ядерная физика», 1970, т. 12, с. 710.
39. Ерохин К. М., Орлова Н. В., Смирнов Ю. Ф., Шитикова К. В. «Ядерная физика», 1975, т. 22, с. 1102.
40. Садовой А. А. «Ядерная физика», 1975, т. 22, с. 65.
41. Volkov A. V., «Nucl. Phys.», 1965, v. 74, p. 33.
42. Kurath D. «Phys. Rev.», 1952, v. 88, p. 804.
43. Кравцов В. А. Массы атомов и энергии связи ядер. М., Атомиздат, 1965.
44. Жуков М. В., Журина М. И., Шитикова К. В. «Ядерная физика», 1973, т. 17, с. 1191.
45. Eikemeier H., Nakenbroich H. «Z. Phys.», 1966, Bd 195, s. 412.
46. Комар А. П., Денисов В. П., Кульчицкий Л. А. «Докл. АН СССР», 1966, т. 169, с. 1307.
47. Walker G. E. «Phys. Rev.», 1968, v. 174, p. 1290.
48. Гончарова Н. Г., Мулей М., Шитикова К. В. «J. Phys.» (в печати).
49. Sotona M., Zofka J. «Nuovo Cimento», 1974, v. 9, p. 261.
50. Dubovoy M., Flores J. «Rev. Mex. Fis.» 1968, v. 17, p. 289.
51. Майлинг Л. и др. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 1976.
52. Satchler G. R. «Phys. Reports», 1974, v. 14, p. 97.
53. Sotona M., Zofka J. «Phys. Lett. B», 1975, v. 57, p. 27.
54. Жуков М. В., Шитикова К. В. «Phys. Lett.» (в печати).
55. Обуховский И. Т. и др. «Ядерная физика», 1973, т. 17, с. 742.
56. Griffin J. J., Wheeler J. A. «Phys. Rev.», 1957, v. 108, p. 311; «Phys. Rev.», 1957, v. 108, p. 329.
57. Brink D. M., Weiguny A. «Nucl. Phys. A», 1968, v. 120, p. 59.
58. Boys S. F. «Proc. Roy. Soc. A», 1950, v. 200, p. 592.
59. Hujinaga S. «J. Chem. Phys.», 1965, v. 42, p. 1293.
60. Смирнов Ю. Ф., Шитикова К. В. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 1963, т. 27, с. 1442.
61. Мачарадзе Т. С., Михалашвили Т. Я. «Ядерная физика», 1971, т. 13, с. 981.
62. Jackson A. D., Lande A., Sauer P. U. «Nucl. Phys. A», 1970, v. 156, p. 1; Хюльтен Л., Сугавара М. В кн.: Строение атомного ядра. Ч. I. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
63. Кукулин В. И., Краснопольский В. М. «Ядерная физика», 1975, т. 22, с. 1110.
64. Novarro J. «Phys. Lett. B», 1975, v. 59, p. 13.
65. Бадалян А. М., Симонов Ю. А. «Ядерная физика», 1973, т. 17, с. 441; 1973, т. 18, с. 73.
66. Меркулов С. П. «Ядерная физика», 1974, т. 2, с. 447.
67. Базь А. И., Жуков М. В. «Ядерная физика», 1972, т. 16, с. 60.
68. Дзюблик А. Я. и др. Препринт ИТФ-71-134Р. Киев, 1971; «Ядерная физика», 1972, т. 15, с. 869; Степенко А. И., Филиппов Г. Ф. Препринт ИТФ-72-66Р. Киев, 1972; Дзюблик А. Я. Препринт ИТФ-71-127Р. Киев, 1971; Филиппов Г. Ф. Препринт ИТФ-74-14Р. Киев, 1974.
69. Филиппов Г. Ф. «ЭЧАЯ», 1973, т. 4, вып. 4, с. 992.
70. Chason E., Levi D., Moshinsky M. «Rev. Mexicana Fis.», 1973, v. 22, p. 291.
71. Levi D., Moshinsky M. «Nuovo cimento», 1974, v. 20, p. 107.