«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1978, том 9, вып. 4

УДК 539.19

О СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Н. Н. Боголюбов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В работе рассмотрены стохастические процессы в динамических системах для случая слабого взаимодействия малой системы (например, одной частицы) с большой системой*.

The stochastic processes in the dinamical systems are considered for the case of weak interaction of a small system (e.g., one particle) with a large one.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1], опубликованной в 1939 г., была исследована проблема возможности стохастического процесса в динамической системе, на которую оказывала влияние большая система. Поведение классической системы исследовалось на основе уравнения Лиувилля для распределения вероятности в фазовом пространстве *а* квантовомеханической системы на базе аналогичного уравнения для статистического оператора фон Неймана. В работе [1] был развит метод, позволивший уже в первом приближении получить уравнения Фоккер — Планка. При этом, развивая и используя данный метод, мы не поднимали в работе [1] вопроса о последовательном математически строгом его обосновании, и в работе [2] была детально исследована некоторая конкретная модель, динамика поведения которой описывалась точно интегрируемыми уравнениями. Это позволило на строгой математической основе проанализировать аппроксимации, предложенные нами ранее. Аналогичные результаты для квантовомеханических систем были получены в работе [3].

В лекциях, прочитанных мною осенью 1974 г., была изложена слегка модифицированная версия метода, развитого в [1], и обсуждена связь его с теорией двухвременных функций Грина.

---

* Данная статья — отредактированный перевод работы N. N. Bogolubov. On the Stochastic Processes in the Dinamical Systems. JINR, E17-10514, Dubna 1977.

Готовя данную работу к публикации и взяв за основу эти лекции, я учел в окончательном ее варианте результаты некоторых важных исследований по теории взаимодействия одной частицы с большой системой, которые были выполнены в последнее десятилетие.

В этой связи мне представилось вполне уместным в ряде мест оригинального текста упомянутых лекций ввести некоторые существенные изменения.

1.

Рассмотрим малую систему S, являющуюся, например, просто отдельной частицей, слабовзаимодействующей с большой системой Σ. Вначале изучим этот случай в рамках классической механики.

Следуя обычной процедуре, принятой в классической статистической механике, введем функцию распределения вероятностей в фазовом пространстве полной системы $S+\Sigma$:

$$\mathscr{D}_t=\mathscr{D}_t(S,\Sigma)=\mathscr{D}_t(\Omega_S,\Omega_\Sigma), \tag{1}$$

где Ω_S, Ω_Σ обозначают фазовые точки, отвечающие фазовым пространствам S- и Σ-систем соответственно.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда в начальный момент времени $t=0$ Σ-система находится в состоянии статистического равновесия и в этот момент времени между S- и Σ-системами включается взаимодействие. Таким образом, мы предположим, что

$$\mathscr{D}_0(S,\Sigma)=f_0(S)\,\mathscr{D}(\Sigma), \tag{2}$$

где

$$\mathscr{D}(\Sigma)=\mathscr{D}_{eq}(\Sigma)=Z^{-1}\exp\left[-H_\Sigma(\Omega_\Sigma)/\theta\right],$$

$$Z=\int d\Omega_\Sigma \exp\left[-H_\Sigma(\Omega_\Sigma)/\theta\right]$$

представляет равновесное распределение в фазовом пространстве системы Σ. Здесь $H_\Sigma=H_\Sigma(\Omega_\Sigma)$ — энергия системы Σ.

Как хорошо известно, эволюция распределения вероятностей определяется уравнением Лиувилля, которое запишем в виде

$$\partial\mathscr{D}_t/\partial t=\text{Л}\mathscr{D}_t; \tag{3}$$

условие нормировки для $\mathscr{D}_t$ дается равенством

$$\int \mathscr{D}_t\, d\Omega_S\, d\Omega_\Sigma=1.$$

Действующий на функции (Ω_S,Ω_Σ) оператор Лиувилля Л можно определить посредством скобок Пуассона:

$$\text{Л}\mathscr{D}_t=[H,\mathscr{D}_t], \tag{4}$$

где H — полный гамильтониан системы $S+\Sigma$.

Отметим, что будем рассматривать лишь те случаи, когда Л не зависит явным образом от времени t.

Обычно полный гамильтониан H представляется в виде суммы

$$H = H_S^0 + H_\Sigma + H_{\text{int}}$$

собственных гамильтонианов S- и Σ-систем, дополненных слагаемым, описывающим взаимодействие между системами S и Σ. В соответствии с этим оператор Лиувилля берется в виде

$$\text{Л} = \text{Л}_{S+\Sigma} = \text{Л}_S^0 + \text{Л}_\Sigma + \text{Л}_{\text{int}}. \tag{5}$$

Ниже слагаемое Л, отвечающее взаимодействию Л_{int}, будет рассматриваться как слабое возмущение, т. е. будет полагаться, что оно содержит малый параметр.

Укажем теперь некоторые примеры конкретной реализации S, Σ и Л.

Рассмотрим случай, когда S — какая-то одна частица, а Σ — некая система, состоящая из N одинаковых частиц, так что

$$\Omega_S = (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0); \quad \Omega_\Sigma = (\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_N), \tag{6}$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ — положение и скорость соответствующих частиц.

Как обычно, все эти частицы полагаются заключенными внутри весьма большого куба макроскопического объема V; налагаются обычные циклические граничные условия.

Возьмем следующие выражения для Л_S^0, Л_{int}:

$$\text{Л}_S^0 = -\mathbf{v}_0 \partial/\partial \mathbf{r}_0; \tag{7}$$

$$\text{Л}_{\text{int}} = \text{Л}_{\text{int}}^{(\Phi)} = \sum_{(1 \leqslant j \leqslant N)} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j)}{\partial \mathbf{r}_0} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0} - \frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j} \right), \tag{8}$$

где $\Phi(\mathbf{r})$ — некая радиально-симметричная потенциальная функция, пропорциональная малому параметру; m — масса частицы S; M — масса какой-либо частицы Σ-системы.

Рассмотрим также важный частный случай, когда взаимодействие между S частицей и частицей из Σ-системы можно определить как взаимодействие между соответствующими непроницаемыми шарами.

Формально взаимодействие между непроницаемыми шарами может характеризоваться специальным выбором $\Phi(r)$:

$$\left. \begin{aligned} &\Phi(r) \to +\infty, && \text{если} \quad r < a; \\ &\Phi(r) = 0, && \text{если} \quad r \geqslant a, \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

где a — сумма радиусов S частицы и какой-либо частицы Σ-системы или же, что эквивалентно, a представляет собой расстояние между центрами этих частиц в момент соударения.

Для такой потенциальной функции выражение (8) является, очевидно, сингулярным, и пользоваться им неудобно. Было найдено, однако, что динамику взаимодействующих шаров можно корректно описать с помощью проинтегрированного оператора Лиувилля вида

$$Л_{\text{int}}^{\text{coll}} = \sum_{(1 \leqslant j \leqslant N)} \overline{T}(0, j), \tag{10}$$

где

$$\overline{T}(0, 1) = a^2 \int\limits_{(\mathbf{v}_{0,1}\sigma) > 0} (\mathbf{v}_{0,1}\sigma) \{\sigma(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 - a\sigma) B_{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1}(\sigma) - \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 + a\sigma)\} d\sigma; \tag{11}$$

$\mathbf{v}_{0,1} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1$; σ — единичный вектор; $B_{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1}(\sigma)$ — оператор, действующий на функцию $F(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)$ и переводящий ее аргументы $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_1$ в

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}_0 \to \mathbf{v}_0^* &= \mathbf{v}_0 - \frac{2M}{M+m}\sigma(\mathbf{v}_{0,1}\sigma); \\ \mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1^* &= \mathbf{v}_1 + \frac{2M}{M+m}\sigma(\mathbf{v}_{0,1}\sigma). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Возможность замены выражения (8) на проинтегрированный оператор (10) обусловлена тем обстоятельством, что в классической механике взаимодействие непроницаемых твердых тел мгновенно. В связи с этим стоит отметить, что в аналогичной ситуации при квантовомеханическом описании замена скобок Пуассона $[H_{\text{inf}}, \mathscr{D}]$ на оператор, интерпретируемый в терминах столкновений и действующий на $\mathscr{D}$, должна рассматриваться как аппроксимация, справедливая лишь в тех случаях, когда эффективное время соударения (здесь оно существенно больше нуля) пренебрежимо по сравнению с характерным временем процесса. В противоположность этому мы не делаем никаких приближений для систем, описываемых классической механикой, когда пользуемся $Л_{\text{int}}^{\text{coll}}$ вместо (8), однако необходимо, конечно, исключить нефизические перекрывающиеся конфигурации, требуя, чтобы $\mathscr{D}$ равнялась нулю для таких конфигураций.

Можно также рассмотреть случай, когда в дополнение к взаимодействию непроницаемых шаров учитывается также регулярное парное взаимодействие $(0, j)$, описываемое гладкой функцией $\Phi(r)$, пропорциональной малому параметру, определенное для $r \geqslant a$ и продолженное формально для $r < a$ требованием

$$\Phi'(r) = 0 \quad \text{для} \quad r < a.$$

В этом случае

$$Л_{\text{int}} = Л_{\text{int}}^{\text{coll}} + Л_{\text{int}}^{(\Phi)}. \tag{13}$$

Заметим, что для рассмотрения $Л_{int}^{coll}$ как «малого возмущения» мы должны предположить, что соответствующая средняя длина свободного пробега $\sim(Na^2/v)^{-1}$ намного больше, чем a:

$$Na^3/v \ll 1. \tag{14}$$

Подчеркнем, что условие (14) не предполагает взаимодействие между частицами Σ-системы малым.

Рассмотрим модель, в которой S представляет собой нейтрон, взаимодействующий лишь с ядрами частиц Σ-системы (эти ядра будем также моделировать непроницаемыми шарами), а Σ-система — жидкость, состоящая из непроницаемых шаров, между которыми действуют силы Ван-дер-Ваальса и диаметры которых a_Σ на много порядков больше, чем диаметры их ядер. В этой модели $a_\Sigma \gg a$. Конечно, многие реальные аспекты диффузии нейтрона в жидкости должны рассматриваться на базе квантовой механики. Однако в некоторых случаях диффузию можно также рассматривать и в квазиклассическом приближении. При этом необходимо лишь заменить оператор $\overline{T}(0, j)$, фигурирующий в (11), соответствующим оператором столкновений, который рассчитывается с помощью решения квантовомеханической задачи двух тел. Он имеет весьма простой вид, если ограничиться учетом лишь S-рассеяния.

Укажем, что, поскольку все частицы Σ-системы идентичны, мы должны считать оператор Лиувилля $Л_\Sigma$ симметричным относительно фазовых переменных этих частиц. Слагаемое $Л_{int}$ (13), описывающее взаимодействие, также симметрично в этом смысле, что обусловливает симметрию относительно фазовых переменных частиц Σ-системы и полного оператора Лиувилля Л. Замечая, что начальное распределение $\mathscr{D}_0$, задаваемое формулой (2), обладает этой симметрией, мы приходим к выводу, что $\mathscr{D}_t$ — симметричная функция $\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_N$.

Вернемся теперь к общему уравнению (3), определяющему эволюцию распределения вероятностей $\mathscr{D}_t$ в фазовом пространстве. Удобно ввести следующие обозначения:

$$(\overline{\mathscr{U}})_S = \int \mathscr{U}\, d\Omega_S; \quad (\overline{\mathscr{U}})_\Sigma = \int \mathscr{U}\, d\Omega_\Sigma; \quad (\overline{\mathscr{U}})_{S+\Sigma} = \int \mathscr{U}\, d\Omega_S\, d\Omega_\Sigma. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь динамическую переменную $A(S)$, которая относится лишь к системе S: $A(S) = A(\Omega_S)$. Среднее значение ее в момент времени t дается выражением

$$\langle A(S)\rangle_t = \overline{(A(S)\,\mathscr{D}_t(S, \Sigma))}_{S+\Sigma},$$

которое преобразуется к виду

$$\langle A(S)\rangle_t = \overline{(A(S)\, f_t(S))}_S = \int A(\Omega_S)\, f_t(\Omega_S)\, d\Omega_S, \tag{16}$$

где

$$f_t(S) = \overline{(\mathscr{D}_t(S, \Sigma))}_\Sigma. \tag{17}$$

Таким образом, плотность вероятности в фазовом пространстве s в момент времени t дается приведенным распределением $f_t(S)$. Ясно, чтобы вычислить среднее значение динамической переменной $A(S)$, необходимо знать лишь приведенное распределение вероятностей $f_t(S)$, а не полное распределение $\mathscr{D}_t(S, \Sigma)$.

Перейдем теперь к изложению метода получения приближенного уравнения для $f_t(S)$ в замкнутом виде. Будем исходить при этом из уравнения Лиувилля (13), записанного следующим образом:

$$\partial \mathscr{D}_t / \partial t = (Л_S^0 + Л_\Sigma + Л_{\text{int}}) \mathscr{D}_t \tag{18}$$

с начальным условием (2).

Введем

$$\mathscr{D}_t - f_t \mathscr{D}(\Sigma) = \Delta_t \tag{19}$$

и заметим, что если учесть (17), то

$$(\overline{\Delta_t})_\Sigma = 0. \tag{20}$$

Интегрируя (18) по Ω_Σ и учитывая, что тождественно $\overline{(Л_\Sigma \mathscr{D}_t)_\Sigma} = 0$, получаем

$$\partial f_t / \partial t = \{Л_S^0 + (\overline{Л_{\text{int}} \mathscr{D}(\Sigma)})_\Sigma\} f_t + (\overline{Л_{\text{int}} \Delta_t})_\Sigma. \tag{21}$$

Соотношения (18), (19), (21) приводят к

$$\frac{\partial \Delta_t}{\partial t} = \frac{\partial \mathscr{D}_t}{\partial t} - \frac{\partial f_t}{\partial t} \mathscr{D}(\Sigma) = (Л_S^0 + Л_\Sigma + Л_{\text{int}}) f_t \mathscr{D}(\Sigma) +$$
$$+ (Л_S^0 + Л_\Sigma + Л_{\text{int}}) \Delta_t -$$
$$- \{(Л_S^0 + (\overline{Л_{\text{int}} \mathscr{D}(\Sigma)})_\Sigma f_t + (\overline{Л_{\text{int}} \Delta_t})_\Sigma\} \mathscr{D}(\Sigma).$$

По определению $\mathscr{D}(\Sigma)$ — равновесное распределение для $Л_\Sigma$: $Л_\Sigma \mathscr{D}(\Sigma) = 0$, следовательно, $Л_\Sigma f_t(S) \mathscr{D}(\Sigma) = f_t(S) Л_\Sigma \mathscr{D}(\Sigma) = 0$.

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} Л_S &= Л_S^0 + (\overline{Л_{\text{int}} \mathscr{D}(\Sigma)})_\Sigma; \\ \Gamma &= Л_{\text{int}} - (\overline{Л_{\text{int}} \mathscr{D}(\Sigma)})_\Sigma \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

и заметим, что

$$Л_S + \Gamma = Л_S^0 + Л_{\text{int}}; \quad (\overline{\Gamma \Delta_t})_\Sigma = (\overline{Л_{\text{int}} \Delta_t})_\Sigma -$$
$$- (\overline{Л_{\text{int}} \mathscr{D}(\Sigma)})_\Sigma (\overline{\Delta_t})_\Sigma = (\overline{Л_{\text{int}} \Delta_t})_\Sigma.$$

Учитывая это, приходим к следующему уравнению для Δ_t:

$$\partial \Delta_t / \partial t = (Л_S + Л_\Sigma) \Delta_t + \Gamma \Delta_t - (\overline{\Gamma \Delta_t})_\Sigma \mathscr{D}(\Sigma) + \Gamma f_t \mathscr{D}(\Sigma), \tag{23}$$

а уравнение (21) перепишем в виде

$$\partial f_t/\partial t = Л_S f_t + \overline{(Л_{\mathrm{int}}\Delta_t)}_\Sigma. \qquad (24)$$

Начальные условия (2) выглядят теперь так:

$$\Delta_t = 0 \quad \text{для} \quad t = 0. \qquad (25)$$

Первое, что приходит на ум, если рассматривать уравнение (23) с начальным условием (25): Δ_t грубо говоря пропорциональна вкладу взаимодействия Г.

Таким образом, в рамках этого полуинтуитивного и простейшего предположения слагаемое в (23) $Г\Delta_t - \overline{(Г\Delta_t)}_\Sigma \mathscr{D}(\Sigma)$ можно рассматривать как член второго порядка малости.

Оставляя в точном уравнении (23) лишь главный член по взаимодействию, получаем приближенное уравнение

$$\partial\Delta_t/\partial t = (Л_S + Л_\Sigma)\,\Delta_t + Гf_t(S)\,\mathscr{D}(\Sigma) \qquad (26)$$

с тем же самым начальным условием (25), формальное решение которого дается выражением

$$\Delta_t = \int_0^t \exp\left[(Л_S + Л_\Sigma)(t-\tau)\right] Гf_\tau(S)\,\mathscr{D}(\Sigma)\,d\tau.$$

Подставляя это выражение в (24), имеем

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = Л_S f_t + \int_0^t \overline{(Л_{\mathrm{int}} \exp\left[(Л_S + Л_\Sigma)(t-\tau)\right] Г\mathscr{D}(\Sigma))}_\Sigma f_\tau\,d\tau. \qquad (27)$$

$$\text{или} \quad \partial f_t/\partial t = Л_S f_t + \int_0^t \overline{(Л_{\mathrm{int}} \exp[(Л_S + Л_\Sigma)(t-\tau)]\{[Л_{\mathrm{int}} - (Л_{\mathrm{int}}\,\mathscr{D}(\Sigma))_\Sigma]\,\mathscr{D}(\Sigma)\})}_\Sigma f_\tau d\tau. \qquad (27)$$

Таким образом, мы получили приближенное немарковское кинетическое уравнение для приведенной функции распределения $f_t(S)$ в замкнутой форме в том смысле, что здесь уже нет зависимости от полного распределения для всей $(S+\Sigma)$-системы.

Данное уравнение было установлено в рамках классической механики. Для того чтобы получить аналог его также и для случая, когда динамическое поведение $(S+\Sigma)$-системы рассматривается в рамках квантовой механики, необходимо прибегнуть к некоторым очевидным модификациям.

Во-первых, воспользуемся представлением статистического оператора фон Неймана в матричном виде

$$\mathscr{D}_t = \mathscr{D}_t(X_S, X'_S; X_\Sigma, X'_\Sigma), \qquad (28)$$

где X_S, X_Σ — полные наборы значений коммутирующих переменных, характеризующих состояния динамических S- и Σ-систем соответственно; X'_S и X'_Σ — наборы значений тех же самых переменных.

Операторы Лиувилля Л, $Л^0_S$, $Л_\Sigma$, $Л_{\text{int}}$ должны рассматриваться как операторы, действующие на выражения типа (28), определяемые как классические функции переменных X_S, X'_S, X_Σ, X'_Σ. Эти Л-операторы можно определить посредством квантовомеханических скобок Пуассона: $[H, \mathscr{D}] = Л\mathscr{D}$. Далее, соответствующие средние (15) должны быть заменены на следующие операции:

$$(\overline{\mathscr{U}})_S = \mathrm{Sp}_{(S)}\mathscr{U} = \int \mathscr{U}(X_S, X_S; X_\Sigma, X'_\Sigma)\, dX_S;$$

$$(\overline{\mathscr{U}})_\Sigma = \mathrm{Sp}_{(\Sigma)}\mathscr{U} = \int \mathscr{U}(X_S, X'_S; X_\Sigma, X_\Sigma)\, dX_\Sigma;$$

$$(\overline{\mathscr{U}})_{S+\Sigma} = \mathrm{Sp}_{(S+\Sigma)}\mathscr{U} = \int \mathscr{U}(X_S, X_S; X_\Sigma, X_\Sigma)\, dX_S\, dX_\Sigma.$$

В частности, $f_t(S) = f_t(X_S, X'_S) = \mathrm{Sp}_{(\Sigma)}\mathscr{D}_t$.

Весьма часто в качестве переменных X_S, X_Σ берутся координаты $\mathbf{r}$ и спины всех частиц системы или же альтернативно их импульсы и спины. Интегрирование по X_S или X_Σ понимается как интегрирование по всем компонентам X, непрерывно меняющимся в некоторой области, и суммирование по всем дискретным компонентам.

Далее мы можем буквально повторить проведенные выше рассуждения, исходя при этом из квантовомеханического уравнения Лиувилля, и получить приближенное уравнение для приведенного статистического оператора $f_t(S)$, формально не отличающееся по виду от (27).

Очевидно, что очерченный здесь метод есть слегка модифицированная версия метода, разработанного в работе [1] и развитого в дальнейшем А. В. Шелест [5].

2.

Теперь перейдем к обсуждению кинетического уравнения (27) для некоторых конкретных примеров динамических S-, Σ-систем, рассматриваемых в рамках классической механики.

Обратимся вначале к примеру, упомянутому в разд. 1, когда $(\Omega_S, \Omega_\Sigma)$, $Л^0_S$, $Л_{\text{int}}$ даются формулами (6) — (8). Здесь сосредоточим наше внимание лишь на случае, когда статистическое равновесие Σ-системы описывается распределением Гиббса $\mathscr{D}(\Sigma)$, отвечающим пространственно-однородному состоянию. Следовательно, из рассмотрения исключается такая ситуация, при которой Σ-система представляет собой кристалл, находящийся в состоянии статистического равновесия. Далее будем предполагать, что функция, описывающая потенциал взаимодействия и пропорциональная малому параметру, регулярна. Будет использовано представление Фурье

$$\Phi(\mathbf{r})=\frac{1}{V}\sum_{(k)}\exp(i\mathbf{kr})\,\nu(\mathbf{k}), \tag{29}$$

где

$$\nu(\mathbf{k})=\int\exp(-i\mathbf{kr})\,\Phi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}. \tag{30}$$

Суммирование в (29) ведется, как обычно, по квазидискретному спектру волновых чисел $\mathbf{k}$, отвечающих объему V:

$$\mathbf{k}=(2\pi n_1/L,\ 2\pi n_2/L,\ 2\pi n_3/L),$$

здесь n_1, n_2, n_3 — целые числа и $L^3=V$. Поскольку $\Phi(\mathbf{r})$ обладает радиальной симметрией, фурье-компонента $\nu(\mathbf{k})$ — некая реальная функция, инвариантная относительно отражения:

$$\nu(\mathbf{k})=\nu^*(\mathbf{k})=\nu(-\mathbf{k}). \tag{31}$$

Перепишем наше кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}=\text{Л}_S f_t+\int_0^t K(t-\tau)\,f_\tau\,d\tau; \tag{32}$$

$$K(T)=\overline{(\text{Л}_{\text{int}}\exp[(\text{Л}_S+\text{Л}_\Sigma)T]\,[\text{Л}_{\text{int}}-(\text{Л}_{\text{int}}\mathscr{D}(\Sigma))_\Sigma]\,\mathscr{D}(\Sigma))}_\Sigma. \tag{33}$$

Чтобы исследовать это уравнение, установим некоторые свойства выражений типа $\overline{(\text{Л}_{\text{int}}F(S,\ \Sigma))}_\Sigma$. Используя определенне (8), имеем

$$\overline{(\text{Л}_{\text{int}}F(S,\Sigma))}_\Sigma=\sum_{(j)}\overline{\left(\frac{\partial\Phi(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_j)}{\partial\mathbf{r}_0}\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}_0}F(S,\Sigma)\right)}_\Sigma-$$
$$-\sum_{(j)}\frac{1}{M}\overline{\left(\frac{\partial\Phi(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_j)}{\partial\mathbf{r}_0}\frac{\partial}{\mathbf{v}_j}F(S,\Sigma)\right)}_\Sigma.$$

Однако второй член в правой части этого соотношения — тождественный нуль, поскольку он содержит выражение $\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}_j}F(S,\ \Sigma)$, проинтегрированное по всему пространству скоростей $\mathbf{v}_j$.

Таким образом, мы имеем

$$(\overline{\text{Л}_{\text{int}}F(S,\Sigma)})_\Sigma=\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}_0}\sum_{(j)}\overline{\left(\frac{\partial\Phi(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_j)}{\partial\mathbf{r}_0}F(S,\Sigma)\right)}_\Sigma. \tag{34}$$

Применим полученное тождество в том случае, когда $F(S, \Sigma) = \mathscr{D}(\Sigma)$. Подстановка представления Фурье (29) в (34) дает

$$\overline{(\text{Л}_{\text{int}}\mathscr{D}(\Sigma))}_\Sigma = \\ = \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0}\cdot\frac{1}{V}\sum_{(k)} i\mathbf{k}\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_0)\,\nu(k)\left(\overline{\sum_{(j)}\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j)\,\mathscr{D}(\Sigma)}\right)_\Sigma. \quad (35)$$

Заметим теперь, что из-за пространственно-однородного характера состояния статистического равновесия системы Σ, описываемой распределением Гиббса $\mathscr{D}(\Sigma)$, выражение $\overline{(\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j)\,\mathscr{D}(\Sigma))}_\Sigma$ должно быть инвариантно относительно произвольных пространственных трансляций: $\mathbf{r}_j \to \mathbf{r}_j + \mathbf{r}$. Следовательно,

$$\overline{(\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j)\,\mathscr{D}(\Sigma))}_\Sigma = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})\,\overline{(\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j)\,\mathscr{D}(\Sigma))}_\Sigma.$$

Так как $\mathbf{r}$ есть произвольный вектор, то $\overline{(\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j)\,\mathscr{D}(\Sigma))}_\Sigma = 0$, если $\mathbf{k} \neq 0$, и, принимая во внимание (35), имеем

$$\overline{(\text{Л}_{\text{int}}\mathscr{D}(\Sigma))}_\Sigma = 0. \quad (36)$$

Следовательно, (22) перепишется так:

$$\text{Л}_S = \text{Л}_S^0. \quad (37)$$

Применим далее тождество (34) к выражению (33). Принимая во внимание (36), (37), получаем

$$K(T) = \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0}\mathbf{Q}(T); \quad (38)$$

$$\mathbf{Q}(T) = \\ = \sum_{(j,\,j_1)}\left(\overline{\frac{\partial\Phi(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_j)}{\partial \mathbf{r}_0}\exp[(\text{Л}_S^0+\text{Л}_\Sigma)T]\,\frac{\partial\Phi(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_{j_1})}{\partial \mathbf{r}_{j_1}}\left(\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0}+\frac{\mathbf{v}_j}{\theta}\right)\mathscr{D}(\Sigma)}\right)_\Sigma. \quad (39)$$

Здесь мы воспользовались также фундаментальным свойством

$$-\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j}\mathscr{D}(\Sigma) = \frac{\mathbf{v}_j}{\theta}\mathscr{D}(\Sigma). \quad (40)$$

Подстановка (29) в (39) дает

$$\mathbf{Q}(T) = \frac{1}{V^2}\sum_{(k,\,k_1)}\sum_{(j,\,j_1)}\mathbf{k}\nu(k)\,\nu(k_1)\,\mathscr{E}(\mathbf{k},\mathbf{k}_1), \quad (41)$$

где

$$\mathscr{E}(\mathbf{k},\mathbf{k}_1) = \\ = \left(\overline{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_0)\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j)\exp[(\text{Л}_S^0+\text{Л}_\Sigma)T]\exp(i\mathbf{k}_1\mathbf{r}_0)\exp(-i\mathbf{k}_1\mathbf{r}_{j_1})\,\mathbf{k}_1\left(\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0}+\frac{\mathbf{v}_j}{\theta}\right)\mathscr{D}(\Sigma)}\right)_\Sigma.$$

Однако $\mathscr{D}(\Sigma)$ инвариантна по отношению к трансляциям $\mathbf{r}_j \to \mathbf{r}_j + \mathbf{r}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, где $\mathbf{r}$ — произвольный вектор пространства.

Следовательно, имеет место равенство

$$\mathscr{E}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) = \exp[-\mathrm{i}(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)\mathbf{r}]\,\mathscr{E}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1),$$

из которого следует $\mathscr{E}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) = 0$, если $\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 \neq 0$. Таким образом, мы видим, что в сумме (41) должны быть оставлены лишь члены с $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}$.

Замечаем, далее, что Л^0_S коммутирует с Л_Σ, $\mathbf{r}_j$, а Л_Σ коммутирует с $\mathbf{r}_0$. Следовательно, выражение (41) можно переписать в следующем виде:

$$Q(T) = \frac{1}{V^2} \sum_{(k)} \mathbf{k}\nu^2(k) \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_0) \exp(\text{Л}^0_S T) \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_0) \times$$
$$\times \left(\overline{\sum_{(j)} \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_j) \exp(\text{Л}_\Sigma T) \sum_{(j)} \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_j)\, \mathbf{k} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0} + \frac{1}{\theta}\mathbf{v}_j \right) \mathscr{D}(\Sigma)} \right)_\Sigma . \quad (42)$$

Рассматривая движения в изолированной Σ-системе, отвечающие оператору Лиувилля Л_Σ, имеем

$$\exp(\text{Л}_\Sigma T) \sum_{(j)} \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_j)(\mathbf{k}\mathbf{v}_j) = \sum_{(j)} \exp[\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_j(-T)]\,(\mathbf{k}\mathbf{v}_j(-T)) =$$
$$= -\sum_{(j)} \exp[\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_j(-T)] \frac{d}{dT}(\mathbf{k}\mathbf{r}_j(-T)) =$$
$$= \mathrm{i}\frac{d}{dT} \sum_{(j)} \exp[\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_j(-T)] = \mathrm{i}\frac{d}{dT} \exp(\text{Л}_\Sigma T) \sum_{(j)} \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_j),$$

что, если учесть (42), приводит к следующему выражению:

$$Q(T) = \frac{1}{V^2} \sum_{(k)} \mathbf{k}\nu^2(k) \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_0) \exp(\text{Л}^0_S T) \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_0) \times$$
$$\times \left\{ U_k(T) \frac{1}{m} \left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0} \right) + \frac{\mathrm{i}}{\theta} \frac{\partial U_k(T)}{\partial T} \right\}, \quad (43)$$

где

$$U_k(T) = \left(\overline{\sum_{(j)} \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{v}_j) \exp(\text{Л}_\Sigma T) \sum_{(j)} \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_j)\, \mathscr{D}(\Sigma)} \right)_\Sigma =$$
$$= N \left(\overline{\exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_1) \exp(\text{Л}_\Sigma T) \sum_{(j)} \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_j)\, \mathscr{D}(\Sigma)} \right)_\Sigma = N R_k(T); \quad (44)$$
$$R_k(T) = \left(\overline{\exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_1) \exp(\text{Л}_\Sigma T) \sum_{(j)} \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_j)\, \mathscr{D}(\Sigma)} \right)_\Sigma .$$

Вводя среднюю плотность частиц

$$n = N/V \quad (45)$$

и переписывая выражение (43) с помощью (44), получаем

$$\mathbf{Q}(T)=n\frac{1}{V}\sum_{(k)}\mathbf{k}\nu^2(k)\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_0)\exp(\text{Л}_S^0T)\exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_0)\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{m}R_k(T)\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}_0}\right)+\frac{\mathrm{i}}{\theta}\frac{\partial R_k(T)}{\partial T}\right\}. \tag{46}$$

В этих обозначениях наше кинетическое уравнение (33), (38) приводится к виду

$$\frac{\partial f_t(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}{\partial t}=-\mathbf{v}_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_0}f_t(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)+$$
$$+\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}_0}\int_0^t\mathbf{Q}(t-\tau)f_\tau(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)\,d\tau. \tag{47}$$

Перейдем к фурье-представлению

$$f_t(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)=\frac{1}{V}\sum_{(l)}\exp(-\mathrm{i}\mathbf{l}\mathbf{r}_0)f_l(t,\mathbf{v}_0) \tag{48}$$

и заметим, что

$$\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_0)\exp(\text{Л}_S^0T)\exp[-\mathrm{i}(\mathbf{k}+\mathbf{l})\mathbf{r}_0]=\exp(-\mathrm{i}\mathbf{l}\mathbf{r}_0)\exp(\mathbf{k}+\mathbf{l})\mathbf{v}_0T.$$

В таком случае несложно заключить, что уравнение (47) приводится к отдельным уравнениям для каждой компоненты $f_l(t,\mathbf{v}_0)$:

$$\frac{\partial f_l(t,\mathbf{v}_0)}{\partial t}=\mathrm{i}(\mathbf{l}\mathbf{v}_0)f_l(t,\mathbf{v}_0)+\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}_0}\int_0^t\mathbf{Q}_l(t-\tau)f_l(\tau,\mathbf{v}_0)\,d\tau, \tag{49}$$

где

$$\mathbf{Q}_l(T)=$$
$$=n\frac{1}{V}\sum_{(k)}\mathbf{k}\nu^2(k)\exp[\mathrm{i}(\mathbf{k}+\mathbf{l})\mathbf{v}_0T]\left\{R_k(T)\frac{1}{m}\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}_0}+\frac{\mathrm{i}}{\theta}\frac{\partial R_k(T)}{\partial T}\right\}. \tag{50}$$

Производя обычный в статистической механике предельный переход и переходя в (50) от суммирования по $\mathbf{k}$ к интегрированию, получаем

$$\mathbf{Q}_l(T)=\frac{n}{(2\pi)^3}\int\mathbf{k}\nu^2(k)\exp[\mathrm{i}(\mathbf{k}+\mathbf{l})\mathbf{v}_0T]\times$$
$$\times\left\{R_k(T)\frac{1}{m}\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}_0}+\frac{\mathrm{i}}{\theta}\frac{\partial R_k(T)}{\partial T}\right\}d\mathbf{k}. \tag{51}$$

Уравнение (49) удобно исследовать, использовав преобразование Лапласа:

$$\int_0^\infty \exp(-zt)\, f_l(t, \mathbf{v}_0)\, dt = f_{l,z}(\mathbf{v}_0)$$

$$(z = \varepsilon - i\omega,\ \operatorname{Re} z = \varepsilon > 0). \tag{52}$$

Применяя преобразования Лапласа к левой и правой частям уравнения (49), находим

$$z f_{l,z}(\mathbf{v}_0) = i(\mathbf{l}\mathbf{v}_0) f_{l,z}(\mathbf{v}_0) +$$

$$+ \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int_0^\infty \mathbf{Q}_l(T) \exp(-zT)\, dT f_{l,z}(\mathbf{v}_0) + f_l(0, \mathbf{v}_0); \tag{53}$$

$$\int_0^\infty \mathbf{Q}_l(T)\exp(-zT)\, dT = \frac{n}{(2\pi)^3}\int \mathbf{k}\nu^2(k) \times$$

$$\times \left\{ \int_0^\infty R_k(T) \exp\{[i(\mathbf{k}+\mathbf{l})\mathbf{v}_0 - z]\, T\}\, dT \right\} \frac{1}{m}\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0}\right) d\mathbf{k} +$$

$$+ \frac{n}{(2\pi)^3}\int \mathbf{k}\nu^2(k) \left\{ \frac{i}{\theta}\int_0^\infty \exp\{[i(\mathbf{k}+\mathbf{l})\mathbf{v}_0 - z]\, T\} \frac{\partial R_k(T)}{\partial T}\, dT \right\} d\mathbf{k}. \tag{53a}$$

Однако, с одной стороны,

$$\frac{i}{\theta}\int_0^\infty \exp\{[i(\mathbf{k}+\mathbf{l})\mathbf{v}_0 - z]\, T\} \frac{\partial R_k(T)}{\partial T}\, dT = -\frac{i}{\theta} R_k(0) +$$

$$+ \frac{1}{\theta}[(\mathbf{k}+\mathbf{l})\mathbf{v}_0 + iz] \int_0^\infty R_k(T) \exp\{[i(\mathbf{k}+\mathbf{l})\mathbf{v}_0 - z]\, T\}\, dT,$$

а с другой стороны, из (44) следует

$$R_k(0) = \frac{1}{N}\left(\overline{\sum_{(j)} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j) \sum_{(j)} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_j)\, \mathscr{D}(\Sigma)}\right)_\Sigma,$$

что обусловливает выполнение соотношения $R_k(0) = R_{-k}(0)$. Так как функция $\nu(k)$, согласно (31), также имеет подобное свойство симметрии, то легко усмотреть, что $\int \mathbf{k}\nu^2(k)\, R_k(0)\, d\mathbf{k} = 0$.

Таким образом, уравнение (53) можно записать в виде

$$zf_{l,z}(\mathbf{v}_0) = \mathrm{i}(\mathbf{l}\mathbf{v}_0) f_{l,z}(\mathbf{v}_0) +$$
$$+ \frac{n}{m(2\pi)^3} \int \left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0}\right) \nu^2(k) \left\{ \int_0^\infty R_k(T) \exp\{\mathrm{i}[(\mathbf{k}+\mathbf{l})\mathbf{v}_0 - z]T\} dT \right\} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{m}\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0} + \frac{(\mathbf{k}+\mathbf{l})\mathbf{v}_0 + \mathrm{i}z}{\theta}\right) d\mathbf{k} f_{l,z}(\mathbf{v}_0) + f_l(0, \mathbf{v}_0). \tag{54}$$

Отметим, что интегральный член в правой части (54), содержащий $\nu^2(k)$, пропорционален формально квадрату малого параметра. Если рассмотреть случай малых z и l, то можно пренебречь соответствующими членами в интеграле и получить весьма простое приближенное уравнение

$$zf_{l,z}(\mathbf{v}_0) = \mathrm{i}(\mathbf{l}\mathbf{v}_0) f_{l,z}(\mathbf{v}_0) +$$
$$+ \frac{n}{m(2\pi)^3} \int \nu^2(k) \left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0}\right) \int_0^\infty R_k(T) \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{v}_0 T)\, dT\mathbf{k} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0} + \frac{\mathbf{v}_0}{\theta}\right) d\mathbf{k} f_{l,z}(\mathbf{v}_0) + f_l(0, \mathbf{v}_0). \tag{55}$$

Необходимо подчеркнуть, что уравнение (54) не содержит слагаемых более высокой степени по взаимодействию, для которых не исключена возможность обнаружить сингулярное поведение в окрестности $z = 0$, $l = 0$.* По этой причине уравнение (55) также может и не давать правильную асимптотику $f_{l,z}(\mathbf{v}_0)$ при $\mathbf{l} \to 0$, $z \to 0$.

С другой стороны, представляется интересным, что уравнение (55) можно формально получить из уравнения для приведенного распределения вероятности

$$\frac{\partial f_t(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)}{\partial t} = -\mathbf{v}_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} f_t(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) + \frac{n}{m(2\pi)^3} \int \nu^2(k) \left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0}\right) \times$$
$$\times \int_0^\infty R_k(T) \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{v}_0 T)\, dT\mathbf{k} \left(\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0} + \frac{\mathbf{v}_0}{\theta}\right) d\mathbf{k} f_t(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0), \tag{56}$$

если воспользоваться разложением Фурье (48) и преобразованием Лапласа по переменной t. Следовательно, эти два уравнения (55), (56) полностью эквивалентны: одно из них соответствует (z, l)-

* И действительно, имеются веские указания на большую вероятность осуществления подобной возможности.

представлению, другое — $(t, \mathbf{r}_0)$-представлению. Совершенно ясно, что (56) — типичное уравнение Фоккера — Планка для марковского стохастического процесса. Очевидно, (56) допускает также наличие пространственного однородного решения $f_t(\mathbf{v}_0)$, которое должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial f_t(\mathbf{v}_0)}{\partial t} = \frac{n}{m(2\pi)^3} \int v^2(k) \left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0}\right) \int_0^\infty R_k(T) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{v}_0 T)\, dT \times$$
$$\times \mathbf{k}\left(\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0} + \frac{\mathbf{v}_0}{\theta}\right) d\mathbf{k}\, f_t(\mathbf{v}_0), \tag{57}$$

позволяющему прийти к выводу, что в данной простой ситуации с возрастанием времени $f_t(\mathbf{v}_0)$ приближается к максвелловскому распределению по скоростям.

Мы уже отмечали, что для $l = 0$ поправочные члены к решениям (54) или (55) могут становиться сингулярными при $z \to 0$. Аналогично в t-представлении уравнение (57) может не давать правильного поведения асимптотики разности $f_t(\mathbf{v}_0) - f_{\text{макс}}(\mathbf{v}_0)$ для достаточно больших значений t. Этот вопрос будет детальнее обсужден в разд. 4.

Теперь же установим некоторые полезные свойства функции $R_k(T)$. Рассмотрим равновесное среднее для Σ-системы:

$$\langle \rho(t, \mathbf{r})\,\rho(0, \mathbf{r}')\rangle_\Sigma = \overline{(\rho(t, \mathbf{r})\,\rho(0, \mathbf{r}')\,\mathscr{D}(\Sigma))}_\Sigma, \tag{58}$$

где $\rho(t, \mathbf{r})$ — микроскопическая плотность частиц Σ-системы: $\rho(t, \mathbf{r}) = \sum\limits_{(1 \leqslant j \leqslant N)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t))$. Поскольку равновесное среднее инвариантно относительно временных трансляций, выражение (58) эквивалентно следующему:

$$\langle \rho(0, \mathbf{r})\,\rho(-t, \mathbf{r})\rangle_\Sigma = \langle \rho(0, \mathbf{r}) \exp(\text{Л}_\Sigma t)\rho(0, \mathbf{r}')\rangle_\Sigma. \tag{59}$$

В таком случае, использовав представление Фурье, получаем

$$\langle \rho(t, \mathbf{r})\,\rho(0, \mathbf{r}')\rangle_\Sigma = \frac{1}{V^2} \sum_{(k)} \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \times$$
$$\times \overline{\left(\sum_{(j)} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j) \exp(\text{Л}_\Sigma t) \sum_{(j)} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_j)\,\mathscr{D}(\Sigma)\right)}_\Sigma =$$
$$= n^2 + \frac{1}{V^2} \sum_{(k \neq 0)} \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \times$$
$$\times \overline{\left(\sum_{(j)} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j) \exp(\text{Л}_\Sigma t) \sum_{(j)} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_j)\,\mathscr{D}(\Sigma)\right)}_\Sigma,$$

что при учете (44) дает

$$\langle \rho(t, \mathbf{r})\, \rho(0, \mathbf{r}')\rangle_\Sigma = n^2 + n\,\frac{1}{V} \sum_{k\neq 0} R_k(t) \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] \tag{60}$$

или же в термодинамическом пределе $V \to \infty$, $n = \mathrm{const}$

$$\langle \rho(t, \mathbf{r})\, \rho(0, \mathbf{r}')\rangle_\Sigma = n^2 + \frac{n}{(2\pi)^3} \int R_k(t) \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\, d\mathbf{k}. \tag{61}$$

Поскольку микроскопическая плотность частиц есть действительная функция, левая часть соотношения (61) также должна быть реальной величиной и, следовательно,

$$R_k^*(t) = R_{-k}(t). \tag{62}$$

Обратимся теперь к интегральному члену в уравнении (56) и перепишем его в виде

$$\frac{n}{(2\pi)^3 m} \int \nu^2(k) \left(\mathbf{k}\, \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0}\right) \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\infty R_k(T) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{v}_0 T)\, nT + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty R_{-k}(T) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{v}_0 T)\, dT \right\} \mathbf{k} \left(\frac{1}{m}\, \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0} + \frac{\mathbf{v}_0}{\theta}\right) d\mathbf{k}\, f_t(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0).$$

Соотношение (62), однако, приводит к равенству

$$\frac{1}{2} \left\{ \int_0^\infty R_k(T) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{v}_0 T)\, dT + \int_0^\infty R_{-k}(T) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{v}_0 T)\, dT \right\} =$$

$$= \mathrm{Re} \int_0^\infty R_k(T) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{v}_0 T)\, dT.$$

В итоге уравнение (56) для приведенного распределения вероятности можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial f_t(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)}{\partial t} = -\mathbf{v}_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} f_t(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) + \frac{n}{m(2\pi)^3} \int \nu^2(k) \left(\mathbf{k}\, \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0}\right) \times$$

$$\times F(\mathbf{k}\mathbf{v}_0)\, \mathbf{k} \left(\frac{1}{m}\, \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0} + \frac{\mathbf{v}_0}{\theta}\right) d\mathbf{k}\, f_t(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0), \tag{63}$$

где

$$F(\omega) = \mathrm{Re} \int_0^\infty R_k(t) \exp(i\omega t)\, dt. \tag{64}$$

Мы видим, что для того чтобы располагать полностью определенным уравнением, необходимо определить функцию (64).

В разд. 3 обрисуем метод конкретного расчета этой функции в некоторых часто рассматриваемых ситуациях. Здесь же заметим лишь, что эквивалентность (58) и (59) обусловливает выполнение равенства $R_k(-t) = R_{-k}(t)$, приводящего к соотношению

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R_k(t) \exp(i\omega t)\, dt. \tag{65}$$

В таком случае поскольку $F(\omega)$ — фурье-трансформанта равновесного среднего корреляционной функции двух взаимно сопряженных динамических переменных:

$$R_k(t) = \frac{1}{n} \lim_{V\to\infty} \frac{1}{V} \left\langle \sum_{(j)} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j) \exp(\text{Л}_\Sigma t) \sum_{(j)} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_j) \right\rangle_\Sigma, \tag{66}$$

то имеем

$$F(\omega) \geqslant 0. \tag{67}$$

Перейдем теперь к анализу следующего примера: все условия те же, но вместо регулярного взаимодействия (8) рассматривается взаимодействие между непроницаемыми шарами. В таком случае необходимо взять

$$\text{Л}_{\text{int}} = \text{Л}_{\text{int}}^{\text{coll}}, \tag{68}$$

где конкретный вид $\text{Л}_{\text{inf}}^{\text{coll}}$ дается формулами (10) и (11).

В разд. 1 уже было отмечено, что фундаментальное уравнение Лиувилля (18) дает точное описание динамики системы, если только исключены нефизические перекрывающиеся конфигурации. Конечно, если неперекрывающиеся конфигурации отсутствовали в начальный момент времени $t = 0$, они не могут возникнуть и в последующие моменты времени $t \neq 0$. Следовательно, мы должны наложить следующее условие: $\mathscr{D}_0(S, \Sigma) = 0$ (для $t = 0$), если хотя бы для какого-либо одного j из набора $j = 1, 2, \ldots, N$

$$|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j| < a. \tag{69}$$

Если справедливо это условие, оно автоматически удовлетворяется для $\mathscr{D}_t$ при $t > 0$ *.

Теперь становится очевидной трудность, которая возникнет, как только мы попытаемся использовать уравнение (27) с Л_{int},

* Подчеркнем, что выражение (11) для $\overline{T}(0, 1)$ можно использовать лишь при изучении эволюции D_t для $t > 0$. Если же мы хотим исследовать эту эволюцию для обратного направления времени ($t < 0$), необходимо применять другую форму для $\overline{T}(0, 1)$. Направление времени в этих операторах конкретизируется соглашением о смысле $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^*$: являются ли они скоростями до соударения и после соударения или же этот порядок является обратным. Более детальное обсуждение этого вопроса содержится в работе [4].

даваемым (68). Существенным моментом при выводе этого уравнения было использование начального условия (2) $\mathscr{D}_0(S, \Sigma) = f_0(S)\mathscr{D}(\Sigma)$, а такой вид $\mathscr{D}_0$ исключает наложение условия (69). Вероятность перекрывающихся конфигураций, следовательно, не равна нулю. Тем не менее будем использовать уравнение перекрывания размеров S частицы и частицы из Σ-системы пропорционально малой величине na^3 и полагая, что роль подобного перекрывания пренебрежима, если рассчитывать для этого уравнения вклад поправок в случае малой плотности, в особенности тогда когда l в $f_l(t, v_0)$ достаточно малы, а t достаточно велико.

Далее, в разд. 4, предложена другая форма выбора $\mathscr{D}_0(S, \Sigma)$, которая автоматически исключит перекрывающиеся конфигурации, и таким образом будет дано a posteriori основание процедуры, которую мы используем теперь.

Для того чтобы конкретизировать рассматриваемое приближенное уравнение, подставим вначале (7), (10), (11) в соотношение (22):

$$Л_S = Л_S^0 + \sum_{(1\le j\le N)} \overline{(\overline{T}(0, j)\,\mathscr{D}(\Sigma))_\Sigma} = Л_S^0 + N\,\overline{(\overline{T}(0, 1)\,\mathscr{D}(\Sigma))_\Sigma}. \tag{70}$$

Заметим, что равновесие распределения $\mathscr{D}(\Sigma)$ для классической динамической Σ-системы имеет вид

$$\mathscr{D}(\Sigma) = W(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) \prod_{(1\le j\le N)} \Phi_\Sigma(v_j), \tag{71}$$

где

$$\Phi_\Sigma(v) = \left(\frac{M}{2\pi\theta}\right)^{3/2} \exp(-Mv^2/2\theta); \quad \int \Phi_\Sigma(v)\,d\mathbf{v} = 1 \tag{72}$$

— нормированное распределение Максвелла по скоростям.

Условие нормировки $\int \mathscr{D}(\Sigma)\,d\Omega_\Sigma = 1$ приводит к соотношению

$$\int W(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)\,d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_N = 1. \tag{73}$$

Рассмотрим равновесное среднее микроскопической плотности частиц в Σ-системе в точке $\mathbf{r}$:

$$n = \langle\rho(\mathbf{r})\rangle_\Sigma = \sum_{1\le j\le N} \int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)\,\mathscr{D}(\Sigma)\,d\Omega_\Sigma =$$

$$= N\int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\,\mathscr{D}(\Sigma)\,d\Omega_\Sigma = N\int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\,W\,d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_N.$$

Принимая во внимание требование пространственной однородности, мы видим, что эта средняя плотность не зависит от $\mathbf{r}$ и, следовательно, $N \int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) W d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_N = n$. Благодаря этому соотношению формулы (11), (71), (72) позволяют заключить, что

$$N\,\overline{(\overline{T}(0,1)\,\mathscr{D}(\Sigma))_\Sigma} = na^2 \int (\mathbf{v}_{0,\,1}\sigma)\,\theta(\mathbf{v}_{0,\,1}\sigma)\,\{B_{v_0,\,v_1}(\sigma)-1\} \times \times \Phi_\Sigma(v_1)\,d\sigma\,d\mathbf{v}_1, \tag{74}$$

где
$$\theta(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{для } \tau > 0; \\ 0 & \text{для } \tau \leqslant 0. \end{cases}$$

В итоге мы пришли к оператору соударения Лоренца — Больцмана, действующему лишь на функцию v_0:

$$N\,(\overline{\overline{T}(0,1)\,\mathscr{D}(\Sigma)})_\Sigma f(S) = = na^2 \int (\mathbf{v}_{0,\,1}\sigma)\,\theta(\mathbf{v}_{0,\,1}\sigma)\,\{B_{v_0,\,v_1}(\sigma)-1\}\,\Phi_\Sigma(v_1)\,f(\mathbf{r}_0,\,\mathbf{v}_0)\,n\sigma\,d\mathbf{v}_1.$$

Удобно ввести обозначения

$$f(S) = \chi(S)\,\Phi_0(v_0), \tag{75}$$

где $\Phi_0(v_0)$ — нормированное распределение Максвелла для S:

$$\Phi_0(v_0) = [m/(2\pi\theta)]^{3/2} \exp[-mv^2/(2\theta)].$$

Тогда, принимая во внимание, что

$$B_{v_0,\,v_1}(\sigma)\,\Phi_0(v_0)\,\Phi_\Sigma(v_1) = = [m/(2\pi\theta)]^{3/2}\,[M/(2\pi\theta)]^{3/2} \exp\{-mv^{*2}/2\theta - Mv_1^{*2}/2\theta\} = = \Phi_0(v_0)\,\Phi_\Sigma(v_1), \tag{76}$$

из (70) получаем

$$\text{Л}_S f(S) = \text{Л}_S \chi(S)\,\Phi_0(v_0) = = \Phi_0(v_0)\left\{-\mathbf{v}_0 \frac{\partial\chi(\mathbf{r}_0,\,\mathbf{v}_0)}{\partial\mathbf{r}_0} + na^2 L_S\chi\right\}, \tag{77}$$

где

$$L_S\chi = \int (\mathbf{v}_{0,\,1}\sigma)\,\theta(\mathbf{v}_{0,\,1}\sigma)\,\Phi_\Sigma(v_1)\,\{B_{v_0,\,v_1}(\sigma)-1\}\,\chi(\mathbf{r}_0,\,\mathbf{v}_0)\,d\sigma\,d\mathbf{v}_1.$$

Обратимся вновь к уравнению (27), которое представим в виде

$$\frac{\partial f_t(\mathbf{r}_0,\,\mathbf{v}_0)}{\partial t} = \Phi_0(v_0)\left\{-\mathbf{v}_0 \frac{\partial\chi_t(\mathbf{r}_0,\,\mathbf{v}_0)}{\partial\mathbf{r}_0} + na^2 L_S\chi\right\} + + \int_0^t K(t-\tau)\,\chi_\tau(\mathbf{r}_0,\,\mathbf{v}_0)\,\Phi_0(v_0)\,d\tau, \tag{78}$$

где

$$K(t) =$$

$$= \overline{\left(\sum_{(j)} \overline{T}(0, j) \exp [(\text{Л}_S + \text{Л}_\Sigma) t] \sum_{(j)} (\overline{T}(0, j) - (\overline{\overline{T}(0, j) \mathscr{D}(\Sigma)})_\Sigma \mathscr{D}(\Sigma)\right)_\Sigma} =$$

$$= \overline{N (\overline{T}(0, 1) \exp (\text{Л}_S t) \exp (\text{Л}_\Sigma t) \sum_{(j)} (\overline{T}(0, j) - (\overline{\overline{T}(0, j) \mathscr{D}(\Sigma)})_\Sigma) \mathscr{D}(\Sigma))_\Sigma}. \tag{79}$$

Заметим, что здесь Л_S коммутирует с Л_Σ и в общем случае Л_S коммутирует с переменными Ω_Σ, в то время как Л_Σ коммутирует с переменными Ω_S.

С целью упростить выражение (79) воспользуемся представлением Фурье

$$\delta (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) = \sum_k \exp [i\mathbf{k} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)]/V$$

и получим

$$\overline{T}(0, j) = \sum_k \exp [i\mathbf{k} (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j)] \overline{T}_k (v_0, v_j)/V, \tag{80}$$

где

$$\overline{T}_k (v_0, v_j) = a^2 \int (\mathbf{v}_{0,j}\boldsymbol{\sigma}) \theta (\mathbf{v}_{0,j}\boldsymbol{\sigma}) \{\exp [-ia (\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma})] B_{v_0, v_j} (\boldsymbol{\sigma}) - \\ - \exp [ia (\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma})]\} d\boldsymbol{\sigma}; \tag{81}$$

$$\theta (x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

С другой стороны, воспользовавшись тождеством (76), найдем

$$\overline{T}_k (v_0, v_j) \chi (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \Phi_0 (v_0) \mathscr{D}(\Sigma) = \\ = \{\overline{T}_k (v_0, v_j) \chi (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)\} \Phi_0 (v_0) \mathscr{D}(\Sigma).$$

В итоге имеем

$$K(t) \chi \Phi_0 = n \int \overline{T}(0, 1) \exp (\text{Л}_S t) Q (0, 1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{v}_1, \tag{82}$$

где

$$Q (0, 1) = \sum_{(k \neq 0)} \int \exp (\text{Л}_\Sigma t) \sum_{(j)} \exp [i\mathbf{k} (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j)] \times \\ \times \{\overline{T}_k (v_0, v_j) \chi\} \Phi_0 (v_0) \mathscr{D}(\Sigma) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{v}_2 \ldots d\mathbf{r}_N d\mathbf{v}_N + \\ + \int \exp (\text{Л}_\Sigma t) \sum_{(j)} \Big\{ \overline{T}_0 (v_0, v_j) \chi - \\ - \int \{\overline{T}_0 (v_0, v_j) \chi\} \Phi_\Sigma (v_j) d\mathbf{v}_j \Big\} \Phi_0 (v_0) \times \\ \times \mathscr{D}(\Sigma) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{v}_2 \ldots d\mathbf{r}_N d\mathbf{v}_N. \tag{83}$$

Первый член в правой части (83) можно представить в виде:

$$\left.\begin{aligned} &Q_1(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0; \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) = \sum_{(k\neq 0)} Q_1(k; \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0; \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_0);\\ &Q_1(k; \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0; \mathbf{r}_1\mathbf{v}_1) = \int \exp(\text{Л}_\Sigma t) \sum_{(j)} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j)\times\\ &\times\{\overline{T}_k(v_0, v_j)\chi\}\,\Phi_0(v_0)\,W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N)\times\\ &\times\prod_{(1\leqslant j\leqslant N)} \Phi_\Sigma(v_j)\,d\mathbf{r}_2\,d\mathbf{v}_2\ldots d\mathbf{r}_N\,d\mathbf{v}_N. \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Пусть $\mathbf{r}$ — некий произвольный вектор. Проводя замену переменных интегрирования

$$\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}, \ldots, \mathbf{r}_N \to \mathbf{r}_N + \mathbf{r},$$

получаем

$$\begin{aligned} &Q_1(k; \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0; \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}, \mathbf{v}_1) =\\ &= \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})\int \exp(\text{Л}_\Sigma t) \sum_{(1\leqslant j\leqslant N)} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j)\times\\ &\times\{\overline{T}_k(v_0, v_j)\chi\}\Phi_0(v_0)\,W(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}, \mathbf{r}_2+\mathbf{r}, \ldots, \mathbf{r}_N+\mathbf{r})\times\\ &\times\prod_{(1\leqslant j\leqslant N)} \Phi_\Sigma(v_j)\,d\mathbf{r}_2\,d\mathbf{v}_2\ldots d\mathbf{r}_N\,d\mathbf{v}_N. \end{aligned}$$

Однако из-за пространственной однородности функция $W(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}, \ldots, \mathbf{r}_N + \mathbf{r})$ эквивалентна $W(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$. Таким образом, получаем

$$\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})\,Q_1(k; \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{r}_1+\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) = Q_1(k; \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0; \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1).$$

Для $\mathbf{r} = -\mathbf{r}_1$ это соотношение дает

$$Q_1(k; \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0; \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1)\,Q_1(k; \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0; \mathbf{v}_1), \tag{85}$$

где

$$Q_1(k; \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0; \mathbf{v}_1) = Q_1(k; \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0; 0, \mathbf{v}_1).$$

Рассматривая второе слагаемое в (83), мы находим с помощью тех же рассуждений, что оно не зависит от $\mathbf{r}_1$:

$$\begin{aligned} &\int \exp(\text{Л}_\Sigma t) \sum_{(1\leqslant j\leqslant N)} \widetilde{\chi}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0; \mathbf{v}_j)\,\Phi_0(v_0)\,\mathscr{D}(\Sigma)\,d\mathbf{r}_2\,d\mathbf{v}_2\ldots d\mathbf{r}_N\,d\mathbf{v}_N =\\ &\qquad = Q_2(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0; v_1), \end{aligned} \tag{86}$$

где введено сокращенное обозначение

$$\tilde{\chi}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0; \mathbf{v}_j) = \overline{T}_0(v_0, v_j)\chi(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) - \\ - \int \{\overline{T}_0(v_0, v_j)\chi(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)\}\Phi_\Sigma(v_j)\,d\mathbf{v}_j. \tag{87}$$

Отметим, что функция $\tilde{\chi}$ удовлетворяет равенству

$$\int \tilde{\chi}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0; \mathbf{v})\Phi_\Sigma(v)\,d\mathbf{v} = 0. \tag{88}$$

Суммируя теперь наши результаты (82), (85), (86), получаем

$$K(t)\chi\Phi_0 = n\sum_{(k\neq 0)}\int \overline{T}(0, 1)\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1)\exp(\text{Л}_S t)\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_0)\times \\ \times Q_1(k; \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0; \mathbf{v}_1)\,d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{v}_1 + \\ + n\int \overline{T}(0, 1)\exp(\text{Л}_S t)\,Q_2(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0; \mathbf{v}_1)\,d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{v}_1.$$

С другой стороны,

$$\int \overline{T}(0, 1)\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1)\,d\mathbf{r}_1 = T_{-k}(v_0, v_1)\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0)$$

и, следовательно,

$$K(t)\chi\Phi_0 = n\sum_{(k\neq 0)}\int T_{-k}(v_0, v_1)\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0)\exp(\text{Л}_S t)\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_0)\times \\ \times Q_1(k; \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0; \mathbf{v}_1)\,d\mathbf{v}_1 + \\ + n\int T_0(v_0, v_1)\exp(\text{Л}_S t)\,Q_2(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0; \mathbf{v}_1)\,d\mathbf{v}_1. \tag{89}$$

Теперь можно преобразовать выражения для Q_1, Q_2 к более удобному виду.

Рассмотрим интеграл

$$\int \exp(\text{Л}_\Sigma t)\sum_{(1\leq j\leq N)} - \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_j)\,\delta(\mathbf{v}_j - \mathbf{v})\,\mathscr{D}(\Sigma)\,d\mathbf{r}_2\,d\mathbf{v}_2\ldots d\mathbf{r}_N\,d\mathbf{v}_N.$$

Использовав аргументы, приведенные выше, найдем, что он зависит от $\mathbf{r}_1$ через посредство $\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1)$, следовательно, функцию $U_k(t, \mathbf{v}_1, \mathbf{v})$ можно определить следующим образом:

$$\int \exp(\text{Л}_\Sigma t)\sum_{(1\leq j\leq N)}\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j)\,\delta(\mathbf{v}_j - \mathbf{v})\,\mathscr{D}(\Sigma)\,d\mathbf{r}_2\,d\mathbf{v}_2\ldots d\mathbf{r}_N\,d\mathbf{v}_N = \\ = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1)\frac{1}{V}\Phi_\Sigma(v_1)\,U_k(t; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}). \tag{90}$$

Естественно, U_k зависит от V. Соотношение (90) приводит к равенству

$$\int \exp(\text{Л}_\Sigma t) \sum_{(1\leqslant j\leqslant N)} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j)\,\Phi(\mathbf{v}_j)\,\mathscr{D}(\Sigma)\,d\mathbf{r}_2\,d\mathbf{v}_2\ldots d\mathbf{r}_N\,d\mathbf{v}_N = \\ = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1)\frac{1}{V}\Phi_\Sigma(v_1)\int U_k(t;\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_1')\,\Phi(\mathbf{v}_1')\,d\mathbf{v}_1'. \tag{91}$$

Удобно рассматривать выражение $U_k(t,\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_1')$ как матричное представление оператора $U_k(t;\ 1)$, действующего лишь на функцию $\mathbf{v}_1$ в соответствии с формулой

$$U_k(t;\ 1)\,f(\mathbf{v}_1) = \int U_k(t;\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_1')\,f(\mathbf{v}_1')\,d\mathbf{v}_1'. \tag{92}$$

Таким образом, можно записать

$$\int \exp(\text{Л}_\Sigma t) \sum_{(1\leqslant j\leqslant N)} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j)\,\Phi(\mathbf{v}_j)\,\mathscr{D}(\Sigma)\,d\mathbf{r}_2\,d\mathbf{v}_2\ldots d\mathbf{r}_N\,d\mathbf{v}_N = \\ = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1)\frac{1}{V}\Phi_\Sigma(v_1)\,U_k(t;\ 1)\,\Phi(v_1). \tag{93}$$

Принимая во внимание (85), (86), имеем

$$Q_1(k;\ \mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0;\ \mathbf{v}_1) = \\ = \Phi_0(v_0)\,\Phi_\Sigma(v_1)\frac{1}{V}U_k(t;\ 1)\,\overline{T}(v_0,\ v_1)\,\chi(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0);$$

$$Q_2(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0;\ \mathbf{v}_1) = \Phi_0(v_0)\,\Phi_\Sigma(v_1)\frac{1}{V}U_0(t;\ 1)\,\widetilde{\chi}(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0;\ \mathbf{v}_1).$$

Эти выражения и должны быть подставлены в соотношение (89). Преобразуем вначале выражение типа $\exp(\text{Л}_S t)\,\Phi_0(v_0)\,h(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)$, фигурирующее в (89). Воспользовавшись формулой (77), получаем

$$\exp(\text{Л}_S t)\,\Phi_0(v_0)\,h(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0) = \\ = \Phi_0(v_0)\exp\left[\left(-\mathbf{v}_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_0} + na^2L_S\right)t\right]h(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0).$$

Заметим также, что $\Phi_\Sigma(v_1)$ коммутирует с $\exp(\text{Л}_S t)$ и

$$\overline{T}_{-k}(v_0,\ v_1)\,\Phi_0(v_1)\,\Phi_\Sigma(v_1) = \Phi_0(v_1)\,\Phi_\Sigma(v_1)\,\overline{T}_{-k}(v_0,\ v_1).$$

С учетом этого из (89) в итоге получаем

$$K(t)\chi(S)\Phi_0(v_0)=\Phi_0(v_0)\,n\frac{1}{V}\sum_{(k\neq 0)}\int d\mathbf{v}_1\,\Phi_\Sigma(v_1)\,T_{-k}(v_0,\ v_1)\times$$
$$\times\exp(-\mathbf{ikr}_0)\exp\left[\left(-\mathbf{v}_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_0}+na^2L_S\right)t\right]\times$$
$$\times\exp(\mathbf{ikr}_0)\,U_k(t,\ 1)\,\overline{T}_k(v_0,\ v_1)\,\chi(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0)+$$
$$+\Phi_0(v_0)\,n\frac{1}{V}\int d\mathbf{v}_1\,\Phi_\Sigma(v_1)\,\overline{T}_0(v_0,\ v_1)\times$$
$$\times\exp\left[\left(-\mathbf{v}_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_0}+na^2L_S\right)t\right]U_0(t;\ 1)\,\widetilde{\chi}(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0;\ \mathbf{v}_1)$$

и приводим, тем самым, уравнение (78) к виду

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\chi_t(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0)}{\partial t}=\left\{-\mathbf{v}_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_0}+na^2L_S\right\}\chi(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0)+\\
&+n\frac{1}{V}\sum_{(k\neq 0)}\int_0^t d\tau\int d\mathbf{v}_1\,\Phi_\Sigma(v_1)\,\overline{T}_{-k}(v_0,\ v_1)\exp(-\mathbf{ikr}_0)\times\\
&\times\exp\left[\left(-\mathbf{v}_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_0}+na^2L_S\right)(t-\tau)\right]\times\\
&\times\exp(\mathbf{ikr}_0)\,U_k(t-\tau;\ 1)\,\overline{T}_k(v_0,\ v_1)\,\chi_\tau(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0)+\\
&+n\frac{1}{V}\int_0^t d\tau\int d\mathbf{v}_1\,\Phi_\Sigma(v_1)\,\overline{T}_0(v_0,\ v_1)\times\\
&\times\exp\left[\left(-\mathbf{v}_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_0}+na^2L_S\right)(t-\tau)\right]U_0(t-\tau;\ 1)\times\\
&\times\widetilde{\chi}_\tau(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0,\ \mathbf{v}_1);\\
&f_t(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0)=\Phi_0(v_0)\,\chi_t(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0).
\end{aligned}\right\}\qquad(94)$$

Отметим, что

$$\exp(-\mathbf{ikr}_0)\exp\left[\left(-\mathbf{v}_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_0}+na^2L_S\right)(t-\tau)\right]\exp[\mathrm{i}(\mathbf{k}+\mathbf{l})\,\mathbf{r}_0]=$$
$$=\exp(\mathbf{ilr}_0)\exp[(-\mathrm{i}\mathbf{v}_0(\mathbf{k}+\mathbf{l})+na^2L_S)(t-\tau)].$$

В таком случае несложно усмотреть, что, применяя преобразование Фурье

$$\chi_t(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0)=\frac{1}{V}\sum_{(l)}\exp(\mathbf{ilr}_0)\,\chi_l(t,\ \mathbf{v}_0),\qquad(95)$$

из (97) для каждой компоненты χ_l получаем уравнение

$$\frac{\partial \chi_l(t, \mathbf{v}_0)}{\partial t} = \{-\mathrm{i}(\mathbf{l}\mathbf{v}_0) + na^2 L_S\} \chi_l(t, \mathbf{v}_0) +$$
$$+ n\frac{1}{V} \sum_{(k\neq 0)} \int_0^t d\tau \int d\mathbf{v}_1 \Phi_\Sigma(v_1) \overline{T}_{-k}(v_0, v_1) \times$$
$$\times \exp[(-\mathrm{i}\mathbf{v}_0(\mathbf{k}+\mathbf{l}) + na^2 L_S)(t-\tau)] \times$$
$$\times U_k(t-\tau; 1) \overline{T}_k(v_0, v_1) \chi_l(\tau, \mathbf{v}_0) +$$
$$+ n\frac{1}{V} \int_0^t d\tau \int d\mathbf{v}_1 \Phi_\Sigma(v_1) \overline{T}_0(v_0, v_1) \times$$
$$\times \exp[(-\mathrm{i}\mathbf{v}_0\mathbf{l} + na^2 L_S)(t-\tau)] U_0(t-\tau; 1) \tilde{\chi}_l(\tau, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1). \quad (96)$$

В частности, для $l = 0$

$$\frac{\partial \chi(t, \mathbf{v}_0)}{\partial t} = na^2 L_S \chi(t, \mathbf{v}_0) +$$
$$+ n\frac{1}{V} \sum_{(k\neq 0)} \int_0^t d\tau \int d\mathbf{v}_1 \Phi_\Sigma(v_1) \overline{T}_{-k}(v_0, v_1) \times$$
$$\times \exp[(-\mathrm{i}\mathbf{v}_0\mathbf{k} + na^2 L_S)(t-\tau)] U_k(t-\tau; 1) \overline{T}_k(v_0, v_1) \times$$
$$\times \chi(\tau, \mathbf{v}_0) + n\frac{1}{V} \int_0^t d\tau \int d\mathbf{v}_1 \Phi_\Sigma(v_1) \overline{T}_0(v_0, v_1) \times$$
$$\times \exp[na^2 L_S(t-\tau)] U_0(t-\tau; 1) \tilde{\chi}(\tau, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1). \quad (97)$$

В этих уравнениях ядра́ подынтегральные выражения $\int_0^t \ldots d\tau$ являются функциями $t - \tau$; следовательно, можно воспользоваться методом преобразования Лапласа.

Для дальнейшего конкретного использования этих уравнений необходимо установить явные выражения для оператора $U_k(t; 1)$, который определяется лишь динамикой изолированной Σ-системы. Эта проблема будет рассмотрена в разд. 3. Здесь же отметим только, что с помощью оператора U_k можно рассчитать функции $R_k(t)$, фигурирующие в приведенных выше выражениях. Действительно, из (44) получаем

$$R_k(T) = V \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_1) \int \exp(\text{Л}_\Sigma T) \sum_{(j)} \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_j) \times$$
$$\times \mathscr{D}(\Sigma)\, d\mathbf{v}_1\, d\mathbf{r}_2\, d\mathbf{v}_2 \ldots d\mathbf{r}_N\, d\mathbf{v}_N \quad (98)$$

и, используя определение (90), находим

$$R_k(T) = \int \Phi_\Sigma(v_1) U_k(T;\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_1')\, d\mathbf{v}_1\, d\mathbf{v}_1'. \tag{99}$$

3.

В этом разделе сосредоточим свое внимание на изучении равновесных корреляционных средних. Пусть Σ представляет собой динамическую систему, поведение которой описывается классической механикой и каноническое распределение Гиббса для которой, как и прежде, обозначается $\mathscr{D}(\Sigma)$.

Рассмотрим какую-либо динамическую переменную в функции точки фазового пространства $U = U(\Omega_\Sigma)$ и обозначим ее в момент времени t как $U(t) = U(\Omega_\Sigma(t))$, где $\Omega_\Sigma(t)$ — решение динамических уравнений, значение которого в начальный момент времени $t = 0$ равно Ω_Σ, т. е. $\Omega_\Sigma(0) = \Omega_\Sigma$. Заметим, что для общего неравновесного распределения $\mathscr{D}_t(\Sigma)$, удовлетворяющего уравнению Лиувилля $\partial\mathscr{D}_t/\partial t = \text{Л}_\Sigma \mathscr{D}_t$, $\mathscr{D}_t = \mathscr{D}_0$ для $t = 0$, имеет место хорошо известное соотношение

$$\langle \mathscr{U} \rangle_t = \int \mathscr{U}(t)\, \mathscr{D}_0(\Sigma)\, d\Omega_\Sigma = \int \mathscr{U}(\Omega_\Sigma)\, \mathscr{D}_t(\Sigma)\, d\Omega_\Sigma. \tag{100}$$

Перейдем теперь к исследованию равновесных корреляционных средних двух динамических переменных

$$\langle \mathscr{U}(t)\, \mathscr{B}(\tau) \rangle = \overline{(\mathscr{U}(t)\, \mathscr{B}(\tau)\, \mathscr{D}(\Sigma))}_\Sigma = \int \mathscr{U}(t)\, \mathscr{B}(\tau)\, \mathscr{D}(\Sigma)\, d\Omega_\Sigma. \tag{101}$$

Инвариантность подобных равновесных средних по отношению к временным трансляциям дает

$$\langle \mathscr{U}(t)\, \mathscr{B}(\tau) \rangle = \langle \mathscr{U}(t-\tau)\, \mathscr{B} \rangle.$$

Таким образом, интеграл Фурье этой величины можно записать в виде

$$\langle \mathscr{U}(t)\, \mathscr{B}(\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{\mathscr{U},\mathscr{B}}(\omega) \exp[-i\omega(t-\tau)]\, d\omega. \tag{102}$$

Укажем, что, как и в квантовомеханическом случае, имеет место хорошо известное неравенство

$$J_{\mathscr{U}^*,\mathscr{U}}(\omega) \geqslant 0. \tag{103}$$

В квантовомеханическом рассмотрении проблем статистической механики весьма существенную роль играет метод двухвременных функций Грина, определяемых соотношениями

$$\left.\begin{aligned} G_{\text{ret}}(t-\tau) &= \theta(t-\tau)\, \langle [\mathscr{U}_t,\ \mathscr{B}_\tau] \rangle; \\ G_{\text{adv}}(t-\tau) &= -\theta(\tau-t)\, \langle [\mathscr{U}_t,\ \mathscr{B}_\tau] \rangle, \end{aligned}\right\} \tag{104}$$

где $[\ldots, \ldots]$ означает квантовомеханические скобки Пуассона. Н. Н. Боголюбов (мл.) и Б. И. Садовников в работе [6] распространили этот метод на классическую механику. Их определение двухвременных функций Грина также дается выражениями (104) с единственным отличием: скобки Пуассона (104) должны пониматься в классическом смысле. Эти авторы ввели функцию

$$\langle\langle \mathcal{U}, \mathcal{B} \rangle\rangle_l = \frac{1}{2\pi\theta} \int_{-\infty}^{\infty} J_{\mathcal{U}, \mathcal{B}}(\omega') \frac{\omega'}{-\omega' + \nu} d\omega', \qquad (105)$$

которая регулярна во всей комплексной плоскости переменной ν, исключая действительную ось. Функция (105) определяет частотное представление

$$\langle\langle \mathcal{U}, \mathcal{B} \rangle\rangle_\omega^{r,\, a} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{r,\, a}(t) \exp(\mathrm{i}\omega t)\, dt$$

запаздывающей и опережающей функций Грина посредством соотношений

$$\left.\begin{aligned} \langle\langle \mathcal{U}, \mathcal{B} \rangle\rangle_\omega^r &= \langle\langle \mathcal{U}, \mathcal{B} \rangle\rangle_{\omega + \mathrm{i}0+}; \\ \langle\langle \mathcal{U}, \mathcal{B} \rangle\rangle_\omega^a &= \langle\langle \mathcal{U}, \mathcal{B} \rangle\rangle_{\omega - \mathrm{i}0+}, \end{aligned}\right\} \qquad (106)$$

которое приводит к следующему результату:

$$J_{\mathcal{U}, \mathcal{B}}(\omega) = \mathrm{i}\, \frac{\theta}{\omega} \{\langle\langle \mathcal{U}, \mathcal{B} \rangle\rangle_{\omega + \mathrm{i}0+} - \langle\langle \mathcal{U}, \mathcal{B} \rangle\rangle_{\omega - \mathrm{i}0+}\}. \qquad (107)$$

Необходимо отметить, что сначала нужно выполнить обычный предельный переход статистической механики $V \to \infty$, а затем провести предельный переход по переменной ν к значениям ее на действительной оси.

Сделаем несколько замечаний относительно возможности эффективного нахождения функций Грина. Один из методов, разработанный в работе [6], может быть кратко резюмирован следующим образом.

К гамильтониану H_Σ добавляется бесконечно малый член, явная зависимость которого от времени дается формулой

$$\delta H_t = \exp(\varepsilon t - \mathrm{i}\omega t)\, \mathcal{B}(\Omega_\Sigma)\, \delta\zeta + \exp(\varepsilon t + \mathrm{i}\omega t)\, \mathcal{B}^*(\Omega_\Sigma)\, \delta\zeta^*, \qquad (108)$$
$$\varepsilon > 0$$

так что $H_t = H_\Sigma + \delta H$. Заметим, что из-за выбора знака ε $\delta H_t \to 0$, когда $t \to -\infty$.

Будем исходить из соответствующего уравнения Лиувилля

$$\partial \mathcal{D}_t / \partial t = \text{Л}_\Sigma \mathcal{D}_t + [\delta H_t, \mathcal{D}_t]$$

с начальными условиями при $t \to -\infty$: $\mathscr{D}_{-\infty} = \mathscr{D}(\Sigma)$. Другими словами, при $t \to -\infty$ имеем ситуацию статистического равновесия и бесконечно малое возмущение (108) включается при этом адиабатическим образом. Конечно, $\mathscr{D}_t = \mathscr{D}(\Sigma) + \delta\mathscr{D}_t$.

В таком случае если рассмотреть среднее по времени динамической переменной $\mathscr{U} = \mathscr{U}(\Omega_\Sigma)$, то найдем, что

$$\langle \mathscr{U} \rangle_t = \langle \mathscr{U} \rangle_{\text{eq}} + \delta \langle \mathscr{U} \rangle_t, \tag{109}$$

где

$$\delta \langle \mathscr{U} \rangle_t = \exp[-(\omega + i\varepsilon) it]\, 2\pi \langle\langle \mathscr{U}, \mathscr{B} \rangle\rangle_{\omega + i\varepsilon} \delta\xi + \\ + \exp[-i(-\omega + i\varepsilon) t]\, 2\pi \langle\langle \mathscr{U}, \mathscr{B}^* \rangle\rangle_{-\omega + i\varepsilon} \delta\xi^*.$$

Таким образом, для получения выражения для функции Грина в верхней полуплоскости ν достаточно рассчитать вариацию $\delta\ \langle \mathscr{U} \rangle_t$ средней по времени данной переменной, индуцированную бесконечно малым возмущением вида (108) в гамильтониане.

Отметим, далее, что, как это следует из (108), $J_{\mathscr{B},\mathscr{U}}(\omega) = J_{\mathscr{U},\mathscr{B}}(-\omega)$, откуда

$$\langle\langle \mathscr{U}, \mathscr{B} \rangle\rangle_{\omega - i\varepsilon} = \langle\langle \mathscr{B}, \mathscr{U} \rangle\rangle_{-\omega + i\varepsilon}. \tag{110}$$

Следовательно, частотное представление функции Грина в нижней полуплоскости можно получить точно так же с помощью изменения ролей $\mathscr{U}$ и $\mathscr{B}$. Предложенный выше метод весьма плодотворен, в особенности когда имеют дело с так называемой гидродинамической аппроксимацией. Однако здесь прибегнем к другой процедуре, связанной с методом преобразования Лапласа, широко используемым теперь в работах по проблемам статистической механики классических систем. С помощью выражения для распределения в состоянии статистического равновесия $\mathscr{D}(\Sigma) = Z^{-1} \exp[-H_\Sigma(\Omega_\Sigma)/\theta]$ легко устанавливаем

$$[\mathscr{U}(t); \mathscr{D}(\Sigma)] = -\frac{1}{\theta}[\mathscr{U}(t); H_\Sigma]\, \mathscr{D}(\Sigma) = -\frac{1}{\theta}\frac{d\mathscr{U}(t)}{dt}\mathscr{D}(\Sigma).$$

В таком случае тождество, справедливое для скобок Пуассона: $[\mathscr{U}(t); \mathscr{B}]\, \mathscr{D}(\Sigma) + [\mathscr{U}(t); \mathscr{D}(\Sigma)]\, \mathscr{B} \equiv [\mathscr{U}(t); \mathscr{B}\mathscr{D}(\Sigma)]$, и соотношение $\overline{([\mathscr{U}(t); \mathscr{B}\mathscr{D}(\Sigma)])}_\Sigma = 0$ приводят к

$$\langle [\mathscr{U}(t); \mathscr{B}] \rangle = \overline{([\mathscr{U}(t); \mathscr{B}]\, \mathscr{D}(\Sigma))}_\Sigma = -\frac{1}{\theta}\frac{d}{dt}\langle \mathscr{U}(t)\, \mathscr{B} \rangle.$$

С другой стороны, соотношения (104), (105) дают

$$\langle\langle \mathscr{U}, \mathscr{B} \rangle\rangle_{\omega + i\varepsilon} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \exp[(-\varepsilon + i\omega) t]\, \langle [\mathscr{U}(t), \mathscr{B}] \rangle\, dt,$$

из которого следует

$$\langle\langle \mathcal{U}, \mathcal{B}\rangle\rangle_{\omega+i\varepsilon}=\frac{1}{2\pi\theta}\int_0^\infty \exp(-zt)\frac{d}{dt}\langle \mathcal{U}(t)\mathcal{B}\rangle\,dt, \tag{111}$$

где

$$z=\varepsilon-i\omega \tag{112}$$

или

$$\langle\langle \mathcal{U}, \mathcal{B}\rangle\rangle_{\omega+i\varepsilon}=\frac{1}{2\pi\theta}\left\{z\int_0^\infty \exp(-zt)\langle \mathcal{U}(t)\mathcal{B}\rangle\,dt-\langle \mathcal{U}\mathcal{B}\rangle\right\}. \tag{113}$$

Принимая во внимание (110), получаем также

$$\langle\langle \mathcal{U}, \mathcal{B}\rangle\rangle_{\omega-i\varepsilon}=\frac{1}{2\pi\theta}\left\{\int_0^\infty z^*\exp(-z^*t)\langle \mathcal{U}(t)\mathcal{B}\rangle\,dt-\langle \mathcal{U}\mathcal{B}\rangle\right\}. \tag{114}$$

Таким образом, видим, что функции Грина в верхней и нижней полуплоскости немедленно определяются с помощью преобразования Лапласа равновесных корреляционных средних типа

$$\langle \mathcal{U}_t\mathcal{B}\rangle, \quad t\geqslant 0. \tag{115}$$

Для того чтобы свести задачу нахождения таких корреляционных средних к задаче расчета одновременных средних, будем исходить из стандартного уравнения Лиувилля

$$\partial\mathcal{D}_t/\partial t=\text{Л}_\Sigma\mathcal{D}_t, \quad t\geqslant 0 \tag{116}$$

с начальным условием

$$\mathcal{D}_0=\mathcal{D}(\Sigma)+\mathcal{B}(\Omega_\Sigma)\,\delta\xi, \quad t=0, \tag{117}$$

означающим, что начальное выражение для $\mathcal{D}_t$ (для $t=0$) лишь бесконечно мало отличается от равновесного распределения. В этом случае $\mathcal{D}_t=\mathcal{D}(\Sigma)+\delta\mathcal{D}_t$ и, воспользовавшись соотношением (100), получаем

$$\delta\langle \mathcal{U}\rangle_t=\int \mathcal{U}(t)\mathcal{B}\mathcal{D}(\Sigma)\,d\Omega_\Sigma\delta\xi=\langle \mathcal{U}(t)\mathcal{B}\rangle_{\text{eq}}\delta\xi=$$
$$=\int \mathcal{U}\delta\mathcal{D}_t\,d\Omega_\Sigma=\int \mathcal{U}\exp(\text{Л}_\Sigma t)\mathcal{B}\mathcal{D}(\Sigma)\,d\Omega_\Sigma\,d\xi. \tag{118}$$

Заметим, что в рамках данного приближения имеем дело с оператором Лиувилля Л_Σ, не зависящим от времени. Вариация вводится не в Л_Σ, а в начальное значение $\mathcal{D}$.

Чтобы исследовать более конкретную ситуацию, будем рассматривать, как и в предыдущем разделе, динамическую Σ-систему, состоящую из N идентичных частиц массы M. Далее, будем полагать, что оператор Лиувилля имеет вид

$$Л_{\Sigma} = \sum_{(1 \leqslant j \leqslant N)} Л_j^{(0)} + \sum_{(1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant N)} Л_{j_1, j_2}, \tag{119}$$

где

$$Л_j^0 = -\mathbf{v}_j \partial / \partial \mathbf{r}_j, \tag{120}$$

а

$$Л_{j_1, j_2} = Л_{j_1, j_2}^{(\Phi\Sigma)}, \tag{121}$$

или

$$Л_{j_1, j_2} = Л_{j_1, j_2}^{(\mathrm{coll})}, \tag{122}$$

или

$$Л_{j_1, j_2} = Л_{i_1, j_2}^{(\Phi)} + Л_{j_1, j_2}^{(\mathrm{coll})} \tag{123}$$

(обозначения здесь те же, что и в предыдущем разделе).

Сосредоточим теперь наше внимание на методе приведенных функций распределения в том виде, который был уже разработан нами ранее и изложен в монографии [8]. Эти приведенные функции распределения вводятся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&F_1(t;\, 1) = F_1(t;\, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) = V \int \mathscr{D}_t \, d\mathbf{r}_2 \, d\mathbf{v}_2 \ldots d\mathbf{r}_N \, d\mathbf{v}_N;\\
&F_2(t;\, 1, 2) = F_2(t;\, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1;\, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2) =\\
&= V^2 (1 - 1/N) \int \mathscr{D}_t \, d\mathbf{r}_3 \, d\mathbf{v}_3 \ldots d\mathbf{r}_N \, d\mathbf{v}_N;\\
&F_s(t;\, 1, 2, \ldots, s) = F_s(t;\, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1;\, \ldots, \mathbf{r}_s, \mathbf{v}_s) =\\
&= V^s (1 - 1/N) \ldots [1 + (1 - s)/N] \int \mathscr{D}_t \, d\mathbf{r}_{s+l} \, d\mathbf{v}_{s+l} \ldots d\mathbf{r}_N \, d\mathbf{v}_N.
\end{aligned}\right\} \tag{124}$$

Благодаря симметрии $\mathscr{D}_t$ величины F_s — симметричные функции фаз (1), . . ., (s). Поскольку $\mathscr{D}_t = \exp(Л_{\Sigma} t)\, \mathscr{D}_0$, можно также записать

$$F_1(t;\, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) = V \int \exp(Л_{\Sigma} t)\, D_0 \, d\mathbf{r}_2 \, d\mathbf{v}_2 \ldots d\mathbf{r}_N \, d\mathbf{v}_N. \tag{125}$$

Легко видеть, что функции F_1 (t; 1), F_2 (t; 1, 2), . . . дают соответственно плотность вероятности обнаружить одну частицу с фазой ($\mathbf{r}_1$, $\mathbf{v}_1$), две частицы с фазой ($\mathbf{r}_1$, $\mathbf{v}_1$; $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{v}_2$) и т. д.

Рассмотрим аддитивную динамическую переменную

$$\mathscr{U} = \sum_{(1 \leqslant j \leqslant N)} A(\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j). \tag{126}$$

Исходя из определения (124) и используя свойства симметрии, находим

$$\langle \mathcal{U} \rangle_t = n \int A(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) F_1(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{v}_1, \tag{127}$$

или же в более компактной форме

$$\langle \mathcal{U} \rangle_t = n \int A(1) F_1(t; 1) d(1).$$

Точно так же среднее значение динамической переменной бинарного типа можно выразить с помощью $F_2(t; 1, 2)$ и т. д.

Уравнение Лиувилля приводит к следующей иерархии уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\partial F_1(t; 1)/\partial t = \text{Л}_1^{(0)} F_1(t; 1) + \\
&+ n \int \text{Л}_{1,2} F_2(t; 1, 2) d(2); \\
&\partial F_2(t; 1, 2)/\partial t = (\text{Л}_1^{(0)} + \text{Л}_2^{(0)} + \text{Л}_{1,2}) F_2(t; 1, 2) + \\
&+ n \int (\text{Л}_{1,3} + \text{Л}_{2,3}) F_3(t; 1, 2, 3) d(3); \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\partial F_s(t; 1, 2, \ldots, s)/\partial t = \\
&= \Big(\sum_{(1 \leqslant j \leqslant s)} \text{Л}_j^{(0)} + \sum_{(1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant N)} \text{Л}_{j_1, j_2} \Big) F_s(t; 1, 2, \ldots, s) + \\
&+ n \int \sum_{(1 \leqslant j \leqslant s)} \text{Л}_{j, s+1} F_{s+1}(t; 1, 2, \ldots, s, s+1) d(s+1).
\end{aligned}\right\} \tag{128}$$

Когда имеют дело с приведенными распределениями F_s, обычно полагают, что для $V \to \infty$, $N/V = n = \text{const}$ они обладают определенными пределами, которые также удовлетворяют уравнениям (128).

В случае равновесного распределения это предположение было строго обосновано для широкого класса физически допустимых короткодействующих потенциальных функций $\Phi_\Sigma(r)$, если плотность частиц достаточно мала [7]. При этих условиях была также доказана аналитичность F_s как функций n [7].

Заметим, что исследование поведения равновесных F_s сильно упрощается благодаря тому факту, что они факторизуются:

$$F_{\text{eq}}(1, \ldots, s) = f(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_s) \prod_{(1 \leqslant j \leqslant s)} \Phi_\Sigma(v_j). \tag{129}$$

Насколько нам известно, поведение неравновесных F_s не было изучено на строгом математическом уровне.

Рассмотрим теперь уравнения (128), производя предельный переход $V \to \infty$. С формальной точки зрения приходим к системе линейных уравнений для приведенных функций распределения F_s. Однако необходимо учесть, что не все решения этих уравнений являются физически приемлемыми.

Возьмем, например, $F_s(t;\ 1, \ldots, s)$ и объединим индексы $1, \ldots, s$ в l групп $[j_1], \ldots, [j_l]$, содержащих, соответственно, $s_1, \ldots, s_l$ номеров: $F_s(t;\ 1, \ldots, s) = F_{s_1+\ldots+s_l}(t;\ [j_1], \ldots, [j_l])$, $s = s_1 + \ldots + s_l$. Предположим, что расстояния между частицами, принадлежащими к различным группам, стремятся к бесконечности. В таком случае с физической точки зрения естественно ожидать, что корреляция между наборами $[j_1], \ldots, [j_l]$ частиц Σ-системы исчезает:

$$F_{s_1+\ldots+s_l}(t;\ [j_1], \ldots, [j_l]) - F_{s_1}(t;\ [j_1]) \ldots, F_{s_l}(t;\ [j_l]) \to 0, \tag{130}$$

когда

$$|\mathbf{r}_{j_p} - r_{j_{p'}}| \to \infty;\ p,\ p' = 1, \ldots, l;\ j_p \in [j_p];\ j_{p'} \in [j_{p'}].$$

Эти соотношения, выражающие фундаментальный принцип ослабления корреляции [8], могут рассматриваться как некий тип граничных условий *, налагаемых на F_s.

Конечно, эти граничные условия нелинейны. Чтобы сделать их линейными [8], введем функции $G_s(t;\ 1, \ldots, s)$ $(s = 2, 3, \ldots)$, полагая

$$\left.\begin{aligned} &F_2(t;\ 1, 2) = F_1(t;\ 1) F_1(t;\ 2) + G_2(t;\ 1, 2);\\ &F_3(t;\ 1, 2, 3) = F_1(t;\ 1) F_1(t;\ 2) F_1(t;\ 3) +\\ &+ F_1(t;\ 1) G_2(t;\ 2, 3) + F_1(t;\ 2) G_2(t;\ 1, 3) +\\ &+ F_1(t;\ 3) G_2(t;\ 1, 2) + G_3(t;\ 1, 2, 3). \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

В таком случае (130) приводит к линейным соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} &G_2(t;\ 1, 2) \to 0, \text{ если } |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \to \infty;\\ &G_3(t;\ 1, 2, 3) \to 0,\\ &\text{если } \max\{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|, |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|\} \to \infty \end{aligned}\right\} \tag{132}$$

. . . .

---

* При чисто математическом обсуждении свойств системы (128) возникают различные трудные вопросы, например, в каком смысле должны пониматься соотношения (130); какие другие условия, налагаемые на F_s, необходимо принять во внимание; какие начальные условия для $t = 0$ должны быть наложены на F_s и т. д.?

Воспользовавшись определениями (131), придем к иерархии нелинейных уравнений для F_1, G_2, G_3 . . .:

$$\left.\begin{aligned}&\partial F_1(t;\ 1)/\partial t = \text{Л}_1^{(0)} F_1(t;\ 1) + \\ &+ n \int \text{Л}_{1,\,2}\{F_1(t;\ 1)\, F_1(t;\ 2) + G_2(t;\ 1,\ 2)\}\, d(2); \\ &\partial G_2(t;\ 1,\ 2)/\partial t = (\text{Л}_1^{(0)} + \text{Л}_2^{(0)} + \text{Л}_{1,\,2})\, G_2(t;\ 1,\ 2) + \\ &+ \text{Л}_{1,\,2} F_1(t;\ 1)\, F_1(t;\ 2) + n \int \text{Л}_{1,\,3}\{F_1(t;\ 3)\, G_2(t;\ 1,\ 2) + \\ &+ F_1(t;\ 1)\, G_2(t;\ 2,\ 3) + G_3(t;\ 1,\ 2,\ 3)\}\, d(3) + \\ &+ n \int \text{Л}_{2,\,3}\{F_1(t;\ 3)\, G_2(t;\ 1,\ 2) + F_1(t;\ 2)\, G_2(t;\ 1,\ 3) + \\ &+ G_3(t;\ 1,\ 2,\ 3)\}\, d(3) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \quad (133)$$

Вернемся теперь к проблеме вычисления равновесных средних. Нам придется иметь дело с двумя динамическими переменными аддитивного типа $U = \sum\limits_{(1 \leqslant j \leqslant N)} A\ (j)$ и $\mathscr{B} = \sum\limits_{(1 \leqslant j \leqslant N)} B\ (j)$, для которых

$$\int B\,(1)\, F_1^{(\mathrm{eq})}(1)\, d(1) = 0, \qquad (134)$$

или, что то же самое,

$$\langle \mathscr{B} \rangle_{\mathrm{eq}} = 0. \qquad (135)$$

Рассмотрим решение уравнения Лиувилля, бесконечно близкое к равновесному распределению Гиббса

$$\mathscr{D}_t = \mathscr{D}\,(\Sigma) + \delta \mathscr{D}_t, \qquad (136)$$

исходя из начального распределения

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{D}_0 = \mathscr{D}\,(\Sigma) + \delta \mathscr{D}_0; \\ &\delta \mathscr{D}_0 = \sum_{(1 \leqslant j \leqslant N)} B\,(j)\, \delta\xi,\end{aligned}\right\} \qquad (137)$$

и введем соответствующие приведенные распределения

$$F_1^{(\mathrm{eq})}(1) + \delta F_1(t;\ 1);\ \ \ldots\ \ F_s^{\mathrm{eq}}(1,\ \ldots,\ s) + \delta F_s(t;\ 1,\ \ldots,\ s);\ \ \ldots$$

Тогда, согласно (118),

$$\langle \mathscr{U}\,(t)\, \mathscr{B} \rangle\, \delta\xi = n \int A\,(1)\, \delta F_1(t;\ 1)\, d(1), \qquad (138)$$

а соотношение (125) дает

$$\delta F_1(t;\ 1) = V \int \exp\,(\text{Л}_\Sigma t)\, \delta\,(\mathscr{D}_0)\, d(2)\, \ldots\, d(N). \qquad (139)$$

Варьирование соотношений (131) позволит нам ввести $\delta G_2(t;\ 1,\ 2);\ \ldots\ \delta G_s(t;\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$.
Заметим, что вариация нелинейных уравнений (133) ведет к линейным уравнениям для $\delta F_1(t;\ 1)$; $\delta G_2(t;\ 1,\ 2),\ \ldots\ \delta G_s(t;\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$; ..., коэффициенты в которых зависят от равновесных функций.

Перейдем теперь к получению начальных выражений для этих вариаций. Так, из (136) получаем

$$(1/\delta\xi)\,\delta F_1(0;\ 1) = B(1)\,F_1(1) + n\,(1-1/N)\int B(3)\,F_2(1,\ 3)\,d(3);$$
$$(1/\delta\xi)\,\delta F_2(0;\ 1,\ 2) = \{B(1)+B(2)\}\,F_2(1,\ 2) + $$
$$+ n\,(1-2/N)\int B(3)\,F_3(1,\ 2,\ 3)\,d(3),$$

где из соображений кратности обозначений мы опустили индекс eq у $F_s(1,\ \ldots,\ s)$. С учетом (134) имеем

$$\int B(3)\,F_2(1,\ 3)\,d(3) = \int B(3)\,\{F_2(1,\ 3) - F_1(1)\,F_1(3)\}\,d(3) =$$
$$= \int B(3)\,G_2(1,\ 3)\,d(3)$$

и, следовательно,

$$\delta F_1(0;\ 1) = \left\{B(1)\,F_1(1) + n\,(1-1/N)\int B(3)\,G_2(1,\ 3)\,d(3)\right\}\delta\xi.$$

Имеем также

$$\delta G_2(0;\ 1,\ 2) = \delta F_2(0;\ 1,\ 2) - F_1(1)\,\delta F_1(0;\ 2) -$$
$$- F_1(2)\,\delta F_1(0;\ 1) = \{B(1)+B(2)\}\,G_2(1,\ 2) +$$
$$+ n\,(1-1/N)\int B(3)\,\{F_3(1,\ 2,\ 3) - F_1(1)\,F_1(2)\,F_1(3) -$$
$$- F_1(1)\,G_2(2,\ 3) - F_1(2)\,G_2(1,\ 3) - F_1(3)\,G_2(1,2)\}\,d(3) -$$
$$- (n/N)\int B(3)\,\{F_3(1,\ 2,\ 3) - F_2(1,\ 2)\,F_1(3)\}\,d(3).$$

Таким образом, пренебрегая членами порядка $1/N$, получаем

$$\delta G_2(0;\ 1,\ 2) = \Big\{(B(1)+B(2))\,G_2(1,\ 2) +$$
$$+ n\int B(3)\,G_3(1,\ 2,\ 3)\,d(3)\Big\}\,\delta\xi$$

. . . .

Как это уже отмечалось ранее, мы рассматриваем здесь лишь случай, когда состояние статистического равновесия в Σ-системе пространственно-однородно. Следовательно,

$$
\begin{gathered}
F_1(1)=\Phi_\Sigma(v_1);\\
G_2(1,\ 2)=g_2(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,\Phi_\Sigma(v_1)\,\Phi_\Sigma(v_2);\\
G_3(1,\ 2,\ 3)=g_3(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3,\ \mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3)\,\Phi_\Sigma(v_1)\,\Phi_\Sigma(v_2)\,\Phi_\Sigma(v_3)\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}
$$

В таком случае мы видим, что условие (134) можно переписать в виде

$$
\int B(\mathbf{r},\ \mathbf{v})\,\Phi_\Sigma(\mathbf{v})\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}=0. \tag{140}
$$

Также имеем

$$
\left.
\begin{aligned}
\delta F_1(0;\ 1)&=\Phi_\Sigma(v_1)\left\{B(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{v}_1)+n\int g_2(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,B(\mathbf{r}_2,\ \mathbf{v})\times\right.\\
&\qquad\left.\times\,\Phi_\Sigma(v_2)\,d\mathbf{r}_2\,d\mathbf{v}_2\right\}\delta\xi;\\
\delta G_2(0;\ 1,\ 2)&=\Phi_\Sigma(v_1)\,\Phi_\Sigma(v_2)\left\{(B(\mathbf{r}_1\ \mathbf{v})+B(\mathbf{r}_2,\ \mathbf{v}_2))\times\right.\\
&\qquad\times\, g_2(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)+n\int g_3(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3,\ \mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3)\times\\
&\qquad\left.\times\, B(\mathbf{r}_3,\ \mathbf{v}_3)\,\Phi_\Sigma(v_3)\,d\mathbf{r}_3\,d\mathbf{v}_3\right\}\delta\xi\\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\right\} \tag{141}
$$

Рассмотрим теперь специальный случай, когда

$$
B(\mathbf{r},\ \mathbf{v})=B_k(\mathbf{r},\ \mathbf{v})=\exp(-i\mathbf{kr})\,\phi(\mathbf{v}), \tag{142}
$$

и заметим, что для $k\neq 0$ условие (140) выполняется автоматически, а для $k=0$ это условие требует выполнения соотношения

$$
\int \phi(\mathbf{v})\,\Phi_\Sigma(\mathbf{v})\,d\mathbf{v}=0;\qquad \phi(\mathbf{v})=B_0. \tag{143}
$$

Тогда

$$
\begin{gathered}
\delta F_1(0;\ 1)=\exp(-i\mathbf{kr}_1)\,\Phi_\Sigma(v_1)\left\{\phi(\mathbf{v}_1)+\right.\\
\left.+n\int g(\mathbf{r})\exp(i\mathbf{kr})\,dr\int\phi(\mathbf{v})\,\Phi_\Sigma(v)\,d\mathbf{v}\right\}d\xi
\end{gathered} \tag{144}
$$

и

$$
\begin{gathered}
\delta G_s(0;\ \mathbf{r}_1+\mathbf{r},\ \mathbf{v}_1;\ \dots\ \mathbf{r}_s+\mathbf{r}_s)=\\
=\exp(-i\mathbf{kr})\,\delta G_s(0;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{v}_1;\ \dots\ \mathbf{r}_s,\ \mathbf{v}_s).
\end{gathered}
$$

Так как линейные уравнения, полученные из (133) для

$$\delta F_1(t;\ 1);\ \ldots\ \delta G_s(t;\ 1,\ \ldots,\ s);\ \ldots,$$

являются инвариантными по отношению к пространственным трансляциям, имеем

$$\begin{gathered}\delta F(t;\ 1) = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1)\,\Phi_k(t,\ \mathbf{v}_1)\,\delta\xi;\\ \delta G_s(t;\ \mathbf{r}_1+\mathbf{r},\ \mathbf{v}_1;\ \ldots\ \mathbf{r}_s+\mathbf{r},\ \mathbf{v}_s) =\\ = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})\,\delta G_s(t;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{v}_1;\ \ldots\ \mathbf{r}_s,\ \mathbf{v}_s).\end{gathered} \tag{145}$$

Здесь $\Phi_k(t,\ \mathbf{v}_1)$, так же как и δG_s, суть линейные функционалы $\phi(\mathbf{v})$.

Используя соотношения (91), (137), (139), получаем

$$\Phi_k(t,\ \mathbf{v}) = \Phi_\Sigma(v_1)\int U_k(t,\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_1')\,\phi(\mathbf{v}_1')\,d\mathbf{v}_1', \tag{146}$$

где для $k = 0$ должно удовлетворяться условие (143). Из (99) следует также

$$R_k(t) = \int \Phi_k(t,\ \mathbf{v}_1)\,dv_1\ \text{для}\ \phi(\mathbf{v}) = 1,\ k \neq 0. \tag{147}$$

Обратимся теперь к случаю, когда

$$Л_{1,\,2} = Л_{1,\,2}^{(\Phi\Sigma)};\quad Л_{\text{int}} = Л_{\text{int}}^{(\Phi)}. \tag{148}$$

Напомним, что, для того чтобы привести ранее сформулированные приближенные уравнения (56), (57) или же кинетические уравнения к полностью определенному виду, необходимо вычислить $R_k(t)$ $(k \neq 0)$ в явном виде. В случае

$$Л_{1,\,2} = Л_{1,\,2}^{(\text{coll})};\quad Л_{\text{int}} = Л_{\text{int}}^{(\text{coll})} \tag{149}$$

соответствующие приближенные уравнения (96), (97) станут полностью определенными, если нам удастся получить явные выражения для $U_{\mathbf{k}}$.

Таким образом, мы видим, что в обоих случаях (148), (149) необходимо вычислить в явном виде $\Phi_k(t,\ v_1)$. Для достижения этой цели ограничимся простейшей аппроксимацией в системе нелинейных уравнений (133) и рассмотрим лишь первое из них, пренебрегая корреляционной функцией $G_2(t;\ 1,\ 2)$. В такой аппроксимации нам придется иметь дело лишь с одним нелинейным уравнением

$$\partial F_1(t;\ 1)/\partial t = Л_1^{(0)} F_1(t;\ 1) + n\int Л_{1,\,2} F_1(t;\ 1)\,F(t;\ 2)\,d(2). \tag{150}$$

Очевидно, что для (148) это уравнение переходит в хорошо известное уравнение Власова

$$\partial F_1(t;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{v})/\partial t = -\mathbf{v}_1\,\partial F_1(t;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{v}_1)/\partial \mathbf{r}_1 + \\ + \frac{n}{M}\left\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1}\int \Phi_\Sigma(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,\bar{\rho}(t;\ \mathbf{r}_2)\right\}\frac{\partial F_1(t;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{v}_1)}{\partial \mathbf{v}_1}, \tag{151}$$

где

$$\bar{\rho}(t;\ \mathbf{r}) = \int F_1(t;\ \mathbf{r},\ \mathbf{v})\,d\mathbf{v}_1.$$

Такого типа однокомпонентное уравнение Власова используют, например, чтобы описать простейшую модель электронной плазмы, а именно классический электронный газ, состоящий из отрицательно заряженных точечных частиц, которые находятся в компенсирующем его однородном положительно заряженном фоне. В этой модели

$$\Phi_\Sigma(r) = e^2/r. \tag{152}$$

Заметим, что для состояния статистического равновесия $\bar{\rho}_{eq} = 1$. Чтобы учесть внешнее поле, обусловленное положительным фоном, необходимо вычесть постоянную плотность заряда из плотности заряда электронов. Это приведет к замене выражения (151) для плотности частиц на $\bar{\rho}(t;\ \mathbf{r}) = \int F_1(t;\mathbf{r},\ \mathbf{v}_1)\,d\mathbf{v}_1 - 1$.

В состоянии статистического равновесия полная плотность заряда равна нулю и, следовательно, уравнение для вариации выглядит так:

$$\partial\delta F_1(t;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{v}_1)/\partial t = -\mathbf{v}_1\,\partial\delta F_1(t;\ \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)/\partial \mathbf{r}_1 + \\ + \frac{n}{M}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1}\int \Phi_\Sigma(r_1-\mathbf{r}_2)\,\delta\bar{\rho}(t;\ \mathbf{r}_2)\,d\mathbf{r}_2\,\frac{\partial \Phi_\Sigma(v_1)}{\partial \mathbf{v}_1}. \tag{153}$$

Так как мы рассматриваем здесь случай $\phi(\mathbf{v}) = 1$ и так как в рамках принятого приближения мы должны опустить в (144) член, содержащий корреляционную функцию $g(r)$, получаем

$$\delta F_1(0;\ \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) = \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_1)\,\Phi_\Sigma(v_1)\,\delta\xi.$$

Соотношения (145), (147) позволяют привести (153) к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_k(t;\ \mathbf{v})}{\partial t} &= \mathrm{i}(\mathbf{k}\mathbf{v})\left\{\Phi_k(t;\ \mathbf{v}) + \frac{4\pi e^2 n}{\theta k^2}R_k(t)\,\Phi_\Sigma(\mathbf{v})\right\}; \\ \Phi_k(0;\ \mathbf{v}) &= \Phi_\Sigma(v). \end{aligned}\right\} \tag{154}$$

Чтобы решить это уравнение, воспользуемся преобразованием Лапласа:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \Phi_k(t;\ \mathbf{v}) \exp(-zt)\,dt = \widetilde{\Phi}_k(z;\ \mathbf{v}), \\ &\operatorname{Re} z > 0; \\ &\int_0^\infty R_k(t) \exp(-zt)\,dt = \int_0^\infty \widetilde{\Phi}_k(z,\ \mathbf{v})\,d\mathbf{v} = \widetilde{R}_k(z), \end{aligned}\right\} \tag{155}$$

приводящим (154) к виду

$$(z - \mathrm{i}(\mathbf{kv}))\,\widetilde{\Phi}_k(z,\ \mathbf{v}) = \mathrm{i}\mathbf{kv}\frac{4\pi e^2 n}{\theta k^2}\widetilde{R}_k(z)\,\Phi_\Sigma(v) + \Phi_\Sigma(v)$$

и дающим для $\widetilde{\Phi}_k(z,\ v)$ следующее выражение:

$$\widetilde{\Phi}_k(z,\ v) = \frac{\Phi_\Sigma(v)}{z - i(\mathbf{kv})} + \frac{\mathrm{i}\mathbf{kv}}{z - \mathrm{i}(\mathbf{kv})}\frac{4\pi e^2 n}{\theta k^2} R_k(z)\,\Phi_\Sigma(v).$$

Принимая во внимание (155), имеем

$$\int^\infty R_k(t)\exp(-zt)\,dt =$$

$$= \int \frac{\Phi_\Sigma(\mathbf{v})}{z - \mathrm{i}(\mathbf{kv})}\,d\mathbf{v}\left\{1 - \frac{4\pi e^2 n}{\theta k^2}\int \frac{\mathrm{i}\mathbf{kv}}{z - \mathrm{i}(\mathbf{kv})}\Phi_\Sigma(\mathbf{v})\,d\mathbf{v}\right\}^{-1}$$

или

$$\int_0^\infty R_k(t)\exp(-zt)\,dt = \int \frac{\Phi_\Sigma(v)}{z - \mathrm{i}(\mathbf{kv})} \times$$

$$\times\, d\mathbf{v}\left\{1 + \frac{4\pi e^2 n}{\theta k^2} - \frac{4\pi e^2 n}{\theta k^2} z\int \frac{\Phi_\Sigma(v)}{z - \mathrm{i}(\mathbf{kv})}\,d\mathbf{v}\right\}^{-1} \quad (\operatorname{Re} z > 0). \tag{156}$$

Именно левая часть (156) и входит в уравнения (54), (63).

Теперь можно получить более конкретное выражение для интеграла

$$\int \Phi_\Sigma(v)\,d\mathbf{v}/[z - \mathrm{i}(\mathbf{kv})], \tag{157}$$

если принять во внимание, что здесь $\Phi_\Sigma(v)$ — нормированное максвелловское распределение по скоростям. С этой целью удобно выбрать направление вектора $\mathbf{k}$ как направление оси z в пространстве интегрирования для (157).

В таком случае получим

$$\int \Phi_\Sigma(v)\,d\mathbf{v}/[z - \mathrm{i}(\mathbf{kv})] = \left(\frac{M}{2\pi\theta}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Mu^2/2\theta)\,du\,(z - \mathrm{i}ku)^{-1}.$$

Здесь

$$(z-\mathrm{i}ku)^{-1}=\int_0^\infty \exp\left[-\tau(z-\mathrm{i}ku)\right]d\tau, \quad \operatorname{Re} z>0.$$

Интегрирование по u приводит к выражению

$$\left(\frac{M}{2\pi\theta}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\mathrm{i}\tau ku-Mu^2/2\theta\right]du=$$

$$=\exp\left(-\tau^2k^2u_{\mathrm{eq}}^2\right), \quad u_{\mathrm{eq}}=\sqrt{\theta/2M},$$

из которого следует

$$\int\frac{\Phi_\Sigma(v)}{z-\mathrm{i}\mathbf{kv}}\,d\mathbf{v}=\int_0^\infty\exp\left(-\tau z-u_{\mathrm{eq}}^2k^2\tau^2\right)d\tau=$$

$$=\frac{1}{ku_{\mathrm{eq}}}\int_0^\infty\exp\left(-\tau\frac{z}{ku_{\mathrm{eq}}}\right)\exp\left(-\tau^2\right)d\tau$$

и, в частности,

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\frac{\Phi_\Sigma(v)}{\varepsilon-\mathrm{i}\omega-\mathrm{i}\mathbf{kv}}\,d\mathbf{v}=\frac{1}{ku_{\mathrm{eq}}}\int_0^\infty\exp\left(-\tau^2\right)\times$$

$$\times\left\{\cos\frac{\omega\tau}{ku_{\mathrm{eq}}}+\mathrm{i}\sin\frac{\omega\tau}{ku_{\mathrm{eq}}}\right\}d\tau=$$

$$=\frac{1}{ku_{\mathrm{eq}}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left[-\frac{\omega^2}{4k^2u_{\mathrm{eq}}^2}\right]+\mathrm{i}\int_0^\infty\exp\left(-\tau^2\right)\sin\frac{\omega\tau}{ku_{\mathrm{eq}}}\,d\tau\right\}.$$

Таким образом, соотношения (64), (156) дают

$F(\mathbf{kv}_0)=$

$$=\operatorname{Re}\frac{[1/(ku_{\mathrm{eq}})]\left\{(\sqrt{\pi}/2)\exp[-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}_0)^2/4u_{\mathrm{eq}}^2]+\mathrm{i}\int_0^\infty\exp(-\tau^2)\sin[\omega\tau/(ku_{\mathrm{eq}})]\,d\tau\right\}}{1+\frac{4\pi e^2n}{\theta k^2}\left\{1-\left[\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}_0)}{u_{\mathrm{eq}}}\right]\int_0^\infty\exp(-\tau^2)\sin\left[\tau\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}_0)}{u_{\mathrm{eq}}}\right]d\tau\right\}\to}$$

$$\to+\left[\frac{4\pi e^2n}{(\theta k^2)}\right]\mathrm{i}\left[\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}_0}{2}\right]\sqrt{\pi}\exp\left[-\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}_0)^2}{(4u_{\mathrm{eq}}^2)}\right]. \qquad (158)$$

Рассмотрим теперь уравнение (63) для случая, когда точечная частица S с зарядом Ze взаимодействует с частицами Σ-системы только по закону Кулона. Тогда

$$\nu(k)=4\pi Ze^2/k^2. \qquad (159)$$

Подставляя (158), (157) в (63), получаем кинетическое уравнение марковского типа.

В более простой аппроксимации аналогичное кинетическое уравнение найдено С. В. Темко [9]. Обобщение его на квантовый случай рассмотрено Ю. Л. Климонтовичем и С. В. Темко [10]. Очевидно, что основная область использования упомянутого уравнения относилась к применению его для описания движения заряженной частицы в классической электронной плазме.

Однако укажем, что все наши уравнения были выведены из общего приближенного уравнения (27), которое само было получено в предположении, что взаимодействие между S- и Σ-системой мало.

Если предположить, что e^2 может, на самом деле, рассматриваться как малый параметр, то надо в знаменателе (158) опустить все слагаемые, кроме единицы, поскольку все они пропорциональны e^2 и $\nu^2(k)$ — величинам, уже содержащим этот параметр. В таком случае получаем простейшее выражение

$$F(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_0)=\frac{1}{ku_{\text{eq}}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left[-\frac{(\sigma\cdot\mathbf{v}_0)^2}{4u_{\text{eq}}^2}\right],$$

которое пропорционально $1/k$.

В рассматриваемом уравнении (63) $d\mathbf{k}=k^2dk\,d\sigma$, так что интеграл по k ведет себя, как

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{k^4}k^2\frac{1}{k}k^2\,d\mathbf{k}=\int\limits_0^\infty\frac{d\mathbf{k}}{k}.$$

Мы видим, что он расходится логарифмически и для малых и для больших k. На языке квантовой теории поля имеем здесь и «инфракрасную» и «ультрафиолетовую» расходимость. Легко понять физическую причину этой расходимости в рассматриваемом случае кулоновского взаимодействия.

Заметим, во-первых, что потенциальная энергия взаимодействия между частицей S и Σ-системой будет мала сравнительно с их средней кинетической энергией, когда $1/r \ll \theta/(|Z|e^2)$. В таком случае корректно рассчитанный вклад $\mathbf{k}$-пространства в интеграл имеет место лишь в области, где

$$k \ll k_{\text{макс}}=\theta/(|Z|e)^2. \tag{160}$$

Во-вторых, необходимо учесть эффект экранировки заряда в плазме на больших расстояниях, характеризуемых дебаевским радиусом. Пренебрежение этим эффектом обусловливает расходимость для малых k.

Если возьмем полное выражение, включив и члены, опущенные в знаменателе, то увидим, что для малых k функция $F(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_0)$ порядка k, что аннулирует «инфракрасную» расходимость. Однако для $k \to \infty$

$$F(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_0) \sim \frac{1}{ku_{\mathrm{eq}}} \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}_0)^2}{4u_{\mathrm{eq}}^2}\right]$$

и для больших k логарифмическая расходимость остается.

Следовательно, для того чтобы сделать интеграл в правой части уравнения (63) сходящимся, можно использовать процедуру обрезания, интегрируя по k в интервале $(0, k_{\text{макс}})$ вместо $(0, +\infty)$.

Чтобы разработать самосогласованную процедуру аппроксимации, нет необходимости вводить ad hoc процедуру обрезания. Мы должны улучшить наше приближение, выделив, например, из короткодействующей части кулоновского взаимодействия описывающий соударения оператор Лиувилля специального типа. Не будем рассматривать здесь этот вопрос, а перейдем к исследованию случая (149).

Уравнение (150) переходит теперь в уравнение Больцмана — Энскога для взаимодействия непроницаемых шаров:

$$\begin{aligned} \partial F_1(t;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{v}_1)/\partial t = -\mathbf{v}_1\, \partial F_1(t;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{v})/\partial \mathbf{r}_1 + \\ + na_0^2 \int \mathbf{v}_{1,2}\cdot\boldsymbol{\sigma}\theta(\mathbf{v}_{1,2}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \{\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2-a_0\boldsymbol{\sigma})\, b_{v_1v_2}(\boldsymbol{\sigma}) - \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2+a_0\boldsymbol{\sigma})\} \times \\ \times F_1(t;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{v}_1)\, F_1(t;\ \mathbf{r}_2,\ \mathbf{v}_2)\, d\boldsymbol{\sigma}\, d\mathbf{r}_2\, d\mathbf{v}_2. \end{aligned} \tag{161}$$

Здесь $b_{v_1,\,v_2}(\boldsymbol{\sigma})$ — оператор, действующий на функцию $f(\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2)$ и заменяющий ее аргументы следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1^* = \mathbf{v}_1 - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_{1,2}\cdot\boldsymbol{\sigma}); \\ \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_2^* = \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_{1,2}\cdot\boldsymbol{\sigma}), \end{aligned}\right\} \tag{162}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — единичный вектор; $a_0 = a_\Sigma$ — диаметр твердых шаров, характеризующий взаимодействие Σ-частиц.

Было указано, что, когда $Л_{1,2} = Л_{1,2}^{\Phi_\Sigma}$ и $\Phi_\Sigma(r)$ соответствует короткодействующему отталкиванию, можно получить для $F_1(t;\ 1)$ кинетическое уравнение, которое содержит оператор, учитывающий столкновения, используя для этой цели второе уравнение системы (133) и пренебрегая членом, пропорциональным плотности частиц. Здесь будем иметь дело лишь с простейшим вариантом уравнения Больцмана — Энскога (161), описывающим динамику непроницаемых шаров. Соответствующее обобщение проводимого обсуждения не приводит к каким-либо существенным затруднениям.

Проводя варьирование уравнения (161) в окрестности равновесного решения, получаем для F_1 (t; 1) следующее уравнение:

$$\frac{\partial\delta F_1(t;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{v}_1)}{\partial t} = -\mathbf{v}_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_1}\delta F_1(t;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{v}_1) +$$
$$+ na_0^2\int(v_{1,2}\cdot\sigma)\,\theta(\mathbf{v}_{1,2}\cdot\sigma)\times$$
$$\times\{\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2-a_0\sigma)\,b_{v_1,v_2}(\sigma)-\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2+a_0\sigma)\}\times$$
$$\times[\Phi_\Sigma(v_1)\,\delta F_1(t;\ \mathbf{r}_2,\ \mathbf{v}_2)+\Phi_\Sigma(v_2)\,\delta F_1(t;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{v}_1)]\,d\sigma\,d\mathbf{r}_2\,d\mathbf{v}_2. \quad (163)$$

Как было отмечено ранее, начальное условие дается формулой (144).

В рамках нашей низкоплотностной аппроксимации мы должны оставить лишь первый член и, следовательно, $\delta F_1(0;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{v}_1) = \exp(-\mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_1)\,\phi(\mathbf{v}_1)\,\Phi_\Sigma(v_1)$.

Из (145) имеем $\delta F_1(t;\ \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) = \exp(-\mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_1)\,\Phi_k(t;\ \mathbf{v}_1)\,\delta\xi$. Таким образом, полагая здесь

$$\Phi_k(t;\ \mathbf{v}_1) = \Phi_\Sigma(v_1)\,X_k(t;\ \mathbf{v}_1), \quad (164)$$

приведем уравнение (163) к виду

$$\frac{\partial X_k(t;\mathbf{v}_1)}{\partial t} = \mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{v}_1X_k(t;\ \mathbf{v}_1) + na^2L_k(\mathbf{v}_1)\,X_k(t;\ \mathbf{v}_1); \quad (165)$$

$$X_k(0;\ \mathbf{v}_1) = \phi(\mathbf{v}_1), \quad (166)$$

где $L_k(\mathbf{v}_1)$ — оператор, действующий на функции $f(\mathbf{v}_1)$ по следующему правилу:

$$L_k(\mathbf{v}_1)\,f(\mathbf{v}_1) = \int(\mathbf{v}_{1,2}\cdot\sigma)\,\theta(\mathbf{v}_{1,2}\cdot\sigma)\times$$
$$\times\{\exp[\mathrm{i}a_0(\mathbf{k}\cdot\sigma)]\,f(\mathbf{v}_2^*)-\exp[-\mathrm{i}a_0(\mathbf{k}\cdot\sigma)]\,f(\mathbf{v}_2)+f(\mathbf{v}_1^*)-f(\mathbf{v}_1)\}\times$$
$$\times\,\phi_0(v_0)\,\Phi_\Sigma(v_1)\,d\sigma\,d\mathbf{v}_1.$$

Для нахождения решения (165) введем лаплас-трансформанты

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty\exp(-zt)\,X_k(t;\ \mathbf{v})\,dt = \widetilde{X}_k(z;\ v);\\&\int_0^\infty\exp(-zt)\,\Phi_k(t;\ \mathbf{v})\,dt = \Phi_\Sigma(v)\,\widetilde{X}_k(z;\ v),\end{aligned}\right\} \quad (167)$$

с помощью которых уравнение (165) с начальным условием (165) принимает следующий вид: $(z-\mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{v}_1)\,\widetilde{X}_k(z;\ v_1) = na_0^2L_k(v_1)\,\widetilde{X}_k(z;\ v_1) + \phi(v_1)$. Таким образом,

$$\widetilde{X}_k(z;\ v_1) = \{z-\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)-na_0^2L_k(v_1)\}^{-1}\,\phi(v_1). \quad (168)$$

Используя (146), (167), (168), получаем

$$\int_0^\infty \exp(-tz)\,U_k(t,\ \mathbf{v}_1)\,dt = \{z - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1 - na_0^2 L_k(v_1)\}^{-1}. \quad (169)$$

Здесь необходимо иметь в виду, что это операторное соотношение было получено при использовании начального условия (144) и, следовательно, (169) справедливо во всех случаях, когда $k \neq 0$, а для $k = 0$ оно остается справедливым лишь в том случае, если применено к функции $f(v_1)$, удовлетворяющей условию (143).

Напомним, далее, что каждое из уравнений (96), (97) содержит лишь один член с $U_0(t-\tau;\ 1)$. Этот оператор должен быть применен к некоему выражению $\tilde{\chi}$, которое, как функция v_1, удовлетворяет условию (143), если учесть (88). Отметим дополнительно, что упомянутые члены пропорциональны $1/V$. Исследуем теперь для определенности уравнение (97). Если воспользоваться преобразованием Лапласа и выполнить предельный переход $V \to \infty$, то придем к следующему уравнению:

$$\begin{gathered}(z - na^2 L_S(\mathbf{v}_0))\,\overline{\chi}(z;\ \mathbf{v}_0) = \chi(\mathbf{v}_0) + \\ + \frac{fn}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\int d\mathbf{v}_1 \Phi_\Sigma(v_1)\,\overline{T}_{-k}(v_0,\ v_1)\,W_k(z;\ 1)\times \\ \times T_k(v_0,\ v_1)\,\overline{\chi}(z;\ \mathbf{v}_0),\quad \chi(\mathbf{v}_0) = \chi(0,\ \mathbf{v}_0),\end{gathered} \quad (170)$$

где

$$\begin{gathered}L_S(\mathbf{v}_0) f(\mathbf{v}_0) = \int (\mathbf{v}_{0,1}\cdot\sigma)\,\theta(\mathbf{v}_{0,1}\cdot\sigma)\,\Phi_\Sigma(v_1)\times \\ \times \{B_{v_0,\,v_1}(\sigma) - 1\}\,d\sigma\,d\mathbf{v}_1 f(\mathbf{v}_0);\end{gathered} \quad (171)$$

$$\overline{\chi}(z;\ \mathbf{v}_0) = \int_0^\infty \exp(-zt)\,\chi(t;\ v_0)\,dt, \quad \operatorname{Re} z > 0;$$

$$W_k(z;\ 1) = \int_0^\infty \exp\{-[z + i\mathbf{v}_0\mathbf{k} - na^2 L_S(v_0)]\,t\}\,U_k(t,\ \mathbf{v}_1)\,dt.$$

Так как операторы $i\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{k} - na^2 L_S(\mathbf{v}_0)$, $i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1 + na_0^2 L_k(\mathbf{v}_1)$ действуют на функции различных аргументов, они коммутируют и, следовательно, соотношение (169) дает

$$W_k(z,\ 1) = \{z + i\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{k} - na^2 L_S(v_0) - i\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{k} - na^2 L_k(\mathbf{v}_1)\}^{-1}. \quad (172)$$

В таком случае можно привести уравнение (170) к виду

$$\{z - na^2 L_S(\mathbf{v}_0) - R(z;\ v_0)\}\,\overline{\chi}(z;\ \mathbf{v}_0) = \lambda(\mathbf{v}_0), \quad (173)$$

где

$$R(z;\ \mathbf{v}_0)=\frac{in}{(2\pi)^3}\int dk\int d\mathbf{v}_1\Phi_\Sigma(v_1)\,\overline{T}_{-k}(v_0,\ v_1)\times$$
$$\times\{z+\mathrm{i}(\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_1)\,\mathbf{k}-na^2L_S(\mathbf{v}_0)-na_0^2L_k(\mathbf{v}_1)\}^{-1}\,\overline{T}_k(v_0,\ v_1). \quad (174)$$

Рассмотрим теперь некоторую функцию $F(\mathbf{v}_0)$. Повторяя наши рассуждения (см. разд. 1), которые привели нас к формулам (15) — (17), находим

$$\int F(\mathbf{v}_0)\,\Phi_0(\mathbf{v}_0)\,\chi(t;\ \mathbf{v}_0)\,d\mathbf{v}_0=\int F(\mathbf{v}_0)\,f(t;\ \mathbf{v}_0)\,d\mathbf{v}_0=$$
$$=\frac{1}{V}\int F(\mathbf{v}_0)\,f(t;\ \mathbf{v}_0)\,d\mathbf{r}_0\,d\mathbf{v}_0=\frac{1}{V}\int F\{\mathbf{v}_0(t)\}\mathscr{D}_0(S,\ \Sigma)\,d\Omega_S\,d\Omega_\Sigma=$$
$$=\int F\{\mathbf{v}_0(t)\}\,\chi(\mathbf{v}_0)\,\mathscr{D}_{ae}(S,\ \Sigma)\,d\Omega_S\,d\Omega_\Sigma,$$

где

$$\mathscr{D}_{ae}(S,\ \Sigma)=\Phi_0(v_0)\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma)/V;$$
$$\int\mathscr{D}_{ae}(S,\ \Sigma)\,d\Omega_S\,d\Omega_\Sigma=1.$$

Таким образом, видно, что выражение

$$\langle F(\mathbf{v}_0(t))\,\chi(\mathbf{v}_0)\rangle_{ae}=\int\Phi_0(u_0)\,F(\mathbf{v}_0)\,\chi(t;\ \mathbf{v}_0)\,d\mathbf{v}_0$$

представляет собой двухвременное корреляционное среднее, взятое по приближенно равновесному распределению вероятностей $D_{ae}(S,\ \Sigma)$, которое отличается от точного равновесного распределения $D_{\text{eq}}(S,\ \Sigma)$ для полной $S+\Sigma$-системы пренебрежением корреляциями между S- и Σ-частицами.

Но необходимо подчеркнуть, что здесь рассматривается случай, когда вероятность соударения между S- и Σ-частицами мала: $na^3\ll 1$ и в такой ситуации при вычислении основного члена можно пренебречь соответствующими корреляционными эффектами. Так, в этой аппроксимации можно положить

$$\langle F(\mathbf{v}_0(t))\,\chi(\mathbf{v}_0)\rangle_{\text{eq}}=\int F(\mathbf{v}_0)\,\Phi_0(v_0)\,\chi(t;\ \mathbf{v}_0)\,d\mathbf{v}_0. \quad (175)$$

Возьмем, например, $F(\mathbf{v}_0)=\chi(\mathbf{v}_0)=v_{0,x}$, тогда в принятом приближении

$$\int_0^\infty\exp(-zt)\,\langle v_{0,x}(t)\,v_{0,x}\rangle\,dt=\int\phi_0(v_0)\,v_{0,x}\chi(z;\ \mathbf{v}_0)\,d\mathbf{v}_0, \quad (176)$$

где $\chi(z;\ \mathbf{v}_0)$ определяется уравнением (173), в котором $\chi(v_0)=v_{0,x}$.

Законность аппроксимаций (175), (176) обсуждается в разд. 4, где начальное условие для $\mathscr{D}_t\ (S,\ \Sigma)$ взято в виде

$$\mathscr{D}_0 (S,\ \Sigma) = \chi (S)\, \mathscr{D}_{\text{eq}} (S,\ \Sigma), \tag{177}$$

а не в виде (2).

Заметим, что уравнение (173) вполне аналогично уравнению, установленному Дорфманом и Коэном [11] для газа малой плотности, и, следовательно, может быть рассмотрено с помощью процедуры, разработанной этими авторами. В их работе принято $M = m$, $a_0 = a$, так что частица S может рассматриваться как частица-зонд в большой Σ-системе. Однако это обстоятельство не является сколько-нибудь существенным для справедливости утверждений и их можно повторить почти дословно применительно к уравнению (171). По этой причине не будем обсуждать этот круг вопросов.

Стоит подчеркнуть, что уравнение (171) следует из (96), (97), при изучении которых не делалось каких-либо предположений относительно малости взаимодействия между частицами Σ-системы. Конечно, чтобы привести (96), (97) к полностью определенному виду, необходимо располагать выражением для оператора $U_k\ (t;\ 1)$. Однако такое выражение можно найти не только при использовании уравнения Больцмана — Энскога для непроницаемых шаров. Вполне возможно применение и других более сложных кинетических уравнений.

Можно также воспользоваться так называемым гидродинамическим приближением, которое не зависит от предположения относительно малости взаимодействия в Σ-системе, чтобы найти явное выражение оператора $U_k\ (t;\ 1)$ в области

$$k \ll l_\Sigma^{-1}, \quad t \gg t_\Sigma, \tag{178}$$

где l_Σ, t_Σ — средняя длина свободного пробега и среднее время свободного пробега для частиц в Σ-системе. Как несложно показать, именно эта область существенна для выявления поведения корреляционных средних типа (175) при больших временах.

4.

Продолжим исследования взаимодействия S-частицы с большой Σ-системой при тех же самых условиях, как и в разд. 1, 2, но с таким отличием, что вместо требования (2) мы выберем начальное выражение для $\mathscr{D}_t\ (S,\ \Sigma)$ в виде

$$\mathscr{D}_0 (S_0 \Sigma) = h (S)\, \mathscr{D}_{\text{eq}} (S,\ \Sigma),$$

где $\mathscr{D}_{\text{eq}}\ (S,\ \Sigma)$ — функция распределения, отвечающая общему статистическому равновесию полной системы.

В рассматриваемой ситуации

$$\mathscr{D}_{\mathrm{eq}}(S,\ \Sigma)=W(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{r}_1,\ \ldots,\ \mathbf{r}_N)\,\Phi_0(v_0)\prod_{(1\leqslant j\leqslant N)}\Phi_\Sigma(v_j) \tag{179}$$

и подчиняется условию нормировки

$$\overline{(\mathscr{D}_{\mathrm{eq}}(S,\ \Sigma))}_{S+\Sigma}=1.$$

Таким образом,

$$\int_V \ldots \int_V W(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{r}_1,\ \ldots,\ \mathbf{r}_N)\,d\mathbf{r}_0\,d\mathbf{r}_1\ldots d\mathbf{r}_N=1.$$

Поскольку W трансляционно-инвариантна, последнее равенство дает

$$\int_V \ldots \int W(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{r}_1,\ \ldots,\ \mathbf{r}_N)\,d\mathbf{r}_1\ldots d\mathbf{r}_N=1/V. \tag{180}$$

Таким образом, получаем

$$\overline{(\mathscr{D}_0(S,\ \Sigma))}_\Sigma=h(S)\,\overline{(\mathscr{D}_{\mathrm{eq}}(S,\ \Sigma))}_\Sigma=h(S)\frac{1}{V}\,\Phi_0(v_0). \tag{181}$$

Заметим, что в случае, рассмотренном ранее, когда начальное значение дается (2):

$$\overline{(\mathscr{D}_0(S,\Sigma))}_\Sigma=f(S)=\chi(S)\,\Phi_0(v_0). \tag{182}$$

Следовательно, если мы желаем сохранить эту первоначально принятую нормировку, то необходимо положить в (181) $h(S)=V\chi(S)$. В таком случае начальное значение

$$\mathscr{D}_0(S,\ \Sigma)=V\chi(S)\,\mathscr{D}_{\mathrm{eq}}(S,\ \Sigma) \tag{183}$$

будет удовлетворять тому же самому соотношению (182), как и в случае (2).

Временную эволюцию $\mathscr{D}_t(S,\ \Sigma)$ определим по уравнению Лиувилля (18):

$$\partial\mathscr{D}_t/\partial t=(\text{Л}_S^{(0)}+\text{Л}_\Sigma+\text{Л}_{\mathrm{int}})\,\mathscr{D}_t,$$

причем будем пользоваться начальным условием в форме (183). Введем теперь функцию $\chi_t(S)$:

$$\overline{(\mathscr{D}_t)}_\Sigma=\chi_t(S)\,\Phi_0(v_0)=f_t(S), \tag{184}$$

и заметим, что ее можно использовать для вычисления равновесных корреляционных средних типа $\langle F(\Omega_S(t))\,\chi(\Omega_S)\rangle_{\mathrm{eq}}$. Действительно, легко видеть, что

$$V\langle F(\Omega_S(t))\,\chi(\Omega_S)\rangle_{\mathrm{eq}}=$$
$$=\overline{(F(\Omega_S(t))\,V\chi(S)\,\mathscr{D}_{\mathrm{eq}}(S,\ \Sigma))}_{S+\Sigma}=\overline{(F(\Omega_S(t))\,\mathscr{D}_0(S,\ \Sigma))}_{S+\Sigma}=$$
$$=\overline{(F(\Omega_S)\,\mathscr{D}_t(S,\ \Sigma))}_{S+\Sigma}=\overline{(F(S)\,\overline{(\mathscr{D}_t(S,\ \Sigma))}_\Sigma)}_S$$

и, следовательно,

$$V\langle F(\Omega_S(t))\,\chi(\Omega_S)\rangle_{\text{eq}} = \overline{(F(S)\,f_t(S))}_S = \\ = \int F(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0)\,\chi(t;\ \mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0)\,\Phi_0(v_0)\,d\mathbf{r}_0\,d\mathbf{v}_0. \tag{185}$$

Замечая, что

$$\langle f(S)\rangle = \overline{(f(S)\,\mathcal{D}_{\text{eq}}(S,\ \Sigma))}_{S+\Sigma} = \frac{1}{V}\,\overline{(f(S)\,\Phi_0(v_0))}_S,$$

мы можем также записать

$$\frac{\langle F(\Omega_S(t))\,\chi(\Omega_S)\rangle_{\text{eq}}}{\{\langle\,|\,F(\Omega_S)\,|^2\rangle_{\text{eq}}\,\langle\,|\,\chi(\Omega_S)\,|^2\rangle_{\text{eq}}\}^{1/2}} = \\ = \frac{\int F(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0)\,\chi(t;\ \mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0)\,\Phi_0(v_0)\,d\mathbf{r}_0\,d\mathbf{v}_0}{\left\{\int |\,F(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0)\,|^2\,\Phi_0(v_0)\,d\mathbf{r}_0\,d\mathbf{v}_0 \int |\,\chi(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0)\,|^2\,\Phi_0(v_0)\,d\mathbf{r}_0\,d\mathbf{v}_0\right\}^{1/2}}; \tag{186}$$

вид данного выражения, очевидно, не зависит от нормировки $\chi(S)$.

Перейдем теперь к использованию метода, развитого в разд. 1, для получения приближенного уравнения для $\chi_t(S)$. Обозначим

$$\mathcal{D}_t - V\chi_t(S)\,\mathcal{D}_{\text{eq}}(S,\ \Sigma) = \Delta_t. \tag{187}$$

С учетом (181), (183), (184) имеем

$$\overline{(\Delta_t)}_\Sigma = 0, \quad \Delta_0 = 0. \tag{188}$$

Интегрируя (18) по Ω_Σ и используя тождество

$$\overline{(Л_\Sigma F(S,\ \Sigma))}_\Sigma \equiv 0, \tag{189}$$

получаем

$$\Phi_0(v_0)\,\partial\chi_t(S)/\partial t = Л_S^0\chi_t(S)\,\Phi_0(v_0) + \\ + V\,\overline{(Л_{\text{int}}\chi_t(S)\,D_{\text{eq}}(S,\ \Sigma)}_\Sigma + \overline{(Л_{\text{int}}\Delta_t)}_\Sigma,$$

что приводится к виду

$$\frac{\partial\chi_t(S)}{\partial t} = Л_S^0\chi_t(S) + V\,\frac{1}{\Phi_0(v_0)}\,\times \\ \times\,\overline{(Л_{\text{int}}\chi_t(S)\,\mathcal{D}_{\text{eq}}(S,\ \Sigma))}_\Sigma + \frac{1}{\Phi_0(v_0)}\,\overline{(Л_{\text{int}}\Delta_t)}_\Sigma, \tag{190}$$

поскольку

$$Л_S^0\chi_t(S)\,\Phi_0(v_0) = \Phi_0(v_0)\,Л_S^0\chi_t(S).$$

Введем теперь оператор $Л_S^{(1)}$, действующий лишь на функции $f(S)$ фазы Ω_S:

$$Л_S^{(1)}f(S) = V\,\overline{{}_{\text{int}}(Лf(S)\Phi_0^{-1}(v_0)\,\mathcal{D}_{\text{eq}}(S,\ \Sigma))}_\Sigma. \tag{191}$$

Тогда (190) приводится к виду

$$\frac{\partial \chi_t(S)}{dt}=\text{Л}_S^0\chi_t(S)+\frac{1}{\Phi_0(v_0)}\text{Л}_S^{(1)}\chi_t(S)\Phi_0(v_0)+\frac{1}{\Phi_0(v_0)}\overline{(\text{Л}_{\text{int}}\Delta t)_\Sigma}. \tag{192}$$

Из (18), (187), (188) получаем

$$\frac{\partial \Delta_t}{\partial t}=(\text{Л}_S^0+\text{Л}_\Sigma+\text{Л}_{\text{int}})\Delta_t+V(\text{Л}_S^0+\text{Л}_\Sigma+ \\ +\text{Л}_{\text{int}})\chi_t(S)\mathscr{D}_{\text{eq}}(S,\Sigma)-V\Big\{\text{Л}_S^0\chi_t(S)+ \\ +\frac{1}{\Phi_0(v_0)}\text{Л}_S^{(1)}\chi_t(S)\Phi_0(v_0)+ \\ +\frac{1}{\Phi_0(v_0)}\overline{(\text{Л}_{\text{int}}\Delta_t)_\Sigma}\Big\}\mathscr{D}_{\text{eq}}(S,\Sigma),\quad \Delta_0=0. \tag{193}$$

Легко видеть, что

$$(\text{Л}_S^0+\text{Л}_\Sigma)\chi_t(S)\mathscr{D}_{\text{eq}}(S,\Sigma)=\{\text{Л}_S^0\chi_t(S)\}\mathscr{D}_{\text{eq}}(S,\Sigma)+ \\ +\chi_t(S)(\text{Л}_S^0+\text{Л}_\Sigma)\mathscr{D}_{\text{eq}}(S,\Sigma).$$

Однако

$$(\text{Л}_S^0+\text{Л}_\Sigma+\text{Л}_{\text{int}})\mathscr{D}_{\text{eq}}(S,\Sigma)=0$$

и, следовательно,

$$(\text{Л}_S^0+\text{Л}_\Sigma)\chi_t(S)\mathscr{D}_{\text{eq}}(S,\Sigma)= \\ =\{\text{Л}_S^0\chi_t(S)\}\mathscr{D}_{\text{eq}}(S,\Sigma)-\chi_t(S)\text{Л}_{\text{int}}\mathscr{D}_{\text{eq}}(S,\Sigma).$$

Из (193) теперь следует, что

$$\frac{\partial \Delta_s}{\partial t}=(\text{Л}_S^0+\text{Л}_\Sigma+\text{Л}_{\text{int}})\Delta_t-\frac{V}{\Phi_0(v_0)}\{\overline{(\text{Л}_{\text{int}}\Delta_t)_\Sigma}\}\mathscr{D}_{\text{eq}}(S,\Sigma)+ \\ +V\{\text{Л}_{\text{int}}\chi_t(S)\mathscr{D}_{\text{eq}}(S,\Sigma)-\chi_t(S)\text{Л}_{\text{int}}\mathscr{D}_{\text{eq}}(S,\Sigma)\}- \\ -\frac{V}{\Phi_0(v_0)}\{\text{Л}_S^{(1)}\chi_t(S)\Phi_0(v_0)\}\mathscr{D}_{\text{eq}}(S,\Sigma),$$

или же

$$\frac{\partial \Delta_t}{\partial t}=(\text{Л}_S+\text{Л}_\Sigma+\Gamma)\Delta_t-\frac{V}{\Phi_0(v_0)}\{\overline{(\Gamma\Delta_t)_\Sigma}\}\mathscr{D}_{\text{eq}}(S,\Sigma)+ \\ +V(\text{Л}_{\text{int}}\chi_t(S)-\chi_t(S)\text{Л}_{\text{int}})\mathscr{D}_{\text{eq}}(S,\Sigma)- \\ -V\mathscr{D}_{\text{eq}}(S,\Sigma)\left\{\frac{1}{\Phi_0(v_0)}\text{Л}_S^{(1)}\chi_t(S)\Phi_0(v_0)\right\},\quad \Delta_0=0, \tag{194}$$

где

$$\Gamma=\text{Л}_{\text{int}}-\text{Л}_S^{(1)}; \tag{195}$$

$$\text{Л}_S=\text{Л}_S^{(0)}+\text{Л}_S^{(1)}. \tag{196}$$

Рассмотрим случай, когда

$$Л_{\text{int}} = \sum_{(1 \leqslant j \leqslant N)} Л(0, j). \tag{197}$$

Здесь Л $(0, j)$ представляет собой оператор Лиувилля, соответствующий взаимодействию между S и j-й частицей Σ.

Например,

$$Л_{\text{int}}^{(\text{coll})} = \sum_{(1 \leqslant j \leqslant N)} \overline{T}(0, j).$$

Рассмотрим выражение

$$V\,\overline{(Л(0, j)\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(S, \Sigma)\, f(S))}_{\Sigma}. \tag{198}$$

Отметим, что (179) дает

$$V\,\overline{(Л(0, j)\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(S, \Sigma)\, f(S))}_{\Sigma} =$$

$$= V \int Л(0, j)\, F_{S,\Sigma}(0, j)\, f(S)\, \Phi_0(v_0)\, \Phi_\Sigma(v_j)\, d\mathbf{r}_j\, d\mathbf{v}_j, \tag{199}$$

где

$$F_{S,\Sigma}(0, j) = \int\limits_V \ldots \int\limits_V \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}')\, \delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_j') \times$$

$$\times W(\mathbf{r}_0', \mathbf{r}_1', \ldots, \mathbf{r}_N')\, d\mathbf{r}_0'\, d\mathbf{r}_1' \ldots b\, d\mathbf{r}_N'.$$

Принимая во внимание симметрию функций

$$W(\mathbf{r}_0', \mathbf{r}_1', \ldots, \mathbf{r}_N')$$

по отношению к переменным $\mathbf{r}_1', \ldots, \mathbf{r}_N'$, мы видим, что

$$F_{S,\Sigma}(0, j) = \int\limits_V \ldots \int\limits_V \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0')\, \delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_1') \times$$

$$\times W(\mathbf{r}_0', \mathbf{r}_1', \ldots, \mathbf{r}_N')\, d\mathbf{r}_0'\, d\mathbf{r}_1' \ldots d\mathbf{r}_N' =$$

$$= \int\limits_V \ldots \int\limits_V W(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_2', \ldots, \mathbf{r}_N')\, d\mathbf{r}_2' \ldots d\mathbf{r}_N'. \tag{200}$$

Введем приведенную пространственную корреляционную функцию с обычным условием нормировки

$$W(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) = V^2 \int\limits_V \ldots \int\limits_V W(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N)\, d\mathbf{r}_2 \ldots d\mathbf{r}_N. \tag{201}$$

Из трансляционной инвариантности и изотропии пространства следует, что эта функция является радиально-симметричной $w(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) = w(|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|)$.

Предельное выражение (для $V \to \infty$) функции $w(r)$ обладает свойством ослабления корреляций: $w(r) \to 1$, $r \to \infty$. Если взаимодействие между S и Σ полностью отсутствует, то эта функция должна равняться 1.

В рассматриваемом случае малого взаимодействия $w(r)$ близка к единице почти везде, за исключением области изменения, в которой действуют большие силы отталкивания.

Возвращаясь к (200), (201), получаем с учетом (199)

$$\begin{aligned} V\,\overline{(\text{Л}(0, j)\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(S, \Sigma)\,f(S))}_{\Sigma} &= \\ = \frac{1}{V}\int \widetilde{\text{Л}}(0, j)\,f(S)\,\Phi_0(v_0)\,\Phi_\Sigma(v_j)\,d\mathbf{r}_j\,d\mathbf{v}_j &= \\ = V\,\overline{\left(\widetilde{\text{Л}}(0, j)\,f(S)\,\frac{\Phi_0(v)}{V}\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma)\right)}_{\Sigma}, & \end{aligned} \tag{202}$$

где

$$\widetilde{\text{Л}}(0, j) = \text{Л}(0, j)\,w(|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j|) \tag{203}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} V\,\overline{(\text{Л}_{\text{int}}f(S)\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(S, \Sigma))}_{\Sigma} &= \\ = V\,\overline{\left(\widetilde{\text{Л}}_{\text{int}}f(S)\,\frac{\Phi_0(v_0)}{V}\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma)\right)}_{\Sigma}. & \end{aligned} \tag{204}$$

Здесь

$$\text{Л}_{\text{int}} = \sum_{(1 \leqslant j \leqslant N)} \widetilde{\text{Л}}(0, j). \tag{205}$$

Итак, можно сформулировать некое правило: если заменять $\mathscr{D}_{\text{eq}}(S, \Sigma)$ ее приближением, в котором полностью игнорируется корреляция между S и Σ:

$$\mathscr{D}_{\text{eq}}(S, \Sigma) \to \frac{\Phi_0(v_0)}{V}\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma), \tag{206}$$

о перенормировка взаимодействия, т. е. замена

$$\text{Л}_{\text{int}} \to \widetilde{\text{Л}}_{\text{int}}, \tag{207}$$

позволяет учесть эффект корреляции, которым пренебрегают при операции (206).

Это правило справедливо, по крайней мере, когда оно применяется к построению оператора $\text{Л}_S^{(1)}$. Из (202) можно усмотреть, что все эти выражения для $j = 1, \ldots, N$ являются совершенно одинаковыми, и, следовательно, принимая во внимание определение $\text{Л}_S^{(1)}$, получаем

$$\text{Л}_S^{(1)}f(S) = \frac{n}{\Phi_0(v_0)}\int \widetilde{\text{Л}}(0, 1)\,\Phi_\Sigma(v_1)\,f(S)\,d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{v}_1. \tag{208}$$

Перейдем теперь к вычислению поправочного члена в правой части (190):

$$\frac{1}{\Phi_0(v_0)}(\overline{\text{Л}_{\text{int}}\,\Delta_t})_\Sigma. \tag{209}$$

С этой целью вернемся вновь к (193) и (194). Чтобы извлечь из (194) приближенное выражение Δ_t, которое можно было бы использовать в (209), пренебрежем в (194) членами второго порядка малости, рассматривая, тем самым, величину Δ_t как имеющую первый порядок малости.

В таком приближении опустим вначале в (194) члены, содержащие Γ_{Δ_t}. В дальнейшем для $\mathscr{D}_{\text{eq}}(S, \Sigma)$ воспользуемся нулевой аппроксимацией, а именно формулой (206). С тем, чтобы в какой-то мере скомпенсировать результат этих действий, можно попытаться воспользоваться здесь только что сформулированным правилом и провести замену

$$\text{Л}_{\text{int}} \to \widetilde{\text{Л}}_{\text{int}} \tag{210}$$

в соотношениях (194), (209).

В результате этого мы получим следующие приближенные уравнения:

$$\frac{\partial\Delta_t^{(a)}}{\partial t} = (\text{Л}_S + \text{Л}_\Sigma)\,\Delta_t^{(a)} + (\widetilde{\text{Л}}_{\text{int}}\chi_t(S) -$$

70

$$- \chi_t(S)\,\widetilde{\text{Л}}_{\text{int}})\,\Phi_0(v_0)\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma) -$$

$$- \mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma)\,\{\text{Л}_S^{(1)}\chi_t(S)\,\Phi_0(v_0)\},\quad \Delta_t^{(a)} = 0 \text{ для } t = 0, \tag{211}$$

а из (192), поскольку $\chi_t(S)\,\Phi_0(v_0) = f_t(S)$, найдем

$$\frac{\partial f_t(S)}{\partial t} = \text{Л}_S f_t(S) + (\overline{\text{Л}_{\text{int}}\Delta_t^{(a)}})_\Sigma. \tag{212}$$

Необходимо подчеркнуть, что проведенная для учета корреляции между S- и Σ-частицами процедура может и не являться формально внутренне состоятельной.

Действительно, мы оставили здесь лишь некоторые поправочные члены, в то время как другие, имеющие формально тот же порядок малости, были отброшены. Тем не менее данную процедуру можно оправдать с помощью такого же рода интуитивных физических соображений, какие были использованы Энскогом в его теории плотных газов, молекулы которых полагались непроницаемыми шарами. Так, корреляционная функция становится пренебрежимо малой в области действия больших сил отталкивания. Введение ее, обусловленное заменой (210), обеспечивает малость вероятности нахождения $|\,\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j\,|$ внутри этой области.

Возвращаясь к (211), несложно получить

$$\Delta_t^{(a)} = \int_0^t \exp\left[(\text{Л}_S + \text{Л}_\Sigma)(t-\tau)\right]\left((\widetilde{\text{Л}}_{\text{int}}\chi_\tau(S) -\right.$$

$$\left. - \chi_\tau(S)\,\widetilde{\text{Л}}_{\text{int}})\,\Phi_0(v_0)\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma) - \mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma)\left\{\text{Л}_S^{(1)}\chi_\tau(S)\,\Phi_0(v_0)\right\}\right) d\tau. \tag{213}$$

С другой стороны,

$$\left\{\text{Л}_S^{(1)}\chi_\tau(S)\,\Phi_0(v_0)\right\} = \overline{(\widetilde{\text{Л}}_{\text{int}}\chi_\tau(S)\,\Phi_0(v_0)\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma))_\Sigma};$$

$$\overline{(\widetilde{\text{Л}}_{\text{int}}\Phi_0(v)\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma))_\Sigma} = V\,\overline{(\text{Л}_{\text{int}}\mathscr{D}_{\text{eq}}(S,\ \Sigma))_\Sigma} =$$

$$= -V\,\overline{([\text{Л}_S^0 + \text{Л}_\Sigma]\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(S,\ \Sigma))_\Sigma} = -\text{Л}_S^0\Phi_0(v_0) -$$

$$- V\,\overline{(\text{Л}_\Sigma\mathscr{D}_{\text{eq}}(S,\Sigma))_\Sigma} = 0.$$

Таким образом, (213) запишется в виде

$$\Delta_t^{(a)} = \int_0^t \exp\left[(\text{Л}_S + \text{Л}_\Sigma)(t-\tau)\right] \times$$

$$\times \left\{(\widetilde{\text{Л}}_{\text{int}}\chi_\tau(S) - \chi_\tau\widetilde{\text{Л}}_{\text{int}})\,\Phi_0(v_0)\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma) -\right.$$

$$\left. - \mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma)\,\overline{((\widetilde{\text{Л}}_{\text{int}}\chi_\tau(S) - \chi_\tau(S)\,\widetilde{\text{Л}}_{\text{int}})\,\Phi_0(v_0)\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma))_\Sigma}\right\} d\tau. \tag{214}$$

Поскольку эта функция симметрична по отношению к частицам $1, 2, \ldots, N$ из Σ-системы, то из (197), (212) получаем

$$\frac{\partial f_t(S)}{\partial t} = (\text{Л}_S^0 + \text{Л}_S^{(1)})\,f_t(S) + N\,\overline{(\widetilde{\text{Л}}(0,\ 1)\,\Delta_t^{(a)})_\Sigma}. \tag{215}$$

Подстановка (214) в (215) приводит к приближенному уравнению для $\chi_t(S)$ в замкнутой форме.

Приступим теперь к подробному выводу и детальному исследованию этого уравнения при взаимодействии непроницаемых шаров, даваемого формулой (10). Во-первых, заметим, что согласно (11) $\widetilde{\text{Л}}(0,\ j) = w(a)\,\overline{T}(0,\ j)$, откуда следует, что

$$\text{Л}_S^{(1)} = w(a)\,na^2\mathfrak{C}_S, \tag{216}$$

где оператор $\mathfrak{C}_S$ будет определен ниже в (223). Заметим, далее, что

$$\widetilde{\text{Л}}_{\text{int}} = w(a)\,\text{Л}_{\text{int}} = w(a)\sum_{(1\leqslant j\leqslant N)} T(0,\ j), \tag{217}$$

и рассмотрим выражение

$$\overline{T}(0,\ j)\,\chi(S)\,\Phi_0(v_0)\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma)-\chi(S)\,\overline{T}(0,\ j)\,\Phi_0(v_0)\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma)=$$
$$=a^2\int\theta(\mathbf{v}_{0,\,j}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\mathbf{v}_{0,\,j}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\{\delta(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_j-a\boldsymbol{\sigma})\,B_{v_0,\ v_j}(\boldsymbol{\sigma})\,\chi(S)\,\Phi_0(v_0)\times$$
$$\times\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma)-\delta(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_j-a\boldsymbol{\sigma})\,\chi(S)\,B_{v_0,\ v_j}(\boldsymbol{\sigma})\,\Phi_0(v_0)\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma)\}\,d\boldsymbol{\sigma}.$$

Поскольку

$$B_{v_0,\ v_j}(\boldsymbol{\sigma})\,\Phi_0(v_0)\,\Phi_\Sigma(v_j)\equiv\Phi_0(v_0)\,\Phi_\Sigma(v_j),$$

то, как следствие, имеем

$$B_{v_0,\ v_j}\Phi_0(v_0)\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma)=\Phi_0(v_0)\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma).$$

Таким образом,

$$\overline{T}(0,\ j)\,\chi(S)\,\Phi_0(v)\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma)-\chi(S)\,\overline{T}(0,\ j)\,\Phi(v_0)\times$$
$$\times\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma)=T(0,\ j)\,\chi(S)\,\Phi_0(v)\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma)=T(0,\ j)\,f(S)\,\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma),\tag{218}$$

где оператор $T(0,\ j)$ определен соотношением

$$T(0,\ 1)=a^2\int\theta(\mathbf{v}_{0,\,1}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\mathbf{v}_{0,\,1}\cdot\boldsymbol{\sigma}\delta(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1-a\boldsymbol{\sigma})\,\{B_{v_0,\ v_1}(\boldsymbol{\sigma})-1\}\,d\boldsymbol{\sigma}.\tag{219}$$

Принимая во внимание (214), (217), (218), можно переписать (215) в виде

$$\frac{\partial f_t(S)}{\partial t}=\left(-\mathbf{v}_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_0}+na^2w(a)\,\mathfrak{C}_S\right)f_t(S)+$$
$$+w^2(a)\int\limits_0^t K(t-\tau)\,f_\tau(S)\,d\tau,\tag{220}$$

где $K(t)$ — оператор, действующий на функцию $f(s)$ и определяемый соотношением

$$K(t)=$$
$$=\overline{N(\overline{T}(0,1)\exp[(\text{Л}_S+\text{Л}_\Sigma)t]\sum_{(1\leqslant j\leqslant N)}[T(0,j)-\overline{(T(0,j)\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma))_\Sigma}]\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma))_\Sigma};$$
$$\text{Л}_S=-\mathbf{v}_0\,\partial/\partial\mathbf{r}_0+\text{Л}_S^{(1)};\tag{221}$$

$$\left.\begin{aligned}\text{Л}_S^{(1)}&=nw(a)\int\overline{T}(0,\ 1)\,\Phi_\Sigma(v_1)\,d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{v}_1=na^2w(a)\,\mathfrak{C}_S,\\ \mathfrak{C}_S&=\int\theta(\mathbf{v}_{0,\,1}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,(\mathbf{v}_{0,\,1}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\{B_{v_0,\ v_j}(\boldsymbol{\sigma})-1\}\,\Phi_\Sigma(v_1)\,dv_1.\end{aligned}\right\}\tag{222}$$

Желательно отметить связь между операторами $\mathfrak{C}_S$ (222) и L_S, который действует на функцию $\chi(S)$ согласно (77) и в операторной форме записывается как

$$L_S = \int \theta(\mathbf{v}_{0,1}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{v}_{0,1}\cdot\boldsymbol{\sigma})\Phi_\Sigma(v_1)\{B_{v_0, v_1}(\boldsymbol{\sigma}) - 1\}\,dv_1. \qquad (223)$$

Поскольку* $\mathfrak{C}_S\Phi_0(v_0)h(S) = \Phi_0(v_0)L_S h(S)$, то

$$\left(-\mathbf{v}_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_0} + na^2w(a)\mathfrak{C}_S\right)\Phi_0(v_0)h(S) =$$

$$= \Phi_0(v_0)\left(-\mathbf{v}_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_0} + na^2w(a)L_S\right)h(S),$$

что ведет к тождеству

$$\exp\left[t\left(-\mathbf{v}_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_0} + na^2w(a)\mathfrak{C}_S\right)\right]\Phi_0(v_0)h(S) \equiv$$

$$\equiv \Phi_0(v_0)\exp\left[t\left(-\mathbf{v}_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_0} + na^2w(a)L_S\right)\right]h(S). \qquad (224)$$

Возвращаясь к (220), (221), мы видим, что это уравнение практически то же самое, что и определенное выше соотношениями (78), (79), с тем единственным отличием, если отвлечься от фактора Энскога $w(a)$, что в правой части (221) появился оператор $T(0, 1)$ вместо оператора $\overline{T}(0, 1)$, фигурирующего в (79). Следовательно, можно применить ту же процедуру, которая использована в разд. 2 и 3.

В таком случае получим

$$\frac{\partial\chi_t(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)}{\partial t} = \left(-\mathbf{v}_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_0} + na^2w(a)L_S\right)\chi_t(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) +$$

$$+ w^2(a)\int_0^t Q(t-\tau)\chi_\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)\,d\tau, \qquad (225)$$

где

$$Q(t) = \frac{n}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\int d\mathbf{v}_1\Phi_\Sigma(\mathbf{v}_1)\overline{T}_{-k}(v_0, v_1)\times$$

$$\times\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0)\exp\left[\left(-\mathbf{v}_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_0} + na^2w(a)L_S\right)t\right]\times$$

$$\times\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_0)U_k(t, 1)T_k(v_0, v_1); \qquad (226)$$

$$\left.\begin{aligned} T_k(v_0, v_1) &= a^2\int(\mathbf{v}_{0,1}\cdot\boldsymbol{\sigma})\theta(\mathbf{v}_{0,1}\cdot\boldsymbol{\sigma})\times \\ &\quad\times\exp(-ia\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\sigma})(B_{v_0, v_1}(\boldsymbol{\sigma}) - 1)\,d\boldsymbol{\sigma}; \\ T_{-k}(v_0, v_1) &= a^2\int[(\mathbf{v}_{0,1}\cdot\boldsymbol{\sigma})\theta(\mathbf{v}_{0,1}\cdot\boldsymbol{\sigma})](\exp(ia\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma})B_{v_0, v_1}(\boldsymbol{\sigma}) - \\ &\quad-\exp(-ia\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}))\,d\boldsymbol{\sigma}. \end{aligned}\right\} \qquad (227)$$

* Это равенство следует из соотношения

$$B_{v_0, v_1}(\boldsymbol{\sigma})\Phi_0(v_0)\Phi_\Sigma(v_1)h(S) = \Phi_0(v_0)\Phi_\Sigma(v_1)B_{v_0, v_1}(\boldsymbol{\sigma})h(S).$$

Оператор $U_k(t;\ 1)$ можно определить именно так, как показано в разд. 3, а именно с помощью использования бесконечно малой вариации приведенных функций распределения для Σ-системы типа (142). В таком случае

$$\delta F_1(t;\ 1) = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1)\,\Phi_k(t,\ v_1)\,\delta\xi$$

и

$$\Phi_k(t,\ \mathbf{v}_1) = \Phi_\Sigma(v_1)\,U_k(t;\ 1)\,\phi(v_1) = \\ = \Phi_\Sigma(v_1)\int U_k(t;\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_1')\,\phi(\mathbf{v}_1')\,d\mathbf{v}_1'.$$

Интересно, что если бы мы ввели другой оператор $U_k'(t;\ 1)$, положив

$$U_k'(t;\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_1')\,\Phi_\Sigma(v_1') = \Phi_\Sigma(v_1)\,U_k(t;\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_1), \tag{228}$$

то (220) можно записать в виде

$$\frac{\partial f_t(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0)}{\partial t} = \left(-\mathbf{v}_0\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} + na^2w(a)\,\mathfrak{C}_S\right)\times \\ \times f_t(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0)\,w^2(a)\int\limits_0^t Q'(t-\tau)\,f_\tau(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0)\,d\tau, \tag{229}$$

где

$$Q'(t) = \frac{n}{(2\pi)^3}\int dk\int d\mathbf{v}_1\overline{T}_{-k}(v_0,\ v_1)\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0)\times \\ \times\exp\left[\left(-\mathbf{v}_0\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} + na^2w(a)\,\mathfrak{C}_S\right)t\right]\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_0)\,U_k'(t;\ 1)\times \\ \times\Phi_\Sigma(v_1)\,T_k(v_0,\ v_1). \tag{230}$$

Эквивалентность двух представлений (225) и (229) имеет место благодаря (224).

Легко видеть также, что операторы $\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0)\exp\left[\left(-\mathbf{v}_0\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} + na^2w(a)\,L_S\right)t\right]\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_0)$ и $U_k(t;\ 1)$ коммутируют, поскольку они действуют на функции различных переменных, а именно на $h(S)$ и $F(\mathbf{v}_1)$.

Рассмотрим теперь другое тождество

$$\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0)\exp\left[\left(-\mathbf{v}_0\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} + na^2w(a)\,L_S\right)t\right]\exp[i(\mathbf{k}+\mathbf{l})\,\mathbf{r}_0] \equiv \\ \equiv \exp(i\mathbf{l}\mathbf{r}_0)\exp[(-i\mathbf{v}_0(\mathbf{k}+\mathbf{l}) + na^2w(a)\,L_S)\,t],$$

из которого следует, что (225) имеет решение вида

$$\chi_t(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0) = \exp(i\mathbf{l}\mathbf{r}_0)\,\chi_l(t,\ \mathbf{v}_0), \tag{231}$$

где χ_l удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \chi_l(t, v_0)}{\partial t} = (-i\mathbf{l}\mathbf{v}_0 + na^2 w(a) L_S)\chi_l(t, \mathbf{v}_0) + \\ + w^2(a)\int_0^t Q_l(t-\tau)\chi_l(\tau, \mathbf{v}_0)\,d\tau \qquad (232)$$

с

$$Q_l(t) = \frac{n}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\int d\mathbf{v}_1 \Phi_\Sigma(v_1)\,\overline{T}_{-k}(v_0, v_1)\times \\ \times U_k(t;\,1)\exp[(-i\mathbf{v}_0(\mathbf{k}+\mathbf{l}) + na^2 w(a) L_S)\,t]\,T_k(v_0, v_1). \qquad (233)$$

В частности, для $l=0$ имеем уравнение

$$\frac{\partial \chi(t, \mathbf{v}_0)}{dt} = na^2 w(a) L_S \chi(t, \mathbf{v}_0) + w^2(a)\int_0^t Q_0(t-\tau)\chi(\tau, \mathbf{v}_0)\,d\tau, \qquad (234)$$

где

$$Q_0(t) = \frac{n}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\int d\mathbf{v}_1 \Phi_\Sigma(v_1)\,\overline{T}_{-k}(v_0, v_1)\times \\ \times U_k(t;\,1)\exp[(-i\mathbf{v}_0\mathbf{k} + na^2 w(a) L_S)\,t]\,T_k(v_0, v_1). \qquad (235)$$

Для произвольного начального выражения $\chi_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ можно воспользоваться представлением Фурье и, используя (232), рассматривать каждую компоненту Фурье в отдельности.

Перейдем теперь к получению гидродинамической аппроксимации для $U_k(t;\,1)$. Будем исходить из локально-равновесного распределения

$$F_1^{(\mathrm{hyd})}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{\rho}{n}\left(\frac{M}{2\pi\theta}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{M(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}{2\theta}\right]; \\ \theta = k_B T, \qquad (236)$$

где

$$\rho = \rho(t, \mathbf{r}), \quad T = T(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{r})$$

— значения локальной плотности частиц, температуры и вектора скорости. Эти функции должны быть весьма медленно меняющимися функциями на расстояниях порядка средней длины свободного пробега l_Σ и за интервалы времени порядка среднего времени свободного пробега t_Σ, что гарантирует малость поправочного члена в правой части (236).

Все, что здесь требуется, это рассмотреть ситуацию, где локальное равновесие лишь бесконечно мало отличается от полностью равновесного состояния:

$$\left.\begin{aligned} &\rho(t, \mathbf{r}) = n + \delta\rho(t, \mathbf{r}); \quad T(t, \mathbf{r}) = T + \delta T(t, \mathbf{r}); \\ &\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) = \delta\mathbf{u}(t, \mathbf{r}); \quad n, T = \mathrm{const}; \end{aligned}\right\} \qquad (237)$$

$\delta\rho$, δT, $\delta\mathbf{u}$ — бесконечно малые. В таком случае, главный член $\delta F_1^{(\mathrm{hyd})}$, полученный подстановкой (237) в (236), можно записать в виде

$$\delta F_1^{(\mathrm{hyd})}(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{v}) = \Phi_\Sigma(v)\left\{\frac{\delta\rho(t,\ \mathbf{r})}{n} + \frac{Mv^2-3\theta}{2\theta}\,\frac{\delta T(t,\ \mathbf{r})}{T} + \frac{M(\mathbf{v}\delta\mathbf{u}(t,\ \mathbf{r}))}{\theta}\right\}, \tag{238}$$

где $\delta\rho$, δT, $\delta\mathbf{u}$ удовлетворяют хорошо известным линеаризованным уравнениям Навье — Стокса. Поправочные члены к правой части (238) будут, грубо говоря, пропорциональны градиентам $l_\Sigma \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}$, $t_\Sigma \frac{\partial}{\partial t}$ вариаций $\delta\rho$, δT, $\delta\mathbf{u}$. Из-за линейности уравнений можно рассматривать эти вариации как комплексные величины, полагая, что действительная и мнимая части их по отдельности удовлетворяют упомянутым уравнениям.

Положим

$$\delta\rho(t,\ \mathbf{r}) = \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r})\,n\sigma_k(t)\,\delta\xi;\quad \delta T(t,\ \mathbf{r}) = \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r})\,\tau_k(t)\,\delta\xi;$$
$$\delta\mathbf{u}(t,\ \mathbf{r}) = \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r})\,\boldsymbol{\psi}_k(t)\,\delta\xi.$$

В таком случае

$$\delta F_1^{(\mathrm{hyd})}(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{v}) = \Phi_\Sigma(v)\exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r})\times$$
$$\times\left\{\sigma_k(t) + \frac{Mv^2-3\theta}{2\theta}\,\frac{\tau_k(t)}{T} + \frac{M(\mathbf{v}\boldsymbol{\psi}_k(t))}{\theta}\right\}\delta\xi, \tag{239}$$

где благодаря линеаризованным уравнениям Навье — Стокса имеем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{k}\frac{\partial\sigma_k}{\partial t} = \mathrm{i}\,(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\psi}_k);\\ &\frac{1}{k}\frac{\partial\boldsymbol{\psi}_k}{\partial t} = \mathrm{i}\,\frac{c_0^2}{\gamma}\,\mathbf{e}\sigma_k - \nu k\boldsymbol{\psi}_k - k\,(D_l-\nu)\mathbf{e}(\mathbf{e}\boldsymbol{\psi}_k) + \frac{c_0^2\alpha}{\gamma}\,\mathrm{i}\mathbf{e}\tau_k;\\ &\frac{1}{k}\frac{\partial\tau_k}{\partial t} = i\,\frac{\gamma^{-1}}{\alpha}\,\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\psi}_k - \gamma D_T k\tau_k;\quad \mathbf{e} = \mathbf{k}/k. \end{aligned}\right\} \tag{240}$$

Здесь c_0 — скорость звука в длинноволновом пределе; $\gamma = C_p/C_v$ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении C_p и объеме C_v на частицу; $\alpha = \frac{\partial p}{\partial T}\left(n\frac{\partial p}{\partial n}\right)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения; $p = p\,(n,\ T)$ — равновесное давление; ν — кинематическая вязкость; D_T — коэффициент термодиффузии; $D_l = \frac{4}{3}\nu + \zeta\,(nM)^{-1}$; ζ — объемная вязкость.

Как хорошо известно, (240) имеет решения, отвечающие пяти модам: двум волнам сдвига, тепловой моде и двум звуковым модам.

Временная зависимость этих мод дается экспоненциально убывающими функциями:

$$\begin{array}{ll} \exp(-\nu k^2 t) & \text{(волны сдвига или вязкости);} \\ \exp(-D_T k^2 t) & \text{(тепловая мода);} \\ \exp[-(\pm i c_0 k + \Gamma_S k^2/2)\, t] & \text{(звуковые волны),} \end{array} \qquad (241)$$

где $\Gamma_S = D_l + (\gamma + 1) D_T$. Следовательно, любое решение (240), а также выражение, фигурирующее в скобках правой части (231), которые рассматриваются как функции t, являются линейными комбинациями выражений (241).

Отметим также, что ν, D_T, Γ_S являются величинами порядка $l_\Sigma^2 t_\Sigma^{-1}$. Отсюда видно, что эти функции меняются очень медленно с t/t_Σ, когда k достаточно мало:

$$kl_\Sigma \ll 1, \quad kc_0 t_\Sigma \ll 1. \qquad (242)$$

Вернемся вновь к вариациям приведенных функций распределения относительно равновесных распределений при специальном выборе $B(r, v)$ по (142). Рассмотрим вначале (145), (146) и сделаем следующие утверждения: для достаточно малых k, удовлетворяющих (242), функция $\Phi_k(t, \mathbf{v})$ быстро приближается к выражению

$$\Phi_\Sigma(v) \left\{ \sigma_k(t) + \frac{Mv^2 - 3\theta}{2\theta} \frac{\tau_k(t)}{T} + \frac{M}{\theta} (\mathbf{v} \cdot \psi_k(t)) + \text{поправочный член} \right\}, \qquad (243)$$

так что начиная с определенного времени релаксации $t_{\text{рел}} \gg t_\Sigma$ $\Phi_k(t, \mathbf{v})$ практически совпадает с (243) и устанавливается гидродинамический режим. Здесь поправочный член содержит множитель k и его зависимость от времени дается линейной комбинацией функций типа (241).

Благодаря (146) это утверждение приводит к заключению, что асимптотически

$$\int U_k(t, \mathbf{v}, \mathbf{v}') \phi(\mathbf{v}')\, d\mathbf{v}' = \sigma_k(t) + \frac{Mv^2 - 3\theta}{2\theta} \frac{\tau_k(t)]}{T} + \\ + \frac{M}{\theta} (\mathbf{v} \cdot \psi_k(t)) + \text{поправочный член} \qquad (244)$$

для

$$t > t_{\text{рел}} \gg t_\Sigma; \quad k \ll 1/l_\Sigma, \quad 1/c_0 t_\Sigma.$$

Стоит подчеркнуть, что в той ситуации, когда можно использовать какое-либо кинетическое уравнение, например уравнение Больцмана — Энскога или же уравнение Энскога для плотных газов, выше упомянутое утверждение можно формально обосновать. Действительно, если мы располагаем подобным кинетическим уравнением и выясним, что Φ_k пропорциональна δF_1, то нам необходимо будет лишь проанализировать соответствующее линеаризованное уравнение, полученное с помощью Φ_k. Из этого линеаризованного кинетического уравнения следует справедливость не только сформулированного выше утверждения. Становится также возможным вывести линеаризованное уравнение Навье — Стокса и рассчитать его коэффициенты в явном виде. Подобная программа и была осуществлена в классической работе Чепмена и Энскога.

Однако подчеркнем также, что в том случае, когда метод кинетического уравнения не справедлив, как это имеет место для жидкости, наше утверждение относительно поведения $\Phi_k(t, v)$ является лишь обычно принимаемым предположением и коэффициенты в уравнениях Навье — Стокса должны быть определены из эксперимента.

Прежде чем переходить к вычислению главного члена асимптотики в (244), сделаем вначале одно простое замечание относительно интегралов типа

$$\int_0^{k_{\text{макс}}} \exp(-\xi k^2 t)(1+\alpha_1 k+\alpha_2 k^2+\ldots)\, k^2 k, \quad \xi>0, \tag{245}$$

которые возникают в выражении $Q_0(t)$. Проводя замену переменных $k = q/\sqrt{\xi t}$, преобразуем (245) к виду

$$\frac{1}{(\xi t)^{3/2}} \int_0^{\sqrt{\xi t}\, k_{\text{макс}}} \exp(-q^2)\left(1+\alpha_1 \frac{q}{\sqrt{\xi t}}+\alpha_2 \frac{q^2}{\xi t}+\ldots\right) q^2\, dq.$$

Таким образом, для больших t имеем асимптотически

$$\frac{1}{(\xi t)^{3/2}} \int_0^{\infty} \exp(-q^2)\, q^2\, dq = \frac{\sqrt{\pi}}{4(\xi t)^{3/2}}. \tag{246}$$

Очевидно, что поправочные члены $\alpha_1 k + \alpha_2 k^2 + \ldots$, фигурирующие в (245), не дают вклада в этот результат. Та же ситуация возникает и в случае, когда мы рассматриваем интегралы более сложного вида, с которыми приходится иметь дело, исследуя $Q_l(t)$. По этой причине необходимо рассчитать лишь главные члены коэффициентов, появляющихся в (244) с функциями (241), и пренебречь при этом членами, пропорциональными $0(k)$.

Перейдем к нахождению явного выражения для правой части (244). Заметим прежде, что здесь предполагалось, что $\sigma_k(t)$, $\tau_k(t)$, $\psi_k(t)$ удовлетворяют уравнениям (240), однако не был конкретизован выбор начальных значений $\sigma_k(0)$, $\tau_k(0)$, $\psi_k(0)$. Благодаря соотношению (244) мы знаем лишь, что начальные значения являются линейными функционалами $\phi(\mathbf{v})$. Для того чтобы решить эту задачу и определить линейные функционалы, воспользуемся соображениями, высказанными Эрнстом, Хаугом и ван Леевеном [12]. Рассмотрим вариации плотности частиц, плотности импульса и плотности энергии.

Имеем

$$\delta\rho(t, \mathbf{r}) = n \int \delta F_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})\, d\mathbf{v} = \exp(-i\mathbf{kr})\, n \int \Phi_k(t, \mathbf{v})\, d\mathbf{v};$$

$$\delta\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = nM \int \mathbf{v}\delta F_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})\, d\mathbf{v} = \exp(-i\mathbf{kr})\, nM \int \mathbf{v}\Phi_k(t, \mathbf{v})\, d\mathbf{v};$$

$$\delta E(t, \mathbf{r}) = n\frac{M}{2} \int v^2 \delta F_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})\, d\mathbf{v} + \frac{n^2}{2} \int \Phi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, \delta f_2(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')\, d\mathbf{r}',$$

где

$$\delta f_2(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta \int F_2(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{v}')\, d\mathbf{v},\, d\mathbf{v}'. \tag{247}$$

Напомним, что здесь рассмотрен случай (141).

Итак, вариации каждой приведенной функции распределения имеют вид

$$\delta F_S(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{r}_S, \mathbf{v}_S) = \\ = \exp(-i\mathbf{kr}_1)\, \Phi_k^{(S)}(t, r_1, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{r}_S, \mathbf{v}_S)\, \delta, \tag{248}$$

где $\Phi_k^{(2)}$ — инвариант относительно пространственных трансляций. Поэтому можно написать

$$\left.\begin{aligned} \delta f_2(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \exp(-i\mathbf{kr}_1)\, \overline{\Phi}_k^{(2)}(t, \mathbf{r}-\mathbf{r}')\, \delta\xi; \\ \overline{\Phi}_k^{(2)}(t, \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) &= \int \Phi_k^{(2)}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)\, d\mathbf{v}_1\, d\mathbf{v}_2. \end{aligned}\right\} \tag{249}$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \delta\rho(t, \mathbf{r}) &= \exp(-i\mathbf{kr})\, n \int \Phi_k(t, \mathbf{v})\, d\mathbf{v}\, \delta\xi; \\ \delta\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) &= \exp(-i\mathbf{kr})\, nM \int \mathbf{v}\Phi_k(t, \mathbf{v})\, d\mathbf{v}\, \delta\xi; \\ \delta E(t, \mathbf{r}) &= \exp(-i\mathbf{kr}) \left\{ \frac{nM}{2} \int v^2 \Phi_k(t, \mathbf{v})\, d\mathbf{v} + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{n^2}{2} \int \Phi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, \overline{\Phi}_k^{(2)}(t, \mathbf{r}-\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' \right\} \delta\xi. \end{aligned}\right\} \tag{250}$$

Отметим, что в пределе $k \to 0$ мы приходим к пространственно-однородному случаю и вариации (250) плотности частиц, импульса и энергии должны быть точными интегралами движения.

В рассматриваемом случае достаточно малых k можно анализировать производные по времени $\partial/\partial t$, определяемые (250). Использовав иерархию уравнений для δF_S и принимая во внимание (248), можно заключить, что эти производные пропорциональны k. Таким образом, (250) являются, так сказать, квазиинтегралами, т. е. они практически сохраняются в тем бо́льших временных интервалах, чем меньшие k рассматриваются.

Фиксируем определенное время $t_0 \geqslant t_{\text{рел}}$, когда уже достигнут переход к гидродинамическому режиму. В таком случае можно найти такое k_0, что с точностью до членов порядка $O(k)$:

$$\left.\begin{aligned} &\int \Phi_k(t_0, \mathbf{v})\, d\mathbf{v} = \int \Phi_k(0, \mathbf{v})\, d\mathbf{v};\\ &\int \mathbf{v}\Phi_k(t_0, \mathbf{v})\, d\mathbf{v} = \int \mathbf{v}\Phi_k(0, \mathbf{v})\, d\mathbf{v};\\ &\frac{nM}{2}\int v^2\Phi_k(t_0, \mathbf{v})\, d\mathbf{v} + \frac{n^2}{2}\int \Phi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\Phi_k^2(t_0, \mathbf{r}-\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' =\\ &= \frac{nM}{2}\int v^2\Phi_k(0, \mathbf{v})\, d\mathbf{v} + \frac{n^2}{2}\int \Phi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\overline{\Phi}_k^{(2)}(0, \mathbf{r}-\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' \end{aligned}\right\} \tag{251}$$

для $k \leqslant k_0$.

С другой стороны, поскольку к моменту t_0 достигнут гидродинамический режим, имеем

$$\left.\begin{aligned} &\delta\rho(t_0, \mathbf{r}) = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})\, n\sigma_k(t_0)\,\delta\xi;\\ &\delta\mathbf{j}(t_0, \mathbf{r}) = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})\, nM\boldsymbol{\psi}_k(t_0)\,\delta\xi;\\ &\delta E(t_0, \mathbf{r}) = \frac{\partial\varepsilon(n, T)}{\partial n}\,\delta\rho(t_0, \mathbf{r}) + \frac{\partial\varepsilon(n, T)}{\partial T}\,\delta T(t_0, \mathbf{r}) =\\ &= \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})\left\{n\frac{\partial\varepsilon(n, T)}{\partial n}\,\delta_k(t_0) + \frac{\partial\varepsilon(n, T)}{\partial T}\,\tau_k(t_0)\right\}\delta\xi, \end{aligned}\right\} \tag{252}$$

где $\varepsilon(n, T)$ — равновесная плотность энергии.

Заметим, далее, что, поскольку $\sigma_k(t)$, $\tau_k(t)$, $\psi_k(t)$ — линейные комбинации функций (241), можно асимптотически записать

$$\sigma_k(t_0) = \sigma_k(0);\quad \tau_k(t_0) = \tau_k(0);\quad \psi_k(t_0) = \psi_k(0) \tag{253}$$

для

$$k \ll \frac{1}{ct_0},\quad \frac{1}{\sqrt{D_T t_0}},\quad \frac{1}{\sqrt{\Gamma_S t_0}},\quad \frac{1}{\sqrt{\nu t_0}}.$$

Таким образом, благодаря (251) и асимптотическим равенствам, даваемым выражениями (250), (252) справедливым начиная с момента t_0 для достаточно малых k, получаем с точностью до членов $O(k)$:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_k(0) = \int \Phi_k(0, \mathbf{v})\, d\mathbf{v};\quad \psi_k(0) = \int \mathbf{v}\Phi_k(0, \mathbf{v})\, d\mathbf{v};\\ &n\frac{\partial\varepsilon(n, T)}{\partial n}\,\sigma_k(0) + \frac{\partial\varepsilon(n, T)}{\partial T}\,\tau_k(0) =\\ &= \frac{nM}{2}\int v^2\Phi_k(0, \mathbf{v})\, d\mathbf{v} + \frac{n^2}{2}\int \Phi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\overline{\Phi}_k^{(2)}(0, \mathbf{r}-\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' \end{aligned}\right\} \tag{254}$$

для $k \leqslant k_1$, где

$$k_1 \leqslant k_0; \; k_1 \ll \frac{1}{ct_0}, \quad \frac{1}{\sqrt{D_T t_0}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Gamma_S t_0}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\nu t_0}}.$$

В (254)

$$\partial\varepsilon(n, T)/\partial T = nC_V, \tag{255}$$

где C_V — теплоемкость на частицу при постоянной плотности.

Сделаем несколько замечаний относительно $\varepsilon(n, T)$. Имеем

$$\varepsilon(n, T) = \frac{3\theta}{2} n + \frac{n^2}{2} \int \Phi(r) f_2^{(eq)}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}, \tag{256}$$

где

$$f_2^{(eq)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \int F_2^{(eq)}(1, 2) \, d\mathbf{v}_1 \, d\mathbf{v}_2$$

— пространственная бинарная приведенная функция распределения в состоянии статистического равновесия. Конечно, $f_2^{(eq)}$ зависит от n и T. Удобно ввести химический потенциал $\mu = \mu(n, T)$- $n = n(\mu, T)$. Используя тогда свойства флуктуаций в состоянии равновесия, находим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\theta}{n}\left(\frac{\partial n}{\partial\mu}\right)_T = 1 + n\int g_2(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}; \quad g_2(\mathbf{r}) = f_2^{(eq)}(\mathbf{r}) - 1; \\ &\frac{\theta}{n}\left(\frac{\partial}{\partial\mu} n^2 f_2^{(eq)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right)_T = 2n f_2^{(eq)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \\ &+ n^2 \int [f_3^{(eq)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) - f_2^{(eq)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]\,d\mathbf{r}_3 \end{aligned}\right\} \tag{257}$$

и, следовательно.

$$n\frac{\partial\varepsilon(n, T)}{\partial n} = \frac{3\theta}{2} n + \frac{n^3}{2}\int \Phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\Big[2f_2^{(eq)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \\ + n\int \{f_3^{(eq)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) - f_2^{(eq)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\}\,d\mathbf{r}_3\Big]\,d\mathbf{r}_2 \left(\theta\frac{\partial n}{\partial\mu}\right)_T^{-1}.$$

Теперь можно представить третье уравнение (254) в виде

$$C_V \tau_k(0) = \int \frac{MV^2 - 3\theta}{2} \Phi_k(0, \mathbf{v})\,d\mathbf{v} + \frac{n}{2}\int \Phi(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2) \times \\ \times \Big\{\overline{\Phi}_k^{(2)}(0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \Big[2f_2^{(eq)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + n\int \Big(f_3^{(eq)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) - \\ - f_2^{(eq)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\Big)\Big]\,dr_3 \sigma_k(0)\, n \left(\theta\frac{\partial n}{\partial\mu}\right)_T^{-1}\Big\}\,d\mathbf{r}_2. \tag{258}$$

Чтобы получить выражения для $\Phi_k(0, \mathbf{v})$; $\overline{\Phi}_k^{(2)}(0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, воспользуемся нашими предыдущими результатами (см. разд. 3).

Так, из (144), (145) мы имеем

$$\Phi_k(0, \mathbf{v}) = \Phi_\Sigma(v)\left\{\phi(\mathbf{v}) + n\int g_2(\mathbf{r})\exp(i\mathbf{kr})\,d\mathbf{r}\times\right.$$
$$\left.\times\int\phi(\mathbf{v}')\,\Phi_\Sigma(\mathbf{v}')\,d\mathbf{v}'\right\}. \tag{259}$$

Таким образом,

$$\int\frac{Mv^2-3\theta}{2}\Phi_k(0, \mathbf{v})\,d\mathbf{v} = \int\frac{Mv^2-3\theta}{2}\Phi_\Sigma(v)\,\phi(\mathbf{v})\,d\mathbf{v} \tag{260}$$

и (254) приводится к виду

$$\left.\begin{aligned}\sigma_k(0) &= \left(1 + n\int g_2(\mathbf{r})\exp(i\mathbf{kr})\,d\mathbf{r}\right)\int\phi(\mathbf{v})\,\Phi_\Sigma(v)\,d\mathbf{v};\\ \psi_k(0) &= \int\mathbf{v}\Phi_\Sigma(v)\,\phi(\mathbf{v})\,d\mathbf{v}.\end{aligned}\right\} \tag{261}$$

Отметим, что равновесная корреляционная функция $g_2(\mathbf{r})$ практически исчезает, когда r становится намного больше, чем корреляционная длина.

Если равновесная Σ-система не находится вблизи критической точки, что мы здесь предполагаем, то тогда корреляционная длина порядка радиуса сил межчастичного взаимодействия a_Σ. Для жидкости l_Σ порядка a_Σ, для газов $a_\Sigma \ll l_\Sigma$.

В любом случае, поскольку $k \ll l_\Sigma^{-1}$, мы видим, что вплоть до членов порядка $O(k^2)$ справедливо следующее асимптотическое равенство:

$$\int g_2(\mathbf{r})\exp(i\mathbf{kr})\,d\mathbf{r} = \int g_2(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}.$$

Таким образом, (261) приводит в рамках принятой аппроксимации к

$$\sigma_k(0) = \frac{\theta}{n}\left(\frac{\partial n}{\partial\mu}\right)_T\int\phi(\mathbf{v})\,\Phi_\Sigma(v)\,d\mathbf{v}. \tag{262}$$

Чтобы получить выражения для $\overline{\Phi}_k^{(2)}(0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, будем исходить из (141). Эти формулы дают

$$\delta F_2(0;\ 1,\ 2) = \Phi_\Sigma(v_1)\,\Phi_\Sigma(v_2)\{(\exp(-i\mathbf{kr}_1)\,\phi(\mathbf{v}_1) +$$
$$+\exp(i\mathbf{kr}_2)\,\phi(\mathbf{v}_2))\,f_2(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) +$$
$$+n\int[f_3(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3) - f_2(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)]\times$$
$$\times\exp(-i\mathbf{kr}_3)\,d\mathbf{r}_3\int\phi(\mathbf{v})\,\Phi_\Sigma(\mathbf{v})\,d\mathbf{v}\}\,\delta\xi.$$

Из (249) следует, что

$$\overline{\Phi}_k^{(2)}(0,\ \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\{(1+\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)])\,f_2(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)+$$
$$+n\int[f_3(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)-f_2(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)]\times$$
$$\times\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)]\,d\mathbf{r}_3\}\int\phi(\mathbf{v})\,\Phi_\Sigma(\mathbf{v})\,d\mathbf{v}. \qquad (263)$$

Это выражение требуется нам здесь лишь для вычисления интеграла

$$\frac{n}{2}\int\Phi(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,\overline{\Phi}_k^{(2)}(0,\ \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,d\mathbf{r}_2.$$

Поскольку относительные расстояния $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|$ порядка эффективного радиуса межчастичного взаимодействия a_Σ, то в (263) фактор $1+\exp i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ можно заменить на 2. Далее, когда $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3|\gg a_\Sigma$ и, следовательно, $|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|\gg a_\Sigma$, комбинация $f_3^{(\mathrm{eq})}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)-f_2^{(\mathrm{eq})}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$, характеризующая корреляцию между частицами, оказывающимися в точке $\mathbf{r}_3$, и частицами в окрестности $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, практически равна нулю.

Итак, в нашей аппроксимации

$$\frac{n}{2}\int\Phi(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,\overline{\Phi}_k^{(2)}(0,\ \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,d\mathbf{r}_2=$$
$$=\frac{n}{2}\int\Phi(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\Big\{2f_2^{(\mathrm{eq})}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)+n\int[f_3^{(\mathrm{eq})}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)-$$
$$-f_2^{(\mathrm{eq})}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)]\,d\mathbf{r}_3\Big\}\,d\mathbf{r}_2\int\phi(\mathbf{v})\,\Phi_\Sigma(\mathbf{v})\,d\mathbf{v}. \qquad (264)$$

Однако благодаря (262)

$$n\sigma_k(0)\left(\theta\frac{\partial n}{\partial\mu}\right)_T^{-1}=\int\phi(\mathbf{v})\,\Phi_\Sigma(\mathbf{v})\,d\mathbf{v},$$

и поэтому второй член в правой части (258) равен нулю. Отметим также, что $(\partial n/\partial\mu)_T=n\,(\partial p/\partial n)_T^{-1}$.

Собирая наши результаты (258), (261), (262), (264), можно в итоге выписать выражения, адекватные значениям начальных величин, вычисленные с точностью до членов $O(k)$:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_k(0)&=\theta\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_T^{-1}\int\Phi_\Sigma(v')\,\phi(\mathbf{v}')\,d\mathbf{v}';\\
\tau_k(0)&=C_V^{-1}\int\Phi_\Sigma(v')\,\frac{Mv'^2-3\theta}{2}\,\phi(\mathbf{v}')\,d\mathbf{v}';\\
\psi_k(0)&=\int\Phi_\Sigma(v')\,\mathbf{v}'\phi(\mathbf{v}')\,d\mathbf{v}'.
\end{aligned}\right\} \qquad (265)$$

Теперь можно приступить к нахождению решений уравнений (240). В этих уравнениях фигурирует единичный вектор

$\mathbf{e} = \mathbf{k}/k$. Введем также два других единичных вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ таким образом, чтобы три вектора $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ были взаимно ортогональны.

Тогда

$$\psi_k = \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\psi_k) + \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2\psi_k) + \mathbf{e}(\mathbf{e}\psi_k) \tag{266}$$

и из (240) следует

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_j\psi_k(t)) = -\nu k^2(\mathbf{e}_j\psi_k(t)), \qquad j = 1,\ 2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_j\psi_k(t)) &= \exp(-\nu k^2 t)(\mathbf{e}_j\psi_k(0)) = \\ &= \exp(-\nu k^2 t)\int \Phi_\Sigma(v')(\mathbf{e}_j\mathbf{v}')\,\phi(\mathbf{v}')\,d\mathbf{v}', \qquad j = 1,\ 2.\end{aligned} \tag{267}$$

Нам осталось найти три функции

$$\sigma_k(t), \quad s_k(t) = (\mathbf{e}\psi_k(t)), \quad \tau_k(t). \tag{268}$$

Систему уравнений (240) можно переписать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{k}\frac{\partial\sigma_k}{\partial t} &= \mathrm{i}s_k;\\ \frac{1}{k}\frac{\partial s_k}{\partial t} &= \mathrm{i}\,\frac{c_0^2}{\gamma}\,\sigma_k - D_l k s_k + \mathrm{i}\,\frac{c_0^2\alpha}{\gamma}\,\tau_k;\\ \frac{1}{k}\frac{\partial\tau_k}{\partial t} &= \mathrm{i}\,\frac{\gamma-1}{\alpha}\quad s_k - \gamma D_T k\tau_k.\end{aligned}\right\} \tag{269}$$

Чтобы решить эти уравнения, введем три независимые комбинации A_H, $A_\pm$, составленные из функций (268) таким образом, чтобы (269) приняло вид

$$\partial A(t)/\partial t = -\Omega A(t)$$

и

$$A(t) = \exp(-\Omega t)\,A(0).$$

Рассчитаем Ω так, чтобы учесть при этом члены, пропорциональные k^2, поскольку именно они ответственны за появление затухания функций (268). С другой стороны, при расчете коэффициентов линейных форм A_H, $A_\pm$ мы обязаны пренебречь членами порядка $O(k)$, поскольку начальные значения (268) сами были рассчитаны лишь с точностью до этого порядка малости. В итоге получаем

$$\left.\begin{aligned}&A_H(t) = \gamma^{-1}((\gamma-1)\,\sigma_k(t) - \alpha\tau_k(t)); \quad \Omega_H = D_T k^2;\\ &A_\pm(t) = \gamma^{-1}(\sigma_k(t) + \alpha\tau_k(t))/2 \mp c_0^{-1}s_k(t)/2;\\ &\Omega_\pm = \pm\,\mathrm{i}c_0 k + \Gamma_S k^2/2.\end{aligned}\right\} \tag{270}$$

Обращая (270), имеем

$$\sigma_k(t) = A_H(t) + A_+(t) + A_-(t);$$
$$\tau_k(t) = -\alpha^{-1}A_H(t) + (\gamma - 1)\alpha^{-1}(A_+(t) + A_-(t));$$
$$s_k(t) = c_0(A_-(t) - A_+(t)).$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_k(t) &= \exp(-\Omega_H t)A_H(0) + \exp(-\Omega_+ t)A_+(0) + \\
&\qquad + \exp(-\Omega_- t)A_-(0);\\
\tau_k(t) &= -\alpha^{-1}\exp(-\Omega_H t)A_H(0) + (\gamma-1)\alpha^{-1}\exp(-\Omega_+ t)\times\\
&\qquad \times A_+(0) + (\gamma-1)\alpha^{-1}\exp(-\Omega_- t)A_-(0);\\
(\mathbf{e}\psi_k(t)) &= s_k(t) = c_0A_-(0)\exp(-\Omega_- t) - c_0A_+(0)\exp(-\Omega_+ t).
\end{aligned}\right\} \quad (271)$$

С учетом (265), (270) получаем

$$\left.\begin{aligned}
A_H(0) &= \int\left\{\left(1-\gamma^{-1}\right)\theta\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_T^{-1} - \gamma^{-1}\alpha C_V^{-1}\frac{Mv'^2 - 3\theta}{2}\right\}\times\\
&\qquad \times \Phi_\Sigma(v')\phi(\mathbf{v}')\,dv';\\
A_\pm(0) &= \int\left\{\frac{1}{2}\gamma^{-1}\theta\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_T^{-1} + \frac{1}{2}(\gamma C_V)^{-1}\alpha\frac{Mv'^2 - 3\theta}{2}\mp\right.\\
&\qquad \left.\mp\frac{1}{2}c_0^{-1}(\mathbf{e}\mathbf{v}')\right\}\Phi_\Sigma(v')\phi(\mathbf{v}')\,d\mathbf{v}'.
\end{aligned}\right\} \quad (272)$$

Подставляя (266), (267), (271) в (244), имеем

$$\begin{gathered}
\int U_k(t, \mathbf{v}, \mathbf{v}')\phi(\mathbf{v}')\,d\mathbf{v}' = \\
= \exp(-\nu k^2 t)\frac{M}{\theta}(\mathbf{v}_1\mathbf{e}_1)\int(\mathbf{v}_1'\mathbf{e}_1)\Phi_\Sigma(v_1')\phi(\mathbf{v}_1')\,d\mathbf{v}_1' + \\
+ \exp(-\nu k^2 t)\frac{M}{\theta}(\mathbf{v}_1\mathbf{e}_2)\int(\mathbf{v}_1'\mathbf{e}^2)\Phi_\Sigma(v_1')\phi(\mathbf{v}_1')\,d\mathbf{v}_1' + \\
+ \exp(-\Omega_H t)\left\{1 - \frac{Mv^2 - 3\theta}{2\theta}(\alpha T)^{-1}\right\}A_H(0) + \\
+ \exp(-\Omega_+ t)\left\{1 + \frac{Mv^2 - 3\theta}{2\theta}(\alpha T)^{-1}(\gamma-1) - \frac{M}{\theta}c_0(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e})\right\}A_+(0) + \\
+ \exp(-\Omega_- t)\left\{1 + \frac{Mv^2 - 3\theta}{2\theta}(\alpha T)^{-1}(\gamma-1) + \frac{M}{\theta}c_0(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e})\right\}A_-(0).
\end{gathered} \quad (273)$$

Для унификации обозначений определим следующие величины:

$$
\left.\begin{aligned}
&\theta_1^{(L)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v})=\theta_1^{(R)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v})=\sqrt{\frac{M}{\theta}}\,(\mathbf{e}_1\mathbf{v});\\
&\theta_2^{(L)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v})=\theta_2^{(R)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v})=\sqrt{\frac{M}{\theta}}\,(\mathbf{e}_2\mathbf{v});\quad \omega_1(k)=\omega_2(k)=\nu k^2;\\
&\theta_3^{(L)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v})=\left(\frac{Mv^2-3\theta}{2\theta}-\alpha T\right)\left(\frac{k_B}{C_p}\right)^{1/2};\\
&\theta_3^{(R)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v})=\left(\frac{Mv^2-3\theta}{2\theta}-(\gamma-1)\frac{nC_v}{(\partial p/\partial T)_n}\right)\left(\frac{k_B}{C_p}\right)^{1/2};\\
&\omega_3(k)=\Omega_H=D_T k^2;\\
&\theta^{(L)}_{\binom{4}{5}}(\mathbf{e},\ \mathbf{v})=\left(1+\frac{Mv^2-3\theta}{2\theta}(\alpha T)^{-1}(\gamma-1)\mp\frac{M}{\theta}c_0(\mathbf{v}\mathbf{e})\right)(1/2)^{1/2};\\
&\theta^{(R)}_{\binom{4}{5}}(\mathbf{e},\ \mathbf{v})=\left(\theta\gamma^{-1}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)^{-1}+(\gamma C_V)^{-1}\alpha\frac{Mv^2-3\theta}{2}\pm\right.\\
&\qquad\qquad\left.\pm\frac{1}{C_0}(\mathbf{v}\mathbf{e})\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2};\\
&\omega_4(k)=\Omega_+=\mathrm{i}c_0k+\Gamma_S k^2/2;\\
&\omega_5(k)=\Omega_-=-\mathrm{i}c_0k+\Gamma_S k^2/2,
\end{aligned}\right\}\tag{274}
$$

где k_B — постоянная Больцмана.

Тогда (272), (274) позволяют переписать (273) следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\int U_k(t,\ \mathbf{v},\ \mathbf{v}')\,\phi(\mathbf{v}')\,d\mathbf{v}'=\\
&=\sum_{(1\leqslant j\leqslant 5)}\theta_j^{(L)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}')\exp(-\omega_j(k)\,t)\int\theta_j^{(R)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}')\times\\
&\qquad\times\Phi_\Sigma(v')\,\phi(\mathbf{v}')\,d\mathbf{v}',\quad t>t_{\text{рел}};\ k<k_1.
\end{aligned}\tag{275}
$$

Подчеркнем, что в тех случаях, когда применимы кинетическое уравнение типа Больцмана или же кинетическое уравнение типа Энскога *, можно получить такой же результат, что и (275). Строго говоря, для этого необходима не полная форма какого-либо кинетического уравнения, а лишь его линеаризованная версия.

Эти линеаризованные уравнения приводят к соотношению (275), если для $\omega_j(k)$ рассчитываются вклады членов, пропорциональные k^2, в то время как при расчете коэффициентов $\theta_j^{(L)}$, $\theta_j^{(R)}$ членами порядка k пренебрегается. В подобном приближении конкретные значения и равновесных средних, и коэффициентов пере-

* Что имеет место для газа непроницаемых шаров умеренной плотности.

носа ($\nu_9 D_T$, Γ_S) получаются в соответствии с теми аппроксимациями, в которых установлено данное кинетическое уравнение. Воспользуемся теперь (275), чтобы привести уравнения (232), (234) к более определенному виду.

Рассмотрим вначале выражение $Q_l(t)\,\chi(\mathbf{v}_0)$ и заметим, что оно содержит оператор $\exp[(-i\mathbf{v}_0\boldsymbol{\lambda} + na^2 w(a) L_S)\,t]$; $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{k} + \mathbf{l}$, действующий на функции $\mathbf{v}_0$. Введем скалярное произведение для подобных функций:

$$(g,\ h) = \int \Phi_0(v_0)\, g(\mathbf{v}_0)\, h(\mathbf{v}_0)\, d\mathbf{v}_0; \tag{276}$$

соответствующее гильбертово скалярное произведение дается формулой

$$(g,\ h)_H = (g^*,\ h). \tag{277}$$

Согласно определению оператор

$$na^2 w(a)\, L_S \tag{278}$$

является симметричным и эрмитовым:

$$(g,\ L_S h) = (L_S g,\ h);\ \ (g,\ L_S h)_H = (L_S g,\ h)_H.$$

Очень хорошо известно также, что его спектр состоит из отрицательной части и невырожденного нулевого собственного значения, отвечающего нормированной собственной функции $\varphi(v) = 1$: $L_S \cdot 1 = 0$. Щель между отрицательной частью и нулем для (278) порядка t_0^{-1}, где

$$t_0 = (m/\pi\theta)^{1/2}/[4na^2 w(a)] \tag{279}$$

представляет собой среднее время свободного пробега частицы S в аппроксимации Энскога.

Конечно, собственные функции $\psi(\mathbf{v})$ оператора (278), отвечающие его отрицательным собственным значениям, ортогональны 1:

$$\int \Phi_0(v)\, \psi(\mathbf{v})\, d\mathbf{v} = 0 \tag{280}$$

Оператор $E_\lambda = -i\mathbf{v}\lambda + na^2 w(a) L_S$, очевидно, неэрмитов, однако он сохраняет свойства симметрии: $(g,\ E_\lambda h) = (E_\lambda g,\ h)$.

Рассмотрим собственную функцию

$$E_\lambda \varphi_\lambda(\mathbf{v}) = -\omega_0(\lambda)\, \psi_\lambda(\mathbf{v}),$$

для которой $\omega_0(\lambda) \to 0$, когда $\lambda \to 0$. Используя обычную теорию возмущения, легко находим

$$\left.\begin{aligned} \psi_\lambda(v) &= 1 + \frac{1}{na^2w(a)} L_S^{-1}(\lambda, \mathbf{v}) + O(\lambda^2); \\ \omega_0(\lambda) &= D_0\lambda^2 + O(\lambda^2); \\ D_0 &= -\int \Phi_0(\mathbf{v})\, v_x L_S^{-1} v_x\, d\mathbf{v}\, (na^2w(a))^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{281}$$

Отметим здесь, что функции v_x, v_y, v_z относятся к классу (280), где хорошо определен обратный оператор L_s^{-1}. В первом приближении Энскога

$$D_0 = \frac{3}{8na^2w(a)}\left(\frac{m}{\pi\theta}\right)^{-1/2}. \tag{282}$$

Пренебрегая для $t \gg t_0$ быстро распадающимися членами в экспонентах, обусловленными отрицательной частью спектра (278), запишем

$$\exp(E_\lambda t)\,\chi(\mathbf{v}) = \exp(-\omega_0(\lambda)\,t)\,\psi_\lambda(\mathbf{v}) \times \\ \times \int \Phi_0(v)\,\psi_\lambda(\mathbf{v})\,\chi(\mathbf{v})\,d\mathbf{v}.$$

Однако мы должны иметь в виду, что щель между нулем и отрицательной частью спектра (278) порядка t_0^{-1}. Следовательно, для справедливости данного асимптотического соотношения необходимо, чтобы $D_0\lambda^2 \ll t_0^{-1}$ или же

$$\lambda \ll l_0^{-1} = (3/2)^{-1/2} 4na^2w(a) \tag{283}$$

Придерживаясь в таком случае принятой схемы, мы пренебрежем членами порядка $O(\lambda)$ в ψ_λ и членами более высокого порядка, чем $O(\lambda^2)$ в $\omega_0(\lambda)$, и положим

$$\psi_\lambda(\mathbf{v}) = 1;\quad \omega_0(\lambda) = D_0\lambda^2. \tag{284}$$

Действуя таким образом, получим

$$\exp[(-i\mathbf{v}_0\lambda + na^2w(a)\,L_S)\,t]\,\chi(\mathbf{v}_0) = \\ = \exp[-\omega_0(\lambda)\,t]\int \Phi_0(v)\,\chi(\mathbf{v})\,d\mathbf{v}, \tag{285}$$

когда $t \gg t_0$.

Прежде чем использовать этот результат в (233), полезно учесть, что (233) содержит операторы

$$\overline{T}_k,\quad T_k, \tag{286}$$

зависимость которых от k определяется факторами $\exp[\pm iak(\mathbf{e}\cdot\sigma)]$. Однако $ka \ll al_0^{-1} \ll 1$ и, следовательно, для внутренней согласованности используемых аппроксимаций мы должны заменить (286) на $T_0 = \overline{T}_0$. С другой стороны, интегрирование по $\mathbf{k}$ в (233), очевидно, требуется обрезать:

$$k < k_{\text{макс}}, \tag{287}$$

где $k_{\text{макс}} < k_1$; $k_{\text{макс}} \ll l_0^{-1}$, поскольку мы исследуем здесь лишь ту часть $Q_l(t)$, которая уменьшается слабее, чем любая экспонента $\exp(-t/t_f)$ с фиксированным t_f, и поскольку вся схема нашей аппроксимации строго зависит от этого условия [см., например, (275), (283)].

Теперь подставим наши результаты в (233). Во-первых, из (285) следует

$$\exp[(-i\mathbf{v}_0(\mathbf{k}+l) + na^2w(a)L_S)t] \times \\ \times T_k(v_0, v_1)\chi(v_0) = \exp[-t\omega_0(\mathbf{k}+\mathbf{l})] \times \\ \times \int d\mathbf{v}'\Phi_0(v_0')T_0(v_0', v_1)\chi(\mathbf{v}_0).$$

Здесь правая часть является функцией $\mathbf{v}_1$. Следовательно, воспользовавшись (275), получаем

$$U(t;1)\exp[(-i\mathbf{v}_0(\mathbf{k}+\mathbf{l}) + na^2w(a)L_S)t]T_k(v_0, v_1)\chi(\mathbf{v}_0) = \\ = \sum_{(1\leqslant j\leqslant 5)} \exp\{-[\omega_j(k) + \omega_0(\mathbf{k}+\mathbf{l})]t\}\theta_j^{(L)}(\mathbf{e}, \mathbf{v}_1) \times \\ \times \int d\mathbf{v}_0' d\mathbf{v}_1' \Phi_0(v_0')\Phi_\Sigma(v_1')\theta_j^{(R)}(\mathbf{e}, \mathbf{v}_1')T_0(v_0', v_1')\chi(\mathbf{v}_0').$$

Из (233) теперь следует

$$Q_l(t)\chi(\mathbf{v}_0) = \frac{n}{(2\pi)^3}\int\limits_{|k|<k_{\text{макс}}} d\mathbf{k} \sum_{(1\leqslant j\leqslant 5)} \exp[-(\omega_j(k) + \omega_0(\mathbf{k}+\mathbf{l}))t] \times \\ \times\left\{\int d\mathbf{v}_1\Phi_\Sigma(v_1)T_0(v_0, v_1)\theta_j^{(L)}(\mathbf{e}, \mathbf{v}_1)\right\} \times \\ \times\left\{\int d\mathbf{v}_0' d\mathbf{v}_1'\Phi_0(v_0')\Phi_\Sigma(v_1')\theta_j^{(R)}(\mathbf{e}, \mathbf{v}_1')T_0(v_0', v_1')\chi(\mathbf{v}_0')\right\}.$$

Замечая, что функции

$$g(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1) = \begin{cases} mv_0^2 + Mv_1^2; \\ mv_0 + Mv_1; \\ \text{const} \end{cases}$$

являются инвариантами соударения, видим, что

$$\int d\mathbf{v}_1 \Phi_\Sigma(v_1)\, T_0(v_0,\ v_1)\, \theta_j^{(L)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}_1) =$$
$$= -\int d\mathbf{v}_1 \Phi_\Sigma(v_1)\, T_0(v_0,\ v_1)\, \psi_j^{(R)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}_0) = -a^2 L_S \psi_j^{(L)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}_0);$$
$$\int d\mathbf{v}_0'\, d\mathbf{v}_1' \Phi_0(v_0')\, \Phi_\Sigma(v_1')\, \theta_j^{(R)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}_1') \times$$
$$\times T_0(v_0',\ v_1)\, \chi(\mathbf{v}_0') = -\int d\mathbf{v}_0'\, d\mathbf{v}_1' \Phi_0(\mathbf{v}_0') \times$$
$$\times \Phi_\Sigma(v_1')\, \psi_j^{(R)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}_0')\, T_0(v_0',\ v_1')\, \chi(\mathbf{v}_0') =$$
$$= -a^2 \int d\mathbf{v}_0' \Phi_0(v_0')\, \psi_j^{(R)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}_0')\, L_S \chi(\mathbf{v}_0'),$$

где *

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_j^{(R)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}) = \psi_j^{(L)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}) = \frac{m}{(M\theta)^{1/2}}(\mathbf{e}_j \mathbf{v}), \quad j = 1,\ 2;\\
&\psi_3^{(R)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}) = \psi_3^{(L)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}) = [(mv^2 - 3\theta)/2\theta]\,(k_B/C_p)^{1/2};\\
&\psi_{\binom{4}{5}}^{(L)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}) = (1/2)^{1/2}\left(\frac{mv^2 - 3\theta}{2\theta}(\alpha T)^{-1}(\gamma - 1) \mp \frac{m}{\theta} C_0 \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}\right);\\
&\psi_{\binom{4}{5}}^{(R)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{mv^2 - 3\theta}{2}\frac{\alpha}{C_p} \mp \frac{m}{MC_0}\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}\right);
\end{aligned}\right\} \quad (288)$$

В итоге приходим к полностью определенному выражению

$$Q_l(t)\,\chi(v_0) = \frac{na^4}{(2\pi)^3} \int\limits_{|k|k_{\text{макс}}} \sum_{(1 \leqslant j \leqslant 5)} \exp\{-[\omega_j(k) + \omega_0(\mathbf{k} + \mathbf{l})]\, t\} \times$$
$$\times L_S \psi_j^{(L)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}_0) \int d\mathbf{v}_0' \Phi_0(v_0')\, \psi_j^{(R)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}_0')\, L_S \chi(\mathbf{v}_0'), \qquad (289)$$

когда $t \gg t_0$, $t_0 > t_{\text{рел}}$, которое можно подставить в уравнения (232), (234).

Рассмотрим случай, когда $l = 0$. Тогда (234) приводит к уравнению

$$\frac{\partial \chi(t,\ \mathbf{v}_0)}{\partial t} = na^2 w(a)\, L_S \chi(t,\ \mathbf{v}_0) + w^2(a) \int_0^t Q_0(t - \tau)\, \chi(\tau,\ \mathbf{v})\, d\mathbf{v};$$
$$Q_0(t - \tau)\, \chi(\mathbf{v}_0) = \frac{na^4}{(2\pi^3)} \int_0^{k_{\text{макс}}} k^2\, dk \sum_{(1 \leqslant j \leqslant 5)} \exp\{-[\omega_j(k) +$$
$$+ \omega_0(k)](t - \tau)\} \int d\mathbf{e}\, L_S \psi_j^{(L)}(\mathbf{e},\mathbf{v}_0) \int d\mathbf{v}_0' \Phi_0(v_0')\, \psi_j^{(R)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v})\, L_S \chi(\mathbf{v}_0'). \qquad (290)$$

---

* Ясно, что мы можем добавить к правой части (188) любые члены, которые не зависят от v, поскольку вклад их будет равняться нулю.

Очевидно, что если $\chi(0, \mathbf{v}_0) = \text{const}$, то также и $\chi(t, \mathbf{v}_0) = \chi(0, \mathbf{v}_0) = \text{const}$, поскольку $L_S \text{ const} = 0$. С физической точки зрения это тривиальное решение соответствует изменению нормировки $\mathscr{F}_{\text{eq}}(S, \Sigma)$.

Вычитая из $\chi(0, \mathbf{v}_0)$ соответствующую постоянную, можно добиться выполнения соотношения

$$\int \Phi_0(v_0)\, \chi(0, \mathbf{v}_0)\, d\mathbf{v}_0 = 0. \tag{291}$$

Заметим, что это свойство также сохраняется:

$$\int \Phi_0(v_0)\, \chi(t, \mathbf{v}_0)\, d\mathbf{v}_0 = 0, \tag{292}$$

поскольку

$$\int \Phi_0(v_0)\, L_S g(\mathbf{v}_0)\, d\mathbf{v}_0 = 0.$$

По этой причине мы сосредоточим внимание на функциях (291), которые ортогональны единице:

$$(1, \chi) = 0. \tag{293}$$

Чтобы получить первое приближение для $\chi(t, \mathbf{v})$, пренебрежем в уравнении (290) поправочным членом, содержащим $Q_0(t)$, и найдем

$$\chi(t, \mathbf{v}_0) = \exp\left[tna^2 w(a) L_S\right] \chi(0, \mathbf{v}_0). \tag{294}$$

Поскольку спектр оператора $na^2 w(a) L_S$ в пространстве функций (293) отрицателен и отделен от нуля щелью порядка t_0^{-1}, функция (294) экспоненциально убывает для $t \gg t_0$.

Таким образом, данную аппроксимацию можно представить формулой

$$\chi(t, \mathbf{v}_0) = \delta(t) \int_0^\infty \exp\left[tna^2 w(a) L_S\right] dt\, \chi(0, \mathbf{v}) =$$
$$= -\delta(t)\, (na^2 w(a))^{-1} L_S^{-1} \chi(0, \mathbf{v}_0).$$

Подставляя ее в поправочный член правой части (290), получаем уравнение

$$\frac{\partial \chi(t, \mathbf{v}_0)}{\partial t} = na^2 w(a) L_S \chi(t, \mathbf{v}_0) -$$
$$- w(a)\, (na^2)^{-1} Q_0(t)\, L_S^{-1} \chi(0, \mathbf{v}_0),$$

из которого следует

$$\chi(t,\ \mathbf{v}_0) = \exp[tna^2 w(a) L_S]\, \chi(0,\ \mathbf{v}_0) -$$
$$- w(a)(na^2)^{-1} \int_0^t \exp[na^2 w(a) L_S (t-\tau)] \times$$
$$\times Q_0(\tau)\, d\tau L_S^{-1} \chi(0,\ \mathbf{v}_0),$$

что обусловливает следующий вид поправки к быстро распадающемуся члену:

$$\left.\begin{array}{l} \chi_c(t,\ \mathbf{v}_0) = (na^2)^{-2} L_S^{-1} Q_0(t)\, L_S^{-1} \chi(0,\ \mathbf{v}_0); \\ \chi(t,\ \mathbf{v}_0) = \chi_c(t,\ \mathbf{v}), \\ \text{когда } t \gg t_0. \end{array}\right\} \tag{295}$$

Уравнение (290) дает теперь

$$\chi_c(t,\ \mathbf{v}_0) = \frac{1}{(2\pi)^3 n} \int_0^{k_{\text{макс}}} k^2\, dk \sum_{(1 \leqslant j \leqslant 5)} \exp[-(\omega_j(k) + \omega_0(k))\, t] \times$$
$$\times \int d\mathbf{e} \psi_j^{(L)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}_0) \int d\mathbf{v}_0' \Phi_0(v_0')\, \psi_j^{(R)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}_0')\, \chi(0,\ \mathbf{v}_0'). \tag{296}$$

Здесь с учетом (245) асимптотические значения интегралов

$$\int_0^{k_{\text{макс}}} \exp[-(\nu + D_0) k^2 t]\, k^2\, dk, \qquad \int_0^{k_{\text{макс}}} \exp[-(D_T + D_0) k^2 t]\, k^2\, dk$$

для больших $t \gg t_0$ даются выражениями

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4[(\nu + D_0)\, t]^{3/2}}, \qquad \frac{\sqrt{\pi}}{4[(D_T + D_0)\, t]^{3/2}}.$$

Заметим, далее, что (288) позволяют показать, что

$$\int d\mathbf{e} \psi_4^{(L)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}_0)\, \psi_4^{(R)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}_0') = \int d\mathbf{e} \psi_5^{(L)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}_0)\, \psi_5^{(R)}(\mathbf{e},\ \mathbf{v}_0').$$

Следовательно, можно скомбинировать соответствующие экспоненты, содержащие t:

$$\exp[-(\omega_4(k) + \omega_0(k))\, t] + \exp[-(\omega_5(k) + \omega_0(k))\, t] =$$
$$= \exp[-(\Gamma_S/2 + D_0)\, k^2 t]\, [\exp(-\mathrm{i}ckt) + \exp(\mathrm{i}ckt)],$$

что приведет к интегралу

$$\int_{-k_{\text{макс}}}^{k_{\text{макс}}} \exp[-(\Gamma_S/2 + D_0)\, k^2 t] \exp(\mathrm{i}ckt)\, k^2\, dk,$$

асимптотика которого для больших t будет

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2(\xi t)^{3/2}}\exp(-c^2t/4\xi),$$

где

$$\xi=\Gamma_S/2+D_0.$$

Поскольку данный интеграл экспоненциально убывает, то мы видим, что звуковые моды не дают вклада в рассматриваемый «гидродинамический хвост» асимптотики и, следовательно, их можно опустить в выражении (296). У нас остаются, таким образом, две моды вязкости и одна тепловая мода.

Учитывая, что

$$\int e_{j,\alpha}e_{j,\beta}\,d\mathbf{e}=\frac{4\pi}{3}\delta_{\alpha,\beta},\quad j=1,\,2;\quad \alpha,\,\beta=x,\,y,\,z,$$

несложно выполнить интегрирование по $\mathbf{e}$, и мы приходим к выражению

$$\chi_c(t,\,\mathbf{v})=\left(\frac{t_0}{t}\right)^{3/2}\left\{\frac{1}{12n}\{\pi(\nu+D_0)\,t_0\}^{-3/2}\frac{m^2}{M\theta}\times\right.$$
$$\times\int(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}')\,\chi(0,\,\mathbf{v}')\,\Phi_0(v')\,d\mathbf{v}'+\frac{1}{8n}\frac{k_B}{C_p}\{\pi(D_T+D_0)\,t_0\}^{-3/2}\times$$
$$\left.\times\frac{mv^2-3\theta}{2\theta}\int\frac{mv'^2-3\theta}{2\theta}\chi(0,\,\mathbf{v}')\,\Phi_0(v')\,d\mathbf{v}'\right\},\quad t\gg t_0. \tag{297}$$

Эту асимптотическую формулу можно использовать для того, чтобы получить медленно распадающуюся часть равновесной временной корреляционной функции.

Рассмотрим, например, $\chi(0,\,\mathbf{v})=v_x$. При таком выборе (297) приводит к выражению

$$\langle v_x(t)\,v_x(0)\rangle_{\text{eq}}=\int v_x\chi_c(t,\,\mathbf{v})\,\Phi_0(v)\,d\mathbf{v}=$$
$$=\left(\frac{t_0}{t}\right)^{3/2}\frac{m^2}{12nM\theta}\{\pi(\nu+D_0)\,t_0\}^{-3/2}\left(\int v_x^2\Phi_0(v)\,d\mathbf{v}\right)^2=$$
$$=\left(\frac{t_0}{t}\right)^{3/2}\frac{m}{12nM}\{\pi(\nu+D_0)\,t_0\}^{-3/2}\langle v_x^2\rangle_{\text{eq}}. \tag{298}$$

Рассмотрим ситуацию, когда S — частица-зонд для Σ-системы, а гидродинамическая часть $U_k(t;\,1)$ рассчитана с помощью использования уравнения Энскога для газа непроницаемых шаров умеренной плотности. При этом в (298) ν должно быть заменено на ν_E. Поскольку D_0 является коэффициентом диффузии Энскога, то здесь получаются формулы, выведенные Дорфманом и Коэном [13]. С другой стороны, если мы заменим D_0 на «полный» коэффициент диффузии, формула (298) приведет к хорошо известному результату теории взаимодействующих мод.

Сделаем теперь несколько замечаний относительно уравнения (232) для $l \neq 0$, когда туда необходимо подставлять выражение для $Q_l(t)$, даваемое формулой (289). Используя метод преобразования Лапласа, можно записать его в виде

$$(z - na^2 w(a) L_S)\tilde{\chi}_l(z, \mathbf{v}_0) = -i\mathbf{l}\mathbf{v}_0\chi_l(z, \mathbf{v}_0) + \\ + w^2(a)\tilde{Q}_l(z)\tilde{\chi}_l(z, \mathbf{v}_0) + \chi_l(0, \mathbf{v}_0), \tag{299}$$

где

$$\tilde{\chi}_l(z, \mathbf{v}_0) = \int_0^\infty \exp(-zt)\chi_l(t, \mathbf{v}_0)\,dt; \tag{300}$$

$$\tilde{Q}_l(z)\,g(\mathbf{v}_0) = \frac{na^4}{(2\pi)^3}\int_{|k|<k_{\text{макс}}} d\mathbf{k} \times \\ \times \sum_{(1\leqslant j\leqslant 5)} \frac{1}{\omega_j(k) + \omega_0(\mathbf{k}+\mathbf{l}) + z} L_S\psi_j^{(L)}(\mathbf{e}, \mathbf{v}_0) \times \\ \times \int d\mathbf{v}_0'\Phi_0(v_0)\,\psi_j^{(R)}(\mathbf{e}, \mathbf{v}_0')\,L_S g(v_0').$$

Для того чтобы проанализировать процесс диффузии, рассмотрим случай, когда

$$\chi_l(0, \mathbf{v}_0) = \rho_l(0) \tag{301}$$

не зависит от $\mathbf{v}_0$.

Пусть

$$\tilde{\chi}_l(z, \mathbf{v}_0) = \tilde{\rho}_l(z) + \phi_l(z, \mathbf{v}_0), \tag{302}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\rho}_l(z) &= \int \Phi_0(z)\tilde{\chi}_l(z, \mathbf{v}_0)\,d\mathbf{v}_0; \\ &\int \Phi_0(v_0)\,\phi_l(z, \mathbf{v}_0)\,d\mathbf{v}_0 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{303}$$

Тогда (299) дает

$$z\tilde{\rho}_l(z) = -i\mathbf{l}\int \mathbf{v}_0\Phi_0(v_0)\,\phi(z, \mathbf{v}_0)\,d\mathbf{v}_0 + \rho_l(0) \tag{304}$$

и

$$(z - na^2 w(a) L_S)\,\phi_l(z, \mathbf{v}_0) = -i\mathbf{l}\mathbf{v}_0\tilde{\rho}_l(z) + w^2(a)\tilde{Q}_l(z)\,\phi_l(z, \mathbf{v}_0) - \\ - i\mathbf{l}\left(\mathbf{v}_0\phi_l(z, \mathbf{v}_0) - \int \mathbf{v}_0'\phi_l(z, \mathbf{v}_0')\,\Phi_0(\mathbf{v}_0')\,d\mathbf{v}_0'\right).$$

Поскольку l по предположению должна быть величиной достаточно малой: $l \ll l_0$, то можно оставить в $\varphi_l(z, \mathbf{v}_0)$ лишь члены, пропорциональные l. В таком случае уравнение запишется в виде

$$(z - na^2 w(a) L_S) \phi_l(z, \mathbf{v}_0) = -i\mathbf{l}\mathbf{v}_0 \tilde{\rho}_l(z) + w^2(a) \tilde{Q}_l(z) \phi_l(z, \mathbf{v}_0).$$

Пренебрегая далее поправочным членом с $\tilde{Q}_l$, получаем в первом приближении $\phi_l(z, \mathbf{v}_0) = -i(z - na^2 w(a) L_S)^{-1} \mathbf{l}\mathbf{v}_0 \tilde{\rho}_l(z)$. Подставляя эту формулу в поправочный член, приходим к следующему выражению:

$$\phi_l(z, \mathbf{v}_0) = -i(z - na^2 w(a) L_S)^{-1} \mathbf{l}\mathbf{v}_0 \tilde{\rho}_l(z) +$$
$$+ w^2(a)(z - na^2 w(a) L_S)^{-1} \tilde{Q}_l(z)(z - na^2 w(a) L_S)^{-1}(-i\mathbf{l}\mathbf{v}_0) \tilde{\rho}_l(z).$$

Напомним теперь еще раз, что когда L_S действует на функции $g(\mathbf{v}_0)$, ортогональные к единице, то он обладает лишь отрицательным спектром, и что для исследования поведения корреляционных функций при больших временах мы заинтересованы в области $z \ll t_0^{-1}$. В таком случае можно пренебречь z в члене $(z - na^2 w(a) L_S)^{-1}$ и наша аппроксимация принимает вид

$$\phi_l(z, \mathbf{v}_0) = i(na^2 w(a))^{-1} L_S^{-1} \mathbf{l}\mathbf{v}_0 \tilde{\rho}_l(z) - i(na^2)^{-2} L_S^{-1} \tilde{Q}_l(z) L_S^{-1} \mathbf{l}\mathbf{v}_0 \tilde{\rho}_l(z).$$

Тогда (304) позволяет заключить, что

$$z\tilde{\rho}_l(z) = -l^2 D(l, z) \tilde{\rho}_l(z) + \rho_l(0), \tag{305}$$

где

$$D(l, z) = D + \Delta D(l, z); \tag{306}$$

D — перенормированный коэффициент диффузии:

$$D = D_0 + D_1; \tag{307}$$

$$D_0 = -(na^2 w(a))^{-1} \int \Phi_0(v) v_x L_S^{-1} v_x \, d\mathbf{v};$$

$$D_1 = -\frac{1}{(2\pi)^3 n} \int\limits_{k<k_{\text{макс}}} d\mathbf{k} \sum_{(1\le j\le 5)} \frac{\int \Phi_0(v) v_x \psi_j^{(L)}(\mathbf{e}, \mathbf{v}) \, d\mathbf{v}}{\omega_j(k) + \omega_0(k)} \times$$
$$\times \int \Phi_0(v) \psi_j^{(R)}(\mathbf{e}, \mathbf{v}) v_x \, d\mathbf{v};$$

$$\Delta D(l, z) = \frac{1}{(2\pi^3) n} \int\limits_{k<k_{\text{макс}}} dk \sum \frac{z + \omega_0(\mathbf{k} + \mathbf{l}) - \omega_0(\mathbf{k})}{(z + \omega_j(k) + \omega_0(\mathbf{k} + \mathbf{l}))(\omega_j(k) + \omega_0(k))} \times$$
$$\times \int \Phi_0(v)(\hat{l}, \mathbf{v}) \psi_j^{(L)}(\mathbf{e}, \mathbf{v}) \, d\mathbf{v} \int \Phi_0(v') \psi_j^{(R)}(\mathbf{e}, \mathbf{v}')(\hat{l}, \mathbf{v}') \, d\mathbf{v}'; \tag{308}$$

$\hat{l} = \mathbf{l}/l$ — единичный вектор. Вычисление дополнительного члена D_1, обусловленного взаимодействием гидродинамических мод, позволяет показать, что он является малой величиной, квадратичной по плотности.

Тем не менее уместно подчеркнуть, что D_1 содержит интеграл

$$\int\limits_{k<k_{\text{макс}}} k^2\,dk/[(\nu+D_0)\,k^2]=k_{\text{макс}}/(\nu+D_0),$$

который пропорционален $k_{\text{макс}}$. Поскольку $k_{\text{макс}}$ определен лишь с точностью до численного множителя порядка единицы, мы видим, что конкретное значение D_1 должно также зависеть от негидродинамической части наших операторов.

С помощью (288) из (308) получаем

$$\left.\begin{aligned}&\int \Phi_0(v)\,(\hat{l}\mathbf{v})\,\psi_j^{(L)}(\mathbf{e},\,\mathbf{v})\,d\mathbf{v}\int \Phi_0(v')\,(\hat{l},\,\mathbf{v})\,\psi_j^{(R)}(\mathbf{e},\,\mathbf{v})\,d\mathbf{v}=\\&\qquad=\frac{m}{M}\,(\hat{l},\,\mathbf{e}_j)^2,\qquad j=1,\,2;\\&\int \Phi_0(v)\,\psi^{(L)}_{\binom{4}{5}}(\mathbf{e},\,\mathbf{v})\,(\hat{l},\,\mathbf{v})\,d\mathbf{v}\int \Phi_0(v')\,(\hat{l},\,\mathbf{v})\,\psi^{(R)}_{\binom{4}{5}}(\mathbf{e},\mathbf{v})\,d\mathbf{v}=\\&\qquad=\frac{1}{2}\,\frac{m}{M}\,(\hat{l},\,\mathbf{e})^2.\end{aligned}\right\}\qquad(309)$$

Поскольку $\omega_1=\omega_2=\nu k^2$, то два члена (309) в сумме дают

$$\frac{m}{M}\,\{(\hat{l},\,\mathbf{e}_1)^2+(\hat{l},\,\mathbf{e}_2)^2\}=\frac{m}{M}\,\{1-(\hat{l},\,\mathbf{e})^2\}.$$

Принимая во внимание симметрию этого выражения по отношению к отражению $\mathbf{e}\to-\mathbf{e}$, запишем члены, отвечающие модам вязкости в $\Delta D\,(l,\,z)$, в виде

$$\frac{m}{M}\,(\nu+D)^{-1}\int(1-(\hat{l}\mathbf{e})^2)\left\{\int\limits_0^{k_{\text{макс}}}dk\,\frac{z}{z+\nu k^2+D\,(k^2+l^2+2kl\,(\hat{l}\mathbf{e}))}+\right.$$

$$\left.+\,kl\,(\mathbf{e}\hat{l})\left[\frac{1}{z+(\nu+D)\,k^2+2Dkl\,(\mathbf{e}\hat{l})}-\frac{1}{z+(\nu+D)\,k^2-2Dkl\,(\mathbf{e}\hat{l})}\right]\right\}d\mathbf{e}=$$

$$=\frac{m}{M}\,(\nu+D)^{-1}\int d\mathbf{e}\,(1-(\hat{l}\mathbf{e})^2)\int\limits_0^{k_{\text{макс}}}dk\left\{\frac{z}{z+\nu k^2+D\,(k^2+l^2+2kl\,(\hat{l}\mathbf{e}))}-\right.$$

$$\left.-4Dk^2l^2\,(\hat{l}\mathbf{e})^2\,\frac{1}{\{z+\nu+D\,(k^2+l^2+2kl\,(\hat{l}\mathbf{e}))\}\,\{z+\nu+D\,(k^2+l^2-2kl\,(\hat{l}\mathbf{e}))\}^{-1}}\right\}.$$

Используя переменные $k=ql$, $\zeta=z/Dl^2$, можно заключить, что для конечных ζ предел интегрирования по q должен браться $k_{\text{макс}}/l\to\infty$, когда $l\to0$, однако, как это легко видеть, данный интеграл будет расходиться.

Точно такую же процедуру можно сформулировать и для звуковых мод, но там соответствующий вклад от фактора l меньше и, следовательно, в предложенной аппроксимации им можно пренебречь. Очевидно, вклад тепловой моды должен равняться нулю. Отметим, что уравнение (305) с (306), (308), (309) относится к типу уравнений, рассмотренных Шеппером [14], и, следовательно, может изучаться с помощью приемов, разработанных в этой монографии.

Нам хотелось бы теперь указать на то, что все уравнения, полученные в разд. 4 и опиравшиеся на начальное условие в виде $\mathscr{D}_0(S, \Sigma) = V\chi_0(S)\mathscr{D}_{\text{eq}}(S, \Sigma)$, могли бы быть также выведены из уравнений, установленных в разд. 2, где использовалось начальное условие [1] в виде (2):

$$\mathscr{D}_0(S, \Sigma) = f_0(S)\mathscr{D}_{\text{eq}}(\Sigma); \qquad f_0(S) = \chi_0(S)\Phi_0(v_0).$$

При использовании этих двух подходов налицо следующие различия в процедуре вывода соответствующих уравнений. Во-первых, если уравнение (226) выводится с использованием (2), то оно должно в правой части содержать оператор $\overline{T}_k$ вместо фигурирующего там T_k. Однако это различие пропадает на том этапе, когда заменяем T_k, $\overline{T}_k$ на $T_0 = \overline{T}_0$.

Во-вторых, различие — и оно остается — заключается в том, что при использовании (2) необходимо заменить $w(a)$ его низкоплотностным пределом, т. е. единицей.

Таким образом, все результаты, обсуждавшиеся в разд. 4, можно получить, исходя из нашей старой схемы, предложенной и развитой в работе [1]. Основным новым моментом в техническом аспекте применения этого метода, который и побудил нас провести новое исследование, было введение оператора соударений по [4]. Стоит также подчеркнуть, что методика, разработанная в данной работе, нуждается в существенной модификации.

Действительно, в то время как оператор $U(t; 1)$, относящийся к Σ-системе, может быть вычислен с помощью любого обоснованного кинетического уравнения, член взаимодействия $Л_{\text{int}}$ здесь рассматривался в весьма грубом приближении. При конкретных вычислениях нами предполагалось, что он мал, и корректно учитывались лишь те члены, которые были второго порядка малости.

Предположим, что мы хотим рассмотреть ситуацию, когда $Л_{\text{int}} = Л_{\text{int}}^{(\Phi)}$ с $\Phi(r)$, отвечающей короткодействующим большим силам отталкивания. Ясно, что такое взаимодействие должно приводить к некоему оператору соударений, однако формально нашу схему можно использовать в этой ситуации лишь при условии, если мы заменим $Л_{\text{int}}^{(\Phi)}$ на взаимодействие при соударении, вводимое ad hoc.

Очевидно также, что наша схема нуждается в некотором улучшении. Подобное улучшение может быть достигнуто, например, если вместо рассмотренной простейшей аппроксимации

$\mathscr{D}_t(S, \Sigma) = V\chi_t(S)\,\mathscr{D}_{eq}(S, \Sigma)$ использовать следующую формулу для распределения вероятностей:

$$\mathscr{D}_t(S, \Sigma) = V\{\chi_t(S) + \sum_{(1 \leqslant j \leqslant N)} \eta_t(S, j)\}\,\mathscr{D}_{eq}(S, \Sigma),$$

где $\eta_t(S, j)$ зависит от фаз S-й частицы и j-й частицы Σ-системы.

Я благодарен профессору Э. Г. Д. Коэну за стимулирующие дискуссии, а также В. К. Федянину за перевод и большую работу по подготовке данной рукописи к печати.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.** Записки кафедры математичної физики АН УРСР. Т. 4. Київ, 1939, с. 5.
2. **Боголюбов Н. Н.** О некоторых статистических методах в математической физике. Киев, Изд-во АН УССР, 1945.
3. **Шелест А. В.** Препринт ИТФ 67-11, 1967.
4. **Ernst M. H., Dorfman J. R., Hoegy W. R., van Leeuwen J. W. J.** «Physics», 1969, v. 45, p. 127.
5. **Шелест А. В.** Препринт ОИЯИ Р-2868. Дубна, 1966.
6. **Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И.** «ЖЭТФ», 1962, т. 43, № 8, с. 667; см. также Selected Papers in Physics Published by the Physical Society of Japan. Tokyo, 1968, p. 108.
7. **Боголюбов Н. Н., Хацет Б. И.** «Докл. АН СССР», 1949, т. 66, с. 321; **Хацет Б. И.** «Наукові записки Житомірського педагогічного институту, фізмат, серія», 1956, т. 3, с. 113, 139; **Боголюбов Н. Н., Петрина Д. Я., Хацет Б. И.** «ТМФ», 1969, т. 1, 2, с. 251.
8. **Боголюбов Н. Н.** Проблемы динамической теории в статистической физике. М.—Л., Гостехиздат, 1946; см. также Studies in Statistical Mechanics. J.J. de Boer and G. E. Uhlenbeck, eds. Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1962.
9. **Темко С. В.** «ЖЭТФ», 1956, т. 31, с. 102.
10. **Климонтович Ю. Л., Темко С. В.** «ЖЭТФ», 1957, т. 33, с. 132.
11. **Dorfman J. R., Cohen E. G. D.** «Phys. Rev. A», 1972, v. 6, p. 776.
12. **Ernst M. H., Hauge E. H., van Leeuwen J. M. J.** «Phys. Rev. A», 1971, v. 4, p. 2055.
13. **Dorfman J. R., Cohen E. G. D.** Phys. Rev., 1975, A12, p. 292.
14. **de Schepper I.** Generalized Hydrodynamics for the Diffusion Process. Druk: Krips Repro Meppel (1974).