

МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ФУНКЦИЯМ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ В ЗАДАЧАХ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Е. Банг,

Институт Нильса Бора, г. Копенгаген

Ф. А. Гареев, С. П. Иванова

Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна

Обсуждается разложение форм-факторов одно- и двухнуклонных реакций передач по функциям Штурма — Лиувилля, соответствующим потенциалу Саксона — Вудса. Выясняются математические вопросы полноты и сходимости разложения для $r \rightarrow \infty$. Излагается кратко теория прямых реакций передач нуклонов, причем специально выделяется роль форм-фактора.

Обсуждается ряд примеров применения метода как для одночастичных передач на деформированные ядра, так и для двухчастичных передач на сферические ядра. Сделано сравнение с точным выражением для асимптотического поведения форм-факторов и с другими методами расчетов, показано преимущество метода разложения по функциям Штурма — Лиувилля.

The expansion of one- and two-particle transfer form-factors on Sturm — Liouville functions, corresponding to a Woods—Saxon well is reviewed. Mathematical questions of completeness and convergence are discussed, particularly for the region at the nuclear surface and beyond that. The theories of direct nucleon transfer reactions are considered, with special emphasis on the role of the form-factors.

A number of examples of application of the method are reviewed, covering one particle transfer to deformed nuclei and two particle transfer to spherical nuclei etc. Some comparisons with other methods of calculation, and with exact expressions for the asymptotic behaviour of the form-factors are made, showing the advantages of the Sturm—Liouville expansion method.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время метод разложения волновых функций уравнения Шредингера по базисным функциям Штурма — Лиувилля широко применяется в задачах атомной [1—8] и ядерной физики [9—18]. Поэтому необходимо детальное обсуждение тех свойств разложений, которые особенно полезны в практических вычислениях.

В математической физике выражение «проблема Штурма — Лиувилля» применяется для широкого класса задач на собствен-

ные значения:

$$-\Delta f_i + \sum_s \lambda_{i,s} V_s f_i = 0, \quad (1)$$

где f_i удовлетворяют определенным граничным условиям, причем задача может быть многомерной или, более того, ее можно рассмотреть в бесконечной области. Коэффициент V_s при собственном значении $\lambda_{i,s}$ зависит от выбора системы координат, и задача Штурма — Лиувилля состоит в определении $\lambda_{i,s}$, если V_s зависит от обычных «физических» координат. В одномерном случае можно всегда привести проблему собственных значений к такому виду, что $V_s = 1$. Однако это связано с введением новых дополнительных координат, усложняющих задачу.

В этом обзоре рассмотрим применение метода разложения волновых функций уравнения Шредингера по базисным функциям Штурма — Лиувилля в некоторых задачах ядерной физики. Полезность функций Штурма — Лиувилля в квантовой механике тесно связана с некоторыми физическими фактами. Все известные потенциалы взаимодействия между частицами имеют конечный радиус действия. Это означает, что уравнение Шредингера, которое описывает движение частиц, взаимодействующих с такими силами, будет иметь непрерывный и, возможно, дискретный спектр (связанные состояния).

Далее, мы очень часто сталкиваемся со случаем, когда функции, являющиеся собственными функциями сложной проблемы, можно представить в виде разложений по собственным базисным функциям более простой задачи. Если эти базисные функции являются решениями уравнения Шредингера, то необходимо в общем случае включить и функции сплошного спектра, ибо только тогда можно гарантировать полноту системы функций. Практически удобно работать с базисными функциями, имеющими только дискретный спектр, например с осцилляторными функциями или же с функциями прямоугольной ямы с бесконечными стенками. Однако нефизичность этих потенциалов приводит к трудностям, связанным с плохой сходимостью полученных рядов в некоторых областях пространства.

В общем, можно сказать, что если физическая задача решается с использованием метода разложения по полной системе функций, то сходимость будет наилучшей, когда наши базисные функции, или хотя бы некоторые из них, будут близки к физическим функциям, т. е. если базисные функции являются решениями уравнений того же типа. В этом смысле метод Штурма — Лиувилля имеет определенные преимущества, так как он позволяет найти функции Штурма — Лиувилля с дискретным набором квантовых чисел, разложения по которым удовлетворяют условиям быстрой сходимости (например, равномерной логарифмической сходимости, определенной в разд. 2).

Метод разложения по функциям Штурма — Лиувилля впервые был введен в квантовой механике Эпштейном [1] для описания штарк-эффекта сразу же после работы Шредингера. Целью работы было получение простого разложения, причем базисные функции были решениями уравнения Шредингера для атома водорода с фиксированной энергией и варьируемыми зарядами:

$$\left(-\Delta + \frac{2m}{\hbar^2} \left[\frac{z_i e^2}{r} - \varepsilon \right] \right) f_i = 0. \quad (2)$$

Ситуация упрощается благодаря тому, что собственные функции имеют аналитический вид. Этот пример интересен, поскольку потенциал сингулярен в нуле и имеет большой радиус действия.

Мы, в основном, будем иметь дело с потенциалом Саксона — Вудса, являющимся хорошим приближением к потенциалу нуклон-ядерного взаимодействия, т. е. будем рассматривать уравнения типа

$$\left. \begin{aligned} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_0 + \lambda_i V - \varepsilon \right) f_i &= 0; \\ V &= -(1 + \exp [(r - R)/a])^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где V_0 может включать спин-орбитальное, кулоновское взаимодействие и т. д. Основные свойства потенциала, делающие его удобным для проблем ядерной физики, состоят в том, что он имеет конечный радиус действия, почти постоянен во внутренней области и изменяется плавно в определенной поверхностной области порядка a . Он не имеет сингулярностей и отличен от нуля во всем пространстве, что весьма полезно для наших дальнейших исследований.

Цель данного обзора — обсудить асимптотическое поведение волновых функций, описывающих связанные состояния и амплитуды реакций передач; выяснить, в каких случаях особенно важен учет правильной асимптотики; дать метод получения корректных волновых функций при $r \rightarrow \infty$ для различных случаев реакций.

В последующих разделах введем форм-факторы (интегралы перекрытия ядерных волновых функций) и обсудим их связь с волновыми функциями, полученными в расчетах структуры ядра (разд. 1). Затем рассмотрим подробно свойства сходимости разложения Штурма — Лиувилля (разд. 2). В частности, обсудим разложение форм-фактора по собственным функциям уравнения (3), которые особенно интересны для нас.

Наиболее важными являются вопросы сходимости разложения на больших расстояниях. Они обсуждаются в разд. 3, где кратко приводятся результаты различных методов описания ядерных реакций, обращается особое внимание на роль форм-факторов.

Заметим, что невозможно полностью различить эффект введения более точных форм-факторов и эффекты корректного рассмотрения механизма реакций. Это продемонстрировано в разд. 4, где рассмотрены форм-факторы передач на деформированные ядра, причем специально изучен случай $\Delta N = \pm 2$ смешивания.

В разд. 5 будем рассматривать реакции передач на сферические ядра и обсуждать, в частности, вычисления форм-факторов двухнуклонных реакций передач, которые в последнее время привлекают много внимания; особенно интересны передачи в реакциях с тяжелыми ионами.

1. ФОРМ-ФАКТОРЫ РЕАКЦИЙ ПЕРЕДАЧ

Обсуждаемые здесь вопросы связаны с вычислением стационарных волновых функций состояний ядра. Причем эти функции необходимо вычислить с такой точностью при $r \rightarrow \infty$, чтобы их можно было применять в расчетах сечений прямых реакций передач.

Как известно, ядерные реакции передач происходят в поперечной области ядра, и в зависимости от конкретной реакции можно указать достаточно точно интервал расстояний, важный для данного процесса. Например, в реакциях подбарьерного протонного срыва этот интервал простирается от одного до четырех-пяти радиусов ядра. Плотности нуклонов в ядре малы на этих расстояниях, и поэтому неудивительно, что в спектроскопических расчетах вкладом от таких малых величин можно пренебречь, но при вычислении амплитуд реакций они становятся существенными.

Современное понимание механизма ядерных реакций передач до сих пор далеко от завершенности. Мы имеем дело с проблемой, которая является по крайней мере трехтельной. Граничные условия в таких задачах сложны как в методе связанных каналов, так и в итерационных схемах типа борновского приближения. Поскольку соответствующие уравнения Фаддеева и тем более уравнения с большим числом частиц невозможно решить на ЭВМ, обычно их решают, делая определенные приближения. Одно из стандартных приближений состоит в замене взаимодействия так, что уравнения Фаддеева разрешимы. Однако это приближенное взаимодействие не локально, и, как показано в работе [19], решения уравнения Фаддеева в этом случае будут менее точными по сравнению с решениями, получаемыми в известных итерационных схемах. Ясно, что в любых итерационных схемах возникает вопрос сходимости, который еще не решен, однако в последнее время появились работы (см. обзорный доклад Лоу [20] и литературу в нем), где изучена сходимость по итерациям для некоторых случаев.

Общим для всех этих схем является то, что амплитуда реакции передачи частиц $1, 2, 3, \dots$ от ядра-мишени $|A\rangle$ к ядру-

продукту $|B\rangle$ содержит интегралы типа

$$\int dr_1 dr_2 \dots \Psi(r_1, r_2, \dots) \langle A|B \rangle \equiv \\ \equiv \int dr_1 dr_2 \dots \Psi CF(r_1, r_2, \dots), \quad (4)$$

где Ψ включает волновые функции налетающих и вылетающих ядер и взаимодействия, отвечающие за эти передачи, причем Ψ дает основной вклад в области пространства, определенной следующими неравенствами:

$$r_1 \geq R, \quad r_2 \geq R, \dots \quad (5)$$

Здесь R — радиус ядра-мишени или ядра-продукта (состояния $|A\rangle$ или $|B\rangle$). Причина возникновения условий (5) становится

ясна, если изучить более детально приближенные выражения для амплитуд (рис. 1, 2) [21]. Подчеркнем, что для вычисления интегралов (4) нужно знать функции F (или $\langle A|B \rangle$) на больших расстояниях r_1, r_2, \dots

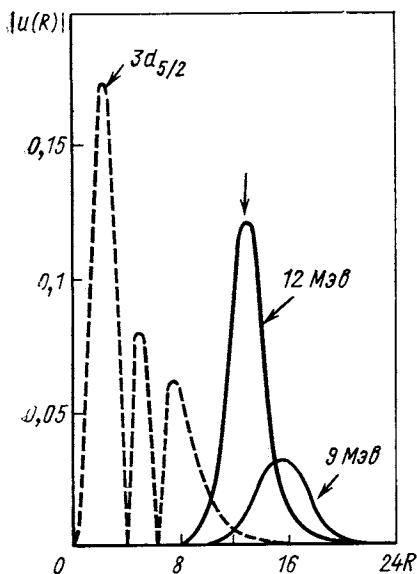


Рис. 1. Пространственное распределение дифференциального сечения реакции передачи $^{238}\text{U}(d, p)^{239}\text{U}$ на основное состояние при $\theta = 135^\circ$ для двух значений энергии налетающего дейтона

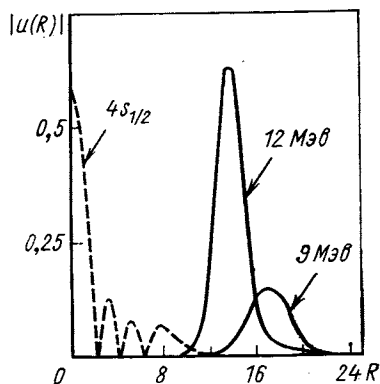


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, для $^{238}\text{U}(d, t)^{237}\text{U}$

Факторизация $\langle A|B \rangle = CF$, где C — спектроскопическая амплитуда, введена для демонстрации зависимости интегралов (4) от всех координат нуклонов в ядре-мишени $|A\rangle$. Коэффициенты C хорошо определены только в том случае, если потребована соот-

ветствующая нормировка F . Чтобы вычислить амплитуды передач, все состояния необходимо антисимметризовать соответствующим образом и амплитуду передач просуммировать по всем идентичным частицам.

Заметим (см., например, работу [22]), что последовательное вычисление форм-факторов $\langle A | B \rangle$ не то же самое, что расчет функций $| B \rangle (| A \rangle)$. Это действительно так, поскольку некоторые свойства функций F можно изучить, исходя из того, что в области (5), где происходит передача, взаимодействие между переданными нуклонами и другими нуклонами мало. Однако коэффициенты C получают только в структурных вычислениях.

В некоторых работах делается попытка вычислить функции F и коэффициенты C независимо друг от друга. Такие попытки связаны с успехами оболочечной и других моделей, основанных на оболочечных состояниях как базисных без учета вклада от непрерывного спектра. В этом случае волновая функция — комбинация решений одночастичного уравнения Шредингера с потенциалом $V(r) + V_{s.o.} + V_{кул}$:

$$(H_0 - E_i) f_i = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) + V_{s.o.} + V_{кул} - E_i \right) f_i = 0. \quad (6)$$

Тогда волновая функция $| B \rangle (| A \rangle)$ запишется в следующем виде:

$$| B \rangle = \sum_{ij} c_{ij}^B \dots f_i f_j \dots, \quad (7)$$

где коэффициенты c_{ij}^B определяются при диагонализации гамильтониана:

$$H = \sum_i H_0(\mathbf{r}) + V_{ост}, \quad (8)$$

а суммирование проводится по всем валентным нуклонам. Отсюда следует, что интегралы перекрытия $\langle A | B \rangle$ должны иметь вид

$$\langle A | B \rangle = CF = \sum_{ij} c_{ij}^{AB} \dots f_i f_j. \quad (9)$$

Мы уже говорили, что на больших расстояниях r для короткодействующих потенциалов функция F определяется энергией связи; например, в одночастичном случае необходимо получить [22]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) \sim \exp \left(-\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} |E_{BA}|} r \right), \quad (10)$$

где $E_{BA} = E_B - E_A$ — одночастичная энергия связи. Для одночастичной передачи выражение (9) упрощается:

$$\langle A | B \rangle = \sum_i c_i^{AB} f_i. \quad (11)$$

В (9) суммирование по i обрывают сверху, т. е. для фиксированных значений l, j берется лишь один член по n , и вкладом от сплошного спектра пренебрегают, считая, что соответствующие коэффициенты смешивания в разложении (9) невелики [23 — 25]. Асимптотическое поведение выражения (11) при $r \rightarrow \infty$ отличается от (10):

$$\langle A | B \rangle \approx \sum a_i \exp \left(- \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} |E_i|} r \right), \quad (12)$$

где E_i — энергия связи одночастичного состояния в потенциале модели оболочек. Из выражения (12) видно, что для больших значений r вклад от больших компонент a_i разложения может оказаться меньше вклада от более слабосвязанных орбиталей, так как малость коэффициентов разложения будет скомпенсирована более слабым затуханием рассматриваемой компоненты. В большинстве ядерных спектроскопических расчетов асимптотическое поведение волновых функций настолько несущественно, что правильные результаты можно получить, используя функции гармонического осциллятора вместо функций потенциала Саксона — Вудса. В расчетах прямых ядерных реакций асимптотическое поведение волновых функций становится очень важным. Однако знание волновых функций во внутренней области в этом случае необходимо также для того, чтобы найти правильный нормирующий множитель. Следовательно, возникает задача о достаточно точном расчете волновых функций во внешней и внутренней областях ядра. Это утверждение можно переформулировать так. Асимптотическое поведение радиальной части ф-фактора определяется энергией отделения нуклонов, которая связана с Q -значением реакции. В то же время функциональное поведение $\langle A | B \rangle$ внутри ядра изменяется в соответствии с интенсивностью и радиусом остаточных взаимодействий, следовательно, нормировка асимптотической части $\langle A | B \rangle$ зависит от своей внутренней части. На наш взгляд, в этом и состоит принципиальное отличие спектроскопических критериев точности от критериев точности волновых функций, используемых в прямых реакциях передач.

Были предложены различные способы вычисления интегралов перекрытия $\langle A | B \rangle$ в целях улучшения асимптотики функции F , при этом использовались коэффициенты C из структурных вычислений. Такие приближенные способы нельзя признать последовательными, они очень часто приводят к ошибочным результатам. Один из них тем не менее должен быть упомянут, поскольку он до сих пор широко применяется в расчетах прямых реакций. В этом методе, предложенном в работе [26], глубину потенциала изменяют так, чтобы рассчитываемая энергия E_i совпадала с экспериментальным значением одночастичной энергии связи

E_{BA} , т. е. решают уравнение

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \lambda_i V + V_{s.o.} + V_{кул} - E_{BA} \right) f_i = 0, \quad (13)$$

причем остаточные взаимодействия не принимают во внимание.

Это так называемый *метод подгонки глубины ямы* (WDP — well-depth prescription). Однако уравнение (13) есть уравнение на собственное значение и собственную функцию задачи Штурма — Лиувилля. Свойства решений уравнения (13) подробно описаны в работах [10, 11, 16, 17, 22, 27, 28]; для нас же важно сейчас то, что функции f_i , удовлетворяющие уравнению (13), образуют полный дискретный набор в гильбертовом пространстве квадратично-интегрируемых функций. Стоит заметить, что WDP-приближение состоит фактически в сохранении одной главной компоненты в разложении полной волновой функции по базисному набору функций Штурма — Лиувилля и применимость его достаточно полно исследована в работах [27, 28]. Поэтому можно сказать, что решения уравнения (13) лучше приспособлены для вычисления интегралов $\langle A | B \rangle$, чем решения уравнения (6). Применение функции Штурма — Лиувилля в задачах ядерной физики имеет разные аспекты, и мы кратко остановимся на них ниже.

Различие между уравнениями Шредингера и уравнениями для функций Штурма — Лиувилля состоит в том, что в последнем случае собственные значения λ_i умножаются на функцию $V(r)$, зависящую от координат. Преобразованием системы координат уравнение можно привести к такому виду, когда λ_i будут появляться с постоянными коэффициентами [28]. При такой замене переменных интервал $0 \leq r \leq \infty$ преобразуется в конечный интервал, и полученное уравнение в общем достаточно сложно по сравнению с первоначальным. Исключение составляет кулоновский случай; для него преобразованное уравнение совпадает с уравнением гармонического осциллятора.

Основным преимуществом разложения по функциям Штурма — Лиувилля является то, что в этом разложении все базисные функции имеют одинаковую требуемую асимптотику (что видно из уравнения (13), определяющего WDP-приближение). В этом смысле метод разложения по функциям Штурма — Лиувилля напоминает метод сильной связи каналов [29—32], но, в отличие от последнего, здесь имеется система алгебраических уравнений, что облегчает вычисления. В том случае, когда используются метод связанных каналов или другие методы, включающие итерационную процедуру, в вычислениях связанных состояний появляются некоторые серьезные трудности.

Уравнение Шредингера для связанных состояний представляет собой задачу на собственное значение, в качестве которого берутся или энергия, или (если энергия фиксирована) некоторые пара-

метры гамильтониана, как показано ниже на многочисленных примерах. Это означает, что указанная выше процедура должна включать на каждом шаге итераций аналогичную процедуру изменения собственных величин.

Однако только в одномерном случае существует нижний предел для расстояния между двумя собственными значениями (для энергии или глубины потенциала). Поэтому в принципе трудно задать заранее алгоритм итерационной процедуры, которая бы автоматически сходилась к правильному результату, за исключением одномерного случая и случая, когда ищется только нижайшее собственное значение (энергия, глубина потенциала и т. п.). Практически это сложно как в деформированных, так и в сферических ядрах.

В противоположность этим итерационным методам, методы, основанные на диагонализации в полном базисе, будут автоматически давать все решения в заданном интервале собственных значений. И тогда можно на основе некоторого физического критерия выбрать правильное решение. В такой ситуации то, что диагонализационные методы дают несколько нефизических решений, на самом деле оказывается преимуществом перед другими методами.

Еще раз заметим, что отличие WDP-приближения от метода разложения по функциям Штурма — Лиувилля состоит не только в разном определении коэффициента C , но и в том, что разложение не ограничивается компонентами, соответствующими квантовым числам связанных оболочечных функций. Теоретически число этих компонент бесконечно, а практически хорошая сходимость метода позволяет работать в ограниченном конфигурационном пространстве.

2. НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕТОДА РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ФУНКЦИЯМ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Общая теория разложения по функциям Штурма — Лиувилля была разработана давно [33, 34], она в принципе очень похожа на теорию разложения в ряд Фурье и является ее обобщением. Первое ее успешное применение связано с определением общего движения колебательных систем; в частности, в одномерном случае рассматривалось колебание струны разложением его по нормальным модам.

Примеры обобщения этой теории применительно к задачам ядерной физики даны в работах [17, 27, 28], поэтому здесь приведем некоторые полезные для нас свойства разложения по функциям Штурма — Лиувилля в основном без доказательств, которые можно найти в цитируемой литературе.

Мы исходим из уравнения (3), причем положим $V_0 \equiv V_{s,0} + V_{кул}$; $\hbar^2/2m = 1$; $V(r) < 0$, т. е. $V(r)$ — потенциал притяже-

ния — потенциал Саксона — Вудса; ϵ — фиксированное отрицательное число. Потребуем, чтобы функции f_i удовлетворяли следующим граничным условиям:

$$f_i(r) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow 0 \text{ и } r \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Напишем уравнение (3) для двух собственных значений:

$$(-\Delta + \lambda_i V + V_0 - \epsilon) f_i = 0; \quad (15)$$

$$(-\Delta + \lambda_j V + V_0 - \epsilon) f_j = 0; \quad (16)$$

тогда, умножая (15) на f_j^* , а (16) на f_i^* и интегрируя по τ с учетом эрмитовости $-\Delta + V_0$, получаем

$$(\lambda_i - \lambda_j) \int f_i^* V f_j d\tau = 0 \quad (17)$$

или

$$\int f_i^* V f_j d\tau = K_i \delta_{ij} \quad (18)$$

(для удобства нормировочную константу K_i положим равной -1). Следовательно, функции

$$g_i = |V|^{1/2} f_i \quad (19)$$

образуют ортонормированный базис. В ядерной физике общепринятым потенциалом является потенциал Саксона — Вудса (3), для которого $|V| = -V \neq 0$ во всем пространстве.

Естественен вопрос, существует ли связь между функциями Штурма — Лиувилля и функциями уравнения Шредингера? Если $\lambda_{0lj} = 1$ (в соответствующих единицах) и ϵ_{0lj} — собственное значение уравнения Шредингера, то $f_{0lj}(r)$ является функцией основного ($n = 0$) состояния уравнения Шредингера и будет первой собственной функцией задачи Штурма — Лиувилля. При фиксированном значении l, j с ростом λ_{nlj} потенциальная яма становится глубже, и если можно подобрать такие λ_{nlj} , чтобы энергия n -го уровня совпадала с ϵ_{0lj} , то полученная таким образом волновая функция будет собственной функцией $f_{nlj}(r)$ задачи Штурма — Лиувилля. Следовательно, уравнения Штурма — Лиувилля подобны уравнению Шредингера, но энергия ϵ_{0lj} является фиксированным параметром задачи, одинаковым для всех λ_{nlj} (lj фиксировано, а n принимает значения $0, 1, 2, \dots, n-1, n, n+1$), и волновые функции $f_{nlj}(r)$ при $n \neq 0$ не являются физическими. Собственные функции $f_{0lj}(r)$ задачи Штурма — Лиувилля в рассматриваемом частном случае, когда ϵ_{nlj} выбирается одинаковым для данных значений lj (вообще говоря, функции Штурма — Лиувилля можно выбирать различным путем), для состояний $1s, 1p, 1d, \dots$ совпадают с волновыми функциями уравнения Шредингера. Тогда

ряд

$$\chi_{nlj}(r) = \sum_n^{\infty} d_{n'lj}^n \chi_{n'lj}(r)$$

($\chi_{n'lj}(r)$ — волновая функция уравнения Шредингера) для состояний $1s, 1p, 1d$ содержит только один член разложения $d_{0lj}^0 = 1$, а все остальные $d_{n'lj}^n = 0$. Даже на этом простом примере видны основные преимущества разложения по функциям Штурма — Лиувилля по сравнению со всеми остальными, так как этот метод позволяет уже в первом приближении охватывать все основные характерные особенности исследуемой задачи.

Собственные числа λ_i образуют бесконечную последовательность положительных (отрицательных) дискретных чисел, удовлетворяющих условию

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{i-1} < \lambda_i < \lambda_{i+1} < \dots \quad (20)$$

Заметим, что знакоопределенность собственных чисел при $\varepsilon < 0$ легко получить из уравнения (3), переписав его в виде

$$\lambda_i = -\langle f_i | -\Delta - \varepsilon | f_i \rangle / \int f_i^* V f_i d\tau.$$

Матричный элемент в числителе при $\varepsilon < 0$ всегда положителен, знак λ_i определяется знаком $V(r)$. Для $V(r) < 0$ (потенциал притяжения) $\lambda_i > 0$, для $V(r) > 0$ (потенциал отталкивания) $\lambda_i < 0$. Здесь мы предположили $V_0 = 0$, выводы не изменятся, если $V_0 \neq 0$ [27, 28].

Уравнение (3) можно переписать в интегральной форме:

$$\text{sign}(V) \lambda_i |V|^{1/2} (\varepsilon - H_0)^{-1} |V|^{1/2} g_i = g_i, \quad (21)$$

где $H_0 = -\Delta + V_0$ и оператор $(\varepsilon - H_0)^{-1}$ — интегральный оператор Грина. Для дальнейшего использования уравнение (21) удобно записать в следующем виде:

$$\lambda_i \int K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') g_i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = g_i(\mathbf{r}). \quad (22)$$

Если H_0 — самосопряженный оператор, то K симметричен. Это свойство ядра K — фундаментальное для доказательства теории разложения. Теорема Мерсера [35] утверждает, что если все, но конечное число собственных значений K имеют один и тот же знак, то сходимость разложения равномерная и абсолютная. Это означает: если мы имеем

$$g(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(\mathbf{r}); \quad (23)$$

$$g_N(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^N c_n g_n(\mathbf{r}), \quad (24)$$

то можно найти такое число $N_0(\xi)$ при сколь угодно малых ξ , что выполняется неравенство

$$|g_N - g| \leq \xi \quad \text{при} \quad N > N_0(\xi). \quad (25)$$

Разумеется, $g_i(r)$ (или f_i) образуют полный набор только в той области, где $V(r) \neq 0$.

Подчеркнем, что в противоположность уравнению Шредингера задача Штурма — Лиувилля не имеет непрерывного спектра. Следовательно, преимущество разложения по функциям g_i заключается в том, что они представляют собой дискретный ряд функций и поэтому не возникает трудностей с учетом влияния непрерывного спектра на связанные состояния.

В некоторых случаях функция, которую можно разложить в ряд по полному базису Штурма — Лиувилля, удовлетворяет уравнению Шредингера с такой же энергией, что и уравнение Штурма — Лиувилля, но гамильтониан содержит такое остаточное взаимодействие V_1 , для которого во всем пространстве верно неравенство

$$|V_1| < c|V|. \quad (26)$$

Мы решаем уравнение

$$(-\Delta + V_0 + \lambda V + V_1 - E)\Psi = 0, \quad (27)$$

и разложение

$$\Psi_N = \sum_{n=0}^N c_n f_n(E = \epsilon) \quad (28)$$

имеет интересное свойство

$$|\Psi_N / \Psi^{-1}| \leq \xi \quad (29)$$

для $N \geq N_0(\xi)$ при всех r , удаленных на конечное расстояние от нулей функции Ψ . Это свойство сильнее, чем равномерная сходимость, и позволяет получать приближенные волновые функции с одинаковой относительной точностью во всем пространстве даже при конечном числе N . Поэтому амплитуда передачи даже в тех случаях, когда она получает главный вклад из областей произвольных больших расстояний между передаваемым нуклоном и кором, вычисляется корректно. Очевидно преимущество использования базисных функций с такой же энергией связи, что и разлагаемая функция.

Свойства (25) и в особенности (29) верны, строго говоря, только для движения частицы в статическом потенциале при выполнении условия (26), например в адиабатическом пределе деформированного ядра для различных типов отклонения от сферически-симметричного потенциала. Основные положения метода разложения по функциям Штурма — Лиувилля можно обобщить на многомер-

ные случаи, но в таких задачах граничные условия становятся более сложными и обобщенные функции Штурма — Лиувилля теряют свою простоту. Поэтому разумно попытаться сохранить функции Штурма — Лиувилля максимально простыми.

Использование разложений Штурма — Лиувилля в последовательных структурных вычислениях состоит в подстановке обрезанного разложения в уравнение Шредингера с полным гамильтонианом

$$(H - E) \sum c_{ij} \dots f_{ij} \dots = 0. \quad (30)$$

Затем с помощью уравнений для f_i получим систему линейных алгебраических уравнений на коэффициенты смешивания c_{ij} . Условие существования решений этой системы ведет к требованию равенства нулю детерминанта системы, что эквивалентно в таком ограниченном базисе задаче определения приближенного собственного значения уравнения Шредингера (оценка сверху). Здесь, однако, мы имеем несколько возможностей. В задачах типа эффекта Штарка в атоме водорода все члены гамильтониана известны точно и энергию можно рассматривать как собственное значение задачи, которое необходимо вычислить. В обычных задачах ядерной физики модельный гамильтониан, например типа (8), довольно грубо представляет физическую ситуацию и, как правило, содержит некоторое число параметров, которые нельзя установить из основных принципов, а в лучшем случае можно определить из соответствия с экспериментальными данными. Одним таким набором хорошо известных экспериментальных данных служат энергии связи, тогда параметры потенциала подгоняются так, чтобы воспроизвести эти энергии. Другой набор экспериментальных данных, например сечения реакций передач, можно использовать для проверки адекватности выбранной параметризации. Подтверждение оптимальности параметров (в рамках рассматриваемых моделей) можно получить при использовании обрезанного базиса Штурма — Лиувилля, если базисные энергии равны или близки экспериментальным энергиям, так как в этом случае имеется хорошая сходимости метода в асимптотической области.

Сейчас воспользуемся соотношением ортогональности функций Штурма — Лиувилля и кратко обсудим два варианта решения уравнения (30). Если будем рассматривать E как собственное значение, тогда умножим (30) на $\prod_i V_i(r_i) f_n^*(r_i)$ и проинтегрируем

по всем координатам, при этом с помощью уравнений типа (3) для f_n получим матрицы, главные диагональные члены которых будут содержать величины $(E - \sum_i \epsilon_i)$. Далее, изменяя некоторые параметры гамильтониана (например, параметры остаточного

взаимодействия), можно получить

$$E = \sum \varepsilon_i, \quad (31)$$

равное экспериментальному значению.

Однако полная матрица, в общем, неэрмитова, что может привести к некоторым неудобствам в расчетах, так как полученные собственные функции могут оказаться биортогональными [36]. Можно умножить уравнение (30) на $\prod_i f_n^*(r_i)$, а потом проинтегри-

ровать. Полученная матрица эрмитова. Если параметры взаимодействия, которые мы хотим определить, входят в гамильтониан линейно (глубина потенциала, константы взаимодействия или параметры деформации), то их можно подобрать диагонализацией матрицы рассматриваемой задачи. Две возможности диагонализации матрицы гамильтониана удобнее исследовать на конкретных примерах, что будет сделано в разд. 4 и 5. Совершенно ясно, что без обрезания базиса оба метода дадут точный результат, но для обрезанного базиса, как это показано в [28], второй метод диагонализации дает более точный результат, чем первый. Однако для обычно используемых потенциалов и достаточно большого конфигурационного пространства это отличие не очень велико. Численные результаты (см. разд. 5) согласуются с этим выводом.

3. ПРЯМЫЕ РЕАКЦИИ НУКЛОННЫХ ПЕРЕДАЧ

Кратко опишем здесь различные методы вычисления сечений реакций передач; при этом нашей целью будет изучение влияния свойств волновых функций связанных состояний передаваемых нуклонов на эти величины.

Обозначим входной канал реакции α , а интересующие нас выходные каналы β . Фрагменты в канале α могут состоять из $a + A$, тогда если мы интересуемся передачей нуклонов n_1, n_2, \dots , то можно записать:

$$a = b + n_1 + n_2 + \dots; \quad B = A + n_1 + n_2 + \dots \quad (32)$$

Можно принять во внимание другие двухфрагментные каналы, например γ -канал:

$$c = b + n_1; \quad C = A + n_2. \quad (33)$$

Трехфрагментные каналы должны описываться [37, 38] как несвязанные состояния двухфрагментных каналов. Запишем гамильтониан в каждом канале:

$$H = H_\alpha + H_A + T_{aA} + V_{aA} \equiv H_\alpha + T_\alpha + V_\alpha = H_\beta + T_\beta + V_\beta, \quad (34)$$

где $T_\alpha = T_{aA}$ — относительные кинетические энергии фрагментов; $V_\alpha(r_\alpha) \equiv V_{aA}(r_{aA})$ — взаимодействие между фрагментами, в принципе, сумма взаимодействий всех частиц a и всех частиц

в A ; $H_\alpha(\varepsilon_\alpha) \equiv H_\alpha + H_A$ — внутренние гамильтонианы фрагментов.

Полную волновую функцию запишем в виде

$$\Phi = \sum_{\varepsilon=\alpha, \beta, \gamma, \dots} \Psi_\varepsilon(\xi_\varepsilon) U_\varepsilon(\mathbf{r}_\varepsilon), \quad (35)$$

где

$$H_\varepsilon \Psi_\varepsilon(\xi_\varepsilon) = E_\varepsilon \Psi_\varepsilon(\xi_\varepsilon); \quad (36)$$

$U_\varepsilon(\mathbf{r}_\varepsilon)$ — функция относительного движения в канале ε . Например, если будем учитывать только один выходной канал β , то полная волновая функция системы будет иметь вид

$$\Phi = \Psi_\alpha(\xi_\alpha) U_\alpha(\mathbf{r}_\alpha) + \Psi_\beta(\xi_\beta) U_\beta(\mathbf{r}_\beta), \quad (37)$$

где $\Psi_\alpha(\xi_\alpha) = \Psi_a(\xi_a) \Psi_A(\xi_A)$ и т. д.

Для иллюстрации запишем гамильтониан H_B :

$$H_B = H_A + \sum_n (V_{nA} + T_n) + \sum_{nn'} V_{nn'}, \quad (38)$$

где V_{nA} описывает взаимодействие между переданными нуклонами и кором; $V_{nn'}$ — взаимодействие между валентными нуклонами, т. е. H_B — гамильтониан модели оболочек с остаточными взаимодействиями (в разд. 5 мы его распишем более детально для конкретного случая).

Если $\sum V_{nA}$ заменена потенциалом, то глубина этого потенциала должна зависеть от энергии [39, 40], чтобы он давал корректные значения энергии связи. Другими словами, эти потенциалы включают в себя как обменные эффекты, так и эффекты перераспределения (rearrangement effects). Решения уравнения Шредингера должны быть антисимметричны по всем координатам частиц, хотя бы для рассматриваемого фрагмента. Обсудим методы нахождения амплитуды сечения реакций.

Умножая левую часть уравнения Шредингера

$$(H - E) \Phi = 0 \quad (39)$$

на Ψ_α и интегрируя по внутренним координатам ξ_α , получаем

$$\begin{aligned} & [T_\alpha + \langle \Psi_\alpha | V_\alpha | \Psi_\alpha \rangle - (E - E_\alpha)] U_\alpha(\mathbf{r}_\alpha) = \\ & = - \sum_{\alpha'} \langle \Psi_\alpha | V_\alpha | \Psi_{\alpha'} \rangle U_{\alpha'}(\mathbf{r}_{\alpha'}) - \sum_\beta \langle \Psi_\alpha | H - E | \Psi_\beta \rangle U_\beta(\mathbf{r}_\beta), \end{aligned} \quad (40)$$

где каналы с одинаковыми распределениями частиц во фрагментах обозначены α (α' — неупругие каналы); для них

$$\langle \Psi_\alpha | \Psi_{\alpha'} \rangle = \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (41)$$

Ясно, что ортогональность между неупругими каналами α' и каналами передачи β [последний член в правой части уравнения (40)]

отсутствует; обсуждение этого вопроса можно найти в работах [20, 41—43].

Систему связанных интегро-дифференциальных уравнений можно решить с такими граничными условиями, при которых во всех каналах α' и β имеются уходящие волны, а в канале α добавлена еще падающая волна. Система достаточно сложна для решения, особенно если каналы содержат более чем два фрагмента, образующих сплошной спектр. Это связано с необходимостью интегрирования бесконечной системы уравнений. В то же время, если включить в рассмотрение каналы развала фрагментов (это необходимо делать, чтобы получить полную систему уравнений), то полученная система будет переполнена.

Поэтому естественно попытаться решить систему уравнений (40) при некоторых упрощающих предположениях. Если упругое рассеяние, определяемое диагональным членом $\langle \Psi_\alpha | V_\alpha | \Psi_\alpha \rangle$, велико, а эффекты второго порядка, определяемые недиагональными членами $\langle \Psi_\alpha | V_\alpha | \Psi_{\alpha'} \rangle$, малы, то их влиянием можно пренебречь. Тогда для вычисления амплитуды упругого рассеяния решим уравнение

$$(T_\alpha + \langle \Psi_\alpha | V_\alpha | \Psi_\alpha \rangle - (E - E_\alpha)) U_\alpha^0(r_\alpha) = 0 \quad (42)$$

с соответствующими граничными условиями (падающие плюс уходящие волны), а при учете неупругого рассеяния (канал α') и передачи (канал β) необходимо решить неоднородное уравнение

$$(T_{\alpha'} + \langle \Psi_{\alpha'} | V_\alpha | \Psi_{\alpha'} \rangle - (E - E_{\alpha'})) U_{\alpha'}(r_{\alpha'}) = -\langle \Psi_{\alpha'} | V_\alpha | \Psi_\alpha \rangle U_\alpha^0, \quad (43)$$

когда в асимптотической области имеются только уходящие волны. Такое приближение оправдывается и наличием кулоновского отталкивания между ионами a и A (b и B). Так приходим к методу искаженных волн (МИВ) [44].

Пренебрежение отдельными каналами реакции обусловлено малостью соответствующих сечений. Поэтому такие каналы можно включить в МИВ по теории возмущений, если они малы. Если они велики, то их можно учесть так, как это делается в методе связанных каналов (см., например, случай сильной связи вращательных состояний в деформированных ядрах [12, 22, 30, 45]). Третья возможность заключается в рассмотрении высоких порядков искаженных волн в борновском приближении в рамках МИВ. Такое описание возможно [46, 47] при изучении двухнуклонных реакций передач. Эти работы упоминаем специально ввиду важности полученных там форм-факторов, приводящих к интересным результатам.

Однако здесь остановимся более подробно только на первом методе, поскольку он использован в большинстве работ [16, 17, 22]; другие методы являются его обобщением, а роль форм-факторов в них существенно та же, что и в методе МИВ.

Если все недиагональные члены в (40) малы, то решаем уравнение (42), так как основным каналом реакции является упругое рассеяние:

$$\Phi \sim \Phi^0 = \Psi_\alpha \chi_\alpha^+ (k_\alpha, \mathbf{r}_\alpha) \delta_{e\alpha}, \quad (44)$$

где $\chi_\alpha^+ = U_\alpha^0$. Тогда, подставляя U_α^0 в правую часть уравнения (43), находим малые компоненты в канале β , а следовательно, и амплитуду передачи:

$$f_{\beta\alpha}(\hat{k}_\beta) = -\frac{\mu_\beta}{2\pi\hbar^2} \langle \chi_\beta^- \Psi_\beta | H - E | \chi_\alpha^+ \Psi_\alpha \rangle; \quad (45)$$

здесь χ_β^- получена комплексным сопряжением χ_β^+ ; μ_β — приведенная масса в канале b , B . Пренебрежение недиагональными членами в (40) не означает, что связь каналов при решении уравнения не учитывается. Эта связь принимается во внимание усредненным образом — введением комплексного потенциала поглощения.

Используя уравнение (43) и условие сохранения энергии, получаем амплитуду в post- и prior-представлениях:

$$\begin{aligned} f_{\beta\alpha} &= -\frac{\mu_\beta}{2\pi\hbar^2} \langle \chi_\beta^- \Psi_\beta | V_\alpha - \langle \alpha | V_\alpha | \alpha \rangle | \chi_\alpha^+ \Psi_\alpha \rangle = \\ &= -\frac{\mu_\beta}{2\pi\hbar^2} \langle \chi_\beta^- \Psi_\beta | V_\beta - \langle \beta | V_\beta | \beta \rangle | \chi_\alpha^+ \Psi_\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (46)$$

Если, например, рассматривать дейтонный срыв, то можно показать, что оптический потенциал $\langle \beta | V_\beta | \beta \rangle$ описывает взаимодействие между вылетающим протоном и кором, а разность $V_\beta - \langle \beta | V_\beta | \beta \rangle$ обусловлена взаимодействием между протоном и переданным нейтроном. Это взаимодействие короткодействующее поэтому амплитуда передачи грубо пропорциональна трехмерному интегралу перекрытия произведения волновой функции относительного движения дейтон — ядро — мишень, протон — ядро — продукт и нейтронной волновой функции $\langle \Psi_B | \Psi_A \rangle$, причем все они взяты в одних и тех же точках.

Для тяжелых ионов такое приближение нулевого радиуса действия неприемлемо [48, 49], поэтому необходимо вычислять многомерные интегралы (46), когда оба представления имеют одинаковую форму. С одной стороны, при фиксированных относительных расстояниях между тяжелыми ионами интегралы перекрытия $\langle A | B \rangle$, а также $V_\alpha - \langle \alpha | V_\alpha | \alpha \rangle$ ($V_\beta - \langle \beta | V_\beta | \beta \rangle$) являются уменьшающимися функциями при увеличении соответствующих радиус-векторов, с другой стороны, волновые функции относительного движения малы при малых относительных расстояниях. А это означает, что расстояния между корами и переданными нуклонами, дающие наибольший вклад в амплитуду передачи, должны быть достаточно большими.

Дейтонный срыв ясно показывает причину малого вклада от малых расстояний между нейтроном и кором. Мы уже подчеркивали, что интегралы перекрытия $\langle A | B \rangle$ фактически являются волновыми функциями связанных состояний, т. е. они экспоненциально падают на больших расстояниях и осциллируют на малых. Волновые функции относительного движения фрагментов на малых расстояниях тоже будут сильно осциллировать (если они полностью не исчезнут из-за мнимой части потенциала) даже при малой энергии относительного движения. Для короткодействующего взаимодействия на малых расстояниях подынтегральное выражение (46) является произведением трех осциллирующих функций, и поэтому интеграл набирает свое значение на больших расстояниях.

Сложность вычислений и неудовлетворенность изложенными выше приближениями послужили стимулом для разработки других методов описания ядерных реакций между сложными ионами. Здесь кратко изложим только одну из многих таких попыток [50].

В случае, когда применимость МИВ оправдана, т. е. когда ряд Борна по константе связи сходится, эквивалентным ему методом [44] является описание сталкивающихся систем с помощью волновых пакетов и использование временной теории возмущений. Однако реально такое описание малоприсгодно. Для реакций с тяжелыми ионами движение волновых пакетов можно заменить на движение по классическим траекториям, но уже при этом Ψ рассматривается как волновая функция. Оправданием такого приближения может служить малость длины волны по сравнению с радиусом действия сил, ответственных за рассеяние. Если для данного угла θ дает вклад в сечение передачи только один параметр удара ρ , то это сечение имеет простой вид:

$$d\sigma/d\Omega = p (\rho/\sin \theta) |d\rho/d\theta|, \quad (47)$$

где p — вероятность данного процесса, в низжайшем порядке равная

$$p = \left| \exp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\hbar} (V_{\alpha}(t) - \langle \alpha | V_{\alpha} | \alpha \rangle) dt \right|^2. \quad (48)$$

Классическое сечение упругого рассеяния

$$d\sigma_{\text{уп}}/d\Omega = (\rho/\sin \theta) (d\rho/d\theta) \quad (49)$$

получено из требования стационарности соответствующей фазы

$$\varphi = \frac{i}{\hbar} \int \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \langle \alpha | V | \alpha \rangle \right) dt. \quad (50)$$

Ясно, чтобы сопоставить эти результаты с вычислениями по МИВ, необходимо ввести мнимую часть потенциала, тогда в сечении

появится фактор затухания

$$a = \left| \exp \int \frac{W}{\hbar} dt \right|^2, \quad (51)$$

роль которого сводится к подавлению вклада в сечение передачи малых параметров удара. Это снова подчеркивает важность больших расстояний в реакциях передач.

В этом разделе мы обсудили ряд простых методов вычисления амплитуд передач, когда роль волновых функций переданных частиц видна довольно прозрачно. Ситуация та же, что и в более сложных подходах [49], однако в них приходится иметь дело с многомерными интегралами (6-мерные в однонуклонных, 9-мерные в двухнуклонных реакциях передач между сложными ионами).

Однако стоит подчеркнуть, что в реакциях многонуклонных передач вопросы асимптотического поведения волновых функций переданных нуклонов становятся более важными и сложными по сравнению с однонуклонными передачами. Для однонуклонных передач асимптотическое поведение волновых функций можно установить из простых соображений (см. разд. 4 и 5). Для двухнуклонных передач прогресс наметился только в самое последнее время (см. разд. 5), а для большего числа переданных нуклонов задача нахождения корректного асимптотического поведения волновых функций передаваемых нуклонов до сих пор не решена, за исключением частного случая передачи кластеров.

4. ДЕФОРМИРОВАННЫЕ ЯДРА

Изучение реакций срыва и подхвата на сильнодеформированных ядрах позволило наилучшим образом интерпретировать структуру некоторых заселяемых состояний, особенно одночастичных. Дело в том, что в ядрах, далеких от магических, можно выделить среднее деформированное поле и соответствующие ему одночастичные состояния и коллективные движения ядра как целого. Во многих ядрах коллективные и одночастичные движения разделяются и некоторые состояния у поверхности Ферми с хорошей степенью точности одночастичны. Опишем кратко метод вычисления одночастичных волновых функций с требуемой асимптотикой в деформированном среднем поле и применение полученных волновых функций для расчета сечений однонуклонных передач.

Общие уравнения для форм-факторов, полученные из уравнений Шредингера для ядер $|A\rangle$ и $|B\rangle$:

$$\left. \begin{aligned} H_A |A\rangle &= E_A |A\rangle; \\ (H_A + \sum_i [V_i + T_i] + V_{\text{ост}}) |B\rangle &= E_B |B\rangle, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

будут иметь различный вид

$$(E_B - E_A) \langle A | B \rangle = \sum [V_i + T_i] \langle A | B \rangle + \langle A | V_{\text{ост}} | B \rangle \quad (53)$$

в зависимости от конкретно рассматриваемой задачи. Заметим, что под $V_{\text{ост}}$ можно подразумевать все взаимодействия, независимо от коммутации с H_A . Если $V_{\text{ост}}$ не коммутирует с H_A , то получаем бесконечную систему связанных уравнений типа (53), включающих разные состояния $|A_i\rangle$ ($|B_i\rangle$). Поскольку эти состояния могут заселяться в реакциях подхвата или срыва, то исследуем форм-факторы $\langle A_i | B_i \rangle$, описывающие соответствующие экспериментальные данные.

Если нечетное B и четное A ядра являются сильнодеформированными аксиально-симметричными, то они имеют большие моменты инерции J , что ведет к значительным упрощениям в расчетах при изучении не очень высоколежащих состояний. Первое упрощение связано с малостью кориолисова смешивания для случая существования правильных вращательных полос как в системе A , так и в системе B . Эти состояния характеризуются квантовым числом K — проекцией полного углового момента I на ось симметрии ядра. Во внутренней системе координат кориолисово взаимодействие имеет вид

$$H_{\text{кор}} = (-\hbar^2/2J) (j_+ I_- + j_- I_+), \quad (54)$$

где j_+ , j_- — одночастичные операторы; I_+ и I_- — операторы полного момента. Малость кориолисова взаимодействия вытекает из следующего отношения, полученного в теории возмущений:

$$\left| \frac{\langle K \pm 1 | H_{\text{кор}} | K \rangle}{E(K \pm 1) - E(K)} \right| \ll 1, \quad (55)$$

где знаменатель обычно в 20—100 раз больше, чем числитель [51, 52] ($E(K)$, $E(K \pm 1)$ — одночастичные энергии). Более подробно на влиянии кориолисова взаимодействия на сечения передач остановимся в конце этого раздела, здесь же заметим, что кориолисово взаимодействие не имеет радиальной зависимости. Второе упрощение состоит в пренебрежении вращательными энергиями, тогда уравнения на форм-факторы сводятся практически к уравнениям одночастичного движения в деформированном среднем поле. В этом случае (всеми остаточными взаимодействиями пренебрегаем) волновые функции, соответствующие различным энергиям, ортогональны, и очень просто учесть принцип Паули.

Как уже говорилось, параметры среднего поля ядер в общем случае должны зависеть от энергии. Однако тогда вычисления становятся достаточно громоздкими: волновые функции будут ортогональны со сложными весами, эффективные потенциалы нелокальны и т. д. Поэтому во многих задачах ядерной физики (см. работы [39, 40]) энергетическая зависимость параметров потенциала не учитывается. Более того, очень часто предполагают,

что глубина потенциала среднего поля для деформированных ядер приблизительно та же, что и для сферических [53 — 55].

Очень существенно для одночастичных состояний деформированных ядер, что при равновесных или больших значениях параметров деформации некоторые состояния с различными $N = 2n + l$ становятся почти вырожденными (см. обзор [53] и работы [41, 56 — 58]). Известно, что состояния с одинаковой четностью и с одинаковой проекцией углового момента для осцилляторного потенциала (без $1s$ - и l^2 -членов) полностью вырождены. Схема уровней и волновые функции чувствительны к тому, насколько используемый реалистический потенциал отличается от чистого осциллятора. Здесь важны учет в потенциале деформаций более высокого порядка, чем квадрупольные, и отличие радиальной формы потенциала от r^2 . Поскольку до недавнего времени реди смешиванием состояний с разными N пренебрегали, приведем кратко результаты работы [59].

Выпишем уравнение Шредингера

$$[-\Delta + cW(\mathbf{r})] \Psi_{\Omega, \pi}(\mathbf{r}) = E \Psi_{\Omega, \pi}(\mathbf{r}), \quad (56)$$

где

$$\left. \begin{aligned} CW(\mathbf{r}) &= C [V(\mathbf{r}) + \tilde{V}_{s.o.}(\mathbf{r})] + V_{s.o.}(\mathbf{r}) + V_{кул}(\mathbf{r}); \\ \tilde{V}_{s.o.}(\mathbf{r}) &= V_{s.o.}(\mathbf{r}) - V_{s.o.}(r); \\ V(\mathbf{r}) &= -V_0 \{1 + \exp[(r - R(\theta))/a]\}^{-1}; \\ R(\theta) &= R_0 (1 + \beta_0 + \beta_{20} Y_{20} + \beta_{40} Y_{40}). \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Все параметры взяты из работы [53]. Одночастичную волновую функцию $\Psi_{\Omega, \pi}$ связанного состояния деформированного ядра представим в виде суперпозиции по базисным функциям Штурма — Лиувилля

$$\Psi_{\Omega, \pi} = \sum_{nlj}^M a_{nlj}^{\Omega} \frac{f_{nlj}(r)}{r} |lj\Omega\rangle. \quad (58)$$

Дальнейшее рассмотрение, как уже указывалось в конце разд. 2, имеет две возможности. Можно E из (56) считать собственным значением задачи, а параметр C зафиксировать (допустим, положить $C = 1$). Тогда, подставляя разложение (58) в (56), умножая $V(\mathbf{r})$ слева на f_i^* и используя ортогональность функций f_i с весом, проинтегрируем по r, θ, φ . В результате получаем систему уравнений:

$$\sum_i A_{ij} a_j = \sum_j \langle i | V(H - E) | j \rangle a_j = \sum_j (\langle i | VH | j \rangle + E \delta_{ij}) a_j. \quad (59)$$

Если умножим слева на f_i^* , то после интегрирования найдем

$$\sum_j A'_{ij} a_j = \sum_j \langle i | H - E | j \rangle a_j = \sum_j (\langle i | -\Delta - E | j \rangle + C \langle i | W | j \rangle) a_j \quad (60)$$

Однако здесь в качестве обобщенных собственных значений выступает параметр C , а энергия $E = \varepsilon$ берется из экспериментальных данных.

Легко видеть, что матрица A_{ij} — неэрмитова, а матрица A'_{ij} — эрмитова. Поэтому можно сказать [27], что диагонализация матрицы A'_{ij} эквивалентна использованию вариационного принципа. Далее, так как для (60) все базисные функции f_i берем при $E = \varepsilon$, равном экспериментальному значению, сходимость разложения и в асимптотической области [см. соотношение (29) и обсуждение после него] гарантирована даже при малых значениях M . Это и следовало ожидать, так как в методе связанных каналов все компоненты волновой функции должны иметь одинаковую энергию [29—32], равную собственному значению задачи (при условии, что все взаимодействия достаточно быстро убывают на больших расстояниях). В этом смысле система (60) аналогична системе уравнений связанных каналов. Поэтому предпочтительнее работать с матрицей A'_{ij} .

Таблица коэффициентов разложения по функциям Штурма — Лиувилля для связанных нейтронных состояний ядра ^{155}Sm

Полоса	Базисные состояния	Коэффициенты разложения			
		$N = 1$	$N = 3$	$N = 5$	$N = 7$
3/2- [521]	$p_{3/2}$	-0,043	-0,115	0,344	0,035
	$f_{5/2}$	—	0,006	-0,266	-0,046
	$f_{7/2}$	—	0,007	0,799	0,045
	$h_{9/2}$	—	—	0,165	-0,058
	$h_{11/2}$	—	—	-0,313	0,123
	$i_{13/2}$	—	—	—	0,041
	$i_{15/2}$	—	—	—	-0,046
1/2- [521]	$p_{1/2}$	0,025	0,065	-0,500	-0,036
	$p_{3/2}$	0,002	0	0,308	0,007
	$f_{5/2}$	—	-0,061	-0,109	-0,059
	$f_{7/2}$	—	-0,042	-0,514	0,031
	$h_{9/2}$	—	—	0,494	0,009
	$h_{11/2}$	—	—	0,255	-0,095
	$i_{13/2}$	—	—	—	0,103
	$i_{15/2}$	—	—	—	0,035

Продолжение табл.

Полоса	Базисные состояния	Коэффициенты разложения			
		$N = 3$	$N = 5$	$N = 7$	$N = 9$
5/2- [523]	$f_{5/2}$	0,055	-0,279	-0,024	-0,007
	$f_{7/2}$	0,043	0,770	-0,033	-0,007
	$h_{9/2}$	—	-0,361	-0,060	0,016
	$h_{11/2}$	—	-0,407	0,120	0,029
	$i_{13/2}$	—	—	-0,055	-0,021
	$i_{15/2}$	—	—	-0,047	0,001
	$l_{17/2}$	—	—	—	-0,007
5/2- [512]	$f_{5/2}$	-0,070	0,161	0,027	0,014
	$f_{7/2}$	0,083	0,467	0,028	0,001
	$h_{9/2}$	—	0,815	0,003	0,002
	$h_{11/2}$	—	0,051	0,058	0,019
	$j_{13/2}$	—	—	0,151	0,042
	$j_{15/2}$	—	—	0,005	0,001
	$l_{17/2}$	—	—	—	0,020
		$N = 2$	$N = 4$	$N = 6$	$N = 8$
5/2+ [642]	$d_{5/2}$	-0,014	-0,063	0,072	0,018
	$g_{7/2}$	—	0,030	-0,038	-0,016
	$g_{9/2}$	—	-0,198	0,379	0,062
	$i_{11/2}$	—	—	-0,076	-0,035
	$i_{13/2}$	—	—	0,820	0,074
	$k_{15/2}$	—	—	—	-0,034
	$k_{17/2}$	—	—	—	0,135

В таблице приведены коэффициенты смешивания a_{nlj}^{Ω} для некоторых нейтронных состояний ядра ^{155}Sm , полученные при решении системы (60) для фиксированных значений E , равных энергии отделения нейтрона из ядра ^{155}Sm . Для этого ядра уровни с $N = 5$ (для нечетных состояний) расположены у поверхности Ферми, и в модели Нильссона только эти состояния участвуют в процедуре диагонализации. И в нашем методе подоболочка с $N = 5$ дает главный вклад, т. е. наибольшие коэффициенты смешивания приходятся на состояния из этой подоболочки. Однако, как видно

из таблицы, необходимо принимать во внимание базисные состояния из подболочек с $N = 3, 7$, а иногда и с $N = 9$.

На рис. 3 представлены результаты расчетов сечений реакций $^{154}\text{Sm}(d, p)^{155}\text{Sm}$ при $E_d = 12 \text{ Мэв}$, проведенных с волновыми функциями связанных нейтронных состояний, приведенных в таблице. Сечения передач получены в методе связанных каналов (МСК), причем оптические параметры входного и выходного каналов определены из упругого и неупругого рассеяния дейтронов и протонов при различных энергиях и на соответствующую

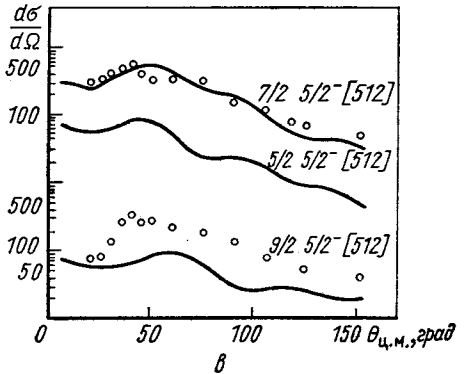
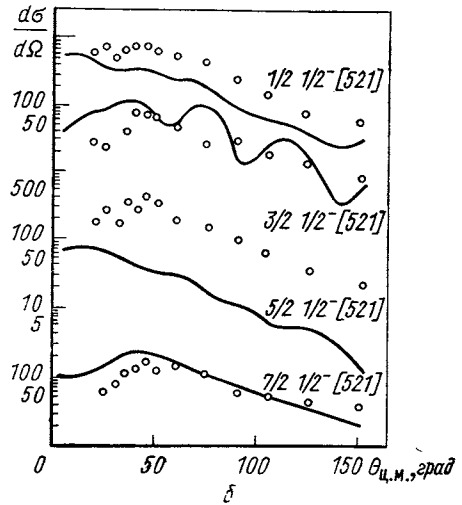
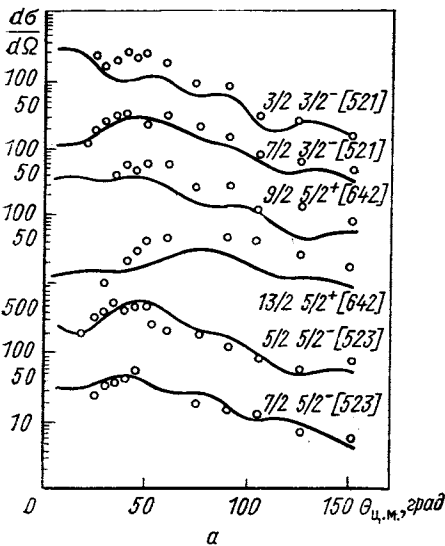


Рис. 3. Сравнение дифференциальных сечений, вычисленных методом связанных каналов (сплошные кривые), с экспериментальными данными (кружки) реакции $^{154}\text{Sm}(d, p)^{155}\text{Sm}$ для энергии $E = 12 \text{ Мэв}$ (подробно см. в работе [60])

этих мишенях (см. работу [60] и ссылки в ней). В этом смысле расчеты по МСК самосогласованны, так как нет ни одного свободного параметра, поэтому сравнение полученных теоретически сечений передач с экспериментальными говорит о правильности (или неправильности) наших предположений о структуре ядра. Расчеты по МСК отличаются от МИВ, где спектроскопическая информация

извлекается при сравнении теоретических сечений с экспериментальными данными. Приведенные результаты ясно показывают хорошее описание сечения передач на низколежащие состояния, однако совпадение сечений передач на высоковозбужденные состояния гораздо хуже. Ясно, что в этом случае необходимо учитывать большее число каналов и принимать во внимание сложность структуры заселяемых состояний.

В работах [56—59] была исследована структура квазипересекающихся уровней $1/2^+$ [660] и $1/2^+$ [400], $3/2^+$ [651] и $3/2^+$ [402]

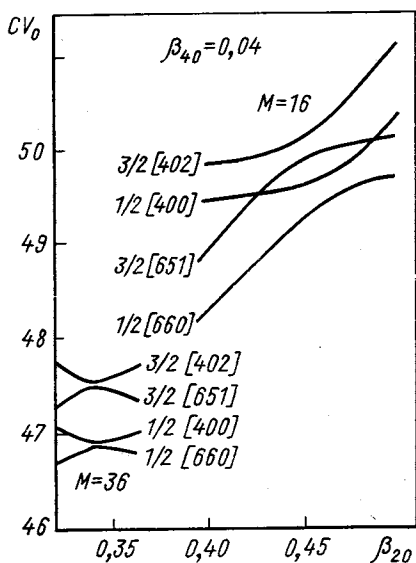


Рис. 4. Зависимость собственных значений CV_0 от параметра деформации β_{20} и от ранга M матрицы диагонализации (60) при $\beta_{40} = 0,04$

чении сечений реакций передач с помощью МСК. Более того, смешивание вращательных полос, вызываемое кориолисовым взаимодействием, необходимо исследовать отдельно, так как для $\Delta N = \pm 2$ смешанных состояний вблизи квазипересечения двух уровней кориолисово взаимодействие может стать особенно важным [52].

Как показано в работе [56], интенсивность $\Delta N = \pm 2$ смешивания сильно зависит от точности решения уравнений Шредингера. Чтобы повысить точность вычисления собственных значений и собственных волновых функций $\Psi_{\Omega, \pi}$ для $\Delta N = \pm 2$ смешанных состояний, достаточно увеличить ранг M матрицы системы (60).

ядер начала области редкоземельных элементов, лежащих очень близко по энергии друг от друга и имеющих сильное смешивание компонент ($\Delta N = \pm 2$ смешивания). Эти состояния наблюдались в (d, p) - и (d, t) -реакциях [61]. В работе [62], посвященной данному вопросу, вычислялись дифференциальные сечения передач в рамках МИВ. Однако, как это подчеркнуто в работе [12], дифференциальные сечения, рассчитанные в приближении МИВ, не чувствительны к коэффициентам смешивания одночастичных волновых функций, поскольку в амплитуде перехода учитывают вклад только одного базисного состояния и пренебрегают всеми остальными (если ядро-мишень является четным). Отсюда ясно, что определенную информацию о коэффициентах смешивания $\Delta N = \pm 2$ можно получить только при изу-

На рис. 4 приведены собственные значения [59] CV_0 в зависимости от параметра деформации β_{20} при $\beta_{40} = 0,04$. Значение β_{40} взято из работы [56], где β_{40} определено из требования равенства вычисленных относительных расстояний квазипересекающихся уровней и экспериментальных. Ранг матрицы M равен соответственно 16 ($N = 0, 2, 4, 6$) и 36 ($N = 0, 2, 4, 6, 8, 10$). На рис. 5 представ-

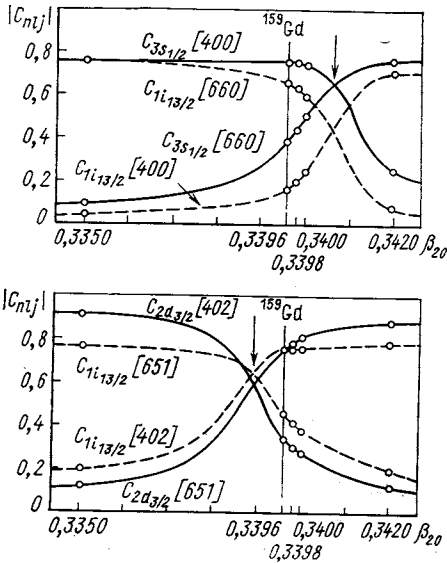


Рис. 5. Зависимость поведения $3s_{1/2}$ -, $2d_{3/2}$ - и $1i_{13/2}$ -компонент одночастичной волновой функции от параметра квадрупольной деформации β_{20} при $\beta_{40} = 0,04$

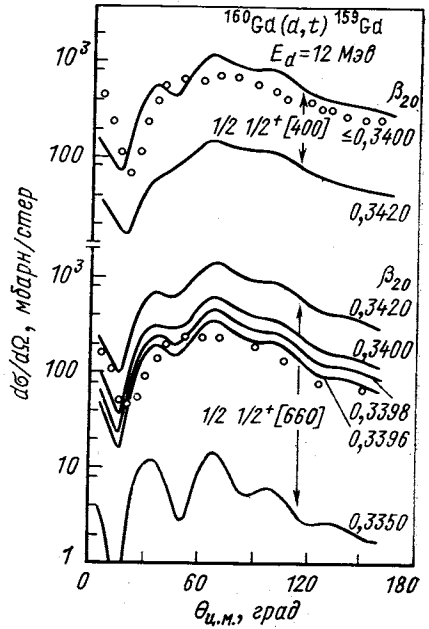


Рис. 6. Вычисленные дифференциальные сечения реакций передач на состоянии $1/2 1/2^+ [400]$ и $1/2 1/2^+ [660]$ для разных значений параметра квадрупольной деформации β_{20} при $\beta_{40} = 0,04$. Экспериментальные данные обозначены кружками

лено поведение $3s_{1/2}$ - и $1i_{13/2}$ -компонент одночастичной волновой функции в зависимости от параметра квадрупольной деформации при $\beta_{40} = 0,04$, а соответствующие дифференциальные сечения — на рис. 6, 7. Эти рисунки ясно иллюстрируют сильную зависимость коэффициентов смешивания от величины β_{20} в области квазипересечения уровней, а соответствующие сечения в той же области меняются на порядок (например, при изменении β_{20} на $0,007$ сечение передачи на состояние $1/2 1/2^+ [660]$ меняется на два порядка). Очевидно, что из обработки экспериментальных данных

по упругому и неупругому рассеянию нельзя определить параметры деформации с такой точностью. Для рассмотренного случая при деформации $\beta_{20} = 0,3296$ и относительные и абсолютные значения сечений хорошо согласуются с экспериментальными данными, поэтому при изучении реакций передач на такие квазипересекающиеся уровни можно уточнить параметры деформации. Это не очень тривиальный результат, так как структурные (спектроскопические) расчеты [56] не позволяют получить определенную информацию о порядке расположения этих $\Delta N = \pm 2$ смешанных уровней, а следовательно, уточнить значение параметров деформации или других параметров задачи.

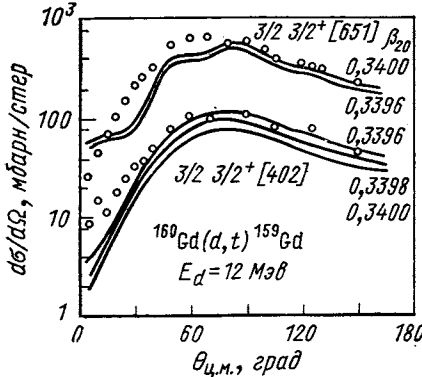


Рис. 7. То же, что на рис. 6, для передач на состояния $3/2 \ 3/2^+ [402]$ и $3/2 \ 3/2^+ [651]$

Взаимодействие различных типов движения, которые, как мы уверены, необходимо учесть в реальных расчетах, нарушают простую одночастичную картину возбуждений в деформированных ядрах. Кориолисово взаимодействие является одним из наиболее важных и понятых

остаточных взаимодействий, приводящих к взаимному смешиванию одночастичных волновых функций. В приближении МИВ дифференциальное сечение имеет довольно простой вид [61] (четно-четная мишень):

$$d\sigma/d\Omega = 2 \left| \sum_N \alpha^{(N)} C_{j_l}^{(N)} (\Phi_l^{(N)})^{1/2} \right|^2. \quad (61)$$

Из (61) видно, что сечение является суммой простых сечений, полученных в рамках МИВ и умноженных на соответствующие коэффициенты $(\alpha^{(N)} C_{j_l}^{(N)})^2$. Эти коэффициенты очень часто вычисляются в модели Кермана [51], в которой смешиваются только две вращательные полосы.

Запишем волновую функцию конечного ядра B в наиболее общем виде [52]:

$$\begin{aligned} \Phi_{J_B M_B}^*(r, \theta_i) = & \sqrt{\frac{2J_B+1}{16\pi^2}} \sum_{K_B \alpha} C_{K_B \alpha}^{J_B} \times \\ & \times \left\{ D_{M_B K_B}^{J_B}(\theta_i) \Psi_{K_B=\Omega, \pi}^{(\alpha)}(r) + (-1)^{J_B+K_B+1} \times \right. \\ & \left. \times D_{M_B K_B}^{J_B}(\theta_i) \Psi_{K_B=-\Omega, \pi}^{(\alpha)}(r) \right\}, \quad (62) \end{aligned}$$

где $C_{K_B^J}^{\alpha}$ — коэффициенты кориолисова смешивания, вычисленные в полумикроскопической модели [52]. Суммирование в (62) ведется по несохраняющимся проекциям K_B полного углового момента J_B и по индексу α , который означает различные вращательные состояния с одинаковой K_B . Если мы рассматриваем однонуклонные реакции передачи на четно-четном ядре с $J_A = K_A = 0$, то $J_B = J$ и $K_B = \Omega$, где J — переданный угловой момент; Ω — его проекция на ось симметрии ядра. Тогда в приближении МСК дифференциальное сечение передачи запишется в форме [63]

$$\sigma_{LJ\Omega}^{МСК}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{M_d M_p}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{D_{npk_p}}{2\pi k_d} (2L+1)^{-1} \sum_m \left| \sum_{(\Omega\alpha)} C_{\Omega\alpha}^J \sum_{nlj} a_{nlj}^{(\Omega, \alpha)} \times \right. \\ \left. \times \sum_{\sigma} (LS\Omega - \sigma | J\Omega) (ls\Omega - \sigma | j\Omega) B_{L\Omega}(nlj\sigma_p) \right|^2. \quad (63)$$

Амплитуды $B_{L\Omega}$ были определены в работе [12], а коэффициенты $a_{nlj}^{(\Omega, \alpha)}$ являются решениями системы уравнений (60).

Из сравнения формул сечения в приближениях МСК (63) и МИВ (61) можно видеть, что сечение в МИВ — когерентная сумма всех возможных передач на вращательные состояния, связанных между собой кориолисовым взаимодействием. Расчет дифференциальных сечений передачи с учетом кориолисова смешивания по методу [52] показывает, что хотя примеси к каждому состоянию невелики, сечение изменяется заметно. Например, отношения сечений передачи на состояния $1/2^+$ [400] и $1/3^+$ [600] с учетом и без учета кориолисова смешивания различаются на 30%. Известно, что во вращательных полосах кориолисово смешивание увеличивается с ростом спина состояния, поэтому интересно исследовать сечения передачи на возбужденные вращательные состояния с большими K . В этом случае необходимо учитывать смешивание состояний с $\Delta K = \pm 1, \pm 2, \dots$

Итак, во многих случаях сечение однонуклонной передачи можно получить с такой же точностью, что и экспериментальные данные. Очевидно, этого можно добиться только тогда, когда заселяемые состояния являются с хорошей точностью одночастичными или квазичастичными, но тогда сечение нужно домножить на фактор u^2 или v^2 [55].

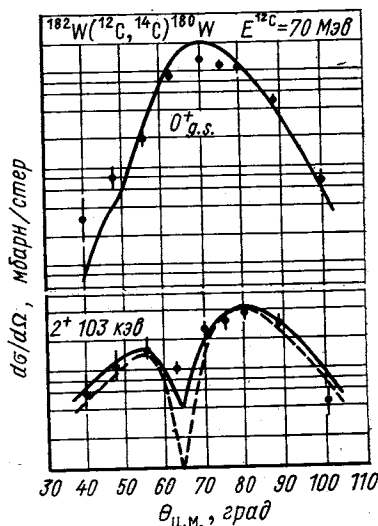
В последнее время появились работы [15, 18], где исследуются сечения двухнуклонных реакций передач на ядрах редкоземельных элементов. Форм-факторы двухнуклонных реакций передач разлагаются по функциям Штурма — Лиувилля в WDP-приближении с $\varepsilon = E/2$, где E — энергия отделения двух нуклонов, используется спаривание в приближении $G = \text{const}$ и учитываются виртуальные возбуждения 0^+ , 2^+ и 4^+ -состояний ядра-мишени

и ядра-продукта, но амплитуда передачи вычислена в первом борновском приближении. В результате для реакции $^{182}\text{W}(^{12}\text{C}, ^{14}\text{C})^{180}\text{W}$ при энергии относительного движения 70 Мэв получено хорошее описание дифференциальных сечений передач, заселяющих 0^{+} - и 2^{+} -состояния (рис. 8), однако абсолютное значение теоретического сечения меньше экспериментального в 1,5 раза. Это отличие небольшое, и оно может быть уменьшено, если учесть второй порядок борновского приближения [41].

Описанный выше метод можно применить и для исследования реакций передач на ядрах, имеющих колебательный спектр уров-

Рис. 8. Экспериментальные и теоретические (по методу связанных каналов) дифференциальные сечения реакций передач $^{182}\text{W}(^{12}\text{C}, ^{14}\text{C})^{180}\text{W}$ на 0^{+} - и 2^{+} -состояния основной вращательной полосы ^{180}W .

Расчеты включают все неупругие процессы и учитывают одновременную передачу двух нейтронов на 0^{+} -, 2^{+} -, 4^{+} -состояния основной полосы ядер ^{182}W и ^{180}W . Теоретические кривые умножены на 1,5. Сплошные кривые соответствуют форм-факторам, рассчитанным для $E/2$, где E — энергия отделения двух нейтронов в ^{182}W . Пунктирная кривая — энергии, равные энергиям отделения одного нейтрона в ^{182}W (см. [18]).



ней. Однако в этих случаях адиабатическое приближение неприменимо, следовательно, для каждого канала многоступенчатого срыва необходимо иметь свой базисный набор функций Штурма — Лиувилля с различными энергиями, определяющимися из закона сохранения энергии. Детали вычислений можно найти в работе [14].

Итак, одно- и двухнуклонные реакции передач на деформированных ядрах, заселяющие низколежащие состояния, можно исследовать с помощью волновых функций, полученных разложением по базисным функциям Штурма — Лиувилля в приближении МСК. Как мы уже видели, для высоких возбуждений этот метод применить прямо не удастся. Очевидно, что структура ядерных состояний с увеличением энергии возбуждений теряет свою простоту и волновая функция является сложной суперпозицией одночастичных возбуждений и возбуждений остова ядра. Структуру высоковозбужденных состояний можно описать с помощью

полумикроскопического подхода, развитого в работах [64, 65], тогда можно прямо применить один из методов, описанных в настоящей статье, для вычисления сечений передач на каждое из рассматриваемых состояний. Однако при таких достаточно высоких возбуждениях разумнее иметь дело с усредненными характеристиками ядра по определенному интервалу энергий, поэтому инте-

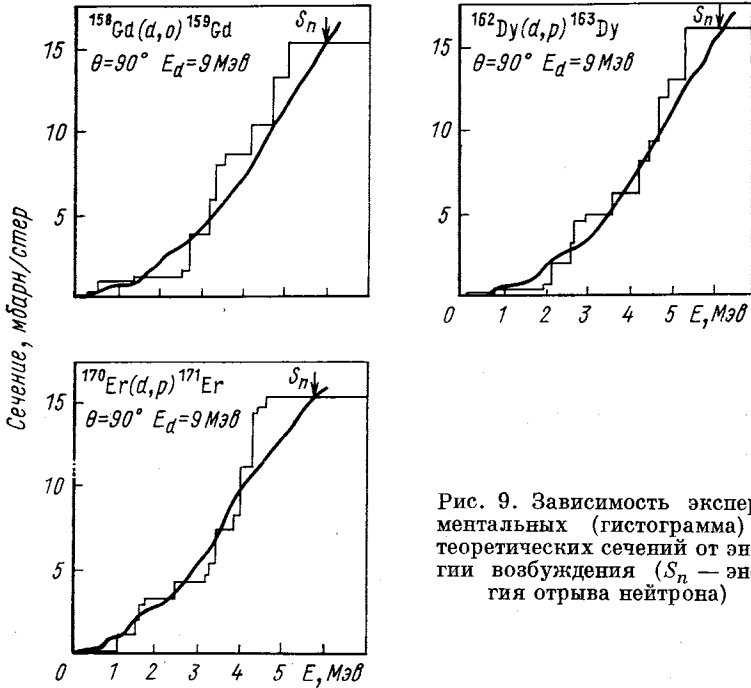


Рис. 9. Зависимость экспериментальных (гистограмма) и теоретических сечений от энергии возбуждения (S_n — энергия отрыва нейтрона)

ресно попытаться применить статистический подход для описания сечения передач на высоковозбужденные состояния. Более удачные базисы, как и раньше, для слабосвязанных одночастичных состояний деформированных ядер, — функции Штурма — Лиувилля, поскольку вопросы асимптотического поведения волновых функций в этом случае очень важны (см. рис. 1, 2). В работе [66] сечения, полученные с такими форм-факторами в приближении МИВ, усреднялись по распределению Лоренца. На рис. 9 приведены интегрированные сечения и видно неплохое совпадение с экспериментом, несмотря на достаточно приближенный характер вычислений.

Полезность статического усреднения и успешность сравнения с экспериментом усредненных характеристик, полученных в полумикроскопической модели [64, 65], наталкивают на мысль, что

при таких усреднениях не очень важны тонкая структура состояний и точность допущенных приближений. Если это положение справедливо, то можно ввести комплексное среднее поле, зависящее от энергии, так, как это делается в оптической модели или при расчете полной энергии ядра и в реакциях квазиупругого выбивания нуклонов [39, 40]. Тогда мнимая часть комплексного потенциала будет ответственна за усреднение, в формулах для сечения появятся множители типа распределения Лоренца [39, 40], которые будут равны единице для чисто одночастичного срыва и меньше единицы и размыты по энергии для сложного состояния, заселяемого при передаче.

Результаты, представленные в этом разделе, ясно показывают, что метод Штурма — Лиувилля вычисления одночастичных состояний в деформированном среднем поле совместно с МСК можно применить для описания реакций передач на состояния с малой энергией возбуждения и на высоковозбужденные состояния, причем во многих случаях сечение передачи получается с такой же точностью, что и экспериментальные данные.

5. СФЕРИЧЕСКИЕ ЯДРА

Современное состояние теории реакции однонуклонных передач на сферических ядрах достаточно полно представлено в обзорной работе [22]. Использование функций Штурма — Лиувилля при вычислении форм-факторов для таких реакций позволило выяснить точность других методов и указать пределы их применимости.

В этом разделе обсудим некоторые проблемы, возникающие при исследовании двухнуклонных реакций передач на сферических ядрах. Ситуация здесь гораздо сложнее, чем в однонуклонном случае. Абсолютные значения теоретических сечений двухнуклонных реакций передач между сложными ионами меньше экспериментальных в $3 \div 10^3$ раз. Это связано с неясностью самого механизма двухнуклонных реакций передач и со сложностью описания асимптотического поведения двухнуклонных форм-факторов. Долгое время была надежда, что взаимодействия между каналами реакций малы и, следовательно, достаточно ограничиться первым порядком теории возмущений. Однако оказалось (см., например, обзор [45] и ссылки в нем), что переходы на низколежащие коллективные состояния сильно изменены неупругими возбуждениями. Поэтому одноступенчатый МИВ был изменен таким образом, чтобы включить в рассмотрение неупругие возбуждения. Это и есть метод связанных каналов, который все еще процесс передач нуклонов рассматривает как одноступенчатый. (Это приближение оказалось вполне удовлетворительным для однонуклонных передач; см. [22] и результаты разд. 4.)

Естественно, что такое рассмотрение неупругого рассеяния и процесса передач не может вызывать удовлетворения. В дальнейшем одноступенчатость при изучении реакций передач была устранена [20, 41—43], и оказалось, что второй порядок борновского приближения дает вклад в сечение, сравнимый с первым порядком. Подробности и численные примеры можно найти в указанных выше работах.

Рассмотрим сейчас простейший случай двух тождественных частиц, взаимодействующих друг с другом и с инертным кором. Основное предположение состоит в том, что остаточные взаимодействия между частицами малы, так что связанных состояний двух частиц не существует. Инертный кор предполагаем бесконечно тяжелым, и таким образом наша система состоит из двух тождественных частиц вне замкнутых оболочек (например, ^{42}Ca , ^{210}Pb). Несмотря на простоту, рассматриваемая система сохраняет основные характерные черты многочастичных систем, и методы решения, пригодные для решения простого случая, можно обобщить.

Итак, решим следующее уравнение Шредингера:

$$(H_0 + \lambda^{(1)}V(r_1) + \lambda^{(2)}V(r_2) + \gamma V_{12}(r_{12}) - E)\Psi = 0, \quad (64)$$

где V_{12} — двухчастичные остаточные взаимодействия; $V(r_1)$ и $V(r_2)$ можно брать в виде (3). Для простоты пренебрежем кулоновскими и спин-орбитальными силами и опустим везде спиновые индексы, хотя в конкретных вычислениях они включены явно [17, 24, 25, 68]. Был предложен ряд приближенных методов решения уравнения (62), однако наиболее точными среди них можно признать только два: разложение по функциям гармонического осциллятора [41, 69] и разложение по базисным функциям Штурма — Лиувилля. В разд. 2 были приведены некоторые соображения о сходимости различных методов, так что и в этом случае разложения по функциям Штурма — Лиувилля должны быстро сходиться. Подобие главных компонент разложения Штурма — Лиувилля и разложения по оболочечным функциям облегчает сравнение этих двух методов и гарантирует приближительную одинаковость описания некоторых свойств ядра, определяемых внутренними частями волновых функций. Однако одинаковость главных компонент не означает соответствия и других свойств ядра, определяемых малыми коэффициентами смешивания.

Можно предположить, что глубины потенциалов $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$ приближительно известны, тогда энергии E можно подогнать к экспериментальным значениям вариацией параметров остаточного взаимодействия. Эта процедура применяется в модели оболочек, и мы поступали таким же образом, но дополнительно исследовали амплитуды передачи, требуя хорошего описания сечений. При этом был использован хорошо известный факт, что

остаточные взаимодействия между валентными нуклонами не совпадают с остаточными взаимодействиями между свободными частицами и это отличие невозможно установить из основных принципов.

Другая трудность состоит в вычислительной сложности, если мы захотим применить более реалистические межнуклонные силы. Очень часто этой сложностью оправдывают использование модельных сил типа сил спаривания или δ -сил. Однако при работе с модельными силами мы должны соблюдать некоторую осторожность, особенно при изменении размерности конфигурационного пространства, в котором происходит диагонализация гамильтониана. В общем модельные силы содержат некоторые параметры, которые фиксируются в определенном пространстве базисных функций так, чтобы ряд величин (например, энергии) имел значения, совпадающие с экспериментальными. Если же расширить базис, то необходимо изменить эти параметры так, чтобы сохранить имевшееся согласие. Как хорошо известно, для спаривания с $G = \text{const}$ процесс расходится в том смысле, что если зафиксировать парную щель, то константа парных сил будет стремиться к нулю при бесконечном увеличении числа базисных состояний. Та же ситуация и для δ -сил [70]. Для некоторых физических свойств ядра расходимость такого типа несущественна, как, например, в спектроскопических расчетах при учете спаривания. Однако если коэффициенты смешивания для высоких орбиталей плохо определены, то их уже нельзя использовать для вычисления амплитуды передачи, так как это может привести к нефизическому результату. В таком случае необходимо вводить более реалистические силы или работать в обрезанном базисе, что и делается обычно в конкретных расчетах.

Асимптотическое поведение волновых функций связанных состояний трехчастичных систем достаточно полно изучено в работе [71], и мы здесь кратко сравним наши результаты с результатами этой работы. Пусть одночастичная энергия связи

$$-E_1 = \kappa_1^2,$$

а двухчастичную энергию связи обозначим

$$E_2 = -E = \kappa^2.$$

Разделим 6-мерное конфигурационное пространство нашей системы на три области:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } r_2^2 (E_2 - E_1) < r_1^2 E_1; \\ \text{б) } r_1^2 E_1 < r_2^2 (E_2 - E_1); \quad r_2^2 E_1 < r_1^2 (E_2 - E_1); \\ \text{в) } r_1^2 (E_2 - E_1) < r_2^2 E_1. \end{array} \right\} \quad (65)$$

Асимптотическое поведение волновой функции в каждой из областей имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } & \exp[-\kappa_1 r_2 - (\kappa^2 - \kappa_1^2)^{1/2} r_1] / r_1 r_2; \\ \text{б) } & \exp[-\kappa r] / r^{5/2}; \\ \text{в) } & \exp[-\kappa_1 r_1 - (\kappa^2 - \kappa_1^2)^{1/2} r_2] / r_1 r_2, \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

где $r^2 = r_1^2 + r_2^2$. Очевидное различие этих выражений в размерностях не должно смущать, так как (66а, в) соответствуют элементу объема в пространстве $r_1^2 dr_1 r_2^2 dr_2 d\Omega_1 d\Omega_2$, а (66б) — в пространстве $r^5 dr d\Omega$. Если бы два нуклона имели связанное состояние, тогда мы должны были бы рассмотреть асимптотическое поведение еще в одной области, лежащей внутри области (66б). Когда мы говорим об асимптотике функций, то имеем в виду поведение функций при таком изменении r_1 и r_2 , чтобы $r \rightarrow \infty$, причем в каждой области эта функция умножается на функцию от углов и от r_1/r_2 .

Формулы (66) справедливы на 5-мерных поверхностях при постоянном значении r , при меньших размерностях для фиксированного r возможны другие поверхности. В частности, в переходных зонах между областями «а» и «б», «б» и «в» координатная асимптотика описывается с помощью функций ошибок. Итак, асимптотическое поведение волновых функций связанных состояний слишком сложно, чтобы построить соответствующий базис Штурма — Лиувилля. Можно сконструировать простой базис для каждой из трех областей, но получить простой базис для всех трех областей одновременно невозможно.

Реально, однако, можно воспользоваться тем, что энергия связи, обусловленная остаточными силами, положительна и намного меньше, чем полная энергия связи:

$$\kappa^2 = 2(\kappa_1^2 + \kappa'^2), \quad 0 < \kappa'^2 \leq \kappa^2. \quad (67)$$

Поэтому можно ввести набор функций с асимптотическими свойствами:

$$\left. \begin{aligned} \psi & \sim \exp[-\kappa_h(r_1 + r_2)] / r_1 r_2; \\ \kappa_h^2 & = \kappa^2 / 2. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Тогда отличие асимптотики (68) от правильной (66) будет определяться следующими соотношениями в соответствующих обла-

СТЯХ:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } a_a &\sim \exp \{r_2 (\kappa_1 - \kappa_h) + r_2 [(\kappa^2 - \kappa_1^2)^{1/2} - \kappa_h]\} \approx \\ &\approx \exp [\kappa'^2 (r_1 - r_2)/2\kappa_1]; \\ \text{б) } a_b &\sim \exp \{-[(r_1 + r_2) + \sqrt{2(r_1^2 + r_2^2)}] (\kappa_1^2 + \kappa'^2)^{1/2}\}; \\ \text{в) } a_b &\sim \exp \{r_1 (\kappa_1 - \kappa_h) + r_2 [(\kappa^2 - \kappa_1^2)^{1/2} - \kappa_h]\} \approx \\ &\approx \exp [\kappa'^2 (r_2 - r_1)/2\kappa_1]. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Соотношения (69) справедливы, если выполнено условие

$$1 - 2\kappa'^2/\kappa_1^2 < r_2/r_1 < 1 + 2\kappa'^2/\kappa_1^2. \quad (70)$$

Однако это условие получено приближенно.

Далее обозначим $r' = r_2 - r_1$ и (69) перепишем в виде

$$\left. \begin{aligned} a_a &\sim a_b \sim \exp (r'\kappa'^2/2\kappa_1); \\ a_b &\sim \exp [(\kappa_1^2 + \kappa'^2)^{1/2} r'^2/4r_1] \approx \\ &\approx \exp [(\kappa_1^2 + \kappa'^2)^{1/2} (\kappa'^2/\kappa_1^2) (r'/2)] \approx \exp [r'\kappa'^2/2\kappa_1]. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Итак, при малых значениях κ' асимптотика волновой функции завышена при использовании (68) на фактор $\ll \exp (r'\kappa'^2/2\kappa_1)$, и, например, для интеграла перекрытия (^{208}Pb , ^{210}Pb) получаем $\kappa'^2/\kappa_1^2 \sim 0,1$, $\kappa_1 = 0,5$ ферми $^{-1}$, так что при $r' \geq 10$ ферми погрешность $\approx 25\%$. Очевидно, что амплитуда передачи будет мала на расстояниях $r' \geq 10$ ферми. Для одноступенчатой двухнуклонной передачи погрешность еще меньше.

Асимптотическое выражение (68) определяет набор функций Штурма — Лиувилля, удовлетворяющих уравнению

$$(-\Delta + \lambda_i V + \kappa_h^2) f_i = 0. \quad (72)$$

Безусловно, можно выбрать два других набора функций Штурма — Лиувилля, удовлетворяющих следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} [-\Delta_1 + \lambda_i V + (\kappa^2 - \kappa_1^2)] f_i (r_1) &= 0; \\ [-\Delta_2 + \lambda_j V + \kappa_1^2] f_j (r_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Эти функции будут давать корректное асимптотическое поведение в области «а», но не в области «в». Чтобы исправить это положение и соответственно антисимметризовать волновые функции, можно добавить набор функций, удовлетворяющих тем же уравнениям (73), но r_1 и r_2 должны быть переставлены. Тогда нарушаются свойства ортогональности между разными наборами и в области «б» требуется тоже другой набор функций.

Физические причины делают некоторые области пространства более важными по сравнению с другими областями. В одночастичной передаче исследуем область малых r_1 при произвольных r_2

(или наоборот). Для таких вычислений базисные функции (73) идеальны при условии соответствующей антисимметризации.

Воспользуемся возможностью выбрать различные энергии для базисных состояний $\{f^{(1)} f^{(2)}\}$:

$$\left. \begin{aligned} (H_{01} + \lambda_n^{(1)} V^{(1)} - \varepsilon_1) f_n^{(1)} &= 0; \\ (H_{02} + \lambda_m^{(2)} V^{(2)} - \varepsilon_2) f_m^{(2)} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

и разложим

$$\Psi(r_1, r_2) = \sum c_{mn} f_m^{(1)} f_n^{(2)}. \quad (75)$$

Подставляя (75) в (64), умножая слева на $f_k^{(1)*} f_l^{(2)*}$ и интегрируя, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{mn} c_{mn} [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - E) \langle kl | mn \rangle + \gamma \langle kl | V_{12} | mn \rangle - \\ - (\lambda^{(1)} - \lambda_m^{(1)}) \langle l | n \rangle_2 \delta_{km} - (\lambda^{(2)} - \lambda_n^{(2)}) \langle k | m \rangle_1 \delta_{ln}] = 0. \end{aligned} \quad (76)$$

Если же умножить уравнение (64) на $V^{(1)} V^{(2)} f_k^{(1)*} f_l^{(2)*}$, то получим

$$\begin{aligned} \sum_{mn} c_{mn} [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - E) \delta_{kn} \delta_{lm} + \gamma \langle kl | V^{(1)} V^{(2)} V_{12} | mn \rangle - \\ - (\lambda^{(1)} - \lambda_m^{(1)}) \delta_{ln} \langle k | V^{(1)2} | m \rangle_1 - (\lambda^{(2)} - \lambda_n^{(2)}) \delta_{km} \langle l | V^{(2)2} | n \rangle_2] = 0, \end{aligned} \quad (77)$$

где $\langle l | n \rangle = \int f_l^* f_n d\tau$ и т. д.

И опять сталкиваемся с возможностью выбора различных методов диагонализации, как это описано в разд. 2. Обе системы можно записать в виде

$$\{EA + \lambda^{(1)} B_1 + \lambda^{(2)} B_2 + \gamma C + R\} c = 0, \quad (78)$$

где A, B_1, B_2 и C — эрмитовы матрицы.

Однако R эрмитова только для (76), и если даже вычислительные соображения говорят о предпочтительности (77), то соображения, приведенные в разд. 2, приводят нас к необходимости выбрать (76). Систему (76) можно продиагонализировать четырьмя различными способами, в каждом из которых рассматривается один из четырех параметров $E, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$ и γ как собственное значение. Для обрезанного базиса $\{f^{(1)}, f^{(2)}\}_M$ диагонализация дает M независимых функций

$$F^{(i)} = \sum c_{mn}^{(i)} f_m^{(1)} f_n^{(2)}, \quad (79)$$

так что в результате имеем функции Штурма — Лиувилля для двухчастичной задачи, которые вновь образуют полный набор.

Даже если все матрицы A, B_1, B_2, C и R эрмитовы, то полная матрица, которую необходимо продиагонализировать для получения E как собственного значения, не обязательно эрмитова:

$$E + A^{(-1)} (\lambda^{(1)} B_1 + \lambda^{(2)} B_2 + \gamma C + R) c = 0. \quad (80)$$

В некоторых важных случаях ее можно продиагонализировать простым образом (см., например, [17]).

В методе разложения по функциям Штурма — Лиувилля, как во всех приближенных методах ядерной физики, мы встречаемся с проблемой учета принципа Паули. Она состоит в том, что решения точного гамильтониана, симметричного по всем частицам, должны быть симметричны или антисимметричны по координатам всех частиц. Это требование не выполняется при работе с обр-

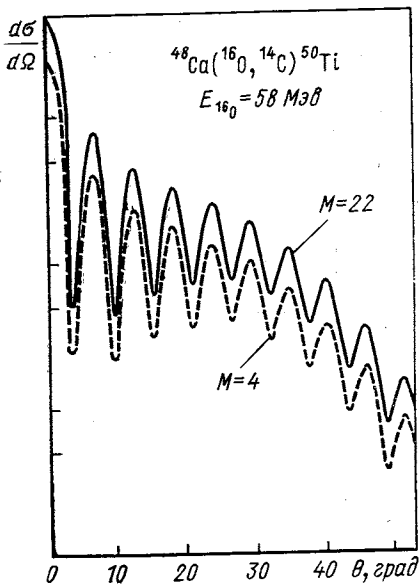


Рис. 10. Рассчитанные сечения двух-протонной передачи при разных значениях ранга M матрицы (76)

занным базисом, в особенности если заполненные оболочки идентифицировать с инертным кором ядра.

Можно надеяться, что лучшими волновыми функциями будут те, которые дают экстремум гамильтониана и ортогональны к занятым состояниям кора. Это было сделано в работе [25] методом, предложенным в работе [34]. В гамильтониан добавлен член, который является проекционным оператором на занятые одно-и двухчастичные состояния, умноженным на константу T :

$$\tilde{H} = H + T \sum_i |i\rangle \langle i|. \quad (81)$$

Если T очень велико, \tilde{H} будет иметь собственные функции, которые очень близки к $|i\rangle$, а собственные значения близки к T :

$$\tilde{H} |i\rangle \approx T |i\rangle. \quad (82)$$

Эти утверждения можно доказать следующим образом. Пусть известно решение уравнения с гамильтонианом H :

$$H\Psi = E\Psi, \quad (83)$$

тогда решение уравнения с эффективным гамильтонианом \tilde{H} ($\tilde{H}\tilde{\Psi} = \tilde{E}\tilde{\Psi}$) будет

$$|\tilde{\Psi}\rangle = |\Psi\rangle + TG(E) \sum_i |i\rangle \langle i|\tilde{\Psi}\rangle, \quad (84)$$

где $G(E)$ — оператор функции Грина. Из соотношения (84) легко получить:

$$\langle i|\tilde{\Psi}\rangle = \sum_j [\langle i|1 - TG(E)|j\rangle]^{-1} \langle j|\Psi\rangle, \quad (85)$$

следовательно, $\lim_{T \rightarrow \infty} \langle i | \tilde{\Psi} \rangle = 0$. Это означает, что полученная волновая функция $\tilde{\Psi}$ будет ортогональна всем одно- и двухчастичным занятым состояниям $|i\rangle$ кора и даст желаемый экстремум гамильтониана. Детали и численные примеры можно найти в работе [25]. В заключение этого раздела приведем (рис. 10) сечение двухпротонной передачи в реакции $^{48}\text{Ca}(^{16}\text{O}, ^{14}\text{C})^{50}\text{Ti}$ при энергии налетающего иона 58 Мэв . Различие в двух приведенных сечениях ясно показывает эффект влияния увеличения конфигурационного пространства на вычисленные сечения.

Как уже говорилось, абсолютные значения сечений двухнуклонных передач, полученные теоретически, как правило, меньше экспериментальных, за исключением нескольких случаев. Однако мы не ставили задачу получения значений абсолютных сечений, так как тогда необходимо было бы рассмотреть более тщательно механизм реакций. Мы же хотели подчеркнуть важность тщательного изучения асимптотического поведения форм-факторов двухнуклонных передач и продемонстрировать метод, подходящий для достижения этой цели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный обзор позволяет сделать вывод, насколько полезно использование функций Штурма — Лиувилля для вычисления волновых функций связанных состояний ядер и амплитуд реакций передач. Их преимущество по сравнению с другими базисными функциями очевидно: метод разложения по функциям Штурма — Лиувилля позволяет, используя даже несколько членов разложения, получить все основные важные характерные особенности решения исследуемой задачи. Более того, метод подгонки глубины ямы, часто применяемый в расчетах форм-факторов прямых ядерных реакций однонуклонных передач, соответствует сохранению в разложении по функциям Штурма — Лиувилля одной главной компоненты. В этом смысле метод разложения по функциям Штурма — Лиувилля является обобщением метода подгонки глубины ямы и позволяет обосновать его применимость в конкретных случаях.

Свойства сходимости (25) и (29) разложений Ψ по функциям Штурма — Лиувилля означают, что любую непрерывную квадратично-интегрируемую функцию, удовлетворяющую уравнению Шредингера с $\epsilon = E$, можно вычислить с любой заранее заданной точностью в конечной области, причем гарантируется равномерная логарифмическая сходимость полученных рядов в важной области $r \rightarrow \infty$. Что касается проблемы собственных значений, наше исследование различных возможностей диагонализации,

предложенных в литературе, указывает на предпочтительность эрмитовых методов по сравнению с другими.

Трудности обобщения метода для многочастичных систем очевидны, но те же трудности имеются и в других методах, однако связь функций Штурма — Лиувилля с оболочечными, по крайней мере в некоторых случаях, вместе со свойствами полноты и равномерной и абсолютной сходимости говорит в пользу обсуждаемого метода разложения. Здесь не рассматривались релятивистские задачи, но можно надеяться, что уравнения Клейна — Гордона или Дирака можно рассматривать так же, как и уравнение Шредингера.

Аналогичный метод для несвязанных состояний — метод разложения по функциям Вайнберга. Эти функции для положительной энергии образуют полный набор [72], однако до сих пор в ядерной физике они не получили распространения.

Авторы признательны проф. В. Г. Соловьеву и проф. О. Бору за ценные обсуждения вопросов, затронутых в данном обзоре. Авторы благодарны сотрудникам Института Нильса Бора и ЛТФ ОИЯИ за полезные обсуждения, Один из авторов (Ф. А. Гареев) благодарен сотрудникам Института Нильса Бора за любезное гостеприимство, другой (Е. Банг) — ЛТФ ОИЯИ за предоставленную возможность работать в этой лаборатории.

В заключение мы хотим поблагодарить Г. М. Ваградова, Й. М. Вогена, Р. М. Ямалеева, Б. С. Нильссона, К. Дассо и М. Игараши, в сотрудничестве с которыми были получены результаты, представленные в настоящем обзоре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Epstein P. S. «Phys. Rev.», 1926, v. 28, p. 695.
2. Pauling L., Bright Wilson E. Introduction to quantum mechanics with application to chemistry. N. Y., McGraw-Hill, 1935.
3. Rotenberg M. «Ann. Phys.», 1962, v. 19, p. 262.
4. Chen J. C. Y.; Ishihara T. «Phys. Rev.», 1969, v. 186, p. 25.
5. Gallaher D. F., Wilets L. «Phys. Rev.», 1968, v. 169, p. 139.
6. Rotenberg M. «Advances Atomic and Molecul. Phys.», 1970, v. 6, p. 233 (See Ref. therein); Захарьев Б. Н. Препринт ОИЯИ P-2825. Дубна, 1966.
7. Chen J. C. Y. «Advances Atomic and Molecul. Phys.», 1972, v. 8; ICPEAC, 1971. North-Holland, 1972.
8. Geltman S. ICPEAC, 1971. North-Holland, 1972.
9. Andersen B. L., Bang J., Petersen D. Contributions J.C.N.S., Tokyo, 1967, N 812.
10. Gareev F. A., Ivanova S. P., Shirikova N. J. Preprint P4-5351. Dubna, 1970; TMF, 1971, v. 8, p. 97.
11. Andersen B. L., Back B. V., Bang J. M. «Nucl. Phys. A», 1970, v. 147, p. 33.
12. Schulz H., Wiebicke H. J., Gareev F. A. «Nucl. Phys. A», 1972, v. 180, p. 625.
13. Johnson R. C., Tandy P. C. «Nucl. Phys. A», 1974, v. 235, p. 56.
14. Gareev F. A. e.a. «Nucl. Phys. A», 1973, v. 215, p. 570.

15. Vaagen J. S., Ascuitto R. J. «Nucl. Phys. A», 1976, v. 260, p. 317.
16. Bang J. e.a. «Phys. Scripta», 1974, v. 10, p. 115.
17. Bang J. e.a. «Nucl. Phys. A», 1976, v. 264, p. 157.
18. Hanson D. L. e.a. «Nucl. Phys. A», 1976, v. 269, p. 520.
19. Банг Е. Докт. дис. Копенгаген, 1976.
20. Low K. S. «J. Phys. C», 1976, v. 5, p. 15.
21. Erskine J. R. «Phys. Rev. C», 1972, v. 5, p. 959.
22. Банг Е. и др. «ЭЧАЯ», 1974, т. 5, вып. 2, с. 263.
23. Ibarra R. H., Bayaman B. E. «Phys. Rev. C», 1970, v. 1, p. 1786.
24. Bang J., Gareev F. A., Jamalejev R. M. «Phys. Lett. B», 1974, v. 49, p. 239.
25. Bang J., Gareev F. A. «Nucl. Phys. A», 1974, v. 232, p. 45.
26. Yates M. J. L. «Nucl. Phys.», 1964, v. 59, p. 561.
27. Bang J. M., Gareev F. A. Preprint JINR E2-10624. Dubna, 1977.
28. Bang J. M., Gareev F. A. Preprint JINR E2-10625. Dubna, 1977.
29. Гареев Ф. А. и др. Препринт ОИЯИ 11-8081. Дубна, 1974.
30. Гареев Ф. А. и др. «Ядерная физика», 1975, т. 22, с. 1136.
31. Немировский П. Э., Чепурнов В. А. «Ядерная физика», 1966, т. 3, с. 998.
32. Rost E. «Phys. Rev.», 1967, v. 154, p. 997.
33. Sturm J. C. F. *Memories presentes des Savants Etrangers* 1935, v. 6, p. 271; Liouville J. «J. Math.», 1846, v. 11, p. 221.
34. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. N. Y., Intern. Science Publ., 1953; Титчмарш Э. Г. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
35. Mercer T. «Trans. Lond. Phil. Soc. A», 1909, v. 209, p. 415.
36. Морс Ф. М., Фешбах Г. *Методы теоретической физики*. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
37. Johnson R. C., Soper P. J. R. «Phys. Rev. C», 1970, v. 1, p. 976.
38. Farrell J. P., Jr., Vincent C. M., Austern N. «Ann. Phys.», 1976, v. 96, p. 333.
39. Ваградов Г. М., Горчаков В. В. «ЭЧАЯ», 1974, т. 5, вып. 2, с. 308.
40. Vagradov G. M., Gareev F. A., Bang J. Preprint NBI. 1976; «Nucl. Phys. A», 1977, v. 278, p. 319.
41. Feng D. H., Udagawa T., Tamura T. Preprint University of Texas. 1976.
42. Gotz U. e.a. «Phys. Repts C», 1975, v. 16, p. 117.
43. Tamura T. «Phys. Repts C», 1974, v. 14, p. 61.
44. Austern N. *Direct Nuclear Reaction Theories*. N. Y., 1970; Tobocman W. *The Theory of Direct Nuclear Reactions*. Oxford, 1961; Hodgson P. E. *Nuclear Reactions and Nuclear Structure*. N. Y., 1971.
45. Вибике Х., Лукьянов В. К., Шульц Г. «ЭЧАЯ», 1972, т. 3, вып. 4, с. 991.
46. Bang J., Wollesen S. «Phys. Lett. B», 1970, v. 33, p. 395.
47. Feng D. H., Udagawa T., Tamura T. «Phys. Rev. C», 1976, v. 14, p. 1484.
48. De Vries R. M. «Phys. Rev. C», 1973, v. 8, p. 951.
49. Broglia R. A. e.a. «Phys. Repts», to be published.
50. Broglia R. A., Winter A. «Phys. Repts C», 1972, v. 4, p. 155.
51. Kerman A. K. «Kgl. danske vid. selskab. Mat.-fys. medd.», 1956, Bd 30, N 15.
52. Ryatov N. I., Chernej M. I., Vaznat M. I. «Phys. Scripta», 1972, v. 6, p. 227; Пятов Н. И., Черней М. И., Вазнат М. И. «ЭЧАЯ», 1973, т. 4, вып. 4, с. 941.
53. Гареев Ф. А. и др. «ЭЧАЯ», 1973, т. 4, вып. 2, с. 357.
54. Gareev F. A. e.a. «Nucl. Phys. A», 1971, v. 171, p. 194.
55. Соловьев В. Г. *Теория сложных ядер*. М., «Наука», 1971.
56. Гареев Ф. А., Федотов С. И., Соловьев В. Г. «Ядерная физика», 1971, т. 14, с. 1165.
57. Andersen B. L. «Nucl. Phys. A», 1971, v. 162, p. 208.
58. Чепурнов В. А. Препринт ИАЭ-1447. 1967.

59. Гареев Ф. А. и др. «Ядерная физика», 1973, т. 17, с. 761.
60. Гареев Ф. А. и др. Препринт ОИЯИ Е4-7596. Дубна 1973.
61. Elbek B., Tjom P. O. «Advances Nucl. Phys.», 1969, v. 3, p. 259.
62. Andersen B. L. «Nucl. Phys. A», 1968, v. 112, p. 443.
63. Wiebicke H. J., Kuchtina I., Schulz H. Preprint JINR B-4-6139. Dubna, 1972.
64. Соловьев В. Г. «ЭЧАЯ», 1972, т. 3, вып. 4, с. 310; Soloviev V. G., Malov L. A. «Nucl. Phys. A», 1972, v. 196, p. 33.
65. Вдовин А. И. и др. «ЭЧАЯ», 1976, т. 7, вып. 4, с. 952.
66. Back B. B. e.a. «Nucl. Phys. A», 1974, v. 222, p. 377.
67. Malov L. A., Nesterenko V. O., Soloviev V. G. Preprint JINR E4-10165. Dubna, 1976; Malov L. A., Soloviev V. G. «Nucl. Phys. A», 1976, v. 270, p. 87.
68. Bang J. e.a. «Phys. Lett. B», 1974, v. 53, p. 143.
69. Ibarra R. H., Vallieres M. «Nucl. Phys. A», 1975, v. 241, p. 386.
70. Банг Е., Гареев Ф. А., Базнат М. И. Препринт ОИЯИ Е4-10691. Дубна, 1977.
71. Меркурьев С. П. «Ядерная физика», 1974, т. 19, с. 447.
72. Meetz K. «J. Math. Phys.», 1962, v. 3, p. 690.