

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

Я. Визнер

Политехнический институт,
Прага

Е. П. Жидков

Объединенный институт ядерных исследований,
Дубна

В. Делек

Институт ядерных исследований,
Ржеж

Р. В. Мальшев, Б. Н. Хоромский, Е. Х. Христов

Объединенный институт ядерных исследований,
Дубна

И. Улсгла

Карлов университет,
Прага

Проведено аналитическое исследование решения обратной задачи рассеяния для радиального уравнения Шредингера на основе уравнения для непрерывного аналога метода Ньютона. Показано, что некоторые из полученных здесь уравнений допускают первые интегралы, аналогичные известным для уравнения Кортевега — де Фриза. Предложен устойчивый итерационный алгоритм для нахождения потенциала по данным рассеяния.

There are performed on analytical investigation of solution the inverse scattering problem for radial Schrödinger equation by the equation for continuous analog of Newton's method. It is shown that some of equations obtained here have first integral similar to the well known of the Korteweg—de Vries equation. It is suggested a stable iterative algorithm for construction the potential from the scattering data.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается обратная задача рассеяния (ОЗР) в рамках двухчастичного потенциального рассеяния для случая локального взаимодействия, зависящего только от расстояния между частицами. Этой задаче посвящена обширная литература, и основные методы ее решения имеют уже хрестоматийный характер, поэтому мы не будем перечислять все доводы «за» и «против» рассмотрения реальных физических задач в рамках потенциального подхода. Отметим лишь, что важным критерием применимости к конкретной задаче того или иного аналитического метода является возможность его численной реализации. Здесь мы излагаем подходы к решению ОЗР, которые разрабатывались, главным образом, авторами этой работы. Основная цель, которую мы ставили перед собой, заключалась в том, чтобы показать, как некоторые общие функциональные методы решения нелинейных

операторных уравнений, приводящие к итерационным последовательностям ньютоновского типа и хорошо зарекомендовавшие себя при расчетах ряда задач теоретической физики [1], применяются к ОЗР. При аналитическом обосновании нашей методики важную роль играют подходы к решению ОЗР, строящиеся на основе фундаментальных работ И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [2], М. Г. Крейна [3], В. А. Марченко [4]. Им посвящена первая часть введения. Во второй части изложена функциональная сторона подхода, положенного в основу строящихся здесь уравнений, а также перечислены основные результаты, полученные в этой статье.

1. При сделанных общих предположениях о характере взаимодействия стационарное состояние системы из двух бесспиновых частиц с массами m_1 и m_2 и энергией $\mathcal{E} = k^2$ можно описать волновой функцией, удовлетворяющей следующему уравнению Шредингера:

$$-\Delta\Psi + v(x)\Psi = \mathcal{E}\Psi,$$

где $v(x)$ — потенциал взаимодействия; $x = |x|$ — относительное расстояние. Разлагая $\Psi(x)$ по сферическим гармоникам:

$$\Psi(x) = \sum_{l,m} x^{-l} \varphi_l(x, k) Y_{l,m}(\theta, \varphi),$$

получаем, что радиальная волновая функция $\varphi_l(x, k)$ ($l = 0, 1, \dots$) является решением дифференциального уравнения

$$y'' + [k^2 - l(l+1)x^{-2} - v(x)]y = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

и удовлетворяет краевому условию $\varphi_l(0, k) = 0$. При достаточно быстром убывании $v(x)$ при $x \rightarrow \infty$ [$v(x) = O(x^{-1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$] и вещественных k решение $\varphi_l(x, k)$ имеет асимптотику:

$$\varphi_l(x, k) \approx A_l(k) \sin(kx + (\pi/2)l - \eta_l(k)), \quad x \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Обратной задачей квантовой теории потенциального рассеяния называется задача о восстановлении уравнения Шредингера по известным значениям фазы рассеяния $\eta_l(k)$ при некоторых k и l . Мы придерживаемся постановки, в которой фаза задана при фиксированном значении углового момента l ($l = 0, 1, \dots$) и всех действительных k .

Уточним формулировки для случая $l = 0$, которому посвящена большая часть этой статьи, т. е. для краевой задачи, определяемой радиальным уравнением Шредингера:

$$y'' + (k^2 - v(x))y = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (2)$$

и краевым условием

$$y(0, k) = 0. \quad (3)$$

Потенциал $v(x)$ предполагается вещественной измеримой функцией, удовлетворяющей неравенству

$$\int_0^{\infty} x |v(x)| dx < \infty. \quad (4)$$

Обозначим $f(v; x, k)$ и $\varphi(v; x, k)$ основные решения уравнения (2), определяемые соответственно условиями

$$f(v; x, k) : \lim_{x \rightarrow \infty} f(v; x, k) \exp(-ikx) = 1, \quad \text{Im } k \geq 0; \quad (5)$$

$$\varphi(v; x, k) : \varphi(v; 0, k) = 0, \quad \varphi_x(v; 0, k) = 1, \quad (6)$$

и пусть $f(v; k)$ и $S(v; k)$ — функция Йоста и функция рассеяния задачи (2), (3):

$$f(v; k) = f(v; 0, k), \quad \text{Im } k \geq 0; \quad (7)$$

$$S(v; k) = f(v; -k)/f(v; k) = \exp\{-2i\eta(v; k)\}, \quad -\infty < k < \infty, \quad (8)$$

где $\eta(v; k)$ — уже введенная с помощью (1) ($l = 0$) фаза рассеяния. При условии (4) спектр оператора (2), (3) непрерывен на полуоси $k^2 > 0$ и состоит из конечного числа отрицательных собственных чисел $\{k_m^2\}_{m=1}^N$: $k_m = i\kappa_m$, $\kappa_m > 0$. Набор величин

$$s(v) = \{\eta(v; k), 0 \leq k < \infty; \kappa_m(v); C_m(v); m = 1, \dots, N\}, \quad (9)$$

где

$$C_m(v) = \left\{ \int_0^{\infty} \varphi^2(v; x, i\kappa_m) dx \right\}^{-1} \quad (10)$$

нормирующие множители для собственных функций $\varphi(v; x, i\kappa_m)$, называется данными рассеяния краевой задачи (2) — (3).

В. А. Марченко [4] и М. Г. Крейн [3] было показано, что набор $s(v)$ определяет однозначно задачу (2) — (3), при этом ими были найдены необходимые и достаточные условия (см. разд. 1), которым должны удовлетворять величины типа (9) для того, чтобы служить в качестве данных рассеяния дифференциального оператора (2) — (3). Аналогичные результаты были получены также в известных работах Левинсона [5], Йоста и Кона [6, 7]. Эффективные методы восстановления v разработаны, главным образом, в работах И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [2], а также в [3, 4],

в которых с помощью равенства Парсеваля

$$\sum_{m=1}^N C_m(v) \varphi(v; x, i\kappa_m) \varphi(v; y, i\kappa_m) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(v; x, k) \varphi(v; y, k) \frac{k^2 dk}{|f(v; k)|^2} = \delta(x-y) \quad (11)$$

и представлений

$$\varphi(v; x, k) = \frac{\sin kx}{k} + \int_0^x K(v; x, s) \frac{\sin ks}{k} ds; \quad (12)$$

$$f(v; x, k) = \exp(ikx) + \int_x^{\infty} L(v; x, s) \exp(iks) ds \quad (13)$$

были получены основные уравнения ОЗР. Эти уравнения сводят задачу о нахождении v к решению уравнений Фредгольма второго рода, ядра и свободные члены которых строятся элементарным образом по $s(v)$. Названные методы взаимосвязаны [8], и мы приведем только имеющее непосредственное отношение к основному тексту уравнение Марченко [4]:

$$F(x+y) + L(x, y) + \int_x^{\infty} L(x, s) F(s+y) ds = 0, \quad x \leq y < \infty. \quad (14)$$

Здесь функция $F(x)$ строится по данным рассеяния формулой

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - S(k)\} \exp(ikx) dx + \sum_{m=1}^N M_m \exp(-\kappa_m x), \quad 0 < x < \infty, \quad (15)$$

где $S(k)$ —функция рассеяния (8); $M_m(v) = \left\{ \int_0^{\infty} f^2(v; x, i\kappa_m) dx \right\}^{-1}$.

Уравнение (14) при любом $x > 0$ однозначно разрешимо относительно функции $L(x, y)$, $x \leq y < \infty$. Искомый потенциал определяется формулой $v(x) = -2dL(x, x)/dx$.

Обзор перечисленных результатов по ОЗР вместе с рядом последовавших за ними обобщений и приложений содержится в работах Л. Д. Фаддеева [8, 9], Альфаро и Редже [10] и Ньютона [11], где проводится детальное обсуждение физических аспектов возможных постановок обратных задач в квантовой механике и имеется подробная библиография.

2. Методы ОЗР в последние годы получили широкое применение и как способ решения ряда нелинейных эволюционных уравнений, которые можно записать в виде

$$v_t = K(v), \quad 0 \leq t < \infty; \quad v(0) = v_0. \quad (16)$$

Здесь $K(v)$ определяется конкретной задачей [12—14] и в общем случае может быть нелинейным интегро-дифференциальным оператором весьма общего вида [15]. Появление этого нового направления математической физики обязано важной работе Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [12], где было показано, что если в уравнении Шредингера на всей оси

$$y_{xx} + [k^2 - v(t, x)]y = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

в качестве потенциала $v(t, x)$ (вещественный параметр) взять решение $v(t, x)$ следующей задачи Коши для уравнения Кортевега — де Фриза (КдФ):

$$\left. \begin{aligned} v_t(t, x) &= 6v(t, x)v_x(t, x) - v_{xxx}(t, x), \\ &-\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t < \infty; \\ v(t, x)|_{t=0} &= v_0(x), \quad v_0(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

то закон изменения по t соответствующих $v(t, x)$ данных рассеяния выписывается явно с помощью данных рассеяния начального значения $v_0(x)$. Отсюда при любом $t > 0$, решая хорошо изученную ОЗР [9], получаем решение задачи Коши (17). В. Е. Захаровым и Л. Д. Фаддеевым [16] было показано, что уравнение КдФ является вполне интегрируемой бесконечномерной гамильтоновой системой, первые интегралы которой допускают представление $\tilde{I}_j[v] = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{2j+1}(v; x) dx$, $j = 0, 1, \dots$, где локальные

плотности $\sigma_j(v; x)$ получаются по рекуррентной формуле

$$\begin{aligned} \sigma_1(v; x) &= v(x); \quad \sigma_j(v; x) = -\sigma_{j-1, x}(v; x) - \\ & - \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_i(v; x) \sigma_{j-i-1}(v; x), \quad j = 2, \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Для этого «интегрирования» [12—16] характерно, что оно становится реализуемым в тех случаях, когда известно решение соответствующей обратной задачи, при этом, как правило, имеется в виду ее решение на основе методов [2, 4].

Здесь мы будем придерживаться противоположной точки зрения, а именно будем сводить ОЗР к построению эволюционных уравнений вида (16), решения которых при $t \rightarrow \infty$ дают искомый потенциал. Отсюда применив некоторые конечно-разностные схемы решения задачи Коши (16) получим итерационные методы кон-

струкций потенциала. Первоначальное рассмотрение непрерывного процесса имеет то преимущество, что изучение вопросов его сходимости проще, чем непосредственное исследование этих вопросов для дискретной схемы. Отметим также, что в свете кратко изложенной выше теории уравнения КдФ, построенные здесь уравнения представляют и некоторый самостоятельный интерес.

М. К. Гавурин [17] свел задачу о нахождении решения v_* операторного уравнения $f(v) = y_*$ к решению следующей задачи Коши:

$$v_t = -[f'(v)]^{-1}(f(v) - y_*), \quad 0 \leq t < \infty, \quad v(0) = v_0, \quad (19)$$

называемой уравнением для непрерывного аналога метода Ньютона. Здесь $f(v)$ — некоторый, возможно нелинейный, оператор, определенный в банаховом пространстве X со значениями в банаховом пространстве Y (что для краткости обозначаем $f: X \rightarrow Y$); y_* — заданный элемент из Y ; $f'(v)$ — производная Фреше оператора $f(v)$; $[f'(v)]^{-1}$ — обратный к ней оператор. При весьма общих предположениях о гладкости отображения $f(v)$ и некоторой априорной близости начального приближения v_0 к искомому решению v_* последнее получается как предел при $t \rightarrow \infty$ решения $v(t, v_0)$ задачи (19):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t, v_0) - v_*\|_X = 0. \quad (20)$$

Важным свойством уравнения (19), которое отличает его от дискретных процессов ньютоновского типа [18], сводящих задачу о нахождении решения v_* к построению последовательности

$$v_{n+1} = v_n - [f'(v_n)]^{-1}(f(v_n) - y_*), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (23)$$

является существование первого интеграла

$$f(v(t)) = f(v_0)e^{-t} + y_*(1 - e^{-t}), \quad 0 \leq t < \infty. \quad (24)$$

Следовательно, уравнение (19) как дифференциальное уравнение первого порядка в банаховом пространстве X является вполне

* Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется дифференцируемым по Фреше [18] в точке $v \in X$, если есть линейный (по h), ограниченный оператор $A = f'(v)$, для которого

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \|h\|_X^{-1} \|f(v+h) - f(v) - f'(v)h\|_Y = 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_X \rightarrow 0. \quad (24)$$

Пространство линейных, ограниченных операторов A , определенных на X со значениями в Y , где норма вводится равенством

$$\|A\| = \sup_{\|h\|_X \neq 0} \|Ah\|_Y / \|h\|_X, \quad (22)$$

обозначим $L(X, Y)$. Следовательно, $f'(v) \in L(X, Y)$.

интегрируемой системой. Его решение $v(t, v_0)$, $0 \leq t < \infty$, называемое траекторией Ньютона, есть прообраз отрезка (24).

Идея применить уравнение (19) для решения ОЗР впервые была предложена в [19]. Предположив, что функция $\eta_*(k)$, $0 \leq k < \infty$, определяет однозначно краевую задачу (2) — (3), т. е. в (9)

$$s(v_*) = \eta(v_*, k) \equiv \eta_*(k) \quad [\eta_*(+0) = \eta_*(+\infty) = 0],$$

и взяв в качестве $f(v)$ оператор $Q(v) = \eta(v; k)$, ставящий в соответствие каждому потенциалу $v(x)$ его фазу рассеяния $\eta(v; k)$, для уравнения (19) найдем:

$$\left. \begin{aligned} -k |f(v(t); k)|^{-2} \int_0^\infty v_t(t, x) \varphi^2(v(t); x, k) dx = \\ = \eta(v(t); k) - \eta_*(k), \quad 0 \leq t < \infty; \\ v(t, x)|_{t=0} = v_0(x); \quad \eta(v_0; 0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Далее, применив конечно-разностный метод Эйлера для интегрирования уравнения (25) и метод А. Н. Тихонова регуляризации приближенных решений интегральных уравнений первого рода [20], получим устойчивый алгоритм для восстановления v_* .

С помощью формулы обращения [21] уравнение (25) переходит в

$$\left. \begin{aligned} v_t(t, x) = \frac{4}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^\infty [\eta(v(t); k) - \eta_*(k)] \times \\ \times \operatorname{Im} \{ \exp[-2i\eta(v(t); k)] f^2(v(t); x, k) \} dk, \quad 0 \leq t < \infty; \\ v(t, x)|_{t=0} = v_0(x); \quad \eta(v_0; 0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Ввиду того что при $x > 0$ производная функции $F(x)$ (15) ведет себя аналогично искомому потенциалу $v(x)$ [4], в [21] было предложено в качестве $f(v)$ рассматривать оператор

$$\Psi(v) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^\infty \{1 - S(v; k)\} \exp(2ikx) dk, \quad 0 < x < \infty. \quad (27)$$

В этом случае уравнение (19) сводится к следующей задаче Коши:

$$\left. \begin{aligned} v_t(t, x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^\infty \{S_*(k) - S(v(t); k)\} \times \\ \times f^2(v(t); x, k) dk, \quad 0 \leq t < \infty; \\ v(t, x)|_{t=0} = v_0(0); \quad \eta(v_0; +0) = (i/2) \ln S_*(+0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Остановимся коротко на методах построения уравнений (26) и (28), рассматриваемых в настоящей работе. Вывод уравнения (26) начинаем в разд. 1 с изучения свойств его первого интеграла $\eta(v(t); k) = \eta(v_0; k) \exp(-t) + \eta_*(k)(1 - \exp(-t))$, $0 \leq t < \infty$. (29)

Отсюда на основе характеристических свойств данных рассеяния задачи (2) — (3) весьма просто получить необходимые условия сходимости (20) для задачи Коши (26). Переход от первого интеграла (29) к уравнению (25) требует доказательства дифференцируемости фазы рассеяния $\eta(v; k)$ относительно аргумента v , которое в рамках стандартной теории возмущений [22] приведено в разд. 2. Вопрос об обращении оператора $Q'(v)$, который определяется левой частью (25), подробно изучен в разд. 3. С помощью первого интеграла (29) и асимптотического разложения [23]

$$\eta(v; k) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (2k)^{-(2j+1)} I_j[v], \quad k \rightarrow \infty;$$

$$I_j[v] = \int_0^{\infty} \sigma_{2j+1}(v, x) dx,$$

где $\sigma_j(v; x)$ определяются из (18), в разд. 5 показано, что при условиях $I_j[v_0] = I_j[v_*]$, $j = 0, 1, \dots; m < \infty$, накладываемых априори на начальное значение v_0 , величины $I_j[v(t, v_0)]$, $0 \leq t < \infty$, являются сохраняющимися для уравнения (26). Эта аналогия с указанными свойствами уравнения КдФ (17) прослеживается дальше в разд. 6, где уравнение (26) обобщается на случай наличия связанных состояний у искомого потенциала. В разд. 4 на примере уравнения (28) показываем, следуя [24], как можно пользоваться в ОЗР общими теоремами сходимости [17] для уравнения (19). При этом важную роль играют некоторые интегральные операторы, ядра которых строятся с помощью ядер операторов преобразования (12), (13). Свойства этих операторов изложены в разд. 2, где также показано существование производной $\Psi'(v)$ оператора (27). Обратный оператор $[\Psi'(v)]^{-1}$ найден в разд. 3. В разд. 7 на основе некоторой модификации уравнения (25), с помощью которой вопрос о численной неустойчивости ОЗР сводится к задаче об устойчивом суммировании интеграла Фурье, построен расчетный алгоритм для решения ОЗР на ЭВМ. Результаты расчетов ряда модельных ОЗР даны в табл. 1—3. В разд. 8 рассмотрены некоторые феноменологические подходы [25—27] к решению ОЗР для реальных физических задач. Расчетные потенциалы, найденные на основе обработки экспериментальных данных, полученных в ОИЯИ [28], приведены в табл. 4, 5.

При формулировке постановок и основных утверждений мы придерживаемся обычной для этой задачи математической стро-

гости. Доказательства теорем и лемм имеют конспективный характер и оттеняют, главным образом, их идейную сторону. Те сведения о прямой и обратной задачах рассеяния, которыми в тексте пользуемся без ссылок, содержатся в [4, 8]. Необходимые для этой работы сведения из функционального анализа имеются, например, в книге Л. А. Люстерника и В. И. Соболева [18]. Для решения $v(t, v_0; x)$ задач Коши (26) либо (28) часто для краткости пользуемся обозначениями $v(t, x)$, $v(t, v_0)$ или $v(t)$.

Авторы считают своим приятным долгом выразить сердечную благодарность д-ру физ.-мат. наук П. С. Исаеву за поддержку в написании статьи.

1. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ КАК НЕЛИНЕЙНОЕ ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ

В этом разделе мы излагаем известные результаты по ОЗР в необходимой для построения уравнения (19) и итерационных процессов (23) форме операторного уравнения вида

$$f(v) = y_*, f: X \rightarrow Y. \quad (30)$$

Конкретный вид оператора $f(v)$ вместе с парой нормированных пространств X и Y , далее называемых соответственно пространством потенциалов и пространством данных рассеяния, строится исходя из двух основных требований:

1) оператор $f(v)$ с областью определения D_f обратим в некоторой окрестности искомого решения v_* ;

2) область значений R_f оператора $f(v)$ допускает первый интеграл вида (24), т. е. она такова, что при заданном $y_* \in R_f$ существует хотя бы один элемент $v_0 \in D_f$ [$v_0 \neq v_* = f^{-1}(y_*)$], для которого траектория Ньютона $v(t, v_0) = f^{-1}\{f(v_0) \exp(-t) + y_* [1 - \exp(-t)]\} \in D_f$ при $0 \leq t < \infty$. Важное место в этих построениях играет следующая основная теорема о существовании и единственности решения ОЗР.

Теорема 1 (см., например, [8, теорема 12.1]). Пусть задан набор величин

$$S(k), \quad -\infty < k < \infty; \{x_m > 0\}_{m=1}^N; \{C_m > 0\}_{m=1}^N, \quad (31)$$

где $x_n \neq x_m$ при $n \neq m$, а функция $S(k)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$S^{-1}(k) = S(-k) = \overline{S(\bar{k})}, \quad -\infty < k < \infty; \quad (32)$$

$$\ln S(+0) - \ln S(+\infty) = 2i\pi N; \quad (33)$$

$$S(k) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} F_S(x) \exp(-ikx) dx; \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F_S(x)| dx < \infty. \quad (34)$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Существует единственная краевая задача (2)–(3), для которой величины (31) являются данными рассеяния, т. е. асимптотика при $x \rightarrow \infty$ решения $\varphi(v; x, k)$ для вещественных k определяется функцией $\eta(k) = (i/2) \ln S(k)$:

$$\varphi(v; x, k) \approx A(k) \sin'(kx - \eta(k)), \quad x \rightarrow \infty, \quad (35)$$

где амплитуда рассеяния $A(k)$ выражается посредством (31) известным дисперсионным соотношением, а числа C_m — нормировочные постоянные для соответствующих κ_m собственных функций:

$$\varphi(v; x, i\kappa_m) = C_m^{-1/2} \exp(-\kappa_m x) [1 + o(1)], \quad x \rightarrow \infty, \\ m = 1, \dots, N. \quad (36)$$

2. Для того чтобы восстанавливаемый потенциал $v(x)$ удовлетворял условию (4), необходимо и достаточно, чтобы функция $F_S(x)$ (34) была дифференцируемой при $x > 0$ и

$$\int_0^{\infty} x \left| \frac{d}{dx} F_S(x) \right| dx < \infty. \quad (37)$$

Наряду с условиями (32) — (34), сформулированными в терминах функции рассеяния $S(k)$, нам понадобится их эквивалентная формулировка непосредственно в фазах рассеяния $\eta(k)$. Из условий (32) и (33) следует, что функцию $\eta(k)$ без ограничения общности можно считать непрерывной при $k \neq 0$, вещественной, нечетной функцией, для которой $\lim_{k \rightarrow 0} \eta(k) = 0$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда в силу теоремы Винера — Леви [29] следует, что условие (34) приводит в случае $N = 0$ к представлению

$$\eta(k) = \int_0^{\infty} \hat{\eta}(x) \sin 2kx \, dx, \quad \int_0^{\infty} |\hat{\eta}(x)| \, dx < \infty, \quad (38)$$

где $\hat{\eta}(x)$ — вещественная функция. В случае $N > 0$ введем вспомогательную функцию

$$S_0(k) = S(k) \prod_{m=1}^N [(k - i\kappa_m)/(k + i\kappa_m)]^{-2}, \quad \kappa_m > 0, \quad (39)$$

где κ_m — произвольные положительные числа [не обязательно совпадающие с заданными в (31)], и воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1 [4]. Пусть функция $S(k)$ удовлетворяет условиям (32) — (34) при некотором $N > 0$. Тогда для всех $\kappa > 0$ функция $S_{\kappa}(k) = S(k) [(k - i\kappa)/(k + i\kappa)]^2$ удовлетворяет тем же условиям при $N - 1$ и если функция $S(k)$ удовлетворяет условию (37), то и функция $S_{\kappa}(k)$ удовлетворяет этому условию.

Отсюда, логарифмируя обе стороны (39), получаем с учетом тождества $\ln |(k - i\kappa)/(k + i\kappa)| = -2i \operatorname{arctg} (\kappa/k)$, что условия (32) — (34) эквивалентны существованию следующего представления:

$$\eta(k) = -2N \operatorname{arctg} \frac{1}{k} + \int_0^{\infty} \hat{\eta}^{(0)}(x) \sin 2kx \, dx, \quad 0 \leq k < \infty;$$

$$\int_0^{\infty} |\hat{\eta}^{(0)}(x)| \, dx < \infty, \quad (40)$$

где $\int_0^{\infty} \hat{\eta}^{(0)}(x) \sin 2kx \, dx = (i/2) \ln S_0(k)$.

В частности, при $k \rightarrow +0$ получаем теорему Левинсона [5]:

$$\eta(+0) = -2\pi N. \quad (41)$$

По условию (4) определим банахово пространство X вещественных функций $v(x)$ с обычными операциями сложения и умножения на вещественные числа. Норму введем равенством

$$\|v\|_X = \int_0^{\infty} x |v(x)| \, dx < \infty. \quad (42)$$

Обозначим $\Omega(N)$, $N = 0, 1, \dots$, множества потенциалов $v \in X$, для которых в краевой задаче (2) — (3) имеется ровно N собственных чисел $\{-\kappa_m^2\}_{m=1}^N$ и, кроме того, отсутствует виртуальный уровень при $k = 0$. Так как числа $i\kappa_m$ — нули функции Йоста $f(v; k)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$, а существование виртуального уровня эквивалентно условию $f(v; 0) = 0$, то

$$\Omega(N) = \{v \in X \mid f(v; i\kappa_m) = 0, \quad m = 1, \dots, N; \quad f(v; 0) \neq 0\}. \quad (43)$$

Отметим, что все множества $\Omega(N)$ являются открытыми в X (см., например, разд. 2), а их границы $\partial\Omega(N) = \{v \in X \mid f(v; 0) = 0\}$.

Соответствие $v \rightarrow s(v)$, относящее каждому потенциалу $v \in X$ его данные рассеяния $s(v)$, определяет в силу теоремы 1 на множестве $\Omega(0)$ обратимый оператор

$$Q(v) = s(v)|_{v \in \Omega(0)} = \eta(v; k), \quad 0 \leq k < \infty. \quad (44)$$

Область значений $R_Q(0)$ этого оператора вследствие (38) содержится в пространстве Y_0 вещественных функций $G(k)$, представимых в виде

$$G(k) = \int_0^{\infty} g(x) \sin 2kx \, dx, \quad \int_0^{\infty} |g(x)| \, dx < \infty, \quad (45)$$

с нормой

$$\|G\|_{Y_0} = \int_0^{\infty} |g(x)| dx = \|g\|_{L_1}. \quad (46)$$

Продолжим оператор $Q(v)$ на множества $\Omega(N)$, $N = 1, 2, \dots$, равенством

$$Q(v)|_{v \in \Omega(N)} = \{\eta(v; k) + 2N \operatorname{arctg}(1/k), \quad 0 \leq k < \infty; \\ \{\kappa_m(v)\}_{m=1}^N; \{C_m(v)\}_{m=1}^N\}. \quad (47)$$

При таком определении для любого N обратимость $Q(v)$ сохраняется, а область его значений $R_Q(N)$ содержится в пространстве

$$Y_N = Y_0 \oplus R_N \oplus R_N, \quad (48)$$

являющемся прямой суммой пространства Y_0 и двух N -мерных вещественных евклидовых пространств.

Таким образом, если $s(v_*)$ — данные рассеяния некоторого $v_* \in \Omega(N)$, то решение ОЗР эквивалентно решению операторного уравнения

$$Q(v) = g_* \equiv \{\eta_*^{(0)}(k), \quad 0 \leq k < \infty; \quad 0 < \kappa_{1,*} < \dots < \kappa_{N,*}; \\ \{C_{m,*} > 0\}_{m=1}^N\}, \quad (49)$$

где

$$\eta_*^{(0)}(k) = \eta_*(k) + 2N \operatorname{arctg}(1/k) \in Y_0. \quad (50)$$

Следовательно, если в качестве $f(v)$ для уравнения (30) взять оператор $Q(v)$ (47), то на множествах $\Omega(N)$, $N = 0, 1, \dots$, условие (1), сформулированное в начале раздела, удовлетворится сразу. Проверим теперь условие (2). При $v_0 \in \Omega(N)$, $g_* \in R_Q(N)$ первый интеграл (24) с $Q(v)$ (47) определяется в пространстве Y_N следующей кривой:

$$Q(t; v_0, g_*) = Q(v_0) \exp(-t) + g_* [1 - \exp(-t)], \\ 0 \leq t < \infty, \quad (51)$$

которая эквивалентна равенствам:

$$\eta^{(0)}(t; k) = \eta^{(0)}(v_0, k) \exp(-t) + \eta_*^{(0)}(k) [1 - \exp(-t)], \\ 0 \leq t < \infty; \quad 0 \leq k < \infty; \quad (52)$$

$$\kappa_m(t) = \kappa_m(v_0) \exp(-t) + \kappa_{m,*} [1 - \exp(-t)], \\ 0 \leq t < \infty; \quad m = 1, \dots, N; \quad (53)$$

$$C_m(t) = C_m(v_0) \exp(-t) + C_{m,*} [1 - \exp(-t)], \\ 0 \leq t < \infty; \quad m = 1, \dots, N. \quad (54)$$

Полагая в (52) $k = 0$, получаем с учетом (50), что если $v_* \in \Omega(N)$, а $v_0 \notin \Omega(N)$, то условие целочисленности (41), необходимое для того, чтобы $v \in X$, заведомо не выполняется, за возможным исключением конечного числа точек. Легко видеть, что при $N > 0$ задание потенциала $v_0 \in \Omega(N)$ определяет среди всех $N!$ возможных наборов интегралов (53) лишь единственный, для которого $v(t, v_0) \in \Omega(N)$ при $0 \leq t < \infty$. Этот набор соответствует нумерации $\kappa_1(v_0) < \kappa_2(v_0) < \dots < \kappa_N(v_0)$. В противном случае приходим к противоречию с равенством $\eta(t; k)|_{k=0} = -2\pi N$, $t \in (0, \infty)$. Резюмируя, получаем следующую лемму.

Лемма 2. Для любого $v_* \in \Omega(N)$ необходимым условием того, чтобы кривая (51) содержалась в пространстве Y_N и определяла при любом $t \in [0, \infty)$ однозначно дифференциальный оператор (2) — (3) с данными рассеяния (52) — (54), является принадлежность начального приближения v_0 множеству $\Omega(N)$ *.

Замечание. Условия (32) — (34) допускают потенциалы, которые могут быть обобщенными функциями типа производной от локально-суммируемой функции [3]. Достаточные условия, налагаемые на v_0 и v_* , которые обеспечивают при любом $t \in [0, \infty)$ принадлежность пространству X (42) определяемой (52) — (54) траектории Ньютона $v(t; v_0)$, получены в разд. 5.

Приведем постановку ОЗР, которая позволит построить уравнения (28), если принимать в качестве пространства потенциалов и пространства данных рассеяния одно и то же пространство X (42).

Определим основной в этой постановке оператор

$$\Psi(v) = 4F'_x(v; 2x), \quad 0 < x < \infty, \quad v \in X, \quad (55)$$

где функция $F(v; x)$ находится по данным рассеяния задачи (2) — (3) формулой (15):

$$F(v; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - S(v; k)\} \exp(ikx) dk + \\ + \sum_{m=1}^N M_m(v) \exp[-ix_m(v)x], \quad 0 < x < \infty. \quad (56)$$

Область значений R_Ψ оператора $\Psi(v)$ в силу (37) содержится в X . Определение (55) отражает тот очевидный в силу уравнения (12)

* В случае $v \in \partial \Omega(N)$, что соответствует виртуальному уровню при $k = 0$, теорема 1 остается справедливой, если заменить (33) условием $\eta(v; k)|_{k=0} = -2\pi(N + 1/2)$ [4], но тогда из (52) следует, что возможные начальные приближения $v_0 \in X$ (42), для которых $v(t, v_0) \in X$, $0 \leq t < \infty$, тоже должны удовлетворять этому условию. Этот случай заведомо неустойчив и дальше не рассматривается.

факт, что для однозначного определения $v(x)$, $0 < x < \infty$, достаточно знания функции $F(v; x)$ в интервале $0 < x < \infty$. Точнее, если по набору величин

$$S_*(k), \quad -\infty < k < \infty; \quad 0 < \kappa_{1,*} < \dots < \kappa_{N,*};$$

$$\{M_{m,*} > 0\}_{m=1}^N, \quad (57)$$

где $S_*(k)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, построена по формуле (56) функция $F_*(x)$, то операторное уравнение

$$\Psi(v) = f_*; \quad f_* = 4F'_{*,x}(2x), \quad 0 < x < \infty, \quad (58)$$

имеет в X единственное решение v_* , для которого величины (57) являются данными рассеяния краевой задачи (2) — (3) с $v = v_*$. Тем самым условие (1) для $\Psi(v)$ выполняется на всем X . Отметим также, что определение (55) — (56) исключает сразу отмеченные выше неоднозначности для оператора $Q(v)$ (47), связанные с перестановкой собственных чисел.

Далее показано, что решение v_* может быть найдено с помощью уравнения (19) на множестве $\Omega(0)$, где оператор $\Psi(v)$ сводится к выражению (27), а в (57) остается функция $S_*(k)$, для которой $S_*(0) = 1$. Свойство (2) для оператора $\Psi(v)$ (27) получим в разд. 4. При $v \in \Omega(N)$ условие (2) может быть выполнено, например, если v_0 и v_* имеют одни и те же собственные числа $\{-\kappa_m^2\}_{m=1}^N$. Тогда первые интегралы $F_S(t; x) = F_S(v_0; x) \times \exp(-t) + F_S(v_*, x) [1 - \exp(-t)]$, $0 \leq t < \infty$; $0 < x < \infty$ и $M_m(t) = M_m(v_0) \exp(-t) + M_m(v_*) [1 - \exp(-t)]$, $0 \leq t < \infty$; $m = 1, \dots, N$, приводят к первому интегралу (24) и для оператора $\Psi(v)$ (55).

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ $\Psi(v)$ И $Q(v)$ ПРИ $v \in \Omega(0)$

При изучении дифференциальных свойств операторов $\Psi(v)$ и $Q(v)$ удобно ввести оператор

$$\Phi(v) = 1 - S(v, k) \equiv 2 \int_{-\infty}^{\infty} F_S(v; 2x) \exp(-2ikx) dx, \quad v \in X$$

и построить пару нормированных пространств \tilde{Y} и \tilde{Z} . Первое определим как пространство вещественных функций $f(x) \in \tilde{L}^1(-\infty, \infty)$, дифференцируемых при $x > 0$ и таких, что $xf'(x) \in L^1(0, \infty)$ с определением нормы

$$\|f\|_{\tilde{Y}} = \int_0^{\infty} x |f'(x)| dx + \int_{-\infty}^0 |f(x)| dx; \quad (59)$$

второе является множеством функций $F(k)$, представимых в виде преобразования Фурье функции $f(x) \in \tilde{Y}$:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-2ikx) dx; \quad \|F\|_{\tilde{Z}} = \|f\|_{\tilde{Y}}. \quad (60)$$

В силу характеристических свойств функций $S(v; k)$, ($v \in X$), приведенных в теореме 1, область значений оператора $\Phi(v)$ содержится в \tilde{Z} . Обозначим \tilde{Y}_+ подпространство функций $f(x) \in \tilde{Y}$, равных нулю при $x < 0$. Соответствующее \tilde{Y}_+ подпространство в \tilde{Z} обозначим \tilde{Z}_+ , и пусть P_+ — проектор, отражающий \tilde{Z} в \tilde{Z}_+ , т. е.

$$P_+ \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-2ikx) dx \right\} = \int_0^{\infty} f(x) \exp(-2ikx) dx; \\ \|P_+ F\|_{\tilde{Z}} = \|f'(x)\|_X. \quad (61)$$

Отсюда для оператора $\Psi(v)$ (27) получаем следующую запись:

$$\Psi(v) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} P_+ \{\Phi(v)\} \exp(2ikx) dk, \quad 0 < x < \infty. \quad (62)$$

Очевидно, также имеем

$$Q(v) = \eta(v; k) = (i/2) \ln \{1 - \Phi(v)\}, \quad 0 \leq k < \infty. \quad (63)$$

Первоначально упростим задачу о нахождении производных оператора $\Phi(v)$, приняв в качестве пространства, содержащего его область значений, пространство непрерывных функций $C = C(-\infty, \infty)$.

Лемма 3. Оператор $\Phi(v) : X \rightarrow C$ дифференцируем по Фреше в любой точке $v \in \Omega(N)$, и его первая производная

$$\Phi'(v)h = 2ikf^{-2}(v; k) \int_0^{\infty} h(x) \varphi^2(v; x, k) dx \in L(X, C), \quad (64)$$

так как имеет место оценка

$$\|\Phi'(v)h\|_C \leq m^{-2}(v) \exp\{2\|v\|_X\} \|h\|_X, \quad h \in X, \quad (65)$$

где

$$m(v) = \inf_{0 \leq k < \infty} \|f(v; k)\| > 0 \quad \text{при } v \in \Omega(N). \quad (66)$$

Замечание. Выражение (64) является лишь иной, более удобной для наших построений формой записи первого члена известного борновского ряда для возмущенной функции рассеяния [22].

Тем не менее, мы приведем доказательство леммы 3, так как существование $\Psi'(v)$ и $Q'(v)$ сводится, по существу, к проверке справедливости этой леммы в случае, когда вместо пространства S рассматриваются соответственно пространства Y (59) и Y_0 (45).

Доказательство проведем, исходя из следующих интегральных уравнений для возмущенных решений $\varphi(v+h; x, k)$ и $f(v+h; x, k)$:

$$\varphi(v+h; x, k) = \varphi(v; x, k) + \int_0^x G(v; x, s, k) h(s) \varphi(v+h; s, k) ds; \quad (67)$$

$$f(v+h; x, k) = f(v; x, k) + \int_x^\infty G(v; s, x, k) h(s) f(v+h; s, k) ds, \quad (68)$$

где

$$G(v; x, s, k) = f^{-1}(v; k) \{ \varphi(v; x, k) f(v; s, k) - \varphi(v; s, k) f(v; x, k) \}. \quad (69)$$

Полагая в (68) $x=0$, получаем

$$f(v+h; k) = f(v; k) + \int_0^\infty h(x) \varphi(v; x, k) f(v+h; x, k) dx, \quad v, h \in X. \quad (70)$$

Отсюда, учитывая, что при вещественных $k \neq 0$

$$\varphi(v; x, k) = (-2ik)^{-1} \{ f(v; k) f(v; x, -k) - f(v; -k) f(v; x, k) \}, \quad (71)$$

приходим к разложению

$$S(v+h; k) = S(v; k) - \frac{2ik}{f^2(v; k)} \int_0^\infty h(x) \varphi^2(v; x, k) dx + \omega(v, h; k), \quad (72)$$

где остаточный член

$$\begin{aligned} \omega(v, h; k) = & -2ikf^{-2}(v; k) \int_0^\infty h(x) \varphi(v; x, k) dx \int_0^x h(s) G(v; x, s, k) \times \\ & \times \varphi(v+h; s, k) ds + 2ikf^{-3}(v; k) \int_0^\infty h(x) \varphi(v; x, k) \varphi(v+h; x, k) dx \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^{\infty} h(x) \varphi(v; x, k) f(v; x, k) dx \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \\ & \times \left\{ f^{-1}(v; k) \int_0^{\infty} h(x) \varphi(v+h; x, k) f(v; x, k) dx \right\}^n. \end{aligned} \quad (73)$$

Теперь для того чтобы получить оценку (65) и сходимость разложения (72), (73) (по метрике C) в некоторой окрестности точки $v \in \Omega(N)$, достаточно воспользоваться оценками:

$$\left. \begin{aligned} |k^n \varphi(v; x, k)| &\leq x^{n-1} \exp \left\{ \operatorname{Im} kx + \int_0^x s |v(s)| ds \right\}, \quad n=0, 1; \\ |f(v; x, k)| &\leq \exp \left\{ -\operatorname{Im} kx + \int_x^{\infty} s |v(s)| ds \right\}, \quad \operatorname{Im} k \geq 0, v \in X, \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

и учесть, что при $v \in \Omega(N)$ справедливо неравенство (66). Последнее вытекает из асимптотики $f(v; k) \rightarrow 1$, $k \rightarrow +\infty$, представления (71), в силу которого $f(v; k) \neq 0$ при $k \neq 0$, и определения $\Omega(N)$ (43). При фиксированном $v \in \Omega(N)$, выбирая добавку $h(x)$, удовлетворяющую неравенству

$$\|h\|_x \leq \min \{ \|v\|_x, 2^{-1}m(v) \exp \{-3\|v\|_x\} \}, \quad (75)$$

получаем

$$\|f^{-1}(v; k) \int_0^{\infty} h(x) \varphi(v+h; x, k) f(v; x, k) dx\|_C \leq \frac{1}{2}.$$

Следовательно, ряд (73) для всех h , удовлетворяющих (75), сходится и

$$\begin{aligned} & \lim_{\|h\|_x \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_x} \left\| S(v+h; k) - S(v; k) + \right. \\ & \left. + \frac{2ik}{f^2(v; k)} \int_0^{\infty} h(x) \varphi^2(v; x, k) dx \right\|_C = 0. \end{aligned} \quad (76)$$

Последнее равенство по определению производной Фреше (21) показывает, что функция $S(v; k)$ дифференцируема в любой точке $v \in \Omega(N)$. Дифференцируемость $\Phi(v)$ становится теперь очевидной. Лемма доказана.

Применяя правило дифференцирования сложных (операторных) функций к равенствам (62), (63), находим

$$\begin{aligned} Q'(v)h &= (-i/2)S^{-1}(v; k)\Phi'(v)h = \\ &= \frac{k^2}{|f(v; k)|^2} \int_0^\infty h(x)\varphi^2(v; x, k)dx, \quad 0 \leq k < \infty; \end{aligned} \quad (77)$$

$$\Psi'(v)h = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^\infty P_+[\Phi'(v)h] \exp(2ikx) dk, \quad 0 < x < \infty. \quad (78)$$

Теорема 2. Пусть оператор $\Psi(v)$ задан формулой (27), а оператор $\Psi'(v)h$ — формулой (78). Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Справедливо представление

$$\Psi'(v)h = [I + \Gamma(v)][I + P(v)]h \in \Omega(0); \quad h \in X, \quad (79)$$

где операторы

$$\begin{aligned} [I + \Pi(v)]h &= [I + \Gamma(v)]^{-1}h = h(x) + \int_x^\infty \Pi(v; s-x)h(s)ds, \\ &0 < x < \infty; \end{aligned} \quad (80)$$

$$[I + P(v)]h = h(x) - \int_x^\infty P(v; x, s)h(s)ds, \quad 0 < x < \infty, \quad (81)$$

определяются посредством ядер $K(v; x, s)$ (12) и $L(v; x, s)$ (13) формулами

$$\begin{aligned} \Pi(v; s) &= 4L(v; 2s) + 2 \int_0^{2s} L(v; \xi)L(v; 2s-\xi)d\xi; \\ L(v; s) &= L(v; 0, s); \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} P(v; x, s) &= \text{sign}(s-2x)K(v; s/2; |s-2x|/2) + \\ &+ \int_x^s K(v; s/2, u/2)K(v; s/2, |u-2x|/2)\text{sign}(u-2x)du, \quad x \leq s < \infty, \end{aligned} \quad (83)$$

а оператор

$$[I + \Gamma(v)]h = h(x) + \int_x^\infty \Gamma(v; s-x)h(s)ds, \quad 0 < x < \infty, \quad (84)$$

где

$$\Gamma(v; s) = 4H(v; 2s) + 2 \int_0^{2s} H(v; \xi) H(v; 2s - \xi) d\xi;$$

$$H(v; x) = \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - f^{-1}(v; k)\} e^{-ikx} dk, \quad (85)$$

причем

$$\|P(v)\| \leq \sup_{0 \leq s \leq \infty} \int_0^s P(v; x, s) dx \leq 2 \|v\|_X \exp(\|v\|_X) \times$$

$$\times \{1 + 3 \|v\|_X \exp(\|v\|_X)\}, \quad v \in X; \quad (86)$$

$$\| \Pi(v) \| \leq \int_0^{\infty} | \Pi(v; s) | ds \leq 2 \|v\|_X \{1 + \|v\|_X \exp(\|v\|_X)\}, \quad v \in X; \quad (87)$$

$$\| \Gamma(v) \| \leq \int_0^{\infty} | \Gamma(v; s) | ds < \infty, \quad v \in \Omega(0). \quad (88)$$

2. Оператор $\Psi'(v)$ при $v \in \Omega(0)$ является производной Фреше оператора $\Psi(v)$.

Доказательство. С помощью операторов преобразования (12), (13), для ядер которых справедливы оценки [4]

$$|K(v; x, s)| \leq \frac{1}{2} \int_{(x-s)/2}^x |v^1(\xi)| d\xi \exp \left\{ \int_0^{(x+s)/2} \xi |v(\xi)| d\xi \right\},$$

$$0 < s < x; \quad (89)$$

$$|L(v; x, s)| \leq \frac{1}{2} \int_{(x+s)/2}^{\infty} |v(\xi)| d\xi \exp \left\{ \int_x^{\infty} \xi |v(\xi)| d\xi \right\},$$

$$x \leq s < \infty, \quad (90)$$

получаем представления

$$\varphi^2(v; x, k) = \frac{1}{k} \int_0^x M(v; x, s) \sin 2ks ds; \quad (91)$$

$$f^2(v; x, k) = \exp(2ikx) + \int_x^{\infty} N(v; x, s) \exp(2iks) ds, \quad (92)$$

где

$$M(v; x, s) = 1 + 2 \int_{|x-2s|}^x K(v; x, s) ds + \\ + 8 \int_0^{\min(s, x-s)} d\alpha \int_{\alpha+s}^x K(v; x, \beta) K(v; x, \beta-2\alpha) d\beta; \quad (93)$$

$$N(v; x, s) = 4L(v; x, 2s-x) + 2 \int_x^{2s-x} L(v; x, \xi) L(v; x, 2s-\xi) d\xi; \quad (94)$$

$$M(v; x, 0) = M(v; x, x) = 1; \quad N(v; x, x) = 2 \int_x^{\infty} v(\xi) d\xi, \\ 0 < x < \infty. \quad (95)$$

Полагая в (92) $x = 0$, вследствие (90) получаем

$$f^2(v; k) = 1 + \int_0^{\infty} \Pi(v; x) \exp(2ikx) dx; \quad \int_0^{\infty} |\Pi(v; x)| dx < \infty. \quad (96)$$

Отсюда, учитывая, что функция Йоста $f(v; k)$ при $v \in \Omega(0)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости $\text{Im } k \geq 0$, получаем [8], что определяемая (85) функция $H(v; x) \equiv 0$ при $x < 0$ и

$$\int_0^{\infty} |H(v; x)| dx < \infty. \quad \text{Следовательно, при } v \in \Omega(0)$$

$$f^{-2}(v; k) = 1 + \int_0^{\infty} \Gamma(v; x) \exp(2ikx) dx; \quad \int_0^{\infty} |\Gamma(v; x)| dx < \infty. \quad (97)$$

Обратимость оператора $I + \Pi(v)$ (80) для любого $v \in \Omega(0)$ теперь является следствием известных теорем М. Г. Крейна [30] об интегральных уравнениях на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. Оценка (87) вытекает из (90) в силу представления (82). Далее, из (91) получаем

$$2ik \int_0^{\infty} h_v(x) \varphi^2(v; x, k) dx = \int_{-\infty}^{\infty} H(v, h; x) \exp(-2ikx) dx; \\ \int_{-\infty}^{\infty} |H(v, h; x)| dx < \infty, \quad (98)$$

где

$$H(v, h; x) = - \int_{|x|}^{\infty} M(v; s, x) h(s) ds; \quad M(s, -x) = -M(s, x).$$

Из равенств (98), (97) и теоремы о свертке находим представление

$$\Phi'(v) h = \int_{-\infty}^{\infty} \{(\mathbf{I} + \Gamma(v)) H(v, h; x)\} \exp(-2ikx) dx, \quad (99)$$

из которого следует, что $\Phi'(v) h \in \tilde{Z}$, если $v \in \Omega(0)$ и $h \in X$. Действительно, так как для любых двух функций $\Gamma(x) \in L^1(0, \infty)$ и $f(x) \in \tilde{Y}_+$ справедливо коммутационное соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \int_x^{\infty} \Gamma(s-x) f(s) ds &= \int_0^{\infty} \Gamma(s) \mathbf{D} f(s+x) ds = \\ &= \int_x^{\infty} \Gamma(s-x) \mathbf{D} f(s) ds, \quad \mathbf{D} = \frac{d}{dx} \end{aligned} \quad (100)$$

и при $h \in X$ имеем $\mathbf{D}H(v, h; x) = (\mathbf{I} + \mathbf{P}(v)) h \in X$, то $[\mathbf{I} + \Gamma(v)] H(v, h; x) \in \tilde{Y}$. Следовательно, подставив (99) в (78), мы можем воспользоваться при $x > 0$ формулой обращения для интегралов Фурье, что приводит к искомой форме записи (79). Вторая оценка в (86) вытекает непосредственно из (89). Для того чтобы получить первую, остается заметить, что

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} x dx \int_x^{\infty} |P(v; x, s) h(s)| ds = \\ &= \int_0^{\infty} |h(s)| ds \int_0^s x |P(v; x, s)| dx \leq \sup_{0 \leq s < \infty} \int_0^s |P(v; x, s)| dx \|h\|_X. \end{aligned}$$

Теперь, чтобы показать для таким образом построенного оператора $[\mathbf{I} + \Gamma(v)] [\mathbf{I} + \mathbf{P}(v)]$ справедливость второго утверждения теоремы, достаточно проверить сходимость (76) при $v \in \Omega(0)$ в пространстве \tilde{Z} . Это можно осуществить аналогично предыдущему случаю, первоначально записав (73) с помощью операторов преобразования (12), (13) и представления (85) в виде

$$\omega(v, h; k) = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(v, h; x) \exp(-2ikx) dx$$

с последующей оценкой $\|\Omega(v; h; x)\|_{\bar{Y}_+} = o(\|h\|_X)$, $\|h\| \rightarrow 0$, на основе неравенств (89), (90). Теорема доказана.

Следствие. При любом $v \in \Omega(0)$ определяемый формулой (77) оператор

$$Q'(v) \in L(X, Y_0) \quad (101)$$

и является производной Фреше оператора $Q(v)$ (44).

Доказательство (101) получаем непосредственно из представления (91) и оценки (89), учитывая, что $f(-k) = \overline{f(k)}$ ($\operatorname{Im} k = 0$) и, следовательно, в силу (85) при $v \in \Omega(0)$

$$|f(v, k)|^{-2} = 1 + \int_0^\infty T(v; x) \cos 2kx \, dx; \quad \int_0^\infty |T(v; x)| \, dx < \infty.$$

Так как выражение (63) для оператора $Q(v)$ в отличие от (62) нелинейное, то для доказательства второго утверждения следствия удобнее вместо (72) воспользоваться тождеством

$$\begin{aligned} & \sin[\eta(v+h; k) - \eta(v; k)] = \\ & = k |f(v+h; k) f(v; k)|^{-1} \int_0^\infty h(x) \varphi(v+h; x, k) \varphi(v; x, k) \, dx \quad (102) \end{aligned}$$

и далее применить схему доказательства теоремы 2.

В заключение этого раздела перечислим некоторые свойства множества $\Omega(0)$. Из тождества (70) в силу (66) и (74) следует неравенство

$$|f(v_2; k)| \geq \min_{\operatorname{Im} k \geq 0} |f(v_1; k)| - \|v_2 - v_1\|_X \exp\{\|v_1\|_X + \|v_2\|_X\},$$

$$\operatorname{Im} k \geq 0,$$

показывающее, что $\Omega(0)$ есть открытое множество в X . В [24] было показано, что $\Omega(0)$ — односвязная область. Условия $v(x) \geq 0$, $0 < x < \infty$, а также $\|v\|_X < \ln 2$ являются достаточными для $v \in \Omega(0)$. Условие $\|v\|_X < 1$ достаточно для того, чтобы $v \in \Omega(0) \cup \partial\Omega(0)$. Для расстояния $\rho(K, \partial\Omega(0))$ между конусом $K = \{v \in X \mid v(x) \geq 0\}$ и границей $\partial\Omega(0) = \{v \in X \mid f(v; k) \neq 0 \text{ } (\operatorname{Im} k \geq 0, k \neq 0)\}$; $f(v; 0) = 0\}$ справедлива оценка [24] $\rho(K, \partial\Omega(0)) = \inf_{v_1 \in K, v_2 \in \partial\Omega(0)} \|v_1 - v_2\|_X \geq \ln 2$, позволяющая рас-

ширить приведенное в теореме 5 множество начальных значений для задачи Коши (28).

3. ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ

$$\Psi(v), \Psi'(v) \text{ и } [\Psi'(v)]^{-1}$$

Для того чтобы построить обратные к найденным в предыдущем разделе операторам $\Psi'(v)$ и $Q'(v)$, докажем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $\varphi(v; x, k)$ — решение (6) уравнения (2) с $v \in \Omega(0)$. Тогда уравнение

$$k \int_0^{\infty} h(x) \varphi^2(v; x, k) dx = G(k), \quad 0 \leq k < \infty, \quad (103)$$

с любой правой частью вида

$$G(k) = \int_0^{\infty} g(x) \sin 2kx dx, \quad g(x), xg'(x) \in L^1(0, \infty), \quad (104)$$

имеет в пространстве X (42) единственное решение

$$h(x) = -\frac{4}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} G(k) \operatorname{Im} \{f^2(v; x, k) f^{-2}(v; k)\} dk, \quad 0 < x < \infty. \quad (105)$$

Замечание. При $v(x) \equiv 0$ теорема 3 сводится к тождеству

$$h(x) = -\frac{4}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} \int_0^{\infty} h(s) \sin^2 ks ds \right\} \sin 2kx dk, \quad 0 < x < \infty,$$

которое в силу $k^{-1} \int_0^{\infty} h(s) \sin^2 ks ds = \int_0^x \left\{ \int_x^{\infty} h(s) ds \right\} \sin 2kx dx$ пре-

вращается в формулу обращения для синус-преобразования Фурье. Ввиду того что произведение $Y(x, k) = y_1(x, k) y_2(x, k)$ любых двух решений уравнения (2) является решением уравнения

$$A[Y] \equiv -Y''' + 4v(x)Y' + 2v'Y = 4k^2Y', \quad 0 < x < \infty, \quad (106)$$

и что в силу (6) функция $\Phi(v; x, k) = \varphi^2(v; x, k)$ удовлетворяет начальным условиям

$$\Phi(v; 0, k) = 0; \quad \Phi_x(v; 0, k) = 0; \quad \Phi_{xx}(v; 0, k) = 2, \quad (107)$$

задача о решении уравнения (103) связана с задачей о формулах обращения для разложений по решениям краевой задачи (106) — (107). Последняя, в отличие от задачи (2) — (3), является несамо-сопряженной, и поэтому в формуле обращения (105) фигурируют решения сопряженной к (106) — (107) задаче, которая определяется дифференциальным уравнением (106) и краевым условием $Y(0, k) = 0$.

Обозначим $\psi(v, x, k)$ следующее решение уравнения (2):

$$\begin{aligned} \psi(v, x, k) = & |f(v, k)|^{-2} \{f(v, x, k) f(v, -k) + \\ & + f(v, x, -k) f(v, k)\}. \end{aligned} \quad (108)$$

Тогда в силу представления (71) функция

$$\begin{aligned} \Psi(v, x, k) = & k^{-1} \operatorname{Im} \{ \exp[-2i\eta(v, k)] f^2(v, x, k) \} = \\ = & \varphi(v, x, k) \psi(v, x, k) \end{aligned} \quad (109)$$

удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} \Psi(v, 0, k) = & 0; \quad \Psi_x(v, 0, k) = 2; \quad \Psi_{xx}(v, 0, k) = \\ = & 4 \operatorname{Re} (d \ln f(v, x, k)/dx)|_{x=0}, \end{aligned} \quad (110)$$

а формулы обращения (103), (105) можно записать в виде

$$\begin{aligned} h(x) = & -\frac{4}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} H(k) \Psi(v, x, k) \frac{k^2 dk}{|f(v, k)|^2}; \\ H(k) = & \int_0^{\infty} h(x) \Phi(v, x, k) dx. \end{aligned} \quad (111)$$

Формулы (111) показывают, что при $v \in \Omega(0)$ спектр задачи (106) — (107) совпадает со спектром задачи (2) — (3) и заполняет положительную ($k^2 > 0$) полуось, причем полной системой решений задачи (106) — (107) в пространстве X (42) является система квадратов решений $\varphi(v, x, k)$ задачи (2) — (3), порождающих равенство Парсеваля (11). Вопрос о полноте квадратов решений задачи Штурма — Лиувилля на конечном интервале $[0, a]$ был изучен Б. М. Левитаном [31], некоторые формулы обращения были получены в работе В. Барселона [32].

Доказательство проведем, опираясь на результаты разд. 2. Предварительно заметим, что, так как функция $\varphi^2(v, x, k)$ порождает определяемый (81) оператор $\mathbf{I} + \mathbf{P}(v) \in \mathcal{L}(X, X)$, решение уравнения (103) эквивалентно решению уравнения

$$[\mathbf{I} + \mathbf{P}(v)] h = f, \quad \text{где } f(x) = g'(x) \in X. \quad (112)$$

Введем в пространстве X еще один оператор:

$$[\mathbf{I} + \mathbf{G}(v)] h = h(x) - \frac{d}{dx} \int_x^{\infty} N(v, x, s) \left(\int_s^{\infty} h(\xi) d\xi \right) ds, \quad 0 < x < \infty, \quad (113)$$

где функция $N(v; x, s)$ определяется представлением (92). Нетрудно убедиться с помощью оценки (90), что

$$\|G(v)\| \leq \int_0^{\infty} \left\{ 2 \int_x^{\infty} |v(s)| ds + \int_x^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial x} N(v; x, s) \right| ds \right\} ds \leq 2\|v\|_x + 6\|v\|_x \exp(\|v\|_x) + \|v\|_x^2 \exp(2\|v\|_x) \quad (114)$$

и, следовательно, $I + G(v) \in L(X, X)$. Отсюда, так как ассоциированный с представлением (97) для функций $f^{-2}(v; k)$ оператор $I + \Gamma(v) \in L(X, X)$, получаем, что для любой функции $G(k)$ (104), построенная по формуле (105) функция

$$h = [I + G(v)] [I + \Gamma(v)] f \in X. \quad (115)$$

Следовательно, теорема 3 эквивалентна тождествам

$$[I + G(v)] [I + \Gamma(v)] [I + P(v)] h = h, \quad h \in X, v \in \Omega(0); \quad (116)$$

$$[I + P(v)] [I + G(v)] [I + \Gamma(v)] h = h, \quad h \in X, v \in \Omega(0). \quad (117)$$

Далее схема доказательства строится на основе следующих общих соображений. В силу однозначной разрешимости ОЗР (см. разд. 1) оператор $\Psi(v)$ (27) имеет на множестве $\Omega(0)$ обратный $\chi = \Psi^{-1}$ с областью определения $R_{\Psi}(0) = \Psi(\Omega(0)) \subset X$ и, следовательно, для любых $v \in \Omega(0)$ и $f \in R_{\Psi}(0)$ выполнены равенства $\chi(\Psi(v)) = v$ и $\Psi(\chi(f)) = f$. Отсюда из уже доказанной в теореме 2 дифференцируемости оператора Ψ получаем, что при всяком $h \in X$ должны иметь место равенства $\chi'(f) \Psi'(v) h = h$ и $\Psi'(v) \chi'(f) h = h$, т. е. $\chi'(f) = [\Psi'(v)]^{-1}$, $f = \Psi(v)$. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно доказать равенство $\chi' = I + G(v)$.

Пусть по функции $h(x) \in X$ с помощью формулы (103) построена функция $G_h(k)$. Заменяя в (68) и (72) $h(x)$ на $th(x)$, получаем, что при всех достаточно малых вещественных t имеют место разложения

$$f(v + th; x, k) = f(v; x, k) + t \int_x^{\infty} G(v; s, x, k) h(s) f(v + th; s, k) ds; \quad (118)$$

$$S(v + th; k) = S(v; k) - 2itf^{-2}(v; k) G_h(k) + t^2 \tilde{\omega}(v, th; k), \quad (119)$$

где $G(v; x, s, k)$ определяется (69), а $\tilde{\omega}(v, th; k)$ выражается посредством $\omega(v, h; k)$ (73). С другой стороны, из уравнения (14) следует тождество [4]

$$v_2(x) - v_1(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \{S(v_2; k) - S(v_1; k)\} f(v_2; x, k) f(v_1; x, k) dk, \quad 0 < x < \infty, \quad (120)$$

справедливое для любых $v_1, v_2 \in \Omega(0)$. Подставляя (118) и (119) в (120) с $v_2 = v + th$, $v_1 = v$, при $t = 0$ получаем равенство (105) с $G(k) = G_h(k)$; следовательно, решение $h \in X$ уравнения (103) единственно. Рассуждая в обратном порядке, получаем, что для любой функции $G(k)$ (104) имеет место тождество

$$G(k) = k \int_0^{\infty} \left\{ \frac{2i}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} G(s) \frac{f^2(v; x, s)}{f^2(v; s)} ds \right\} \varphi^2(v; x, k) dx, \quad (121)$$

эквивалентное (117), и, следовательно, функция $h(x)$ (115) — решение уравнения (103). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть операторы P_+ и $\Phi'(v)$ определяются соответственно (61), (99), тогда при $v \in \Omega(0)$ уравнение $P_+ \{\Phi'(v)h\} = \int_0^{\infty} g(x) \exp\{-2ikx\} dx$, $-\infty < k < \infty$, где $g \in \tilde{Y}_+$, имеет единственное решение

$$h = [I + G(v)] Dg \in X, \quad D = d/dx. \quad (122)$$

Далее, в силу представления $\Psi'(v) = [I + \Gamma(v)] [I + P(v)]$ из равенств (116), (117) получаем

Следствие 2. Производная Фреше $\Psi'(v)$ (79) оператора $\Psi(v)$ (27) при любом $v \in \Omega(0)$ имеет ограниченный обратный оператор

$$[\Psi'(v)]^{-1} = I + G(v). \quad (123)$$

Наконец, умножив (103) на $|f(v; k)|^{-2}$, получаем

Следствие 3. Обратный к $Q'(v)$ (77) оператор при $v \in \Omega(0)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} [Q'(v)]^{-1} G &= -\frac{4}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} G(k) \operatorname{Im} \{ \exp[-2i\eta(v; k)] f^2(v; x, k) \} dk = \\ &= -\frac{4}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} kG(k) \Psi(v; x, k) dk, \quad 0 < x < \infty, \end{aligned} \quad (124)$$

где функция $\Psi(v; x, k)$ определяется (109), а $G(k)$ удовлетворяет условиям (104).

Представление (123) для $[\Psi'(v)]^{-1}$ вместе с представлением (79) для $\Psi'(v)$ позволяет несколько детальнее изучить свойства оператора $\Psi(v)$ (27). Для этого нам понадобится следующая вспомогательная

Лемма 4. Пусть $K(v_j; x, s)$, $L(v_j; x, s)$, $j = 1, 2$ — ядра операторов преобразования (12) и (13), $v_j \in X$ и

$$\begin{aligned} \Delta K(x, s) &= K(v_2; x, s) - K(v_1; x, s); \quad \Delta L(x, s) = \\ &= L(v_2; x, s) - L(v_1; x, s). \end{aligned} \quad (125)$$

Тогда справедливы оценки:

$$\begin{aligned}
 |\Delta K(x, s)| &\leq \frac{1}{2} \left\{ \int_{(x-s)/2}^x |\Delta v(\xi)| d\xi + \right. \\
 &+ \|\Delta v\|_x \exp(\|v_1\|_x) \int_{(x-s)/2}^x |v_1(\xi)| d\xi \{1 + \|v_2\|_x \exp(\|v_2\|_x)\}, \\
 &0 < s < x; \tag{126}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\Delta L(x, s)| &\leq \frac{1}{2} \sigma_{\Delta v} \left(\frac{x+s}{2} \right) \exp(\|v_1\|_x) + \\
 &+ \frac{1}{2} \sigma_{v_2} \left(\frac{x+s}{2} \right) \|\Delta v\|_x \exp(\|v_1\|_x + \|v_2\|_x); \quad x \leq s < \infty; \tag{127}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\left| \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta L(x_1, x_2) - \frac{1}{4} \Delta v \left(\frac{x_1+x_2}{2} \right) \right| \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} \sigma_{v_2} \left(\frac{x_1+x_2}{2} \right) \sigma_{\Delta v}(x_1) \exp(\|v_2\|_x) + \\
 &+ \frac{1}{2} \sigma_{\Delta v} \left(\frac{x_1+x_2}{2} \right) \sigma_{v_1}(x_1) \exp(\|v_1\|_x) + \\
 &+ \frac{1}{2} \sigma_{v_2} \left(\frac{x_1+x_2}{2} \right) \sigma_{v_1}(x_1) \|\Delta v\|_x \exp(\|v_1\|_x + \|v_2\|_x), \quad j=1, 2, \tag{128}
 \end{aligned}$$

$$\text{где } \Delta v(x) = v_2(x) - v_1(x); \quad \sigma_v(x) = \int_x^\infty |v(s)| ds.$$

Доказывается лемма с помощью интегральных уравнений для ядер $K(v; x, s)$ и $L(v; x, s)$ [4, 24].

Лемма 5. Пусть функция $\Psi(v): X \rightarrow X$ определяется формулой (55), а функция $\mathbf{I} + \mathbf{G}(v): X \rightarrow L(X, X)$ — формулой (113). Тогда в любой ограниченной области $G \subset X$ функции $\Psi(v)$ и $\mathbf{G}(v)$ равномерно ограничены:

$$\sup_{v \in G} \|\Psi(v)\|_x \leq \mu + \mu^2 + \mu \exp(2\mu), \quad \mu = \sup_{v \in G} \|v\|_x; \tag{129}$$

$$\sup_{v \in G} \|\mathbf{G}(v)\| \leq 2\mu + 6\mu \exp(\mu) + \mu^2 \exp(2\mu) \tag{130}$$

и удовлетворяют условию Липшица, т. е. для любых $v_1, v_2 \in G$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
 &\|\Psi(v_2) - v_2 - \Psi(v_1) + v_1\|_x \leq \\
 &\leq \mu \{1 + 20 \max(1, \mu^2) \exp(7\mu)\} \|v_2 - v_1\|_x; \tag{131}
 \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{G}(v_2) - \mathbf{G}(v_1)\| \leq \{2 + 9\mu \max(1, \mu^3) \exp(3\mu)\} \|v_2 - v_1\|_x. \tag{132}$$

Доказательство оценок (130) и (132) вытекает непосредственно из определения оператора $\mathbf{I} + \mathbf{G}(v)$ и неравенств (127), (128).

Оценка (129) является иной записью известной оценки [4]

$$\left| 4F'(v; 2x) - v(x) + \left\{ \int_x^\infty v(s) ds \right\}^2 \right| \leq 4\sigma_v^2(x) \exp(\|v\|_X) \operatorname{sh} \|v\|_X, \quad (133)$$

где функция $F(v; x)$ определяется равенством (15). Из уравнения (14) следует, что для любых $v_1, v_2 \in X$ справедливо равенство

$$\Delta F(2x) + f(x) + 2 \int_x^\infty L(v_1; x, 2\xi - x) \Delta F(2\xi) d\xi, \quad 0 < x < \infty, \quad (134)$$

где $\Delta F(x) = F(v_2; x) - F(v_1; x)$, а

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty \Delta v(s) ds + 2 \int_x^\infty \Delta L(x, 2\xi - x) F(v_2; 2\xi) d\xi. \quad (135)$$

Рассматривая (134) как уравнение Вольтерра относительно функции $\Delta F(2x)$, с помощью оценок (127), (128) и (133) находим, что $|\Delta F(2x)| \leq \{\sigma_{\Delta v}(x) + \|\Delta v\|_X \sigma_{v_2}(x)\} \max(1, \mu) \exp(6\mu)$. Для того чтобы получить (131), следует учесть, что $\Psi(v_2) - \Psi(v_1) = 2d\Delta F(2x)/dx$, и оценить производную по x правой части (134), используя перечисленные выше неравенства. Лемма доказана.

Лемма 6. В области $\Omega(0)$ производная Фреше $\Psi'(v)$ (79) оператора $\Psi(v)$ (27) — непрерывная по норме (22) функция, удовлетворяющая условию Липшица в окрестности любой точки $v \in \Omega(0)$. Множество значений оператора $\Psi(v)$:

$$R_\Psi(0) = \{f \in X \mid \Psi^{-1}(f) \in \Omega(0)\} \quad (136)$$

— открытая область в X , и определенный на ней оператор $\Psi^{-1}(f)$ непрерывен по норме (42).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Операторы $I + \Pi(v)$ (80) и $I + P(v)$ (84) — непрерывные функции v , ввиду того что для любых $v, v+h \in X$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \|\Pi(v+h) - \Pi(v)\| &\leq \|h\|_X \{1 + \|v+h\|_X \exp(\|v+h\|_X)\} \times \\ &\quad \times \{\exp(2\|v\|_X) + \exp(\|v\|_X + \|v+h\|_X)\}; \\ \|P(v+h) - P(v)\| &\leq \|h\|_X \{1 + \|v+h\|_X \exp(\|v+h\|_X)\} \times \\ &\quad \times \{1 + \|v\|_X \exp(\|v\|_X) + \|v+h\|_X \exp(\|v+h\|_X)\}, \end{aligned}$$

следующие из оценок (126), (127). Как было показано в теореме 2, при $v \in \Omega(0)$ оператор $I + \Pi(v)$ имеет ограниченный обратный $I + \Gamma(v)$. Следовательно, если $\|h\|_X \leq M^{-1}(v)$, где $M(v) = 4\|I + \Gamma(v)\| (1 + 2\|v\|_X \exp(2\|v\|_X)) \exp(3\|v\|_X)$, то

$\| \Gamma(v+h) - \Gamma(v) \| \leq M(v) \| I + \Gamma(v) \| \| h \|_X$. Отсюда первое утверждение получается как следствие представления (79). Далее, пусть $v_0 \in \Omega(0)$ и $\Psi(v_0) = f_0$, тогда из непрерывности оператора $[\Psi'(v)]^{-1}$ следует, что в некоторой (достаточно малой) окрестности точки v_0 применима теорема об обратном операторе [18], в силу которой существует шар $U(v_0, \varepsilon) = \{v \in \Omega(0) \mid \|v - v_0\|_X < \varepsilon\}$, такой, что для всех $f \in U(f_0, \delta) = \{f \in X \mid \|f - f_0\|_X < \delta, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\}$ оператор $\Psi^{-1}(f)$ существует и $\Psi^{-1}(f) \in U(v_0, \varepsilon)$, что и требовалось доказать.

4. РЕШЕНИЕ ОЗР С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ (28)

Пусть задана функция $S_*(k)$, удовлетворяющая условиям (32) — (34) и (37) теоремы 1 при $N = 0$. В разд. 1 было показано, что если оператор $\Psi(v)$ построен по формуле (27), то уравнение

$$\Psi(v) = f_* \equiv \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - S_*(k)\} \exp(2ikx) dk, \quad 0 < x < \infty, \quad (137)$$

имеет единственное решение $v_* \in \Omega(0)$, для которого $S_*(k) = S(v_*; k)$. Приведем схему построения итерационной последовательности (23). Вернемся к тождеству (120):

$$\begin{aligned} \tilde{v}_2(x) &= \tilde{v}_1(x) - \\ &- \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \{S(\tilde{v}_2; k) - S(\tilde{v}_1; k)\} f(\tilde{v}_1; x, k) f(\tilde{v}_2; x, k) dk, \end{aligned} \quad (138)$$

справедливого для любых $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in \Omega(0)$. Пусть v_0 пока произвольный потенциал из $\Omega(0)$. Положим в правой части (138) $f(v_1; x, k) = f(v_2; x, k) = f(v_0; x, k)$; $S(\tilde{v}_1; k) = S(v_0; k)$ и $S(\tilde{v}_2; k) = S_*(k)$. Тогда получим некоторый потенциал

$$\begin{aligned} v_1(x) &= v_0(x) - \\ &- \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_*(k) - S(v_0; k)\} f^2(v_0; x, k) dk, \quad 0 < x < \infty. \end{aligned} \quad (139)$$

В силу определения оператора $\Psi(v)$ (27) и оператора $I + G(v)$ (113) последнее равенство можно переписать в виде

$$v_1 = v_0 - [I + G(v_0)](\Psi(v_0) - f_*). \quad (140)$$

Так как $\Psi(v_0), f_* \in X$, а $I + G(v) \in L(X, X)$, то $v_1 \in X$. Повторяя эту процедуру, приходим к последовательности

$$v_{n+1} = v_n - [I + G(v_n)](\Psi(v_n) - f_*) \in X, \quad n = 0, 1, \dots; \quad v_0 \in \Omega(0) \quad (141)$$

Хорошо известны теоремы Канторовича (см., например, [18]) о сходимости итерационных процессов ньютонова типа (23) в произвольном банаховом пространстве. Условия, которые предполагаются выполненными для оператора $f(v) : X \rightarrow X$ в (23), обеспечивают сжимаемость отображения $\Phi : v \rightarrow v - [f'(v)]^{-1}(f(v) - y_*)$ в некоторой окрестности искомого решения $v_* = f^{-1}(y_*)$. Это, со своей стороны, приводит к сходимости $v_n \rightarrow v_*$ при $n \rightarrow \infty$, если начальное приближение v_0 достаточно близко к v_* . Свойства оператора $\Psi(v)$, описанные в разд. 2,3, показывают, что $\Psi(v)$ при $v \in \Omega(0)$ удовлетворяет условиям этих теорем. Это позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема 4 [21]. Пусть функция $S_*(k)$, $-\infty < k < \infty$, удовлетворяет условиям (32) — (34) и (37) при $N = 0$ и v_* — решение уравнения (137). Тогда существует шар $U(v_*, \varepsilon) = \{v \in X \mid \|v - v_*\|_X < \varepsilon\} \subset \Omega(0)$, такой, что если $v_0 \in U(v_*, \varepsilon)$, то последовательности $\{v_n\}_n$ (141) и

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \tilde{v}_n - [I + G(v_0)](\Psi(\tilde{v}_n) - f_*) \equiv \\ &\equiv \tilde{v}_n - [\Psi'(v_0)]^{-1}(\Psi(\tilde{v}_n) - f_*), \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (142)$$

при $n \rightarrow \infty$ сходятся по норме пространства X к искомому потенциалу v_* . (Метод построения итерационных последовательностей вида (142), в которых требуется знание обратного оператора $[\Psi'(v)]^{-1}$ лишь в точке v_0 называется модифицированным методом Ньютона — Канторовича [18].)

Предположение об априорной близости v_0 к v_* — весьма сильное ограничение, тем более что в ОЗР оно вызвано лишь выбранным нами методом ее решения. Желая отчасти ослабить это ограничение, рассмотрим первоначально несколько более общий вопрос об области сходимости для следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} v_t &= -[I + G(v(t))][\Psi(v(t)) - f_*], \quad 0 \leq t < \infty, \\ v(0) &= v_0 \in X, \end{aligned} \quad (143)$$

которая эквивалентна уравнению (28). Отметим, что если оператор $\Psi(v)$ построен с помощью формул (55), (56), $I + G(v)$ — формулы (113), то задача Коши (143) имеет смысл для любого $v_0 \in X$. Нас будут интересовать лишь те $v_0 \in \Omega(0)$, для которых решение $v(t, v_0)$ принадлежит $\Omega(0)$ для всех $t \in [0, \infty)$. Тогда в силу $I + G(v) = [\Psi'(v)]^{-1}$ (123) выражение (143) приводим к виду (19):

$$\begin{aligned} v_t(t, v_0) &= -[\Psi'(v(t))]^{-1}[\Psi(v(t)) - f_*], \\ 0 \leq t < \infty, \quad v(0) &= v_0 \in \Omega(0). \end{aligned} \quad (144)$$

Теорема 5. Пусть G — ограниченная область из $\Omega(0)$, ∂G — ее граница и $v_* = \Psi^{-1}(f_*) \in \Omega(0)$ — решение уравнения (137). Тогда справедливы следующие утверждения:

а) необходимым и достаточным условием того, что $v \in G$, является существование хотя бы одного элемента $v_0 \in G$, для которого

$$\|\Psi(v_0) - f_*\|_X \leq d = \inf_{v \in \partial G} \|\Psi(v) - f_*\|_X; \quad (145)$$

б) $d > 0$ при $v_* \in \bar{\partial G}$. Если $v_* \in G$, то множество

$$\Omega(G) = \{v_0 \in X \mid \|\Psi(v_0) - f_*\|_X < d\} \subset G, \quad (146)$$

причем из $G_1 \supset G$ следует $\Omega(G_1) \supseteq \Omega(G)$ и для всех $v_0 \in \Omega(G)$ решение $v(t, v_0)$ задачи Коши (28) существует, принадлежит G и

$$\lim \|v(t, v_0) - v_*\|_X = 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty; \quad (147)$$

в) для того чтобы $v_* \in \bar{G}$, необходимо и достаточно выполнение соотношения

$$\inf_{v \in G} \|\Psi(v) - f_*\|_X \geq \inf_{v \in \partial G} \|\Psi(v) - f_*\|_X.$$

Доказательство. Из непрерывности обратного оператора Ψ^{-1} (лемма 6) и открытости $\Omega(0)$ (разд. 2) следует, что для любого $v_0 \in \Omega(0)$ существует шар $U(v_0, \rho) = \{v \in X \mid \|v - v_0\| < \rho\} \subset \Omega(0)$, такой, что $\inf \|\Psi(v) - \Psi(v_0)\|_X > 0$ при $v \in U(v_0, \rho)$. Следовательно, если $v_* \in \bar{\partial G}$, то $\inf_{v \in \partial G} \|\Psi(v) - f_*\| > 0$.

Необходимость условия (145) вытекает из непрерывности оператора $\Psi(v)$ и равенства $\Psi(v_*) = f_*$. Оценка (114) показывает, что норма $\|[\Psi'(v)]^{-1}\|$ равномерно ограничена в G и, следовательно, если для некоторого v_0 из G выполнено условие (145), то тем самым выполнены и условия теоремы 2 [17], обеспечивающей принадлежность области G решения $v(t, v_0)$ и существование предела (147). Пусть $H = \Psi(G)$, тогда в силу леммы 6 H — открытое множество в $R_\Psi(0)$ (136) и $\partial H = \Psi(\partial G)$. Условие (145) означает, что

$$\Psi(v_0) \in U(f_*, d) = \{f \in X \mid \|f - f_*\|_X \leq d\}$$

ввиду того, что $d = \inf \|f - f_*\|_X$ ($f \in \partial H$). Таким образом, $U(f_*, d) \subseteq H$, откуда получаем (146). Утверждение (в) вытекает непосредственно из утверждений (а) и (б). Теорема доказана.

Следствие. Для любого $v_* \in \Omega(0)$ существует шар $U(v_*, \varepsilon) = \{v \in X \mid \|v - v_*\| < \varepsilon\} \subset \Omega(0)$, такой, что если $v_0 \in U(v_*, \varepsilon)$, то задача Коши (28) имеет единственное решение $v(t, v_0) \in \Omega(0)$, для которого справедливо (147).

Замечание. Локальную сходимость для задачи Коши (28) можно получить и непосредственной проверкой условий теоре-

мы 1 [17] с помощью оценок леммы 5. Теорема 4 определенным образом расширяет эти локальные условия. Максимальную область сходимости $G_* \equiv \Omega(0)$ дает следующая теорема.

Теорема 6. Пусть по элементу $f_* \in R_{\Psi}(0)$ построена область

$$H_* = \{f_0 \in X \mid \alpha f_* + (1 - \alpha) f_0 \in R_{\Psi}(0), 0 \leq \alpha \leq 1\}. \quad (148)$$

Тогда при любом $v_0 \in G_* = \Psi^{-1}(H_*)$ траектория Ньютона $v(t, v_0)$ содержится в $\Omega(0)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t, v_0) = v_* = \Psi^{-1}(f_*)$.

Доказательство. Ввиду того что отрезок $f(\alpha) = \alpha f_* + (1 - \alpha) f_0$ является компактом в области $R_{\Psi}(0) \subset X$, из непрерывности обратного оператора $\Psi^{-1}(f)$ (лемма 6) следует, что кривая $v(t) = \Psi^{-1}(f(\alpha))$ [$\alpha = \exp(-t)$, $0 \leq t < \infty$] есть компактное, а следовательно, и ограниченное множество в области $\Omega(0)$, не имеющее общих точек с $\partial\Omega(0)$. Отсюда в силу леммы 5 вытекает, что $B = \sup_t \|\Psi'(v(t))\|^{-1} < \infty$. Учитывая, что $v(t)$ является решением уравнения (19), находим, следуя [17], оценку $\|v'(t)\|_X \leq B \|\Psi(v_0) - f_*\|_X \exp(-t)$, показывающую, что длина кривой $v(t)$, $0 \leq t < \infty$, конечна. Это влечет за собой существование предела $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = v_*$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь некоторые вопросы приближенного решения задачи Коши (28).

Лемма 7. Пусть $G \subset \Omega(0)$ — ограниченная область, содержащая решение v_* уравнения (137):

$$B = \sup_{v \in G} \|\Psi'(v)\|^{-1}, \quad d = \inf_{v \in G} \|\Psi(v) - f_*\|_X.$$

Тогда при любом $v_0 \in \Omega(G)$ (146) имеем следующую равномерную оценку для «хвостов» решений $v(t, v_0)$ уравнения (28):

$$\|v(t) - v_0\|_X < \varepsilon; \quad T = -\ln[\varepsilon(Bd)^{-1}] < t < \infty. \quad (149)$$

Доказательство получается в силу теоремы 5 из следующей оценки [17] для скорости сходимости решения $v(t, v_0)$ уравнения (19):

$$\begin{aligned} \|v(t, v_0) - v_*\|_X &= \left\| \int_t^{\infty} v'(\tau) d\tau \right\|_X \leq \\ &\leq \int_t^{\infty} \|\Psi'(v(\tau))\|^{-1} \|\Psi(v_0) - f_*\|_X \exp(-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Разобьем интервал $[0, T]$ ($T < \infty$) на n частей узловыми точками:

$$\begin{aligned} t_0 = 0, \quad t_1 = t_0 + r_1, \quad \dots, \quad t_n = t_{n-1} + r_n = T, \\ \sup r_i = r \leq n^{-1}TK, \end{aligned} \quad (150)$$

где $K > 1$ — константа, не зависящая от n .

Теорема 7. При любых $\varepsilon > 0$ и $T < \infty$ существует число $r = r(\varepsilon, T) > 0$, такое, что если начальное приближение $v_0 = \bar{v}_0$ принадлежит области сходимости для уравнения (28), указанной в теоремах 5 и 6, и последовательность $\{\bar{v}_j\}_{j=1}^n$ построена по формуле

$$\begin{aligned} \bar{v}_j &= \bar{v}_{j-1} - r_j [\mathbf{I} + \mathbf{G}(\bar{v}_{j-1})] (\Psi(\bar{v}_{j-1}) - f_*) = \\ &= \bar{v}_{j-1}(x) + \frac{r_j}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_*(k) - S(\bar{v}_{j-1}; k)\} f^2(\bar{v}_{j-1}; x, k) dk, \\ 0 < x < \infty; \quad j &= 1, 2, \dots, n; \quad \sup r_j < r, \end{aligned} \quad (151)$$

то

$$\|\bar{v}_j - v_j\|_x < \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (152)$$

где $v_j = v(t_j)$ — значения точного решения $v(t, v_0)$ уравнения (28) в точках t_j (150). (Последовательность, определяемая формулой (151), называется приближенным решением уравнения (28), полученным методом Эйлера *).

Доказательство, которое в силу теоремы 2 [33] сводится к проверке условия Липшица для оператора $[\mathbf{I} + \mathbf{G}(v)] \times \times (\Psi(v) - f_*)$ в области, содержащей $v(t, v_0)$, вытекает непосредственно из леммы 5, если учесть, что условия сходимости, приведенные в теоремах 5 и 6, обеспечивают принадлежность решения $v(t, v_0)$ некоторой ограниченной области $G \subset \Omega(0)$. Теорема доказана.

Отметим, что вопрос об итерационном решении обратной задачи Штурма — Лиувилля на конечном интервале для малых по норме $L^2(0, a)$ потенциалов рассматривался в [32]. Аналогом этого случая в наших построениях является последовательность (142) с $v_0(x) \equiv 0$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n - (\Psi(v_n) - f_*) \equiv v_n(x) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_*(k) - S(v_n, k)\} \exp(2ikx) dk, \\ 0 < x < \infty; \quad n &= 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (153)$$

сходимость которой для всех v_* из некоторой достаточно малой окрестности нуля — следствие оценки (131).

* Отсюда ясно, что последовательности (141) и (142) можно рассматривать как приближенные решения уравнения (28), полученные соответственно основным и модифицированным методом Ньютона — Канторовича.

5. РЕШЕНИЕ ОЗР С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ (26) В МНОЖЕСТВЕ $\Omega(0)$

Пространство X (42), рассматривавшееся в предыдущих разделах, очевидно, не является единственно возможным. В терминах функции $F(v; x)$ (15) нетрудно сформулировать необходимые и достаточные условия того, чтобы соответствующий потенциал $v(x)$ имел определенное число производных, убывал при $x \rightarrow \infty$ как $x^{-\mu}$ ($\mu > 2$) или исчезал тождественно при $x > A$ и т. д. [4, 8]. Этими свойствами функции $F(v; x)$, $0 < x < \infty$, здесь мы воспользуемся для того, чтобы построить уравнение (26) для решения ОЗР, взяв в качестве пространства потенциалов множество $X_p^{(n)}$ n раз непрерывно дифференцируемых на полуоси $0 \leq x < \infty$ функций $v(x)$, для которых при некотором $p \geq 1$ существует

$$\|v\|_{X_p^{(n)}} = \sup_{0 \leq j \leq n} \int_0^{\infty} (1+x^p) \left| \frac{d^j v(x)}{dx^j} \right| dx < \infty. \quad (154)$$

В качестве соответствующего пространства для данных рассеяния положим

$$Y_p^{(n+1)} = \left\{ G(k) \in Y_0 \mid g(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} G(k) \sin 2kx dx \in X_p^{(n+1)} \right\}. \quad (155)$$

Как уже отмечалось в разд. 1, из одного условия $\eta(k) \in Y_0$ (45) не следует, что потенциал $v(x) \in X$ (42). Пространство $Y_p^{(n+1)}$ удобно для формулирования в терминах фазы рассеяния $\eta(v; k)$ некоторых достаточных условий, обеспечивающих $v \in X_p^{(n)}$.

Лемма 8. Пусть при некотором $N \geq 0$ функция $\eta(k)$ удовлетворяет условиям (32) — (34) теоремы 1 с $S(k) = \exp\{-2i\eta(k)\}$ и, кроме того, функция

$$\eta^{(0)}(k) = \eta(k) + 2N \arctg(1/k) = \int_0^{\infty} \hat{\eta}^{(0)}(x) \sin 2kx dx \in Y_p^{(n+1)}. \quad (156)$$

Тогда набор величин $\{\eta^{(0)}(k) \in Y_p^{(n+1)}; 0 < \kappa_1 < \dots < \kappa_N; \{C_m > 0\}_{m=1}^N\}$ определяет единственный потенциал $v(x) \in X_p^{(n)}$, для которого эти величины являются данными рассеяния.

Доказательство. При $N = 0$ из условия $\eta(k) \in Y_0$ (45) и теоремы о свертках следует, что функция $F_S(x)$ (34) определяется следующим сходящимся по норме пространства $L^1(-\infty, \infty)$ рядом:

$$F_S(x) = \tilde{\eta}(x) + (2!)^{-1} \tilde{\eta} * \tilde{\eta}(x) + \dots, \quad \tilde{\eta}(x) = \hat{\eta}(x/2), \quad (157)$$

так как при $f_1, f_2 \in L^1(-\infty, \infty)$ свертка

$$f_1 * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s) f_2(x-s) ds \in L^1(-\infty, \infty).$$

Пусть теперь функции $f_i(x)$, $i = 1, 2$, дифференцируемые при $x \neq 0$, в точке $x = 0$ допускают разрыв первого рода и существует

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|^p) \left| \frac{d^j f_i(x)}{dx^j} \right| dx < \infty, \quad j = 0, 1, \dots, n+1; \quad i = 1, 2.$$

Тогда нетрудно проверить неравенства

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|^p) |f_1 * f_2(x)| dx &\leq (2^p + 1) \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|^p) |f_1(x)| dx \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|^p) |f_2(x)| dx < \infty \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|^p) \left| \frac{d}{dx} \{f_1 * f_2(x)\} \right| dx &\leq |f_1(+0) - \\ &- f_1(-0)| \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|^p) |f_2(x)| dx + \\ + (2^p + 1) \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|^p) \left| \frac{df_1(x)}{dx} \right| dx &\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|^p) |f_2(x)| dx < \infty, \end{aligned}$$

из которых в силу разложения (157) следует, что если функция $\eta(k) \in Y_p^{(n+1)}$, то при $x \geq 0$ функция $F_S(x) \in X_p^{(n+1)}$. Последнее условие в силу уравнения (14) является достаточным для того, чтобы $v(x) \in X_p^{(n)}$. Случай $N > 0$ сводится к этому с помощью леммы 1. Лемма доказана.

Обозначим $\Omega_p^{(n)}(0)$ множество потенциалов $v \in \Omega(0)$, для которых фаза рассеяния $\eta(v; k) \in Y_p^{(n+1)}$, т. е.

$$\begin{aligned} \Omega_p^{(n)}(0) = Q^{-1}(Y_p^{(n)}), \quad Q(v) = \eta(v; k); \\ v \in \Omega(0). \end{aligned} \quad (158)$$

Теорема 8. Пусть функция $\eta_* \in Y_p^{(n+1)}$, $v_0 \in \Omega_p^{(n)}(0)$. Тогда первый интеграл

$$\begin{aligned} \eta(t, v_0; k) = \eta(v_0; k) \exp(-t) + \eta_*(k) (1 - \exp(-t)), \\ |0 \leq t < \infty, \quad 0 \leq k < \infty, \end{aligned} \quad (159)$$

определяет однозначно траекторию Ньютона

$$v(t; v_0) = Q^{-1}(\eta(t, v_0)) \in \Omega_p^{(n)}(0), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (160)$$

которая является решением задачи Коши:

$$v_t(t; x) = \frac{4}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} k [\eta(v_0; k) - \eta_*(k)] \times$$

$$\times \exp(-t) \Psi(v(t); x, k) dk, \quad 0 \leq t < \infty; \quad v(t, x)|_{t=0} = v_0(x),$$

где функция $\Psi(v; x, k) = k^{-1} \operatorname{Im} \{ \exp \{-2i\eta(v; k)\} f^2(v; x, k) \}$ при $n \geq 1$ — решение краевой задачи (107)–(108). При $t \rightarrow \infty$ существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t, v_0) - v_*\|_{X_p^n} = 0,$$

$$\eta(v_*, k) = \eta_*(k). \quad (161)$$

Доказательство. Из условий $\eta(v_0; k), \eta_*(k) \in Y_p^{(n+1)}$ следует, что и функция $\eta(t, v_0; k) \in Y_p^{(n+1)}$ при $0 \leq t < \infty$, что в силу леммы 8 дает (160). Следовательно, дифференцируя по t обе части (159) с $\eta(t, v_0; k) = \eta(v(t, v_0); k)$, получаем в силу (77) уравнение (25):

$$\begin{aligned} |Q'(v) v_t &\equiv k |f(v(t); k)|^{-2} \int_0^{\infty} v_t(t, x) \varphi^2(v(t); x, k) dx = \\ &= [\eta(v_0; k) - \eta_*(k)] \exp(-t). \end{aligned}$$

Применяя к обеим частям (25) оператор $[Q'(v)]^{-1}$ (124), приходим к уравнению (26). Из условия $\eta(v_0; k) - \eta_*(k) \in Y_p^{(n+1)}$, выразив функцию $\Psi(v; x, k)$ через операторы преобразования (10), (11), с помощью оценок, приведенных в разд. 2, 3, нетрудно получить, что правая часть уравнения (26) принадлежит пространству $X_p^{(n)}$ при любом $t \in [0, \infty)$. Условие Липшица для оператора $Q(v) = \eta(v; k)$ вытекает из тождества (102). Отсюда сходимость (161) получается как следствие сходимости $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\eta(t, v_0) - \eta_*\|_{Y_p^{n+1}} = 0$ построениями, аналогичными сделанным при доказательстве теоремы 6; здесь мы опускаем их, так как они достаточно подробно изложены в разд. 3 для пространства X (42). Теорема доказана.

Уточним теперь связь между гладкостью (по x) траекторий Ньютона $v(t, v_0; x)$ (160) и асимптотики первого интеграла (159) при $k \rightarrow \infty$. Хорошо известно [23, 34], что если потенциал $v(x) \in X$ имеет $n \geq 0$ непрерывных при $x \geq 0$ производных, суммируемых на полуоси ($0 \leq x < \infty$), то для функций рассеяния $\eta(v, k)$ при $k \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$\eta(v; k) = \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^j}{(2k)^{2j+1}} I_j[v] + o\left(\frac{1}{k^{n+1}}\right), \quad I_j[v] = \int_0^{\infty} \sigma_{2j+1}(v; x) dx, \quad (162)$$

где $[m]$ — целая часть числа m , а локальные плотности $\sigma_j(v; x)$ определяются однозначно рекуррентной формулой (18) и граничным условием $\sigma_j(v; \infty) = 0$. Первые три коэффициента $I_j[v]$ имеют следующий вид:

$$I_0[v] = \int_0^{\infty} v(x) dx; \quad I_1[v] = -v_x(0) - \int_0^{\infty} v^2(x) dx; \quad (163)$$

$$I_2[v] = -v_{xxx}(0) + 6v(0)v_x(0) + \int_0^{\infty} [v_x^2(x) + 2v^3(x)] dx. \quad (164)$$

В то же время для любой функции $G(k) \in Y_p^{(n+1)}$ интегрированием по частям находим разложение

$$G(k) = \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^j}{(2k)^{2j+1}} a_j + o\left(\frac{1}{k^{n+1}}\right), \quad k \rightarrow \infty;$$

$$a_j = \left. \frac{d^{2j}g(x)}{dx^{2j}} \right|_{x=0}. \quad (165)$$

Отсюда, полагая $G(k) = \eta(v; k)$, в силу леммы 8 получаем, что имеет место следующая лемма.

Лемма 9. При условиях теоремы 8 для фазы рассеяния $\eta(v(t, v_0); k)$ справедливо разложение

$$\eta(v(t, v_0); k) = \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^j I_j[v(t, v_0)]}{(2k)^{2j+1}} + \frac{\varepsilon(k, t)}{k^{(n+1)}},$$

$$k \rightarrow \infty; \quad 0 \leq t < \infty, \quad (166)$$

где остаточный член $\varepsilon(k, t) = o(1)$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [0, \infty)$, а коэффициенты

$$I_j[v(t, v_0)] = I_j[v_0] \exp(-t) + a_{j,*} [1 - \exp(-t)], \quad 0 \leq t < \infty; \quad a_{j,*} = I_j[v_*]. \quad (167)$$

Перейдя от первого интеграла (159) к уравнению (26), получим следующее следствие.

Следствие. Если при некоторых индексах j_m (не обязательно последовательных) начальное приближение $v_0 \in \Omega_p^{(n+1)}(0)$ такое, что

$$I_{j_m}[v_0] = a_{j_m,*}, \quad j_m \leq [n/2], \quad (168)$$

то и вдоль решения $v(t, v_0)$ уравнения (26)

$$I_{j_m}[v(t, v_0)] = a_{j_m,*}, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (169)$$

Наличие сохраняющихся величин (169) позволяет выбором начального приближения улучшить порядок убывания при $k \rightarrow \infty$

подынтегрального выражения в (26), чем мы воспользуемся в разд. 7 при построении численного алгоритма для решения ОЗР.

Замечание. Существование первого интеграла

$$\begin{aligned}\Psi(t, v_0) &\equiv 2 \frac{d}{dx} F_S(v(t, v_0); 2x) = \\ &= 2 \frac{d}{dx} \{F_S(v_0; 2x) \exp(-t) + F_S(v_*; 2x) [1 - \exp(-t)]\}, \\ &0 \leq t \leq \infty; \quad 0 < x < \infty,\end{aligned}$$

для уравнения (28) позволяет, например, показать, что в пространстве $X_p^{(n)}$ (154) при $j \leq n + 1$ величины $d^j F_S [v(t, v_0); x] / dx^j |_{x=+0}$ $0 \leq t < \infty$, могут быть сохраняющимися. Отсюда, однако, не следует сохранение коэффициентов в асимптотическом разложении при $k \rightarrow \infty$ для функции рассеяния $S(v; k)$, с помощью которой по формуле (27) строится оператор $\Psi(v)$. Это видно уже из первого члена асимптотики

$$\begin{aligned}1 - S(v; k) &= \frac{-1}{2ik} \int_0^\infty v(x) dx + o\left(\frac{1}{k}\right) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{ik} [F_S(v; +0) - F_S(v; -0)] + o\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Рассматривать непосредственно уравнение (19) для оператора $\Phi(v) = 1 - S(v, k)$, $-\infty < k < \infty$, не имеет смысла, так как условие (2) из разд. 1 в силу (32) заведомо не выполняется при $v_0 \neq v_*$.

6. УРАВНЕНИЕ (19) ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОЗР НА МНОЖЕСТВАХ $\Omega(N)$ ПРИ $N > 0$

Следуя [35], обобщим полученные в разд. 5 утверждения на случай связанных состояний у искомого потенциала.

Обозначим $\Omega_p^{(n)}(N)$ множество потенциалов $v \in \Omega(N)$, для которых значения оператора $Q(v)$ (47) принадлежат пространству

$$Y_{N,p}^{(n+1)} = Y_p^{(n+1)} \oplus R_N \oplus R_N,$$

т. е.

$$\begin{aligned}\Omega_p^{(n)}(N) &= Q^{-1} \{(\eta(v; k) + 2N \arctg(1/k)) \in Y_p^{(n+1)}; \\ &\{\alpha_m(v) > 0\}_{m=1}^N; \quad \{C_m(v) > 0\}_{m=1}^N\}.\end{aligned}\quad (170)$$

В силу леммы 8 $\Omega_p^{(n)}(N) \subset X_p^{(n)} \cap \Omega(N)$. Следовательно, для любого $v_0 \in \Omega_p^{(n)}(N)$ система первых интегралов (52) — (54) определяет однозначно траекторию Ньютона

$$v(t, v_0) = Q^{-1} \{Q(v_0) \exp(-t) + g_* [1 - \exp(-t)]\} \in \Omega_p^{(n)}(N). \quad (171)$$

Из уравнения Гельфанда — Левитана следует, что для любого потенциала $v \in \Omega(N)$ «частные» производные обратного к $Q(v)$ (47) отображения $Q^{-1}: s(v) \rightarrow v$ определяются следующими выражениями:

$$\frac{\delta v(x)}{\delta \eta(k)} = \frac{4}{\pi} \frac{d}{dx} \left\{ \operatorname{Im} \{ \exp [2i\eta(v; k)] f^2(v; x, k) \} + \sum_{m=1}^N \frac{2kC_m(v)}{k^2 + \kappa_m^2(v)} \varphi^2(v; x, i\kappa_m) \right\}; \quad (172)$$

$$\partial v(x)/\partial C_m = -2d\varphi^2(v; x, i\kappa_m)/dx, \quad m = 1, \dots, N; \quad (173)$$

$$\frac{\partial v(x)}{\partial \kappa_m} = 8\kappa_m \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\dot{f}(v; x, i\kappa_m)}{f(v; i\kappa_m)} \varphi(v; x, i\kappa_m) - \sum_{l=1}^N B_l \varphi^2(v; x, i\kappa_l) \right\}, \quad (174)$$

где точкой сверху обозначено дифференцирование по k ;

$$B_m = -\frac{C_m(v)}{4\kappa_m^2(v)} \left\{ 1 - k \frac{d}{dk} \ln \dot{f}(v; k) \Big|_{k=i\kappa_m} \right\};$$

$$B_l = \frac{C_l}{\kappa_m^2 - \kappa_l^2}; \quad l \neq m. \quad (175)$$

Формула (172) для функциональной производной потенциала $v(x)$ по фазе рассеяния $\eta(k)$ была получена Р. Ньютоном [11], формулы (173), (174) принадлежат Йосту и Кону [6, 7]. Явный вид (175) коэффициентов B_m приведен в работе Колоджеро и Дегаспериса [36], где также подробно изучены свойства $\delta v(x)/\delta \eta(k)$ (172) для класса аналитических потенциалов.

Производная Фреше оператора $Q(v)$ (47) при $v \in \Omega(N)$ определяется следующим линейным оператором $Q'(v) \in L(X, Y_N)$:

$$\left. \begin{aligned} Q'(v)h &= \left\{ \frac{k}{|f(v; k)|^2} \int_0^\infty h(x) \varphi^2(v; x, k) dx; \right. \\ &- \frac{C_m(v)}{2\kappa_m(v)} \int_0^\infty h(x) \varphi^2(v; x, i\kappa_m) dx; \\ &\left. \int_0^\infty h(x) \frac{\delta C_m(v)}{\delta v(x)} dx. \right\} \quad (176) \end{aligned}$$

Здесь $\delta \eta(k)/\delta v(x) = k |f(v; k)|^{-2} \varphi^2(v; x, k)$, $[v \in \Omega(N)]$ — полученная в лемме 2 функциональная производная для фазы рассеяния $\eta(v; k)$ по потенциалу $v(x)$; выражение $C_m(v) \varphi^2(v; x, i\kappa_m)$ для градиента собственных чисел $-\kappa_m^2$ хорошо известно [22].

Для вариационной производной $\delta C_m(v)/\delta v(x)$ нормировочных величин $C_m(v)$ (10) может быть получено выражение [37]

$$\begin{aligned} \delta C_m/\delta v(x) &= 4k_m \dot{f}^{-2}(k_m) \dot{f}(x, k_m) + \\ &+ 2[\dot{f}^{-2}(k_m) - \dot{f}(k_m) \dot{f}^{-3}(k_m)] f^2(x, k_m) = \\ &= \frac{4}{\pi} C_m \int_0^\infty \frac{k^2 \varphi^2(x, k) dk}{|f(k)|^2 (k_m^2 - k^2)} - \\ &- C_m^2 k_m^{-1} \dot{\varphi}(x, k_m) \varphi(x, k_m) + \sum_{j \neq m} 2C_m C_j (k_m^2 - k_j^2)^{-1} \varphi^2(x, k_j). \end{aligned}$$

В [38] показано, что обратный к $Q'(v)$ (176) оператор $[Q'(v)]^{-1} \in L(Y_N, X)$ и находится методом контурного интегрирования интеграла

$$I(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left\{ k \int_0^\infty h(y) G^+(x, y, k) dy \right\} dk,$$

где

$$G^+(x, y, k) = \begin{cases} -2^{-1} f^{-2}(k) \{ \varphi^2(x, k) f^2(y, k) - \\ - 2\varphi(x, k) f(x, k) \varphi(y, k) f(y, k) \}, & x \leq y \leq \infty; \\ 2^{-1} f^{-2}(k) f^2(x, k) \varphi^2(y, k), & 0 \leq y \leq x; \quad \text{Im } k \geq 0. \end{cases}$$

Контур интегрирования γ проходит вдоль действительной оси k от $-R$ до $+R$ и замыкается в полуплоскости $\text{Im } k > 0$ полуокружностью $\gamma_R = R \exp\{i\theta\}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Отметим, что если потенциал $v(x)$ дифференцируем, то функция $G^+(x, y, k)$ является функцией Грина неоднородной краевой задачи $A[Y] = 4k^2 D Y - h(x)$, $Y(0, k) = 0$, где дифференциальный оператор A определяется формулой (106). Из известных аналитических свойств решений $\varphi(x, k)$, $f(x, k)$ и функции Йоста $f(k)$ следует, что при $v \in \Omega(N)$ подынтегральная функция в $I(x)$ есть аналитическая по k при $\text{Im } k > 0$ функция, имеющая N двукратных полюсов k_j , определяемых нулями $f(k)$ при $\text{Im } k > 0$, а при вещественных $k \neq 0$

$$G^+(x, y, k) - G^+(x, y, -k) = -ik\varphi^2(y, k) \Psi(x, k),$$

где функция $\Psi(x, k)$ определена формулой (109). При этом в силу (74) справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\left| 2kf^{-2}(k) \int_0^\infty h(y) G^+(x, y, k) dy \right| \leq \\ &\leq \left\{ \int_0^x y |h(y)| dy + 3x \int_x^\infty |h(y)| dy \right\} \exp\{2\|v\|_x\}, \quad \text{Im } k \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда, подсчитав $I(x)$ по теореме о вычетах и непосредственно по контуру γ при $R \rightarrow \infty$, приходим к следующей формуле обращения:

$$h(x) = \int_0^{\infty} \eta'_v(v, h; k) \frac{\delta v(x)}{\delta \eta(k)} dk + \sum_{m=1}^N \left\{ C'_{m,v}(v, h) \frac{\partial v(x)}{\partial C_m} + \kappa'_{m,v}(v, h) \frac{\partial v(x)}{\partial \kappa_m} \right\}, \quad (177)$$

где

$$\eta'_v(v, h; k) = k |f(v; k)|^{-2} \int_0^{\infty} h(y) \varphi^2(y, k) dy.$$

Из (177), в частности, вытекает, что для связанных состояний система квадратов решений задачи (2) — (3), порождающих равенство Парсевала (11), становится полной при добавлении функций $\dot{f}(x, k_m)$, $f(x, k_m)$, $m = 1, \dots, N$.

Обозначим

$$\mathfrak{M}(\kappa_1, \dots, \kappa_N) = \{v \in \Omega_p^{(n)}(N) \mid \kappa_m(v) = \kappa_m\} \quad (178)$$

многообразие потенциалов $v \in \Omega_p^{(n)}(N)$ (170), для которых отрицательный спектр краевых задач (2) — (3) состоит из одних и тех же фиксированных чисел $\{-\kappa_m^2\}_{m=1}^N$, и пусть

$$\eta^{(0)}(v; k) = \eta(v; k) + 2 \sum_{m=1}^N \arctg(\kappa_m/k) \in Y_p^{(n+1)} \quad (179)$$

— приведенная фаза рассеяния (40) при $v \in \mathfrak{M}$. Так как для любого $v \in \mathfrak{M}$ имеем $\partial v(x)/\partial \kappa_m = 0$, $m = 1, \dots, N$, теорема 8 допускает следующее обобщение.

Теорема 10. Пусть $g_* = \{\eta_*^{(0)}(k); \kappa_{m,*} > 0; C_{m,*} > 0, m = 1, \dots, N\}$, $\kappa_{m,*} \neq \kappa_{n,*}$ — при $m \neq n$ заданный элемент пространства $Y_{N,p}^{(n+1)}$ и \mathfrak{M}_* — построенное по формуле (178) многообразие потенциалов, отвечающих заданным числам $\{\kappa_{m,*}\}$. Тогда для любого начального значения $v_0 \in \mathfrak{M}_*$ задача Коши

$$v_t(t, x) = \frac{4}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} k [\eta(v(t); k) - \eta_*(k)] \tilde{\Psi}(v(t); x, k) dk + \sum_{m=1}^N (C_m(v(t)) - C_{m,*}) \varphi^2(v(t); x, i\kappa_{m,*}), \quad 0 \leq t < \infty, \quad v(t, x)|_{t=0} = v_0(x), \quad (180)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(v; x, k) = & \frac{1}{k} \operatorname{Im} \{ \exp[-2i\eta(v; k)] f^2(v; x, k) \} + \\ & + 2 \sum_{m=1}^N \frac{C_m(v)}{k^2 + \kappa_{m,*}^2} \varphi^2(v; x, i\kappa), \end{aligned} \quad (181)$$

имеет единственное решение $v(t, v_0) \in \mathfrak{m}_*$, порождающее однопараметрическое по t семейство унитарно эквивалентных краевых задач (2) — (3), данные рассеяния которых определяются следующей системой первых интегралов:

$$\begin{aligned} \eta(t, k) = & \eta^{(0)}(v_0; k) \exp(-t) + \eta_*^{(0)}(k) [1 - \exp(-t)] \equiv \\ \equiv & \eta(v_0; k) \exp(-t) + \eta_*(k) [1 - \exp(-t)], \quad 0 \leq t < \infty; \end{aligned} \quad (182)$$

$$\kappa_m(v(t)) = \kappa_{m,*}, \quad m = 1, \dots, N, \quad 0 \leq t < \infty; \quad (183)$$

$$\begin{aligned} C_m(v(t)) = & C_m(v_0) \exp(-t) + C_{m,*} [1 - \exp(-t)], \\ & 0 \leq t < \infty. \end{aligned} \quad (184)$$

При $t \rightarrow \infty$ существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t, v_0) = v_*$, где $v_* = Q^{-1}(g_*)$.

Дифференцируя по t равенство (182), в силу леммы 2 получаем следующее следствие.

Следствие. Если в (184) $C_m(v_0) = C_{m,*}$, $m = 1, \dots, N$, то уравнение (180) можно записать в виде (25).

Из представления (179) следует, что при $k \rightarrow \infty$ имеет место разложение

$$\eta(v; k) = \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^j}{(2k)^{2j+1}} \left\{ \frac{2}{2j+1} \sum_{m=1}^N (2\kappa_m(v))^{2j+1} + \eta_j^{(0)}(v) \right\} + o\left(\frac{1}{k^{n+1}}\right), \quad (185)$$

где коэффициенты

$$\eta_j^{(0)}(v) = \frac{d^{2j}}{dx^{2j}} \left\{ \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \eta^{(0)}(v; k) \sin 2kx \, dx \right\} \Big|_{x=0}.$$

Сравнивая (185) с выражением (162), приходим к следующей лемме.

Лемма 9. При условиях теоремы 10 для фазы рассеяния $\eta(t, k)$ (182) решения $v(t, v_0)$ задачи Коши (180) справедливо равномерное по $t \in (0, \infty)$ асимптотическое разложение

$$\eta(v(t, v_0); k) = \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^j}{(2k)^{2j+1}} I_j[v(t, v_0)] + o\left(\frac{1}{k^{n+1}}\right), \quad k \rightarrow \infty, \quad (186)$$

где

$$\begin{aligned} I_j[v(t, v_0)] &= I_j[v_0] \exp(-t) + I_j[v_*] [1 - \exp(-t)] = \\ &= \eta_j^{(0)}(v_0) \exp(-t) + \eta_j^{(0)}(v_*) [1 - \exp(-t)] + \\ &\quad + \frac{2}{2j+1} \sum_{m=1}^N (2\kappa_{m,*})^{2j+1}. \end{aligned} \quad (187)$$

Следствие. Если начальное приближение $v_0 \in \mathfrak{M}_*$ таково, что

$$I_j[v_0] = I_j[v_*] \equiv \frac{2}{2j+1} \sum_{m=1}^N (2\kappa_{m,*})^{2j+1} + \eta_j^{(0)}(v_*), \quad (188)$$

то величины $I_j[v(t, v_0)]$ вместе с собственными числами — $\kappa_m(v(t))$, $m = 1, \dots, N$, являются сохраняющимися для уравнения (180), т. е.

$$\begin{aligned} I_j[v(t, v_0)] &= I_j[v_*], \quad j \leq [n/2]; \\ \kappa_m(v(t)) &= \kappa_{m,*}, \quad m = 1, \dots, N; \quad 0 \leq t < \infty. \end{aligned} \quad (189)$$

Отметим аналогию этих законов сохранения с известными для уравнения КдФ [16], а также сходство построения уравнения (180) с общей методикой построения вполне интегрируемых систем, предложенной в [15]. Существование первых интегралов (189) позволяет уточнить поведение решения $v(t, v_0; x)$ в окрестности $x = 0$. Продемонстрируем это на примере существования первого интеграла:

$$I_0[v] = \int_0^\infty v(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} 2k\eta(v; k).$$

В силу асимптотики (166) разность $\eta(v(t); k) - \eta_*(k) = O(k^{-3})$ при $k \rightarrow \infty$ и, следовательно, в правой части уравнения (180) дифференцирование по x можно внести под знак интеграла. Полагая $x = 0$, в силу граничных условий (6) и (110) получаем

$$v_t(t, v_0; x)|_{x=0} = \frac{8}{\pi} \int_0^\infty k [\eta(v_0; k) - \eta_*(k)] \exp(-t) dk, \quad 0 \leq t < \infty,$$

что является известным тождеством следов [94]. Таким образом, из условий

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k [\eta(v_0; k) - \eta_*(k)] = 0; \quad \int_0^\infty k [\eta(v_0; k) - \eta_*(k)] dk = 0$$

следует

$$\int_0^{\infty} v(t, v_0; x) dx = \int_0^{\infty} v_0(x) dx; \quad v(t, v_0; x)|_{x=0} = v_0(x)|_{x=0}, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Пусть теперь потенциал $v_0 \in \mathfrak{M}$ таков, что его фаза рассеяния $\eta(v_0; k) = \eta_*(k)$, $0 \leq k < \infty$, т. е. начальное значение v_0 в задаче Коши (180) отличается от искомого потенциала v_* лишь некоторыми нормировочными постоянными. Тогда (180) принимает вид

$$v_t(t; x) = 2 \frac{d}{dx} \sum_{m=1}^N [C_m(v_0) - C_{m,*}] \exp(-t) \varphi^2(v(t); x, i\kappa_{m,*}), \quad (190)$$

и его решение $v(t, v_0)$ можно рассматривать как решение системы уравнений

$$k \int_0^{\infty} v_t(t, x) \varphi^2(v(t); x, k) dx = 0, \quad 0 \leq k \leq \infty;$$

$$\int_0^{\infty} v_t(t, x) \varphi^2(v(t); x, i\kappa_{m,*}) dx = 0, \quad m = 1, \dots, N, \quad (191)$$

при дополнительных условиях (184). Общий вид решения системы (191), который определяет многообразие физических эквивалентных потенциалов, был получен в [6], он сводится к известному случаю явно решаемого уравнения Гельфанда — Левитана [7]. Отсюда при $N = 1$ получаем

$$v(t, x) = v_0(x) - 2 \frac{d}{dx^2} \ln \left\{ 1 + [C_* - C(v_0)] \times \right. \\ \left. \times [1 - \exp(-t)] \int_0^x \varphi^2(v_0; s, i\kappa_0) ds \right\}.$$

7. УСТОЙЧИВЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОЗР НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ (25)

Построение расчетных алгоритмов в ОЗР связано с определенными трудностями, что отчетливо видно уже на примере уравнения (14), когда решается интегральное уравнение с ядром и свободным членом (13), в построении которых фигурирует в общем случае (4) операция суммирования медленно сходящегося интеграла Фурье. Это приводит к большим ошибкам у искомого решения при малых возмущениях исходной информации. Более того, для окончательного построения $v(x)$ необходимо применить и чис-

ленно неустойчивую операцию дифференцирования. Эти операции, обычно называемые некорректными [20], отражают вычислительную сторону известной проблемы устойчивости восстанавливаемого потенциала относительно поведения фазы рассеяния при больших энергиях*. Действительно, из леммы 6 следует, что на множестве $R_{\Psi}(0)$ оператор Ψ^{-1} непрерывен и, следовательно, в метрике X (42) задача о нахождении v_* по элементу $f_* \in R_{\Psi}(0)$ является корректно поставленной. Некорректность, очевидно, содержится в самом построении элемента f_* (137) по заданной фазе $\eta_*(k)$.

Указанные выше трудности фигурируют и в нашей методике, но здесь мы располагаем некоторой свободой при выборе итерационного процесса и его начального приближения, а также имеем ряд сохраняющихся величин в порождающем этот процесс эволюционном уравнении (26). Это позволяет свести в предложенном здесь алгоритме вопрос о численной неустойчивости решения ОЗР к задаче об устойчивом суммировании интеграла Фурье. Последняя задача, как было показано в [39], решается весьма эффективно в рамках общих идей А. Н. Тихонова решения некорректных задач [20] путем введения соответствующего стабилизирующего множителя.

Для того чтобы отметить конструктивный характер этого подхода к численному решению ОЗР, в настоящем разделе мы остановимся несколько подробнее на схеме, по которой была составлена программа для расчетов ОЗР на ЭВМ, опуская (подчас нетривиальное) аналитическое обоснование сходимости регуляризованного решения к точному.

Для восстановления потенциала $v_* = Q^{-1}(\eta_*) \in \Omega(0)$, где $\eta_*(k) \in Y_0$ — заданная фаза рассеяния, строились регуляризованные итерационные последовательности

$$v_{n+1}^{(\alpha)}(x) = v_n^{(\alpha)}(x) + h_n^{(\alpha)}(x), \quad v_0 \in \Omega(0), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (192)$$

соответствующие приближенному решению уравнения (25) модифицированный методом Ньютона — Канторовича [21], т. е. добавку $h_n^{(\alpha)}(x)$ находили из следующего интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$[I + P(v_0)] h_n^{(\alpha)} \equiv h_n^{(\alpha)}(x) - \int_x^{\infty} P(v_0; x, s) h_n^{(\alpha)}(s) ds = F_n^{(\alpha)}(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (193)$$

* В последней постановке вопрос об устойчивости ОЗР был изучен детально в работе В. А. Марченко [4], где показано, что дополнительное предположение о равномерном убывании потенциалов $v(x)$ при $x \rightarrow \infty$ из ограниченного множества в пространстве X является достаточным для устойчивого на этом множестве решения ОЗР.

с правой частью

$$F_n^{(\alpha)}(x) = \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} |f(v_0; k)|^2 k \{ \eta(v_n; k) - \eta_*(k) \} (1 - \alpha k^3)^{-1} \cos 2kx \, dk. \quad (194)$$

Здесь обратимый для любого $v \in \Omega(0)$ оператор $I + P(v)$ определяется по формулам (81), (83), где ядро $K(v; x, s)$ есть решение интегрального уравнения [4]

$$K(v; x, s) = \frac{1}{2} \int_{(x-s)/2}^{(x+s)/2} v(\xi) \, d\xi + \int_{(x-s)/2}^{(x+s)/2} d\xi \int_0^{(x-s)/2} v(\xi + \eta) K(v; \xi + \eta, \xi - \eta) \, d\eta, \quad 0 < s \leq x,$$

которое решается методом последовательных приближений. Подынтегральное выражение в (194) вычисляется с помощью функции $\eta(v; x, k)$, которая определяется как решение фазового уравнения [40, 41]

$$\eta'(v; x, k) = k^{-1} v(x) \sin^2(kx - \eta(v; x, k)), \quad 0 \leq x < \infty; \quad \eta(v; 0, k) = 0.$$

Отсюда фаза рассеяния

$$\eta(v; k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \eta(v; x, k), \quad 0 < k < \infty; \\ \eta(v; 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \eta(v; k),$$

а

$$|f(v; k)|^2 = \exp \left\{ \frac{1}{k} \int_0^{\infty} v(x) \sin 2(kx - \eta(v; x, k)) \, dx \right\}.$$

Отметим, что при таком определении фаза рассеяния $\eta(v; k)$ является непрерывной функцией от k , нормированной условием $\eta(v; \infty) = 0$. Введение стабилизирующего параметра $\alpha > 0$ обеспечивает в метрике $C(0, a)$, $a < \infty$, устойчивое относительно малых возмущений в $L^2(0, \infty)$ суммирование интеграла Фурье (194) [39]. Начальные приближения v_0 выбирались из соображения простоты в виде

$$\left. \begin{aligned} v_0(x) &= A(b-x), & 0 \leq x \leq b; \\ v_0(x) &\equiv 0, & b \leq x < \infty, \end{aligned} \right\} \quad (195)$$

где параметры A и b удовлетворяют условию

$$\frac{1}{2} Ab^2 = \int_0^{\infty} v_0(x) \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} 2k\eta_*(k) = \int_0^{\infty} v_*(x) \, dx, \quad (196)$$

что в силу асимптотики (162) обеспечивает для разности $\eta(v_0; k) - \eta_*(k)$ порядок убывания $o(k^{-3})$ при $k \rightarrow \infty$, который сохраняется и при $n = 1, 2, \dots$, так как в силу (95) для любой функции $h(x) \in L^1(0, \infty)$

$$\int_0^{\infty} h(x) dx = \int_0^{\infty} \left\{ h(x) - \int_x^{\infty} P(v_0; x, s) h(s) ds \right\} dx, \quad (197)$$

что дает $\int_0^{\infty} v_n(x) dx = \int_0^{\infty} v_0(x) dx$, $n=0, 1, \dots$. Равенство (197)

показывает, что первый интеграл $I_0[v] = \int_0^{\infty} v(x) dx$ для уравне-

ния (26) при условии (196) является сохраняющейся величиной и для итерационной последовательности (192) — (194). При расчетах параметр $\alpha > 0$ выбирали экспериментально в интервале от 0,01 до 0,005, уменьшая его значение по мере убывания разности $\eta(v_n; k) - \eta_*(k)$ с ростом n . Значения регуляризованной функции $F_n^{(\alpha)}(x)$ (194) при $x > 0$ вычислили с помощью программы интегрирования быстроосциллирующих функций, описанной в [42]. В точке $x = 0$ функцию $F_n^{(\alpha)}(x)$ вычисляли экстраполяцией по значениям предыдущих трех точек по формуле $F(0) = = F(3) - 3[F(2) - F(1)]$.

В табл. 1 приведены результаты численных расчетов ОЗР для потенциала $v_* = (x-1)(x-2) \exp[-(x/2)^2]$. В качестве начальных приближений взяты функции:

$$\begin{aligned} v_{0,1}(x) &= 0,75(1-x/2,9062), \quad 0 \leq x \leq 3; \quad v_{0,1}(x) \equiv 0, \quad x > 3; \\ v_{0,2}(x) &= 0,3726(1-x/5,85), \quad 0 \leq x \leq 6; \quad v_{0,2}(x) \equiv 0, \quad x > 6; \\ v_{0,3}(x) &= 7,2655(1-x/0,3), \quad 0 \leq x < 0,3; \quad v_{0,3}(x) \equiv 0, \quad x > 0,3; \\ v_{0,4}(x) &= 0,069x, \quad 0 \leq x \leq 5,4; \quad v_{0,4}(x) = 4,8436 - 0,8279x, \\ &\quad 5,4 \leq x \leq 6; \quad v_{0,4}(x) \equiv 0, \quad 6 < x, \end{aligned}$$

которые приводят к одному и тому же результату $v_{15}(x)$ (индекс здесь указывает количество итераций). Это, в частности, наглядно иллюстрирует указанную в теореме 8 слабую зависимость сходимости решения $v(t, v_0)$ уравнения (26) от начального приближения v_0 .

Для расчетов ОЗР в случае связанных состояний искомого потенциала v_* [43], т. е. когда данные рассеяния

$$\begin{aligned} s(v_*) &= \{\eta_*(k), \quad 0 \leq k < \infty; \\ \alpha_{m,*} &> 0; \quad C_{m,*} > 0, \quad m = 1, \dots, N\}, \end{aligned}$$

Таблица 1

x	$v_*(x)$	$v_{1b}(x)$	$v_{0,1}(x)$	$v_{0,2}(x)$	$v_{0,3}(x)$	$v_{0,4}(x)$
0,00	2,000	2,615	0,750	0,373	7,266	0,000
0,15	1,564	1,928	0,711	0,363	3,633	0,010
0,30	1,164	1,128	0,673	0,353	0,000	0,021
0,45	0,810	0,783	0,634	0,344	0,000	0,031
0,60	0,512	0,499	0,595	0,334	0,000	0,041
0,75	0,272	0,262	0,556	0,325	0,000	0,052
0,90	0,090	0,111	0,518	0,315	0,000	0,062
1,05	-0,036	-0,044	0,479	0,306	0,000	0,072
1,20	-0,112	-0,111	0,440	0,296	0,000	0,083
1,35	-0,114	-0,140	0,402	0,287	0,000	0,093
1,50	-0,142	-0,151	0,363	0,277	0,000	0,104
1,65	-0,115	-0,108	0,324	0,268	0,000	0,114
1,80	-0,071	-0,074	0,285	0,258	0,000	0,124
1,95	-0,018	-0,021	0,247	0,248	0,000	0,135
2,10	0,037	0,041	0,208	0,239	0,000	0,145
2,25	0,088	0,082	0,169	0,229	0,000	0,155
2,40	0,133	0,136	0,131	0,220	0,000	0,166
2,55	0,168	0,171	0,092	0,210	0,000	0,176
2,70	0,192	0,191	0,053	0,201	0,000	0,186
2,85	0,206	0,207	0,015	0,191	0,000	0,197
3,00	0,211	0,206	0,000	0,182	0,000	0,207
3,15	0,207	0,208	0,000	0,172	0,000	0,217
3,30	0,196	0,200	0,000	0,162	0,000	0,228
3,45	0,181	0,179	0,000	0,153	0,000	0,238
3,60	0,163	0,166	0,000	0,143	0,000	0,248
3,75	0,143	0,141	0,000	0,134	0,000	0,259
3,90	0,123	0,120	0,000	0,124	0,000	0,269
4,05	0,104	0,107	0,000	0,115	0,000	0,279
4,20	0,086	0,083	0,000	0,105	0,000	0,290
4,35	0,069	0,071	0,000	0,096	0,000	0,300
4,50	0,055	0,057	0,000	0,086	0,000	0,311
4,65	0,043	0,040	0,000	0,076	0,000	0,321
4,80	0,034	0,036	0,000	0,067	0,000	0,331
4,95	0,025	0,021	0,000	0,057	0,000	0,342
5,10	0,019	0,011	0,000	0,048	0,000	0,352
5,25	0,014	-0,001	0,000	0,038	0,000	0,362
5,40	0,010	-0,021	0,000	0,029	0,000	0,373
5,55	0,007	-0,033	0,000	0,019	0,000	0,248
5,70	0,005	-0,051	0,000	0,010	0,000	0,124
5,85	0,004	-0,067	0,000	0,000	0,000	0,000

описанный выше алгоритм применяется для нахождения вспомогательного потенциала $v_*^{(0)}(x) \in \Omega(0)$, который однозначно определяется приведенной фазой:

$$\eta_*^{(0)}(k) = \eta_* + 2 \sum_{m=1}^N \operatorname{arctg} \frac{\chi_{m,*}}{k}, \quad 0 \leq k < \infty. \quad (198)$$

Таблица 2

x	а			б		
	$v_*(x)$	$v_{13}(x)$	$v_{13}^{(0)}(v)$	$v_*(x)$	$v_{11}(x)$	$v_{11}^{(0)}(x)$
0,0	4,000	7,864	7,864	0,000	-0,324	-0,324
0,1	3,167	4,256	4,279	-0,806	-1,093	-0,175
0,2	2,456	2,493	2,541	-1,738	-2,099	-0,188
0,3	1,852	1,706	1,785	-2,764	-3,272	-0,253
0,4	1,341	1,304	1,419	-3,842	-4,541	-0,303
0,5	0,910	0,897	1,053	-4,923	-5,826	-0,314
0,6	0,549	0,568	0,771	-5,955	-7,034	-0,292
0,7	0,248	0,246	0,501	-6,886	-8,043	-0,244
0,8	0,000	-0,008	0,302	-7,668	-8,753	-0,188
0,9	-0,203	-0,211	0,155	-8,264	-9,097	-0,136
1,0	-0,368	-0,388	0,033	-8,647	-9,081	-0,097
1,1	-0,499	-0,506	-0,033	-8,803	-8,766	-0,076
1,2	-0,602	-0,622	-0,099	-8,736	-8,250	-0,068
1,3	-0,681	-0,692	-0,125	-8,461	-7,628	-0,073
1,4	-0,740	-0,753	-0,149	-8,003	-6,966	-0,080
1,5	-0,781	-0,788	-0,152	-7,400	-6,307	-0,090
1,6	-0,808	-0,816	-0,155	-6,692	-5,661	-0,094
1,7	-0,822	-0,827	-0,148	-5,922	-5,030	-0,094
1,8	-0,826	-0,832	-0,142	-5,129	-4,411	-0,087
1,9	-0,823	-0,829	-0,134	-4,349	-3,808	-0,075
2,0	-0,812	-0,820	-0,126	-3,611	-3,227	-0,063
2,1	-0,796	-0,806	-0,118	-2,937	-2,681	-0,047
2,2	-0,776	-0,786	-0,110	-2,340	-2,182	-0,035
2,3	-0,752	-0,763	-0,104	-1,827	-1,735	-0,023
2,4	-0,726	-0,713	-0,071	-1,397	-1,352	-0,001
2,5	-0,698	-0,680	-0,055	-1,047	-1,040	-0,006
2,6	-0,668	-0,661	-0,055	-0,769	-0,770	-0,013
2,7	-0,638	-0,639	-0,056	-0,553	-0,555	-0,001
2,8	-0,608	-0,613	-0,054	-0,390	-0,403	0,001
2,9	-0,578	-0,581	-0,050	-0,270	-0,287	0,000
3,0	-0,548	-0,548	-0,044	-0,183	-0,200	0,005
3,1	-0,518	-0,514	-0,036	-0,121	-0,139	-0,003
3,2	-0,489	-0,481	-0,028	-0,079	-0,089	-0,001
3,3	-0,461	-0,449	-0,020	-0,050	-0,060	-0,003
3,4	-0,434	-0,421	-0,014	-0,031	-0,040	-0,001
3,5	-0,408	-0,397	-0,010	-0,019	-0,027	0,001
3,6	-0,383	-0,376	-0,010	-0,012	-0,020	-0,001
3,7	-0,358	-0,359	-0,014	-0,007	-0,012	0,009
3,8	-0,336	-0,343	-0,021	-0,004	-0,014	-0,002
3,9	-0,314	-0,330	-0,034	-0,002	-0,004	-0,012

Параметры A и b в (195) для начального приближения $v_0^{(0)}(x)$ удовлетворяют условию

$$\frac{1}{2} Ab^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} 2k\eta_*(k) + 4 \sum_{m=1}^N \kappa_{m,*} \left(= \int_0^{\infty} v_*^{(0)}(x) dx \right).$$

Потенциал v_* определяется с помощью $v_*^{(0)}$ формулой Крамма — Крэйна [8]:

$$v_*(x) = v_*^{(0)}(x) - 2 \frac{d}{dx^2} \sum_{m=1}^N \ln \left[1 + C_{m,*} \int_0^x \Phi_{(m-1)}(s, i\kappa_{m,*}) ds \right], \quad (199)$$

где функции $\Phi_{m-1}(x, i\kappa_{m,*})$, $m = 1, \dots, N$, являются решениями краевых задач

$$\begin{aligned} y'' - (\kappa_{m,*}^2 + v_{m-1}(x)) y &= 0; \\ \Phi_{m-1}(0, i\kappa_{m,*}) &= 0, \quad \Phi'_{m-1}(0, i\kappa_{m,*}) = 1 \end{aligned} \quad (200)$$

с потенциалами, определяемыми рекуррентной формулой

$$v_m(x) = v_{m-1}(x) - 2 \frac{d}{dx^2} \ln \left(1 + C_{m,*} \int_0^x \Phi_{m-1}^2(t, i\kappa_{m,*}) \right), \quad v_0 = v_0^{(0)}. \quad (201)$$

В табл. 2 (часть а) приведены результаты расчетов для потенциала $v_*(x) = (4 - 5x) \exp\{-x\}$, у которого есть одно собственное число $\kappa_{1,*} = 0,5391$, нормировочная постоянная $C_{1,*} = 0,0542$, $v_{13}^{(0)}(x)$ — потенциал, соответствующий приведенной фазе (198), $v_{13}(x)$ — потенциал, найденный по формулам (199) — (201). В табл. 2 (часть б) $v_*(x) = 10 [1 - \exp(2x)] / \exp(1 + x^2)$ имеет два собственных числа $\kappa_{1,*} = 0,8056$, $\kappa_{2,*} = 2,3813$, нормировочные постоянные $C_{1,*} = 1,2744$, $C_{2,*} = 0,9840$.

О реально достижимой точности предложенного алгоритма можно судить по табл. 3, где наряду с восстановленным потенциалом $v_{15}(x)$ приведена и соответствующая ему фаза рассеяния $\eta(v_{15}, k)$, совпадающая с искомой с точностью до пятого знака. Здесь

$$v_*(x) = \begin{cases} -0,147 \exp\{-(x-0,7)^2/[(x-0,7)^2-0,36]\}, & 0,1 \leq x < 1,3; \\ 0,906 \exp\{-(x-2,5)^2/[(x-2,5)^2-1,44]\}, & 1,3 < x \leq 3,7; \\ 0, & x \notin (0,1; 3,7), \end{cases} \quad \alpha = 0,0001;$$

$$v_0(x) = \begin{cases} \exp\{-(x-2)^2/[(x-2)^2-1]\}, & 2 \leq x \leq 3; \\ 0 & x \notin (2,3). \end{cases}$$

Начальное приближение удовлетворяет условиям $I_0[v] = I_0[v_*]$, $I_1[v_0] = I_1[v_*]$. Вычисления проводились на ЭВМ CDC-6500.

Таблица 3

x	$v_*(x)$	$v_{15}(x)$	$v_0(x)$	h	$\eta(v_*, h)$	$\eta(v_{15}, h)$
0,0	0,000	-0,108	0,000	0,00	0,0000	0,0000
0,1	0,000	0,004	0,000	0,05	0,1090	0,1090
0,2	-0,015	-0,014	0,000	0,10	0,2178	0,2178
0,3	-0,066	-0,067	0,000	0,15	0,3262	0,3261
0,4	-0,105	-0,107	0,000	0,20	0,4338	0,4337
0,5	-0,130	-0,131	0,000	0,25	0,5405	0,5404
0,6	-0,143	-0,144	0,000	0,30	0,6459	0,6458
0,7	-0,147	-0,147	0,000	0,35	0,7497	0,7495
0,8	-0,143	-0,143	0,000	0,40	0,8513	0,8512
0,9	-0,130	-0,129	0,000	0,45	0,9504	0,9503
1,0	-0,105	-0,106	0,000	0,50	1,0461	1,0460
1,1	-0,066	-0,069	0,014	0,60	1,2235	1,2234
1,2	-0,015	-0,017	0,169	0,70	1,3705	1,3704
1,3	0,000	0,001	0,383	0,80	1,4585	1,4584
1,4	0,005	0,004	0,570	0,90	1,4129	1,4125
1,5	0,093	0,090	0,717	1,00	1,0616	1,0602
1,6	0,251	0,251	0,827	1,10	0,5018	0,5000
1,7	0,408	0,409	0,906	1,20	0,2492	0,2482
1,8	0,541	0,542	0,959	1,40	0,2604	0,2601
1,9	0,650	0,649	0,990	1,60	0,3787	0,3786
2,0	0,735	0,733	1,000	1,80	0,4147	0,4145
2,1	0,800	0,798	0,990	2,00	0,3485	0,3482
2,2	0,848	0,846	0,959	2,50	0,2563	0,2561
2,3	0,881	0,881	0,906	3,00	0,1916	0,1915
2,4	0,901	0,905	0,827	3,50	0,1764	0,1761
2,5	0,907	0,919	0,717	4,00	0,1516	0,1513
2,6	0,901	0,911	0,570	6,00	0,1017	0,1016
2,7	0,881	0,865	0,383	8,00	0,0759	0,0758
2,8	0,848	0,817	0,169	10,00	0,0604	0,0603
2,9	0,800	0,802	0,014	12,00	0,0503	0,0502
3,0	0,735	0,771	0,000	14,00	0,0432	0,0431
3,1	0,650	0,675	0,000	16,00	0,0377	0,0376
3,2	0,541	0,525	0,000	18,00	0,0335	0,0334
3,3	0,408	0,371	0,000	20,00	0,0302	0,0301
3,4	0,251	0,243	0,000	22,00	0,0274	0,0273
3,5	0,093	0,122	0,000	24,00	0,0252	0,0251
3,6	0,005	0,021	0,000	26,00	0,0232	0,0231
3,7	0,000	-0,006	0,000	28,00	0,0216	0,0215
3,8	0,000	-0,009	0,000	30,00	0,0201	0,0200
3,9	0,000	-0,003	0,000	32,00	0,0189	0,0188

8. О ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИХ ПОДХОДАХ К РЕШЕНИЮ ОЗР

Во многих физических задачах [25—27] приходится решать ОЗР с учетом тензорных сил взаимодействия, что приводит к рассмотрению систем связанных уравнений Шредингера. Поэтому в заключение мы коротко остановимся на некоторых представляющих определенный практический интерес численных подходах

[44]. Отметим, что уравнение (14) применялось при расчетах взаимодействия по экспериментальным данным рассеяния в работах Бенна и Шарфа [45, 46]. Методика Гельфанда — Левитана была положена в основу расчетной схемы, предложенной Л. А. Чудовым [47]. Конечнo-разностные способы решения ОЗР изучались Б. Н. Захарьевым с сотр. [48].

Здесь ограничимся изложением приближенного метода [25] решения ОЗР для уравнения дейтона в основном состоянии:

$$Y_1'' + [k^2 - 6Px^{-2} + V_1(x)] Y_1 = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad Y_1(0, k) = 0, \quad (202)$$

где $V_1(x)$ — эрмитова матрица второго порядка, а

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (203)$$

Обратная задача для системы (202) сводится с помощью преобразований типа Крамма — Крейна [44] к ОЗР для краевой задачи без особенности:

$$Y'' = [k^2 - V(x)] Y = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad Y(0, k) = 0, \quad (204)$$

где функция $|V(x)| = \sup_{i,j} |v_{ij}(x)|$ удовлетворяет условию (4).

Данные рассеяния этой задачи определяются подобно случаю скалярного уравнения (2) — (3).

Пусть $E(v; x, k)$ — решение уравнения (204), имеющее при $x \rightarrow \infty$ асимптотику $\exp(-ikx) I$:

$$E(v; x, k) = \exp(-ikx) I + \int_x^{\infty} L(v; x, s) \exp(-iks) ds, \quad \text{Im } k \leq 0.$$

Тогда матрица рассеяния $S(v; k)$, $-\infty < k < \infty$, находится с помощью функции Йоста $E(v; k) = E(v; 0, k)$ из равенства $S(v; k) = E^{-1}(v; k) E(v; k)$, а собственные числа $-k_m^2 = \{k_m = -i\kappa_m, \kappa_m > 0; m = 1, \dots, N\}$ определяются условием $\det E(v; k_m) = 0$. Если P_m — эрмитова матрица, проектирующая на ядро матрицы $E(v; k_m)$, так что $E(v; k_m) P_m = 0$, то нормировочная матрица M_m определяется равенством $M_m =$

$$= P_m [P_m A_m P_m + (I - P_m)]^{-1/2}, \quad \text{где } A_m = \int_0^{\infty} E^*(v; x, k_m) \times$$

$\times E(v; x, k_m) dx$. Ранг M_m совпадает с рангом P_m и определяет кратность собственного числа k_m , а столбцы матрицы $E(v; x, k_m) M_m$ дают полный набор нормированных на единицу собственных функций, отвечающих k_m .

Необходимые и достаточные условия для того, чтобы данный набор величин $\{S(k), k_m^2, M_m, m = 1, \dots, N\}$ мог служить

в качестве данных рассеяния краевой задачи (204), аналогичны утверждению теоремы 1 [44]. Потенциальная матрица $V(x)$ восстанавливается решением $L(x, y)$ уравнения

$$F(x+y) + L(x, y) + \int_x^\infty L(x, t) F(t+y) dt = 0, \quad 0 \leq x \leq y, \quad (205)$$

где

$$F(x) = \sum_{m=1}^N M_m^2 \exp(-|k_m|x) + F_S(x);$$

$$F_S(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (I - S(x)) \exp(ikx) dx, \quad (206)$$

по формуле $V(x) = 2dL(x, x)/dx$.

Основная идея расчетной схемы состоит в том, что первоначально экспериментальные значения фазовых сдвигов аппроксимируются тригонометрическими полиномами, что, как хорошо известно, сводит уравнение (205) к системе алгебраических уравнений, решение которой легко реализуется на ЭВМ*.

Фазы рассеяния $\eta_1(k)$, $\eta_2(k)$ и параметр смешивания $\varepsilon(k)$, которые определяют матрицу рассеяния $S(k)$ системы (204) в параметризации Стаппа [40]:

$$S(k) = \begin{pmatrix} \exp[2i\eta_1(k)] \cos 2\varepsilon(k) & i \exp[i(\eta_1(k) + \eta_2(k))] \sin 2\varepsilon(k) \\ i \exp[i(\eta_1(k) + \eta_2(k))] \sin 2\varepsilon(k) & \exp[2i\eta_2(k)] \cos 2\varepsilon(k) \end{pmatrix}, \quad (207)$$

предполагаются функциями следующего вида:

$$\eta_1(k) = 2 \sum_{\nu=1}^{N1} \arctg \frac{a_\nu}{k}; \quad \eta_2(k) = 2 \sum_{\nu=1}^{N2} \arctg \frac{b_\nu}{k};$$

$$\varepsilon(k) = \sum_{\nu=1}^{N3} \arctg \frac{c_\nu}{k}, \quad (208)$$

где вещественные коэффициенты a_ν , b_ν , c_ν определяются по экспериментальным данным, например, методом наименьших квадра-

* Такой подход примыкает к известным феноменологическим подходам Хамады — Джонстона [49] и Райда [50] и широко используется в настоящее время. Этот метод оправдывается еще и тем, что, по-видимому, с точки зрения теории поля потенциальное рассеяние можно рассматривать как нерелятивистский предел лишь тогда, когда потенциал является суперпозицией потенциалов Юкавы [10]. Отметим, что для этого класса потенциалов простая аналитическая процедура решения ОЗР была предложена Мартемом [10].

тов, а число слагаемых согласовывается с условием теоремы Левинсона [5]. Аппроксимация (208) приводит к следующему представлению для матрицы рассеяния:

$$S(k) = \begin{pmatrix} \prod_{\nu=1}^{n_1} \left(\frac{k+ia_\nu}{k-ia_\nu} \right)^2 \operatorname{Re} \prod_{\nu=1}^{n_3} \left(\frac{k+ic_\nu}{k-ic_\nu} \right) & i \prod_{\nu=1}^{n_1} \left(\frac{k+ia_\nu}{k-ia_\nu} \right) \prod_{\nu=1}^{n_2} \left(\frac{k+ib_\nu}{k-ib_\nu} \right) \operatorname{Im} \prod_{\nu=1}^{n_3} \left(\frac{k+ic_\nu}{k-ic_\nu} \right) \\ i \prod_{\nu=1}^{n_1} \left(\frac{k+ia_\nu}{k-ia_\nu} \right) \prod_{\nu=1}^{n_2} \left(\frac{k+ib_\nu}{k-ib_\nu} \right) \operatorname{Im} \prod_{\nu=1}^{n_3} \left(\frac{k+ic_\nu}{k-ic_\nu} \right) & \prod_{\nu=1}^{n_2} \left(\frac{k+ib_\nu}{k-ib_\nu} \right)^2 \operatorname{Re} \prod_{\nu=1}^{n_3} \left(\frac{k+ic_\nu}{k-ic_\nu} \right) \end{pmatrix}, \quad (209)$$

что в силу теоремы о вычетах дает для функции $F_S(x)$ простое представление:

$$F_S(x) = i \sum_{\alpha_\nu > 0} \operatorname{Res} [(I - S(k)) \exp(i kt)] |_{k=i\alpha_\nu},$$

где α_ν пробегает множество чисел a_ν, b_ν, c_ν .

Определим, далее, допускающие непосредственное экспериментальное измерение магнитный и квадрупольный моменты для собственной функции (u, w) следующим образом [51]:

$$\mu(v; k_m) = \int_0^\infty w^2(v; x, i\kappa_m) dx; \quad (210)$$

$$q(v; k_m) = \frac{\sqrt{2}}{10} \int_0^\infty w(v; x, i\kappa_m) [u(v; x, i\kappa_m) - \frac{1}{\sqrt{2}} w(v; x, i\kappa_m)] x^2 dx, \quad (211)$$

и рассмотрим вопрос об определении по этим величинам матриц M_m , знание которых необходимо для построения уравнения (205). Обозначим

$$\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ w_1(x) & w_2(x) \end{pmatrix} = E(v; x, k_m) M_m, \quad M_m = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix}, \quad (212)$$

где столбцы в левой части (212) есть собственные функции задачи (204), нормированные условием

$$\int_0^\infty (u_i^2(x) + w_i^2(x)) dx = 1, \quad i = 1, 2, \quad (213)$$

что вместе с ортогональностью

$$\int_0^{\infty} (u_1 u_2 + w_1 w_2) dx = 0 \quad (214)$$

определяет по заданной $E(v; x, k_m)$ элементы m_1, m_2, m_3 матрицы M_m . При этом для любой линейной комбинации

$$\begin{aligned} u(x) &= c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x); \\ w(x) &= c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x) \end{aligned} \quad (215)$$

из (213), (214), вытекает условие $c_1^2 + c_2^2 = 1$.

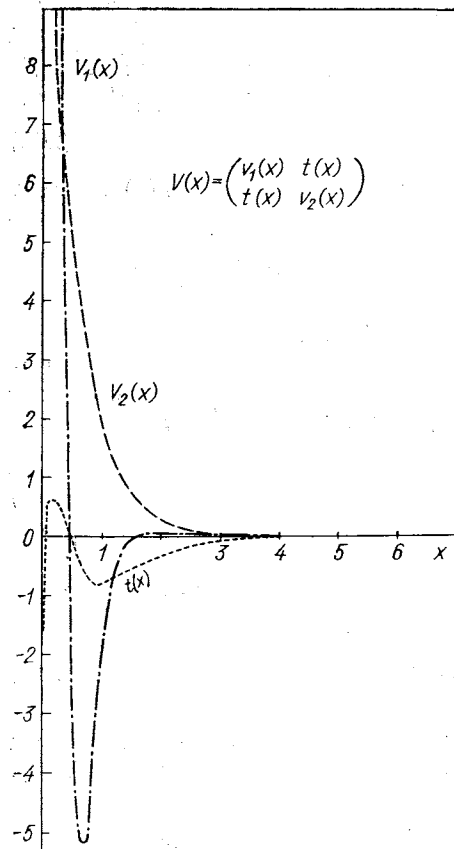
Таким образом, задача состоит в вычислении матрицы M_m по заданным для решений (215) интегралам (210), (211). Если M_m — невырожденная матрица, добавляется еще условие нормировки $c_1^2 + c_2^2 = 1$. При ранге M , равном единице, т. е.

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ pm_1 & pm_2 \end{pmatrix}, \quad m_1 > 0, \\ m_2 \geq 0, \quad (216)$$

имеет место следующая лемма.

Лемма 10. Пусть $m^2 = m_1^2 + m_2^2$, $p = m_1/m_2$. Тогда для всякого значения $q_0 \in (0, \infty)$ существуют числа $p \in (0, \sqrt{2})$ и $m^2 \in (0, \infty)$, $p \in (0, \sqrt{2})$ и $m^2 \in (0, \infty)$, такие, что $q(m^2, p) = q_0$, $\lim_{m^2 \rightarrow \infty} q(m^2, p) = \infty$, $\lim_{m^2 \rightarrow 0} q(m^2, p) = 0$, а если $q_0 \in (-\infty, 0)$, то найдутся числа

$p \in (\sqrt{2}, \infty)$ и $m^2 \in (0, \infty)$, такие, что $q(m^2, p) = q_0$, $q(\infty, p) = -\infty$, $q(0, p) = 0$ и магнитный момент μ (210) принимает все значения из интервала $(0, 1)$ и $\lim_{m^2 \rightarrow \infty} \mu = p(1 + p^2)^{-1}$.



такие, что $q(m^2, p) = q_0$, $\lim_{m^2 \rightarrow \infty} q(m^2, p) = \infty$, $\lim_{m^2 \rightarrow 0} q(m^2, p) = 0$, а если $q_0 \in (-\infty, 0)$, то найдутся числа

$p \in (\sqrt{2}, \infty)$ и $m^2 \in (0, \infty)$, такие, что $q(m^2, p) = q_0$, $q(\infty, p) = -\infty$, $q(0, p) = 0$ и магнитный момент μ (210) принимает все значения из интервала $(0, 1)$ и $\lim_{m^2 \rightarrow \infty} \mu = p(1 + p^2)^{-1}$.

Когда M — матрица ранга два, существуют две линейно-независимые собственные функции и справедлива следующая лемма.

Лемма 11. Если в (215) $c_1 c_2 > 0$, то для любого значения квадратурного момента $q_0 \in (0, \infty)$ найдется матрица M , такая, что $q(m_1, m_2, m_3) = q_0$, а если $c_1 c_2 \leq 0$, то для всякого $q_0 \in (-\infty, 0)$ найдется матрица M , такая, что $q(m_1, m_2, m_3) = q_0$. При этом магнитный момент μ пробегает все значения в интервале $(0, 1)$ и $\lim \mu = w^2 (1 + \omega^2)^{-1}$ ($\rho(M) \rightarrow \infty$), где $\rho(M)$ — спектральный радиус матрицы M ,

$$w^2 = \frac{2m_2^2 + c_2^2 (m_1 - m_3)^2 - 2c_1 c_2 m_2 (m_1 - m_3)}{2m_2^2 + c_2^2 (m_1 - m_3)^2 + 2c_1 c_2 m_2 (m_1 - m_3)}; \quad m_2^2 + (m_1 - m_3)^2 \neq 0.$$

Доказательства сформулированных утверждений приведены в [25]. Они сводятся к проверке непрерывной зависимости моментов μ и q от m_1, m_2, m_3 , после чего утверждения следуют из рассмотрения асимптотик решений $u(x)$ и $w(x)$ при указанных выше экстремальных значениях параметров $m_i, i = 1, 2, 3$. Отметим, что численные эксперименты указывают на однозначное соответствие между нормировочными матрицами M и парами чисел (μ, q) .

С помощью описанной методики восстанавливался триплетный нечетный потенциал по экспериментальным фазовым сдвигам [28] и отвечающему основному состоянию дейтона $\kappa_0 = 0,32766$. Магнитный и квадратурный моменты: $\mu = 0,03917, q = 0,139 \pm 0,007$ [27].

Для различных значений m_1, m_2 (ранг матрицы M равен единице) сначала вычислялись соответствующие моменты μ и q . Результаты этих расчетов приведены в табл. 4, по которой подходящие m_1, m_2 определялись интерполяцией. Было выбрано $m_1 = 0,81, m_2 = -0,058$. Далее, с помощью уравнения (205) была

Т а б л и ц а 4

m_1	m_2	$\mu = \int_0^\infty w^2(x) dx$	$\int_0^\infty u^2(x) dx$	$\int_0^\infty \{u^2(x) + w^2(x)\} dx$	$q = \frac{\sqrt{2}}{10} \int_0^\infty x^2 w(u - \frac{1}{\sqrt{2}} w) dx$
0,65	-0,045	0,0688	0,9320	1,0008	0,11590
0,70	-0,047	0,0757	0,9251	1,0008	0,13070
0,75	-0,051	0,0723	0,9285	1,0008	0,13825
0,77	-0,053	0,0692	0,9315	1,0007	0,13970
0,81	-0,058	0,0600	0,9407	1,0007	0,13896
0,85	-0,062	0,0555	0,9452	1,0007	0,14134
0,85	-0,063	0,0520	0,9486	1,0006	0,13762
0,86	-0,063	0,0546	0,9460	1,0006	0,14220
0,87	-0,064	0,0536	0,9470	1,0006	0,14285
0,83	-0,060	0,0576	0,9430	1,0006	0,14000

рассчитана потенциальная матрица $V(x)$, соответствующая уравнению без особенностей. Отсюда искомая матрица $V_1(x)$ определяется выражением

$$V_1(x) = V(x) + 2Y(x)Y_1^*(x) - 6x^{-2}P,$$

где

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -3x - \beta \end{pmatrix} + \int_x^\infty L(x, t) \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -3t - \beta \end{pmatrix} dt$$

$[\alpha, \beta$ определяются из условия $Y_1(0) = 0]$, а

$$Y(x) = Y_1(x) [I - P - \int_0^x Y_1^*(t) Y_1(t) dt]^{-1}.$$

Элементы потенциальной матрицы $V_1(x)$ приведены на рисунке. Значения функций $\eta_1(k)$, $\eta_2(k)$, $\varepsilon(k)$ при $a_1 = 0,47213$; $a_2 = 3,31623$; $a_3 = 2,5016$; $a_4 = -1,1705$; $a_5 = -12,2439$; $b_1 = 1,8991$; $b_2 = 2,0594$; $b_3 = -1,2672$; $b_4 = -4,3643$; $c_1 = 0,16774$; $c_2 = 1,8244$; $c_3 = -1,3716$; $c_4 = -0,275$ даны в табл. 5, где для сравнения представлены и экспериментальные значения фазовых сдвигов и параметра смешивания.

Вычисления проводили на ЭВМ «Элиотт—503».

Таблица 5

k	η_1 , эксп (k)	η_1 , расч (k)	η_2 , эксп (k)	η_2 , расч (k)	$\varepsilon_{\text{эксп}} (k)$	$\varepsilon_{\text{расч}} (k)$
0,100	2,7683	2,7707				
0,150	2,5970	2,5956				
0,483	1,7910	1,7389	-0,0008	-0,0074	-0,1140	-0,1036
0,746	1,3180	1,3629	-0,0377	-0,0375	-0,0141	-0,0220
1,119	1,0300	1,0145	-0,1430	-0,1077	0,1780	0,0420
1,513	0,7010	0,7316	-0,1920	-0,1942	0,0776	0,0726
1,882	0,5170	0,5031	-0,2600	-0,2682	0,0179	0,0839
2,249	0,2690	0,3026	-0,3460	-0,3274	0,1000	0,0867
2,732	-0,1330	0,0764	-0,3780	-0,3818	0,4480	0,0845
2,819	0,1530	0,0399	-0,3720	-0,3890	0,1260	0,0838

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жидков Е. П., Макаренко Г. И., Пузынин И. В. «ЭЧАЯ», 1973, т. 4, вып. 1, с. 127.
2. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1951, т. 15, № 2, с. 309.
3. Крейн М. Г. «ДАН СССР», 1955, т. 105, № 3, с. 433.
4. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля. Киев, «Наукова думка», 1972.

5. Levinson N. «Kgl. danske vid. selskab. Mat.-fys. medd», 1949, Bd 25, N 9.
6. Jost R., Kohn W. «Phys. Rev.», 1952, v. 88, p. 382.
7. Jost R., Kohn W. «Kgl. danske vid. selskab. Mat.-fys. medd.», 1953, Bd 27, № 9.
8. Фаддеев Л. Д. «УМН», 1959, т. 14, № 4, с. 57.
9. Фаддеев Л. Д. Современные проблемы математики. Т. 3. М., Изд. ВИНТИ 1974, с. 93.
10. Де Альфаро В., Редже Т. Потенциальное рассеяние. Пер. с англ. М., «Мир», 1966.
11. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. Пер. с англ. М., «Мир», 1969.
12. Gardner C. S. e.a. «Phys. Rev.», 1967, v. 19, p. 1095.
13. Захаров В. Е., Шабат А. Б. «ЖЭТФ», 1971, т. 61, с. 118.
14. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. «ТМФ», 1974, т. 21, № 2, с. 160.
15. Ablowitz M. J. e.a. «Studies Appl. Math.», 1974, v. 53, p. 249.
16. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. «Функцион. анализ и его прил.», 1971, т. 5, вып. 4, с. 18.
17. Гавурий М. К. «Изв. вузов. Сер. мат.», 1958, т. 5 (6), с. 18.
18. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.
19. Визнер Я., Жидков Е. П., Лелек В. Препринт ОИЯИ P5-3895. Дубна, 1968.
20. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., «Наука», 1974.
21. Жидков Е. П., Малышев Р. В., Христов Е. Х. Препринт ОИЯИ P5-9063. Дубна, 1975.
22. Schiff L. Quantum Mechanics. N.Y., McGraw-Hill Book Co., 1968.
23. Verde M. «Nuovo cimento», 1955, v. 2, p. 1001.
24. Жидков Е. П., Хоромский Б. Н., Христов Е. Х. Препринт ОИЯИ P5-9980. Дубна, 1976.
25. Визнер Я. Сообщение Политехнического института. Прага, ИВТ-2/74М, 1974.
26. Ulehla I. e.a. «Phys. Ber.», 1969, Bd 19, S. 1570.
27. Ulehla I. e.a. Rutherford Laboratory Preprint, RPP/C/41, March, 1972.
28. Kazarinov Yu. M., Kiselev V. S., Simonov Yu. N. Preprint JINR-P-2241, 1965; Janout Z. e.a. «Nucl. Phys. B», 1968, v. 4, p. 527; Kazarinov Yu. M., Lehar F., Janout Z. «Sov. J. Phys.», 1967, v. 6, p. 128; Janout Z. e.a. «Sov. J. Phys.», 1968, v. 7, p. 225; Glonti L. I. e.a. Preprint JINR-P1-5737, 1971.
29. Ахмезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., «Наука», 1965.
30. Крейн М. Г. «УМН», 1958, т. 13, № 5, с. 3.
31. Левитан Б. М. Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения. М., «Наука», 1973.
32. Barcilon V. «J. Math. Phys.», 1974, v. 15, N 4, p. 429.
33. Жидков Е. П., Пузынин И. В. «ДАН СССР», 1968, т. 180, № 1, с. 18.
34. Буслав В. С., Фаддеев Л. Д. Там же, 1960, т. 132, № 1, с. 13.
35. Жидков Е. П., Христов Е. Х. Алгоритмы и программы для решения некоторых задач физики. Вып. 2. ЦИФИ—ОИЯИ, 1977, с. 21.
36. Calogero F., Degasperis A. «J. Math. Phys.», 1968, v. 9, N 1, p. 90.
37. Kaup D. J. «SIAM. J. Appl. Math.», 1976, v. 31, N 1, p. 121.
38. Христов Е. Х. Препринт ОИЯИ P5-11251, Дубна, 1978.
39. Жидков Е. П., Христов Е. Х. Алгоритм и программы для решения некоторых задач физики. Вып. 2. ЦИФИ—ОИЯИ, 1977, с. 3.
40. Бабилов В. В. Метод фазовых функций в квантовой механике. М., «Наука», 1976.
41. Колоджеро Ф. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. Пер. с англ. М., «Мир», 1972.
42. Малышев Р. В. Алгоритмы и программы для решения некоторых задач физики. Вып. 1. ЦИФИ—ОИЯИ, 1974, с. 43.

43. Жидков Е. П., Малышев Р. В., Христов Е. Х. Препринт ОИЯИ Р5-9923 Дубна, 1976.
44. Агранович З. С., Марченко В. А. Обратная задача теории рассеяния. Харьков, Изд-во Харьковск. ун-та, 1960.
45. Bann J., Scharf G. «Helv. phys. acta», 1967, v. 40, p. 271.
46. Bann J., Scharf G. «Nucl. Phys. A», 1969, v. 134, p. 481.
47. Чудов Л. А. Препринт ОИЯИ Р-175. Дубна, 1958.
48. Захарьев Б. Н. и др. «ЭЧАЯ», 1977, т. 8, вып. 2, с. 290.
49. Hamada T., Johnston I. D. «Nucl. Phys.», 1962, v. 34, p. 382.
50. Reid R. V. «Ann. Phys.», 1968, v. 50, p. 411.
51. «Handb. d. Phys.», Bd 39, Berlin, Springer-Verlag, 1957