

ФОРМАЛИЗМ НЬЮМЕНА — ПЕНРОУЗА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Г. А. Алексеев,

Математический институт АН СССР им. В.И. Стеклова, Москва

В. И. Хлебников

Институт Прикладной Математики АН СССР, Москва

В настоящем обзоре представлено систематическое изложение формализма Ньюмена — Пенроуза в общей теории относительности, а также описание в рамках этого формализма некоторых общих свойств гравитационных полей, тесно связанных с поведением изотропных кривых и изотропных поверхностей в римановом пространстве — времени. Подробно рассмотрены конкретные методы интегрирования полной системы уравнений Ньюмена — Пенроуза для полей тяготения некоторых алгебраически специальных типов по классификации Петрова в вакууме и в пространстве, заполненном излучением. Отдельная глава посвящена приложениям метода спиновых коэффициентов к описанию распространения гравитационных и электромагнитных волн малой амплитуды в заданном внешнем гравитационном поле, в частности в поле черной дыры.

In this review we give the systematic explanation of Newman — Penrose formalism in General Relativity and describe in the framework of this formalism some general properties of gravitational fields, which are closely connected with the behaviour of null curves and null surfaces in Riemannian space — time. One chapter is devoted to the special methods of integration for Newman — Penrose set of equations for some algebraically special types vacuum and radiating metrics. Another chapter contains applications of spin coefficients method for description of propagation of gravitational and electromagnetic waves in external gravitational field, particularly, in black hole background.

ВВЕДЕНИЕ

В общей теории относительности (ОТО), сформулированной Эйнштейном, гравитационное поле есть проявление кривизны 4-мерного риманова пространства — времени. В общем случае искривленного пространства — времени не существует выделенного, глобально определенного класса эквивалентных систем отсчета, аналогичного инерциальным системам в плоском пространстве — времени, в котором было бы удобно формулировать все законы природы. Поэтому одним из основных принципов ОТО стал принцип общей ковариантности, согласно которому все

физические законы формулируются в виде, формально пригодном в любой системе отсчета и любой 4-мерной системе координат.

Однако конкретная форма физических законов, вид различных закономерностей данного явления существенно зависят от способа описания этого явления (т. е. от выбора пространственно-временных координат, векторов 4-мерных базисов, функций поля и т. п.) и могут иметь наиболее простой вид, если этот выбор осуществляется с учетом специфики рассматриваемой задачи (или класса задач), т. е. с учетом симметрии, наличия выделенных направлений и других заранее известных свойств.

Иногда такой выбор средств описания (хотя и не полный, а с остающимся произволом), сделанный универсальным образом, может привести к полезным в целом ряде областей видоизменениям математического аппарата всей теории.

«При изложении старой теории на необычном (хотя с математической точки зрения и эквивалентном) языке иногда могут представиться новые, прежде не ожидавшиеся, но с математической точки зрения — естественные возможности...» [1].

Одним из таких видоизменений математического аппарата ОТО является формализм Ньюмена — Пенроуза (метод спиновых коэффициентов), основанный на введении в пространстве — времени изотропных комплексных тетрад и специальном выборе переменных поля (что приводит к изменению и самих уравнений поля). Этот формализм позволяет естественным образом использовать геометрические свойства изотропных кривых и изотропных поверхностей и потому оказывается полезным в широких классах задач ОТО, например: при исследовании структуры и самых общих свойств полей тяготения, связанных с поведением конгруэнций изотропных геодезических и изотропных поверхностей, являющихся характеристическими для уравнений гравитационного поля; при изучении полей алгебраически специальных типов по классификации Петрова, определение которых связано с наличием в пространстве — времени изотропных направлений, обладающих определенными свойствами и выделяемых кривизной самого пространства — времени; наконец, в различных задачах о распространении гравитационных, электромагнитных и другого типа волн, в которых, естественно, возникают и играют важную роль семейства изотропных геодезических — лучей и изотропных поверхностей — фронтов движущихся волн*.

* Уже после того, как настоящий обзор был написан, вышел в свет довольно обширный обзор В. П. Фролова «Метод Ньюмена — Пенроуза в общей теории относительности» (Труды ФИАН СССР, 1977, т. 96, с. 72). Оба обзора содержат подробное изложение основ формализма Ньюмена — Пенроуза, однако существенно отличаются описанием различных его приложений. Так, в разд. 3 настоящего обзора рассмотрен более детально процесс интегрирования полной системы уравнений поля и приведены некоторые новые точные решения. Материал разд. 4 (применение формализма к описанию про-

1. ФОРМАЛИЗМ НЬЮМЕНА — ПЕНРОУЗА

Формализм Ньюмена — Пенроуза может быть построен обычным, «тензорным» (тетрадным) путем, посредством проектирования на векторы комплексной изотропной тетрады и при использовании специальных обозначений различных тензорных соотношений. Однако эти построения приобретают наиболее естественный характер при ином подходе, основанном на введении спиноров и приводящем к той же системе уравнений поля.

В этом разделе дано описание тензорного и спинорного вариантов построения формализма Ньюмена — Пенроуза. Основные уравнения вынесены для удобства в Приложения. При написании настоящего раздела в основном были использованы работы [1—5].

Тензорная формулировка. *Комплексные изотропные тетрады и скаляры Ньюмена — Пенроуза.* Формализм Ньюмена — Пенроуза предполагает выбор в каждой точке пространства — времени (4-мерного псевдориманова пространства R^4 с сигнатурой метрики -2) в качестве базисной тетрады четырех изотропных векторов: двух действительных l^j , n^j и двух комплексных m^j , \bar{m}^j , — которые связаны с векторами обычного ортонормированного базиса $\{e_{(0)}^j, e_{(1)}^j, e_{(2)}^j, e_{(3)}^j\}$ формулами*:

$$\left. \begin{aligned} l^j &= e_{(0)}^j + e_{(1)}^j; & m^j &= (1/\sqrt{2})\{e_{(2)}^j + ie_{(3)}^j\}; \\ n^j &= (1/2)\{e_{(0)}^j - e_{(1)}^j\}; & \bar{m}^j &= (1/\sqrt{2})\{e_{(2)}^j - ie_{(3)}^j\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(где $e_{(0)}^j$ — времениподобный вектор; $e_{(1)}^j, e_{(2)}^j, e_{(3)}^j$ — пространственноподобные векторы) и удовлетворяют следующим условиям ортогональности и нормировки:

$$l_j l^j = n_j n^j = m_j m^j = l_j m^j = n_j m^j = 0; \quad l_j n^j = -m_j \bar{m}^j = 1. \quad (2)$$

процесса распространения волн во внешних полях) вообще не нашел своего отражения в обзоре В. П. Фролова. С другой стороны, значительное внимание в обзоре В. П. Фролова уделено результатам, касающимся асимптотически плоских гравитационных полей, в то время как в настоящей работе содержится описание лишь некоторых из этих результатов.

Благодаря любезности профессора Дж. Д. Зунда (Университет Нью-Мехико, США), авторы познакомились с оттиском его работы «Заметки по проективной геометрии спиноров» (J. D. Zund. *Annali di matematica pura ed applicata* (IV), 1976, v. CX, p. 29), не вошедшей в список литературы настоящего обзора. В этой работе весьма обстоятельно изложены, в частности, спинорные аспекты формализма Ньюмена — Пенроуза, алгебраическая классификация электромагнитных и гравитационных полей и некоторые другие вопросы.

* В дальнейшем строчные буквы латинского алфавита i, j, k, \dots обозначают 4-мерные тензорные индексы, пробегающие значения 0, 1, 2, 3. Черга над буквой означает комплексное сопряжение.

Компоненты метрического тензора g_{ij} выражаются через компоненты векторов (1) по формуле

$$g_{ij} = l_i n_j + n_i l_j - m_i \bar{m}_j - \bar{m}_i m_j. \quad (3)$$

Для ковариантных производных по направлениям векторов (1) приняты обозначения

$$D = l^i \nabla_i; \quad \Delta = n^i \nabla_i; \quad \delta = m^i \nabla_i; \quad \bar{\delta} = \bar{m}^i \nabla_i, \quad (4)$$

где ∇_i — оператор ковариантного дифференцирования.

Аналогично коэффициентам вращения Риччи для комплексной изотропной тетрады (1) вводятся коэффициенты вращения, называемые иначе спиновыми коэффициентами, со следующими обозначениями:

$$\left. \begin{aligned} k &= m^i D l_i; \quad \pi = -\bar{m}^i D n_i; \quad \varepsilon = (n^i D l_i - \bar{m}^i D m_i)/2; \\ \rho &= m^i \bar{\delta} l_i; \quad \lambda = -\bar{m}^i \bar{\delta} n_i; \quad \alpha = (n^i \bar{\delta} l_i - \bar{m}^i \bar{\delta} m_i)/2; \\ \sigma &= m^i \delta l_i; \quad \mu = -\bar{m}^i \delta n_i; \quad \beta = (n^i \delta l_i - \bar{m}^i \delta m_i)/2; \\ \tau &= m^i \Delta l_i; \quad \nu = -\bar{m}^i \Delta n_i; \quad \gamma = (n^i \Delta l_i - \bar{m}^i \Delta m_i)/2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Коммутаторы операторов (4), действующих на некоторую скалярную функцию, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \Delta D - D \Delta &= (\gamma + \bar{\gamma}) D + (\varepsilon + \bar{\varepsilon}) \Delta - (\tau + \bar{\pi}) \bar{\delta} - (\bar{\tau} + \pi) \delta; \\ \delta D - D \delta &= (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi}) D + k \Delta - \sigma \bar{\delta} - (\bar{\rho} + \varepsilon - \bar{\varepsilon}) \delta; \\ \bar{\delta} D - D \bar{\delta} &= -\bar{\nu} D + (\tau - \bar{\alpha} - \beta) \Delta + \bar{\lambda} \bar{\delta} + (\mu - \gamma + \bar{\gamma}) \delta; \\ \delta \bar{\delta} - \bar{\delta} \delta &= (\bar{\mu} - \mu) D + (\bar{\rho} - \rho) \Delta - (\bar{\alpha} - \beta) \bar{\delta} - (\bar{\beta} - \alpha) \delta. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

При записи в этих обозначениях различных тензорных соотношений входящие в них тензоры должны быть спроектированы на векторы изотропной тетрады. Рассмотрим далее проекции на векторы (1) тензора Максвелла как некоторого действительного бивектора и тензора Римана — тензора кривизны. Выделение среди этих проекций полного набора независимых величин, называемых далее скалярами Ньюмена — Пенроуза, для которых в формализме Ньюмена — Пенроуза приняты специальные обозначения, можно произвести следующим образом.

Действительные бивекторы в 4-мерном пространстве образуют 6-мерное линейное пространство, поэтому шесть линейно-независимых бивекторов

$$U_{ij} = l_{[i} m_{j]}; \quad V_{ij} = n_{[i} \bar{m}_{j]}; \quad M_{ij} = l_{[i} n_{j]} - m_{[i} \bar{m}_{j]}; \quad (7)$$

$$\bar{U}_{ij} = l_{[i} \bar{m}_{j]}; \quad \bar{V}_{ij} = n_{[i} m_{j]}; \quad \bar{M}_{ij} = l_{[i} n_{j]} - \bar{m}_{[i} m_{j]} \quad (8)$$

составляют базис в этом пространстве.

Дуальное преобразование бивектора F_{ij} определяется как преобразование, при котором

$$F_{ij} \rightarrow i\overset{*}{F}_{ij}; \overset{*}{F}_{ij} = \varepsilon_{ijkl} F^{kl}/2, \tag{9}$$

где ε_{ijkl} — тензор Леви — Чивита ($\varepsilon_{ijkl} = \varepsilon_{[ijkl}$, $\varepsilon_{0123} = -\sqrt{-g}$). Всякому действительному бивектору F_{ij} можно взаимно-однозначно поставить в соответствие комплексный бивектор $\overset{\dagger}{F}_{ij}$, являющийся самодуальным, т. е. инвариантным при преобразовании (9):

$$\overset{\dagger}{F}_{ij} = (F_{ij} + i\overset{*}{F}_{ij})/2; F_{ij} = \overset{\dagger}{F}_{ij} + \overline{\overset{\dagger}{F}_{ij}}. \tag{10}$$

Легко видеть, что бивекторы (7) самодуальны, тогда как бивекторы (8) антисамодуальны [т. е. при дуальном преобразовании (9) умножаются на -1]. Поэтому разложение самодуального бивектора $\overset{\dagger}{F}_{ij}$ по базису (7), (8) содержит только бивекторы (7), но не (8) [бивекторы (7) образуют базис в 3-мерном комплексном пространстве самодуальных бивекторов]:

$$\overset{\dagger}{F}_{ij} = -2\varnothing_0 V_{ij} - 2\varnothing_1 M_{ij} + 2\varnothing_2 U_{ij}. \tag{11}$$

Здесь числовые множители в коэффициентах разложения введены для упрощения последующих формул. Из определений (7), условий (2) и выражений (10) следуют формулы для вычисления коэффициентов $\varnothing_0, \varnothing_1, \varnothing_2$:

$$\left. \begin{aligned} \varnothing_0 &= \overset{\dagger}{F}_{ij} U^{ij} = F_{ij} l^i m^j; \\ \varnothing_1 &= \overset{\dagger}{F}_{ij} M^{ij}/2 = F_{ij} (l^i n^j - m^i \bar{m}^j)/2; \\ \varnothing_2 &= -\overset{\dagger}{F}_{ij} V^{ij} = -F_{ij} n^i \bar{m}^j. \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

Формулы (10)–(12) позволяют выразить все проекции действительного бивектора F_{ij} на изотропную тетраду (1) через три комплексных скаляра.

Рассмотрим теперь тензор Римана. Этот тензор можно разложить на «неприводимые» части, определяемые бесследовыми 4-валентным C_{ijkl} (тензор Вейля) и 2-валентным Φ_{ij} тензорами и скаляром Λ :

$$R_{ijkl} = C_{ijkl} + \Phi_{ik} g_{jl} - \Phi_{il} g_{jk} + \Phi_{jl} g_{ik} - \Phi_{jk} g_{il} + 2\Lambda (g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}), \tag{13}$$

где $2\Phi_{ij} = R_{ij} - Rg_{ij}/4$ — бесследовая часть (девиатор) тензора Риччи R_{ij} ($R_{ij} = R^k{}_{ikj}$); R — скалярная кривизна ($R = R^k{}_k$); $R = -24\Lambda$.

Тензор Вейля, определением которого служит (13), обладает следующими алгебраическими свойствами:

$$C_{ijkl} = -C_{jikl} = -C_{ijlk} = C_{klij}; \quad (14)$$

$$C_{ijkh} + C_{iljh} + C_{ikhj} = 0; \quad C^h{}_{ikh} = 0. \quad (15)$$

Тензору Вейля C_{ijkl} также можно взаимно-однозначно поставить в соответствие «самодуальный тензор Вейля» $\overset{\dagger}{C}_{ijkl}$ по формулам

$$\overset{\dagger}{C}_{ijkl} = (C_{ijkl} + i\overset{*}{C}_{ijkl})/2; \quad C_{ijkh} = \overset{\dagger}{C}_{ijkh} + \overset{\bar{\dagger}}{C}_{ijkh} \quad (16)$$

где $\overset{*}{C}_{ijkl} = \frac{1}{2} \varepsilon_{klmn} C^{mn}{}_{ij} = \varepsilon_{ijmn} C^{mn}{}_{kl}/2$ [последнее равенство имеет

место в силу (15)] и, следовательно, тензор $\overset{\dagger}{C}_{ijkl}$ является самодуальным по любой (как первой, так и второй) антисимметричной

паре индексов. Поэтому тензор $\overset{\dagger}{C}_{ijkl}$ может быть разложен по парным произведениям самодуальных бивекторов (7). Из сим-

метрии C_{ijkl} (а следовательно, и $\overset{\dagger}{C}_{ijkl}$) относительно замены антисимметричных пар индексов следует, что это разложение

должно быть симметричным относительно перестановки любой пары бивекторов. Равенства (15) эквивалентны двум равенствам

$C^h{}_{ikh} = 0$, $\overset{*}{C}{}^h{}_{ikh} = 0$ или одному комплексному $\overset{\dagger}{C}{}^h{}_{ikh} = 0$. Послед-

нее условие приводит к тому, что в разложении $\overset{\dagger}{C}_{ijkl}$ по произведениям бивекторов (7) коэффициент при произведении $U_{ij}V_{kl}$ (рав-

ный коэффициенту при $V_{ij}U_{kl}$) только знаком отличается от коэффициента при $M_{ij}M_{kl}$. Таким образом, разложение для

$\overset{\dagger}{C}_{ijkl}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \overset{\dagger}{C}_{ijkl} = & -4\Psi_0 V_{ij}V_{kl} - 4\Psi_1 (V_{ij}M_{kl} + M_{ij}V_{kl}) - \\ & -4\Psi_2 (M_{ij}M_{kl} - U_{ij}V_{kl} - V_{ij}U_{kl}) + \\ & + 4\Psi_3 (U_{ij}M_{kl} + M_{ij}U_{kl}) - 4\Psi_4 U_{ij}U_{kl} \end{aligned} \quad (17)$$

[как и в (11) здесь для удобства введены численные коэффициенты]. Коэффициенты Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_2 , Ψ_3 , Ψ_4 вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0 &= -\overset{\dagger}{C}_{ijkl} U^{ij} U^{kl} = -C_{ijkl} l^i m^j l^k m^l; \\ \Psi_1 &= -\overset{\dagger}{C}_{ijkl} U^{ij} M^{kl}/2 = -C_{ijkl} l^i n^j l^k m^l; \\ \Psi_2 &= -\overset{\dagger}{C}_{ijkl} M^{ij} M^{kl}/4 = -C_{ijkl} (l^i n^j l^k n^l - \\ & \quad - l^i n^j m^k \bar{m}^l)/2; \\ \Psi_3 &= \overset{\dagger}{C}_{ijkl} V^{ij} M^{kl}/2 = -C_{ijkl} n^i l^j n^k \bar{m}^l; \\ \Psi_4 &= -\overset{\dagger}{C}_{ijkl} V^{ij} V^{kl} = -C_{ijkl} n^i \bar{m}^j n^k \bar{m}^l. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Имеющий десять независимых компонент тензор Вейля C_{ijkl} , согласно формулам (16)—(18), в изотропной тетраде полностью определяется пятью комплексными коэффициентами $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$.

Для проекций симметричного тензора Φ_{ij} , определяющего в силу (13) девиатор тензора Риччи, приняты следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{00} &= \Phi_{ij} l^i l^j; & \Phi_{10} &= \Phi_{ij} l^i \bar{m}^j; & \Phi_{20} &= \Phi_{ij} \bar{m}^i \bar{m}^j; \\ \Phi_{01} &= \Phi_{ij} l^i m^j; & \Phi_{11} &= \Phi_{ij} l^i n^j; & \Phi_{21} &= \Phi_{ij} n^i \bar{m}^j; \\ \Phi_{02} &= \Phi_{ij} m^i m^j; & \Phi_{12} &= \Phi_{ij} n^i m^j; & \Phi_{22} &= \Phi_{ij} n^i n^j. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

В силу симметрии и равенства нулю следа тензора Φ_{ij} для его проекций (19) имеют место соотношения $\Phi_{mn} = \bar{\Phi}_{nm}$, где $m, n = 0, 1, 2$, поэтому только шесть величин из (19) (три действительные и три комплексные) независимы.

Пять комплексных скаляров (18), шесть независимых скаляров (19) и скаляр Λ определяют полный набор проекций на изотропную тетраду (1) тензора Римана R_{ijkl} .

Уравнения гравитационного поля в формализме Ньюмена — Пенроуза. В обычной формулировке общей теории относительности, данной Эйнштейном, гравитационное поле описывается компонентами метрики g_{ij} , играющими роль потенциалов этого поля и удовлетворяющими системе уравнений Эйнштейна — нелинейной гиперболической системе уравнений второго порядка

$$R_{ij} - Rg_{ij}/2 = \kappa T_{ij}, \quad (20)$$

где тензор Риччи R_{ij} и скалярная кривизна R выражены через метрический тензор и его производные; T_{ij} — тензор энергии — импульса материи; $\kappa = 8\pi G/c^4$ — гравитационная постоянная Эйнштейна; G — ньютонова гравитационная постоянная.

В формализме Ньюмена — Пенроуза роль переменных гравитационного поля играют три группы величин:

- 1) компоненты векторов l^i, n^i, m^i, \bar{m}^i изотропной тетрады (1) (однозначно определяющие, согласно (3), компоненты метрики);
- 2) спиновые коэффициенты (5);
- 3) полный набор независимых проекций тензора Римана, т. е. величины $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_4; \Phi_{mn}; \Lambda$.

Уравнения для этих переменных, играющие роль уравнений гравитационного поля в формализме Ньюмена — Пенроуза, по своему «происхождению» можно разделить на три группы.

Первую группу уравнений поля составляют линейные комбинации проекций на векторы изотропной тетрады тождеств Бианки

$$\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk} = 0, \quad (21)$$

которые при описанном выше выборе переменных перестают быть тождествами, причем все члены спроектированных уравнений (21) должны быть выражены [с использованием (13), (16)—(19) и определений (5)] через величины $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_4, \Phi_{mn}, \Lambda$, спиновые коэффициенты (5) и операторы (4), т. е. только через переменные поля, принадлежащие к перечисленным трем группам. Независимые линейные комбинации получающихся при этом уравнений приведены в приложении А.

Аналогичным образом, проектируя на векторы изотропной тетрады (1) равенство, служащее определением тензора Римана

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) z^h = R^h{}_{eij} z^e, \tag{22}$$

в котором в качестве z^i выбираются поочередно все базисные векторы l^i, n^i, m^i, \bar{m}^i , получаем вторую группу уравнений поля, приведенную в приложении Б.

Третью группу уравнений, которым должны удовлетворять переменные, характеризующие гравитационное поле, образуют так называемые координатные уравнения, которые можно получить следующим способом. Рассмотрим на пространственно-временном многообразии четыре независимые скалярные функции $* u, r, \theta, \varphi$. В результате действия операторов (4) на эти функции получим новые функции, для которых введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} Y^0 &= Du; & X^0 &= \Delta u; & \xi^0 &= \delta u; \\ V &= Dr; & U &= \Delta r; & \omega &= \delta r; \\ Y^2 &= D\theta; & X^2 &= \Delta \theta; & \xi^2 &= \delta \theta; \\ Y^3 &= D\varphi; & X^3 &= \Delta \varphi & \xi^3 &= \delta \varphi. \end{aligned} \right\} \tag{23}$$

Легко видеть, что если функции u, r, θ, φ принять за новые координаты, то функции (23) будут являться компонентами векторов l^i, n^i, m^i в новой системе координат:

$$l^i = \{Y^0, V, Y^2, Y^3\}; \quad n^i = \{X^0, U, X^2, X^3\}; \quad m^i = \{\xi^0, \omega, \xi^2, \xi^3\}, \tag{24}$$

и, следовательно, набор этих функций совпадает с первой группой переменных поля. Из определений (23) следует, что эти переменные не могут быть произвольны, а должны удовлетворять некоторым уравнениям связи, которые проще всего получить из коммутационных соотношений (6), применяя их последовательно к функциям u, r, θ, φ и используя (23). Эти уравнения приведены в Приложении В.

Полученные три группы уравнений Ньюмена — Пенроуз — (П.1)—(П.11), (П.12)—(П.29), (П.30)—(П.37) для гравитацион

* Независимость функций u, r, θ, φ означает, что их градиенты в каждой точке линейно-независимы.

ного поля представляют собой не что иное, как чисто «кинематические» связи переменных поля. Взаимосвязь с материей появится лишь тогда, когда в соответствии с уравнениями Эйнштейна (20) дивергенция тензора Риччи Φ_{ij} и скаляр Λ будут выражены через тензор энергии — импульса T_{ij} и его след T^l_l по формулам *

$$2\Phi_{ij} = \kappa (T_{ij} - \frac{1}{4} T^l_l g_{ij}); \quad \Lambda = \kappa T^l_l / 24. \quad (25)$$

В частности, в тех областях пространства, где материя отсутствует и, следовательно, $T_{ij} = 0$, из (25) будем иметь $\Phi_{ij} = 0$ (т. е. все $\Phi_{\text{ин}} = 0$), $\Lambda = 0$.

Если же в пространстве кроме гравитационного поля присутствуют другие виды материи, например какие-либо негравитационные поля, то для получения полной системы уравнений, определяющих поведение как самого гравитационного поля, так и создающей его материи, перечисленные три группы уравнений Ньюмена — Пенроуза помимо (25) должны быть дополнены уравнениями, которым будут удовлетворять характеристики материи, создающей гравитационное поле (например, уравнения Максвелла для электромагнитного поля, уравнения Вейля для нейтрино и т. п.). Все эти уравнения также должны быть выражены в терминах описанного выше формализма.

Рассмотрим, например, случай, когда в пространстве помимо гравитационного имеется еще и электромагнитное поле.

Уравнения Максвелла в формализме Ньюмена — Пенроуза. Уравнения Максвелла в тензорной форме имеют вид

$$\nabla_k F^{ik} = -(4\pi/c) J^i; \quad \nabla_i F_{jk} + \nabla_j F_{ki} + \nabla_k F_{ij} = 0, \quad (26)$$

где F_{ij} — тензор Максвелла; J^i — вектор 4-тока. Уравнения (26) эквивалентны одному уравнению для самодуального бивектора $\overset{\dagger}{F}_{ij}$:

$$\nabla_j \overset{\dagger}{F}^{ij} = -(4\pi/c) J^i. \quad (27)$$

Используя для $\overset{\dagger}{F}^{ij}$ разложение (11) и проектируя (27) на векторы изотропной тетрады (1), получаем уравнения, играющие роль уравнений Максвелла в формализме Ньюмена — Пенроуза. Эти уравнения даны в Приложении Г.

Проекция тензора энергии — импульса для электромагнитного поля легко вычислить, если в обычное выражение этого тензора через тензор Максвелла [6] подставить выражение последнего через $\overset{\dagger}{F}_{ij}$ (10), для которого использовано разложение (11).

* Если рассматривать уравнения Эйнштейна с космологическим членом λ : $R_{ij} - Rg_{ij}/2 + \lambda g_{ij} = \kappa T_{ij}$, то в формуле (25) под Λ следует понимать $(\kappa T^l_l - 4\lambda)/24$, где $T = T^l_l$ — след тензора энергии — импульса.

Для величин Φ_{mn} , Λ в силу (12), (19) тогда будем иметь

$$\Phi_{mn} = (\kappa/4\pi) \varnothing_m \bar{\varnothing}_n; \quad \Lambda = 0, \tag{28}$$

где $m, n = 0, 1, 2$, а \varnothing_m определены по F_{ij} согласно (12).

Спинорная формулировка. Спиноры в римановом пространстве. Введение спиноров в римановом пространстве основано на построении в каждой точке пространства — времени помимо касательных векторных и тензорных пространств двумерного комплексного линейного пространства S «спин-векторов», а также всевозможных «спин-векторных» (спинорных) пространств, являющихся тензорными произведениями пространств S , дуальных им S_* и комплексно-сопряженных им пространств \bar{S}, \bar{S}_* .

В пространстве S вводится антисимметричная билинейная форма $\Omega(u, v)$, задаваемая в некотором базисе в S коэффициентами ε_{AB} *:

$$\Omega(u, v) = \varepsilon_{AB} u^A v^B, \quad \text{где} \quad \varepsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

и инвариантная при любых линейных унимодулярных преобразованиях в S :

$$u^{A'} = \Lambda^A{}_{.B} u^B, \quad \text{где} \quad \det\|\Lambda^A{}_{.B}\| = 1.$$

В пространстве \bar{S} этому преобразованию отвечает преобразование с комплексно-сопряженной матрицей $\bar{\Lambda}$ (спинорные индексы, преобразующиеся с помощью $\bar{\Lambda}$, обозначаются точкой): $\bar{u}^{\dot{A}'} = \bar{\Lambda}^{\dot{A}'}{}_{\dot{B}} \bar{u}^{\dot{B}}$.

Матрица ε_{AB} , инвариантная при унимодулярных преобразованиях, может быть использована для поднятия и опускания спинорных индексов:

$$u_A = \varepsilon_{BA} u^B; \quad u^A = \varepsilon^{AB} u_B; \quad u_{\dot{A}} = \varepsilon_{\dot{B}\dot{A}} \cdot u^{\dot{B}}; \quad u^{\dot{A}} = \varepsilon^{\dot{A}\dot{B}} u_{\dot{B}},$$

где

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon^{AB} = \varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} = \varepsilon^{\dot{A}\dot{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу двумерности пространств S для произвольного спинора ξ имеет место важное тождество

$$\xi \dots A \dots B \dots - \xi \dots B \dots A \dots = \varepsilon_{AB} \xi \dots C \dots^C \dots, \tag{29}$$

* Здесь и далее заглавные буквы латинского алфавита A, B, C, \dots означают спинорные индексы и пробегают значения 0 и 1.

указывающее, что только симметричные спиноры неприводимы, т. е. не могут быть выражены через симметричные спиноры меньшей валентности.

Благодаря наличию локального изоморфизма между группой унимодулярных преобразований в S и собственной группой Лоренца между спинорами четного ранга и 4-тензорами можно установить взаимно-однозначное соответствие. Это соответствие может быть явно представлено в следующем виде. Если матрица 2-валентного спинора $u^{A\dot{B}}$ в некотором базисе в S является эрмитовой, то она записывается в виде

$$u^{A\dot{B}} = u^i \sigma_i^{B\dot{A}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u^0 + u^1 & u^2 + iu^3 \\ u^2 - iu^3 & u^0 - u^1 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

где величины u^i — действительные, а матрицы $\sigma_i^{A\dot{B}}$ — эрмитовы и $\sigma_1^{A\dot{B}}, \sigma_2^{A\dot{B}}, \sigma_3^{A\dot{B}}$ только множителем $1/\sqrt{2}$ отличаются от матриц Паули:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0^{A\dot{B}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; & \sigma_1^{A\dot{B}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \\ \sigma_2^{A\dot{B}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; & \sigma_3^{A\dot{B}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

При произвольном унимодулярном преобразовании в S сохраняется как эрмитовость $u^{A\dot{B}}$, так и значение ее детерминанта $2 \det || u^{A\dot{B}} || = (u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2$. Следовательно, величины u^i при этом преобразовании остаются действительными и испытывают преобразование Лоренца. Поэтому u^i можно рассматривать как компоненты некоторого действительного вектора в ортонормированном базисе пространства Минковского.

Величины σ_{AB}^i могут быть использованы для установления взаимно-однозначного соответствия тензоров и спиноров четной валентности, т. е. для вычисления по компонентам тензоров компонент соответствующих им спиноров и наоборот. Так как σ_{AB}^i удовлетворяют соотношениям

$$g_{ij} \sigma_{AB}^i \sigma_{CD}^j = \varepsilon_{AC} \varepsilon_{BD}; \quad \varepsilon_{AB} \varepsilon_{CD} \sigma_i^{AC} \sigma_j^{BD} = g_{ij}, \quad (32)$$

вытекающим из (30) или (31), то, например, для тензора третьего ранга X_{ij}^k будем иметь

$$X_{ABCD}^{EF} = \sigma_{AB}^i \sigma_{CD}^j \sigma_h^{EF} X^h_{ij}; \quad X^k_{ij} = \sigma_i^{AB} \sigma_j^{CD} \sigma_{EF}^h X^{EF}_{ABCD}.$$

Если рассматриваемый тензор обладает некоторыми свойствами симметрии, то его спинорный эквивалент может иметь достаточно простой вид и выражаться через спиноры меньшей валентности. Рассмотрим далее некоторые тензоры и их спинорные эквиваленты.

Из (32) следует, что метрическому тензору g_{ij} соответствует спинор $\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}$. Для дискриминантного тензора Леви — Чивита имеем

$$\varepsilon_{ijkl} \leftrightarrow \varepsilon_{ABCD} \dot{\varepsilon}_{EFGH} = i (\varepsilon_{AE} \varepsilon_{CG} \varepsilon_{BH} \dot{\varepsilon}_{DF} - \varepsilon_{AG} \varepsilon_{CE} \varepsilon_{BF} \dot{\varepsilon}_{DH}). \quad (33)$$

Для спинорного эквивалента тензора Максвелла F_{ij} , т. е. для спинора $F_{ABCD} = \sigma_{AB}^i \cdot \sigma_{CD}^j \cdot F_{ij}$, в силу (29) можно написать

$$\begin{aligned} F_{ABCD} \dot{\equiv} F_{ACBD} \dot{\equiv} \varepsilon_{AC} F_{E(BD)}^E / 2 + \varepsilon_{BD} F_{(AC)H}^H / 2 + \\ + F_{(AC)(BD)} + \varepsilon_{AC} \varepsilon_{BD} F_{EH}^{EH} / 4. \end{aligned}$$

Так как F_{ij} антисимметричен, то $F_{(AC)(BD)} = 0$ и $F_{EH}^{EH} = 0$. Кроме того, поскольку F_{ij} — действительный тензор, спиноры $F_{(AC)H}^H$ и $F_{E(BD)}^E$ комплексно-сопряжены. Поэтому спинор F_{ABCD} , соответствующий действительному бивектору F_{ij} , может быть представлен в виде

$$F_{ABCD} = (\varepsilon_{AC} \bar{\Phi}_{BD} + \varepsilon_{BD} \Phi_{AC}) / 2, \quad (34)$$

где $\Phi_{AC} \equiv F_{(AB)H}^H$ — симметричный спинор второго ранга. С помощью (33) можно показать, что для самодуального бивектора \dot{F}_{ij} (10) имеет место соответствие $\dot{F}_{ij} \leftrightarrow \varepsilon_{BD} \Phi_{AC} / 2$.

Используя алгебраические свойства тензора кривизны R_{ijkl} , для соответствующего ему спинора можно получить выражение, аналогичное (34):

$$\begin{aligned} -R_{AEBFCGDH} \dot{\equiv} \Psi_{ABCD} \varepsilon_{EF} \dot{\varepsilon}_{GH} + \bar{\Psi}_{EFGH} \varepsilon_{AB} \varepsilon_{CD} + 2\Lambda (\varepsilon_{AC} \varepsilon_{BD} \varepsilon_{EF} \dot{\varepsilon}_{GH} - \\ - \varepsilon_{AB} \varepsilon_{CD} \varepsilon_{EH} \dot{\varepsilon}_{FG}) + \varepsilon_{AB} \Phi_{CDEF} \dot{\varepsilon}_{GH} + \varepsilon_{CD} \Phi_{ABGH} \dot{\varepsilon}_{EF}, \quad (35) \end{aligned}$$

где Ψ_{ABCD} , Φ_{ABGH} , Λ — так называемые спиноры кривизны, обладающие свойствами

$$\Psi_{ABCD} = \Psi_{(ABCD)}; \quad \Phi_{ACBD} \dot{\equiv} \Phi_{(AC)(BD)} \dot{\equiv} \bar{\Phi}_{ACBD}; \quad \Lambda = \bar{\Lambda}.$$

Разложение (35) тесно связано с разложением (13), так как имеют место следующие соотношения:

$$C_{ijkl} \leftrightarrow C_{AEBFCGDH} = -\Psi_{ABCD} \varepsilon_{EF} \cdot \varepsilon_{GH} - \bar{\Psi}_{EFGH} \cdot \varepsilon_{AB} \varepsilon_{CD};$$

$$\Phi_{ij} \leftrightarrow \Phi_{ABCD}; \quad \Lambda = -R/24,$$

причем $\overset{+}{C}_{ijkl} \leftrightarrow -\Psi_{ABCD} \varepsilon_{EF} \cdot \varepsilon_{GH}$.

До сих пор все построения велись в одной точке риманова пространства. Для описания структуры спинорных полей в пространстве — времени необходимо определить операцию ковариантного дифференцирования для спиноров:

$$\nabla_i \xi^A = (\partial/\partial x^i) \xi^A + \Gamma_{iB}^A \xi^B.$$

Коэффициенты Γ_{iB}^A задаются таким образом, чтобы определяемая ими спинорная связность в силу описанного соответствия тензоров и спиноров была согласована с аффинной связностью риманова пространства. Для их определения достаточно потребовать выполнения условий

$$\nabla_i \sigma_{AB}^j = 0; \quad \nabla_i \varepsilon_{AB} = 0.$$

Аналогично равенству (22), выражающему коммутатор двух ковариантных производных от вектора через тензор Римана и служащему его определением, для ковариантных производных второго порядка от спинора имеют место соотношения, содержащие спиноры кривизны, которые также могут служить определением последних:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{(A} \overset{\dot{E}}{\nabla}_{B)} \xi_C = -\Psi_{ABCD} \xi^D - 2\Lambda \varepsilon_{C(B} \xi_{A)}; \\ \nabla_E (\overset{\dot{C}}{\nabla}_D \xi_A) = \Phi_{ABCD} \xi^B, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

где $\nabla_{AB} \cdot = \sigma_{AB}^i \cdot \nabla_i$.

Далее, из тождеств Бианки (21) и выражения (35), связывающего тензор Римана со спинорами кривизны, следуют уравнения для этих спиноров:

$$\nabla_E^D \cdot \Psi_{ABCD} = \nabla_{(C} \overset{\dot{H}}{\Phi}_{AB)EH}; \quad \nabla^{AE} \Phi_{ABEH} = -3\nabla_{BH} \cdot \Lambda. \quad (37)$$

Уравнения (36), (37) являются основными спинорными уравнениями, описывающими гравитационное поле. Для получения уравнений Ньюмена — Пенроуза эти уравнения должны быть спроектированы на некоторый спинорный базис (базисную диаду).

«Диадные» компоненты спиноров и уравнения Ньюмена — Пенроуза для гравитационного поля. Базисная диада ζ_a^A ($a = 0; 1$ нумерует спиноры базиса *) должна быть выбрана таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\varepsilon_{AB} \zeta_a^A \zeta_b^B = \varepsilon_{ab}; \quad \varepsilon^{ab} \zeta_a^A \zeta_b^B = \varepsilon^{AB}, \quad \text{где } \varepsilon_{ab} = \varepsilon^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Различные спиноры определяются набором своих проекций на спиноры этого базиса; например, для спинора X_{BC}^A имеем $X_{bc}^a = X_{BC}^A \zeta_a^A \zeta_b^B \zeta_c^C$, причем $X_{BC}^A = \zeta_a^A \zeta_b^B \zeta_c^C X_{bc}^a$, где $\zeta_a^A = \varepsilon^{ab} \varepsilon_{BA} \zeta_b^B$.

Диадные компоненты σ_{AB}^i , т. е. $\sigma_{ab}^i = \zeta_a^A \zeta_b^B \sigma_{AB}^i$, суть линейно-независимые 4-векторы, удовлетворяющие согласно (32), (38) условиям нормировки и ортогональности, совпадающим с (2), так что их можно принять за векторы изотропной тетрады Ньюмена — Пенроуза (1):

$$l^i = \sigma_{00}^i; \quad n^i = \sigma_{11}^i; \quad m^i = \sigma_{01}^i; \quad \bar{m}^i = \sigma_{10}^i. \quad (39)$$

Аналогом коэффициентов вращения Риччи для базисной спинорной диады ζ_a^A являются величины

$$\Gamma_{abcd} = \zeta_a^A \nabla_{cd} \zeta_b^B, \quad \text{где } \nabla_{cd} = \zeta_c^C \zeta_d^D \nabla_{CD} = \sigma_{cd}^i \nabla_i. \quad (40)$$

Легко убедиться, используя (39),ⁱ что Γ_{abcd} совпадают с величинами, определенными в (5) (табл. 1). Поэтому величины (5) и были названы спиновыми коэффициентами.

Диадные компоненты операторов дифференцирования ∇_{ab} совпадают с операторами (4), определенными для тетрады (39):

$$D = \nabla_{00}; \quad \Delta = \nabla_{11}; \quad \delta = \nabla_{01}; \quad \bar{\delta} = \nabla_{10}. \quad (41)$$

Диадные компоненты спиноров кривизны непосредственно связаны с проекциями тензора Вейля и девиатора тензора Риччи на векторы тетрады (39). Эта связь дается табл. 2 и следующими

* Здесь вводится еще один тип индексов: строчные начальные буквы латинского алфавита $a, b, c, \dots = 0; 1$ нумеруют спиноры базисной диады. Буквы этого же алфавита i, j, k, \dots и далее используются для обозначения 4-мерных тензорных индексов.

формулами ($o^A = \zeta_0^A, \iota^A = \zeta_1^A$):

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0 &= \Psi_{0000} = \Psi_{ABCD} o^A o^B o^C o^D; \\ \Psi_1 &= \Psi_{0001} = \Psi_{ABCD} o^A o^B o^C \iota^D; \\ \Psi_2 &= \Psi_{0011} = \Psi_{ABCD} o^A o^B \iota^C \iota^D; \\ \Psi_3 &= \Psi_{0111} = \Psi_{ABCD} o^A \iota^B \iota^C \iota^D; \\ \Psi_4 &= \Psi_{1111} = \Psi_{ABCD} \iota^A \iota^B \iota^C \iota^D. \end{aligned} \right\} (42)$$

Проектируя уравнения (36), где в качестве ξ^A выбираются спиноры базисной диады, на эти же спиноры, и используя обозначения (41), (42) и табл. 1, 2, получаем уравнения, совпадающие

Таблица 1

Спиновые коэффициенты

$cd \backslash ab$	00	01 или 10	11
$0\dot{0}$	k	ε	π
$1\dot{0}$	ρ	α	λ
$0\dot{1}$	σ	β	μ
$1\dot{1}$	τ	γ	ν

$\Gamma_{abcd} =$

Таблица 2

Диадные компоненты Φ_{ABCD} и их связь с тетрадными компонентами девиатора тензора Риччи

$cd \backslash ab$	$\ddot{00}$	$\ddot{01}$	$\ddot{11}$
00	Φ_{00}	Φ_{01}	Φ_{02}
01	Φ_{10}	Φ_{11}	Φ_{12}
11	Φ_{20}	Φ_{21}	Φ_{22}

$\Phi_{abcd} =$

со второй группой уравнений Ньюмена — Пенроуза (П.12) — (П.29). Аналогичным путем уравнения (37) дадут первую группу уравнений Ньюмена — Пенроуза (П.1) — (П.11).

При наличии в пространстве каких-либо видов материи, например негравитационных полей, уравнения, их определяющие, должны быть также записаны в спинорной форме и затем спроектированы на спиноры базисной диады с использованием перечисленных выше обозначений.

Уравнения свободного безмассового спинорного поля. В качестве примера рассмотрим уравнения, определяющие свободное (т. е. без источников) безмассовое спинорное поле спина s . Такое поле, как известно, описывается симметричным спинором ранга $2s$,

удовлетворяющим в простейшем случае уравнениям *

$$\nabla^{A\dot{B}}\varphi_{ABC\dots} = 0. \tag{43}$$

Примечательно, что при $s = 2$ эти уравнения совпадают с уравнениями (37) в пустоте, где в силу уравнений Эйнштейна (20) $\Phi_{mn} = 0, \Lambda = 0$.

При $s = 1$ уравнения (43) совпадают с уравнениями для спинора φ_{AB} , определяемого тензором Максвелла согласно (34). Действительно, из уравнений Максвелла (26) при отсутствии источников ($J^i = 0$), используя (34), получаем $\nabla^{A\dot{B}}\varphi_{AC} = 0$. Проектируя эти уравнения на базисную диаду и полагая

$$\begin{aligned} \varnothing_0 &= \varphi_{AB}o^A o^B; \quad \varnothing_1 = \varphi_{AB}o^A \iota^B; \\ \varnothing_2 &= \varphi_{AB}\iota^A \iota^B, \end{aligned}$$

получаем уравнения Максвелла (П.38)—(П.41) (см. Приложение Г).

При $s = 1/2$ уравнения (43) переходят в уравнения вида

$$\nabla^{A\dot{B}}\xi_A = 0, \tag{44}$$

называемые уравнениями Вейля и описывающие поведение нейтрино. Проектируя уравнения (44) на базисную диаду и вводя обозначения $\chi_{+1} = \xi_A o^A, \chi_{-1} = \xi_A \iota^A$, получаем уравнения Вейля в формализме Ньюмена — Пенроуза, которые приведены в [9].

Примером уравнений для волновых полей другого типа служат уравнения Дирака, т. е. уравнения для массивного заряженного поля со спином $s = 1/2$. Эти уравнения в терминах формализма Ньюмена — Пенроуза приведены в [10].

Таким образом, описанные в настоящем разделе тензорный и спинорный подходы оказываются эквивалентными, так как приводят к одной и той же системе уравнений для характеристик гравитационного поля и создающей его материи.

Вращения изотропных тетрад и спинорных базисов и преобразование переменных поля. Изотропно-геодезическая система координат. Переменные, характеризующие в формализме Ньюмена — Пенроуза гравитационное поле, т. е. компоненты векторов изотропной тетрады l^i, n^i, m^i, \bar{m}^i , величины $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_4, \Phi_{mn}, \Lambda$

* Такое обобщение на случай искривленного пространства обычных уравнений $\partial^{A\dot{B}}\varphi_{ABC\dots} = 0$ представляется наиболее простым и естественным, однако следует иметь в виду, что s не может быть велико, так как при $s \geq 3/2$ уравнения (43) становятся несовместными. Для их совместности необходимо выполнение условий, связывающих $\varphi_{ABC\dots}$ со спинорами кривизны [7, 8] (случай $s = 2$ составляет исключение, так как для свободного гравитационного поля при $\varphi_{ABCD} = \Psi_{ABCD}$ эти условия совместности удовлетворяются тождественно).

и спиновые коэффициенты определяются в заданном гравитационном поле неоднозначно: l^i, n^i, m^i, \bar{m}^i суть компоненты векторов, зависящие от выбора системы координат, $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_4, \Phi_{mn}$ и спиновые коэффициенты, хотя и являются скалярами, но преобразуются при вращениях изотропной тетрады (или спинорной базисной диады) и только Λ является инвариантом относительно как преобразования координат, так и вращения базисов.

Рассмотрим сначала вращения спинорных базисов и изотропных тетрад. Произвольное унимодулярное преобразование, сохраняющее условия нормировки и ортогональности (38) спинорного базиса $\{o^A, \iota^A\}$ ($o^A = \zeta_0^A, \iota^A = \zeta_1^A$), можно представить в виде произведения элементов трех некоммутирующих между собой абелевых групп преобразований:

$$I \begin{cases} \tilde{o}^A = p o^A; \\ \tilde{\iota}^A = p^{-1} \iota^A; \end{cases} \quad II \begin{cases} \tilde{o}^A = o^A; \\ \tilde{\iota}^A = \iota^A + a o^A; \end{cases} \quad III \begin{cases} \tilde{o}^A = o^A + b \iota^A; \\ \tilde{\iota}^A = \iota^A, \end{cases} \quad (45)$$

где p, a, b — произвольные комплексные величины.

В силу локального изоморфизма группы унимодулярных преобразований и собственной группы Лоренца преобразования спинорной диады (45) согласно (39) порождают собственные лоренцевы вращения изотропных тетрад, сохраняющие условия (2) или, что эквивалентно, вид формулы (3). Эти вращения являются произведениями элементов следующих четырех групп преобразований [4, 5]:

$$\begin{aligned} \tilde{G} \begin{cases} \tilde{l}^i = G l^i; \\ \tilde{n}^i = G^{-1} n^i; \\ \tilde{m}^i = m^i; \end{cases} & \quad \tilde{A} \begin{cases} \tilde{l}^i = l^i; \\ \tilde{n}^i = n^i + A \bar{A} l^i + \bar{A} m^i + A \bar{m}^i; \\ \tilde{m}^i = m^i + A l^i; \end{cases} \\ \tilde{H} \begin{cases} \tilde{l}^i = l^i; \\ \tilde{n}^i = n^i; \\ \tilde{m}^i = \exp(iH) m^i; \end{cases} & \quad \tilde{B} \begin{cases} \tilde{l}^i = l^i + B \bar{B} n^i + \bar{B} m^i + B \bar{m}^i; \\ \tilde{n}^i = n^i; \\ \tilde{m}^i = m^i + B n^i. \end{cases} \end{aligned} \quad (46)$$

Два действительных параметра G и H , а также действительные и мнимые части комплексных параметров A и B , выражающиеся через параметры p, a и b из (45) по формулам

$$G = p\bar{p}; \quad H = 2 \arg p; \quad A = \bar{a}, \quad B = b,$$

составляют шесть независимых параметров собственной группы Лоренца.

Формулы преобразования переменных поля при вращениях изотропных тетрад (46) [или спинорных базисов (45)] находят, исходя из определений этих величин. В Приложении Д выписаны формулы преобразования величин $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_4, \Phi_m$ при

преобразованиях групп \tilde{G} , \tilde{H} и \tilde{A} (или соответствующих им преобразованиях спинорных диад групп I и II). Аналогичные формулы для преобразований группы \tilde{B} или соответствующей ей группы III для спиноров легко могут быть получены из формул Приложения Д в результате замены параметров $A \rightarrow \bar{B}$ ($a \rightarrow b$), а также замены базисных спиноров и соответствующей ей замены изотропных базисных векторов:

$$o^A \rightarrow io^A; \iota^A \rightarrow io^A; l^i \leftrightarrow n^i; m^i \leftrightarrow \bar{m}^i, \quad (47)$$

приводящей к преобразованию переменных поля, указанному в табл. 3.

Таблица 3

Преобразование скаляров Ньюмена — Пенроуза при замене базисных векторов $l^i \leftrightarrow n^i, m^i \leftrightarrow \bar{m}^i$ (47)

o^A	ι^A	l^i	n^i	m^i	\bar{m}^i	χ
io^A	io^A	n^i	l^i	\bar{m}^i	m^i	χ'

χ	D	Δ	δ	$\bar{\delta}$
χ'	Δ	D	$\bar{\delta}$	δ

χ	k	ρ	σ	τ	ϵ	α	β	γ	π	λ	μ	ν
χ'	$-\nu$	$-\mu$	$-\lambda$	$-\pi$	$-\gamma$	$-\beta$	$-\alpha$	$-\epsilon$	$-\tau$	$-\sigma$	$-\rho$	$-k$

χ	Ψ_0	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4
χ'	Ψ_4	Ψ_3	Ψ_2	Ψ_1	Ψ_0

χ	Φ_{00}	Φ_{01}	Φ_{02}	Φ_{10}	Φ_{11}	Φ_{12}	Φ_{20}	Φ_{21}	Φ_{22}	Λ	\varnothing_0	\varnothing_1	\varnothing_2
χ'	Φ_{22}	Φ_{21}	Φ_{20}	Φ_{12}	Φ_{11}	Φ_{10}	Φ_{02}	Φ_{01}	Φ_{00}	Λ	$-\varnothing_2$	$-\varnothing_1$	$-\varnothing_0$

Отметим, что полная система уравнений поля симметрична, т. е. сохраняет свой вид при замене (47) и соответствующем преобразовании переменных поля*.

Выбирая специальным образом значения параметров вращения изотропных тетрад (или спинорных диад) в соответствии с формулами преобразования переменных поля, на последние можно накладывать дополнительные ограничения, упрощающие интегрирование уравнений поля или исследование конкретных решений. Специальный выбор системы координат, связанной определенным образом с данным полем изотропных тетрад, существенно влияет на вид координатных уравнений и может упрощать как их интегрирование, так и вычисление компонент различных тензоров для данного гравитационного поля. Иногда некоторые детали этого выбора могут не быть заданными заранее, а определяться в ходе решения задачи.

Рассмотрим некоторые полезные и часто применяемые способы выбора тетрады и системы координат. В ряде случаев, в частности при описании волновых процессов, когда возникают понятия фронтов волн, лучей и др., в пространстве оказывается определенным некоторое семейство изотропных гиперповерхностей $u(x^i) = \text{const}$. Всякое такое семейство однозначно определяет конгруэнцию изотропных геодезических — образующих каждой гиперповерхности семейства, причем вектор-градиент этих поверхностей касателен к образующим и параллельно переносится вдоль них: $dx^i/dr = g^{ij}u_{,j}$, где r — аффинный параметр на геодезических. В этом случае удобно выбирать изотропные тетрады и координаты связанными с изотропными гиперповерхностями (фронтами волн) и изотропными геодезическими (лучами), их образующими. Вектор l^i можно выбрать совпадающим с градиентом $g^{ij}u_{,j}$, а остальные векторы-тетрады — параллельно переносимыми вдоль лучей. Тогда для спиновых коэффициентов будем иметь

$$k = \varepsilon = \pi = 0; \quad \rho = \bar{\rho}; \quad \tau = \bar{\alpha} + \beta;$$

(Некоторые из этих условий имеют простой геометрический смысл: $k = 0$ тогда и только тогда, когда огибающие вектора l^i —

* Эта симметрия уравнений поля легла в основу еще одного варианта формулировки ОТО — формализма Героча, Хелда, Пенроуза [14]. Этот формализм основан на задании в каждой точке пространства — времени не полной изотропной тетрады, а лишь двух изотропных направлений. В качестве переменных поля выбираются величины, обладающие однородными трансформационными свойствами относительно вращений изотропных тетрад, не изменяющих заданных изотропных направлений, т. е. преобразований \tilde{G} - и \tilde{H} -групп или группы I. Этот формализм, по утверждению его авторов, в некоторых случаях является предпочтительным и может приводить к значительным упрощениям по сравнению с обычным методом спиновых коэффициентов. О его приложениях, см., например [12].

геодезические, а если при этом $\varepsilon + \bar{\varepsilon} = 0$, то l^i переносится вдоль своего направления параллельно; $\rho = \bar{\rho}$ — необходимо и достаточно, чтобы этот вектор был пропорционален некоторому градиенту, а если при этом $\tau = \bar{\alpha} + \beta$, то l^i — градиентный вектор.) При таком выборе тетрады векторы m^i и \bar{m}^i окажутся касательными к гиперповерхностям $u(x^i) = \text{const}$, так как $\delta u = m^i l_i = 0$, $\bar{\delta} u = \bar{m}^i l_i = 0$.

В качестве координаты x^0 выберем функцию $u(x^i)$, задающую семейство изотропных гиперповерхностей; в качестве первой координаты — аффинный параметр r на лучах, а в качестве остальных двух координат выберем θ и φ , «нумерующие» лучи на каждой гиперповерхности и постоянные вдоль лучей. (Такие координаты называются изотропно-геодезическими [2, 13].) Тогда для величин (23) будут справедливы равенства

$$Y^0 = Y^2 = Y^3 = \xi^0 = 0; \quad X^0 = V = 1$$

и векторы изотропной тетрады в этих координатах будут иметь компоненты:

$$l^i = \{0, 1, 0, 0\}; \quad n^i = \{1, U, X^2, X^3\}; \\ m^i = \{0, \omega, \xi^2, \xi^3\}. \quad (48)$$

Действующий на скаляр оператор $D = \partial/\partial r$.

Заметим, что, отказавшись от параллельного перенесения векторов n^i , m^i и \bar{m}^i вдоль l^i и выполнив вращение тетрады (46) с параметром $A = -\omega$, можно было бы добиться обращения в нуль величины ω в (48). Компоненты метрики в построенных координатах в силу (48) при $\omega = 0$ имеют вид

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2U & X^2 & X^3 \\ 0 & X^2 & \dots & \dots \\ 0 & X^3 & -\hat{g}^{ab} & \dots \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} -2U - X_a X^a & 1 & X_2 & X_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ X_2 & 0 & \dots & \dots \\ X_3 & 0 & -\hat{g}_{ab} & \dots \end{pmatrix},$$

где $\hat{g}^{ab} = \xi^a \bar{\xi}^b + \bar{\xi}^a \xi^b$; $\hat{g}^{ab} \hat{g}_{ac} = \delta_c^b$; $X_a = \hat{g}_{ab} X^b$; $a, b, c = 2; 3$. Тензор \hat{g}_{ab} есть метрический тензор на координатных поверхностях $\{u = \text{const}, r = \text{const}\}$, причем $\hat{g} = \det \|\hat{g}_{ab}\| = -\det \|g_{ij}\|$. Величина $d\sigma = \sqrt{\hat{g}} d\theta d\varphi$ есть элемент площади этих двумерных поверхностей, которые при необходимости могут интерпретироваться как мгновенные положения двумерных фронтов в 3-мерном физическом пространстве. (Об описании геометрии таких поверхностей см. [11].) Двумерный вектор X^a может использоваться для описания поляризационных свойств волн [12].

2. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ

В этом разделе в терминах формализма Ньюмена — Пенроуза рассмотрим фокусирующее действие гравитационного поля на конгруэнции изотропных геодезических, тесно связанное с образованием сингулярностей в пространстве — времени, классификацию Петрова всех полей тяготения, а также некоторые свойства асимптотически-плоских полей тяготения, в частности теорему расщепления Сакса.

Оптические скаляры и фокусирующие свойства гравитационного поля. Рассмотрим некоторое семейство изотропных геодезических, лежащих в малой окрестности данной изотропной геодезической Γ . Изотропные тетрады выберем таким образом, чтобы вектор l^i был касательным для каждой геодезической семейства * и вся тетрада переносилась бы параллельно вдоль каждой геодезической. Тогда для этих тетрад

$$k = \varepsilon = \pi = 0. \quad (49)$$

Будем рассматривать такие изотропные геодезические в окрестности Γ , которые «протыкают» малые двумерные площадки w , натянутые на векторы m^i, \bar{m}^i на Γ и, следовательно, ортогональные Γ . (Другие изотропные геодезические в окрестности Γ не рассматриваем.)

Точку, в которой данная геодезическая γ пересекает площадку w , можно задать малым вектором η^i , проведенным в эту точку из точки P , в которой площадку w пересекает Γ . Этот вектор представляется в виде

$$\eta^i = (z\bar{m}^i + \bar{z}m^i)/2$$

и, следовательно, однозначно определяется комплексной величиной $z = x + iy$, где x и y являются декартовыми координатами на площадке w с началом в точке P **. Выясним, как меняется z для каждой отдельной геодезической γ при смещении от площадки к площадке вдоль Γ . При этом смещении точка z , соответствующая одной и той же геодезической γ , перемещается на комплексной плоскости, так что каждая малая окрестность любой точки этой плоскости испытывает некоторое аффинное преобразование. Это преобразование можно определить следующим образом. Рассматриваемое семейство геодезических, очевидно, двумерно, и все его элементы можно «пронумеровать», задав некоторую комплексную

* Предполагается, что в пределах рассматриваемой окрестности геодезические не пересекаются.

** Так как векторы m^i и \bar{m}^i , оставаясь ортогональными Γ , могут испытывать повороты вида $m^i \rightarrow m^i + Al^i, \bar{m}^i \rightarrow \bar{m}^i + \bar{A}l^i$, то площадка w , натянутая на эти векторы, определена неоднозначно. Однако величина z не зависит от конкретного выбора в данной точке на Γ площадки w , ортогональной Γ .

функцию φ , постоянную вдоль каждой геодезической и, следовательно, удовлетворяющую условию $D\varphi = 0$. Пусть φ и φ' — два значения функции φ , соответствующие двум близким геодезическим γ и γ' . Тогда с точностью до величин второго порядка малости $\varphi' \approx \varphi + \eta^i \nabla_i \varphi = \varphi + (\bar{z}\delta\varphi + \bar{z}'\delta\varphi)/2$. Так как $D\varphi = 0$ и $D\varphi' = 0$, то, используя коммутационные соотношения (6) для операторов D и δ , а также произвол в выборе φ , получаем

$$Dz = -\rho z - \bar{\sigma}z. \tag{50}$$

Отсюда следует, что при смещении точки P и соответствующей ей площадки w вдоль Γ на dr , где dr — приращение аффинного параметра вдоль Γ , точки площадки w с координатами (x, y) испытывают малое аффинное преобразование с матрицей $\delta_{ab} + A_{ab} dr$ ($a, b = 1, 2$), где

$$A_{ab} = \Omega_{ab} + D_{ab} + \Theta \delta_{ab}$$

и

$$\Omega_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \text{Im } \rho \\ -\text{Im } \rho & 0 \end{pmatrix};$$

$$D_{ab} = \begin{pmatrix} -\text{Re } \sigma & -\text{Im } \sigma \\ -\text{Im } \sigma & \text{Re } \sigma \end{pmatrix}; \quad \Theta = -\text{Re } \rho.$$

Эти формулы показывают, что величина $\text{Re } \rho$ определяет малое расширение, $\text{Im } \rho$ — малый поворот, а σ в D_{ab} — сдвиг, причем величины сдвига, происходящего вдоль главных осей матрицы $\delta_{ab} + D_{ab} dr$, равны $1 \pm |\sigma| dr$, а главные оси повернуты относительно осей координат (и, следовательно, относительно параллельно переносимой вдоль Γ тетрады) на угол $(1/2) \arg \sigma$ [14—16] *.

Величины $\omega = \text{Im } \rho$, $\Theta = -\text{Re } \rho$ и $|\sigma|$ называются *оптическими скалярами*. Оптические скаляры могут быть вычислены по формулам [4]:

$$|\omega| = \sqrt{\Omega_{ab}\Omega^{ab}/2} = \sqrt{\nabla_{[i}l_{j]}\nabla^{i}l^{j}/2}; \quad \Theta = A_c^c/2 = \nabla_i l^i/2;$$

$$|\sigma| = \sqrt{D_{ab}D^{ab}/2} = \sqrt{[\nabla_{(i}l_{j)}\nabla^{i}l^{j} - (\nabla_i l^i)^2/2]/2}.$$

На рис. 1 показано относительное изменение формы первоначально круглого узкого пучка лучей при смещении вдоль Γ . Это изменение складывается из расширения (см. рис. 1, а), поворота (см. рис. 1, б) и чистого сдвига (см. рис. 1, в).

* Аналогичный геометрический смысл имеют действительная и мнимая части μ , модуль и аргумент λ для конгруэнции огибающих векторного поля n^i (при условии их геодезичности).

Наличие кривизны пространства — времени приводит к появлению отличных от нуля ρ и σ и, следовательно, к расширению (в действительности отрицательному, т. е. к сужению), вращению и сдвигу (дисторсии) пучка лучей, даже если в некоторый момент для этого пучка $\rho = \sigma = 0$. Действительно, при условии (49) из (II.12), (II.13) получаем уравнения, описывающие изменение ρ и σ вдоль лучей:

$$\left. \begin{aligned} D\rho &= \rho^2 + \bar{\sigma}\sigma + \Phi_{00}; \\ D\sigma &= (\rho + \bar{\rho})\sigma + \Psi_0. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

(Эти уравнения, фактически определяющие поведение оптических скаляров, называют уравнениями Сакса.) Если считать, что

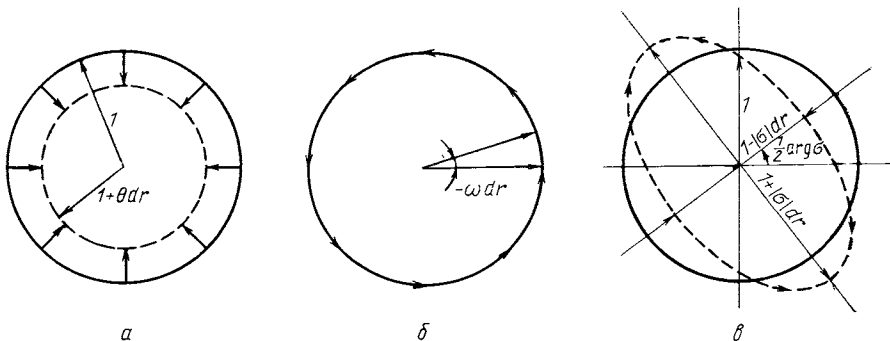


Рис. 1. Диаграмма Эйлера — Сакса:
а — расширение; б — вращение; в — сдвиг

локальная плотность материи в пространстве неотрицательна, т. е. $T_{ij}u^i u^j \geq 0$ для любого времениподобного вектора u^i , то по непрерывности оказывается, что $\Phi_{00} = (1/2) \kappa T_{ij}l^i l^j \geq 0$ для любого изотропного вектора. Таким образом, если $\rho = \bar{\rho}$, т. е. пучок лучей составляет часть некоторой изотропной поверхности, то правая часть первого уравнения в (51) оказывается неотрицательно определенной, что приводит к фокусированию пучка лучей ($D\rho \geq 0$).

Если $\Phi_{00} = 0$ (например, когда $T_{ij} = 0$, т. е. материя отсутствует), то фокусирование в этом случае может появляться за счет наличия $\Psi_0 \neq 0$, порождающего $\sigma \neq 0$, что, в свою очередь, дает положительный вклад в величину $D\rho$ (подробнее об этом см. [1]).

Как следует из уравнения (50) и уравнений Сакса (51), фокусирование приводит к тому, что лучи начавшего сходиться в некоторый момент пучка обязательно начнут пересекаться, т. е. достиг-

нут каустики на конечном интервале изменения своих аффинных параметров.

Таким образом, одним из весьма общих и важных свойств кривизны является положительное фокусирование вдоль любой изотропной геодезической при условии положительности локальной плотности материи. В частности, такое фокусирование лучей может служить причиной образования в пространстве — времени истинных сингулярностей. Известен, например, целый ряд точных решений уравнений поля, описывающих столкновение плоских волн различной природы (гравитационных, электромагнитных, нейтринных), при котором в результате взаимодействия волн и их взаимного фокусирования в пространстве — времени образуется истинная сингулярность, имеющая пространственноподобный характер [17—20].

Классификация Петрова гравитационных полей. В работах [21—24] на основе рассмотрения жордановых нормальных форм для матриц в 6-мерном бивекторном пространстве А. З. Петровым была установлена алгебраическая классификация полей тяготения. Оказалось, что в самом общем случае гравитационное поле в данной точке пространства принадлежит к одному из трех типов, впоследствии получивших название типов Петрова.

Определенную геометрическую интерпретацию эта классификация приобрела после того, как было введено понятие главного изотропного направления для гравитационного поля *. Согласно теореме Дебеве [25] в формулировке Сакса [26], в каждой точке пространства — времени существует хотя бы одно и не более четырех различных изотропных направлений (называемых главными), таких, что соответствующий каждому из этих направлений изотропный вектор l^i удовлетворяет алгебраическому уравнению **:

$$l_i C_{j]kl[m]n} l^k l^l = 0. \quad (52)$$

Типы алгебраической структуры тензора Вейля, различающиеся между собой по числу несовпадающих главных изотропных направлений, совпадают с определенными типами по классификации Петрова: алгебраически общему типу I по Петрову соответствуют четыре различных главных изотропных направления,

* Физически главные изотропные направления для гравитационного поля выделяются тем, что вдоль этих направлений локально не происходит астигматического фокусирования первоначально параллельного пучка лучей. Для вакуума такой пучок лучей, движущийся вдоль любого из этих направлений, локально вообще не испытывает фокусирования.

Отметим также, что в силу теоремы Гольдберга — Сакса в вакууме [2] вырожденные главные изотропные направления для гравитационного поля, называемые иначе направлениями распространения, имеют огибающими бессдвиговые геодезические.

** Изложение описанных ниже результатов можно найти также в обзоре [4, 27].

тогда как для всех алгебраически специальных (вырожденных) типов Петрова имеет место совпадение некоторых из этих направлений: в типе II имеется три различных направления (одно из них — вдвоенное), в типе D — два попарно совпадающих, в типе III — два различных (одно из них имеет кратность три) и, наконец, в типе N — все четыре главных изотропных направления совпадают. На рис. 2 изображена так называемая диаграмма Пенроуза для типов гравитационных полей по классификации Петрова. В квадратных скобках указана соответствующая типу кратность главных изотропных направлений. Тип O означает равный нулю тензор Вейля, т. е. содержит только конформно-плоские пространства.

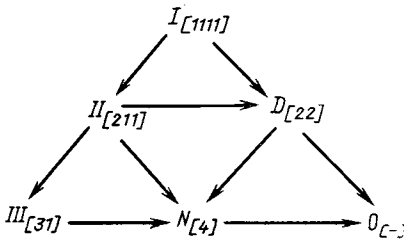


Рис. 2. Диаграмма Пенроуза. Стрелки указывают направления увеличивающегося вырождения

Изотропные векторы, определяющие в алгебраически специальных полях кратные главные изотропные направления, удовлетворяют также [кроме (52)] и более жестким уравнениям в соответствии с возрастающей кратностью:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{II, D: } & C_{ijb[l}l_m]l^{jk} = 0; \\
 \text{III: } & C_{ijb[l}l_m]l^k = 0; \\
 \text{N: } & C_{ijkl}l^l = 0.
 \end{aligned} \right\} (53)$$

Алгебраическая структура тензора Вейля принадлежит к некоторому вырожденному типу по Петрову, если и только если соответствующее этому типу уравнение в ряду (53) имеет решение, не удовлетворяющее следующему, более жесткому условию.

Рассмотрим теперь выражение этой классификации в терминах формализма Ньюмена — Пенроуза. Выбирая вектор изотропной базисной тетрады l^i вдоль главного изотропного направления наибольшей для данного типа кратности и используя разложение тензора Вейля (17) по бивекторному базису (7), получаем, что в этой тетраде для каждого типа по Петрову имеют место условия:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{I: } & \Psi_0 = 0, \quad \Psi_1 \neq 0; \\
 \text{II, D: } & \Psi_0 = \Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 \neq 0; \\
 \text{III: } & \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = 0, \quad \Psi_3 \neq 0; \\
 \text{N: } & \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0, \quad \Psi_4 \neq 0.
 \end{aligned} \right\} (54)$$

В случае типа D, кроме того, выбирая вектор тетрады n^i вдоль второго вырожденного изотропного направления, получаем $\Psi_4 = \Psi_3 = 0, \Psi_2 \neq 0$.

Справедливо и обратное: если в некоторой тетраде $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_4$ принадлежат к одному из перечисленных в (54) типов, то [как легко показать из того же разложения (17)] вектор l^i является главным изотропным направлением, обладающим максимальной для данного типа кратностью. Таким образом, возможность выбора в данном поле изотропной тетрады, в которой величины $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_4$ оказываются одного из перечисленных в (54) видов, однозначно соответствует [указанным в (54) образом] принадлежности этого поля к некоторому типу по Петрову [2, 5].

Рассматривая величины $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_4$ как диадные компоненты спинора кривизны Ψ_{ABCD} , соответствующего согласно (35) тензору Вейля, классификацию полей по Петрову можно сформулировать как разделение по типам алгебраической структуры спинора Ψ_{ABCD} .

Аналогом уравнения (52), определяющего главные изотропные направления, будет служить уравнение для спинора ξ^A (называемого далее фундаментальным):

$$\Psi_{ABCD} \xi^A \xi^B \xi^C \xi^D = 0. \tag{55}$$

Изотропное направление, определяемое спинором ξ^A по формуле

$$l^i = \sigma^i_{AB} \xi^A \bar{\xi}^{\dot{B}},$$

является главным изотропным направлением. Уравнение (55) имеет всегда хотя бы одно и не более четырех различных (т. е. отличающихся не только числовым множителем) решений. Кратность вырожденных фундаментальных спиноров для каждого типа по Петрову совпадает с кратностью соответствующих им главных изотропных направлений для этого типа, указанной на диаграмме Пенроуза (см. рис. 2). Аналогом уравнений (53) служат уравнения, которым должны удовлетворять кратные решения (55). Эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{I:} & \quad \Psi_{ABCD} \xi^A \xi^B \xi^C \xi^D = 0; & \Psi_{ABCD} = \alpha_{(A} \beta_B \gamma_C \delta_{D)}; \\ \text{II, D:} & \quad \Psi_{ABCD} \xi^A \xi^B \xi^C = 0; & \Psi_{ABCD} = \alpha_{(A} \alpha_B \beta_C \gamma_{D)}; \\ \text{III:} & \quad \Psi_{ABCD} \xi^A \xi^B = 0; & \Psi_{ABCD} = \alpha_{(A} \alpha_B \alpha_C \beta_{D)}; \\ \text{N:} & \quad \Psi_{ABCD} \xi^A = 0; & \Psi_{ABCD} = \alpha_A \alpha_B \alpha_C \alpha_D \end{aligned}$$

(в типе I нет кратных решений). Справа указана соответствующая типу поля алгебраическая структура спинора Ψ_{ABCD} , выраженная через фундаментальные спиноры. (Различными буквами обозначены фундаментальные спиноры, определяющие различные главные изотропные направления.) Эта структура может быть просто получена факторизацией многочлена четвертой степени (55).

Свойства (54) диадных компонент Ψ_{ABCD} будут иметь место при выборе в качестве первого спинора базисной диады $\{o^A, \iota^A\}$ фундаментального спинора α^A , имеющего наибольшую для данного типа кратность.

Соответствие (54) типа поля по Петрову и алгебраической структуры величин $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_4$ (как тетрадных компонент тензора Вейля или диадных компонент спинора кривизны Ψ_{ABCD}) приводит к сравнительно простому способу определения типа поля.

Действительно, пусть в некотором произвольном векторном или спинорном базисе известны величины $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_4$. Будем искать такие параметры вращения этих базисов, чтобы преобразованный тетрадный вектор l^i или базисный спинор o^A совпадали соответственно с главным изотропным направлением и фундаментальным спинором. (При этом надо пользоваться B -вращениями (46) или b -преобразованиями (45), так как при других вращениях l^i и o^A определяют неизменное изотропное направление.) После этих преобразований в новом базисе согласно (52) или (55) должно иметь место $\tilde{\Psi}_0 = 0$, т. е. параметр b (или B) должен удовлетворять алгебраическому уравнению четвертой степени:

$$\Psi_4 b^4 + 4\Psi_3 b^3 + 6\Psi_2 b^2 + 4\Psi_1 b + \Psi_0 = 0. \quad (56)$$

Четыре корня этого уравнения соответствуют четырем фундаментальным спинорам и определяют четыре главных изотропных направления, причем кратным корням (56) соответствуют фундаментальные спиноры и главные изотропные направления той же кратности. Это следует из того, что при b -вращениях (45) или B -вращениях (46) с $b = B$ остальные величины $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ преобразуются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Psi}_1 &= \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4; \\ \tilde{\Psi}_2 &= \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4; \\ \tilde{\Psi}_3 &= \Psi_3 + b\Psi_4; \\ \tilde{\Psi}_4 &= \Psi_4. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Из (56) и (57) видно, что многочлены относительно b , стоящие в правых частях (57), с точностью до числового коэффициента получают последовательным дифференцированием (56) по b при постоянных $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_4$. Поэтому если b является кратным корнем (56), то в преобразованном базисе обратятся в нуль вместе с Ψ_0 и следующие за ней в ряду $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_4$ величины, так что общее число обратившихся в нуль тетрадных компонент тензора Вейля будет равно кратности корня. Таким образом, согласно (54) определение типа поля (по Петрову) по заданным

в некотором базисе величинам $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_4$ сводится к определению кратности корней многочлена четвертой степени (56).

Аналогично описанной выше классификации Петрова для гравитационных полей, связанной с типами алгебраической структуры тензора Вейля, можно провести классификацию электромагнитных полей по алгебраическим типам тензора Максвелла или определяемого им самодуального бивектора $\overset{+}{F}_{ij}$ (10). Фактически такая классификация содержится уже в работах Рузе [29] и Синга [28] *.

Главные изотропные направления l^i для $\overset{+}{F}_{ij}$ и фундаментальные спиноры ξ^A для симметричного спинора φ_{AB} , соответствующего $\overset{+}{F}_{ij}$, согласно (34) определяются уравнениями

$$l_{[i}\overset{+}{F}_{j]k}l^k = 0; \quad \varphi_{AB}\xi^A\xi^B = 0.$$

Каждое из этих уравнений имеет хотя бы одно и не более двух различных решений. Поэтому аналогично типам Петрова имеем следующие типы электромагнитных полей, различающиеся кратностью фундаментальных спиноров и главных изотропных направлений: III_F [11], N_F [2]. (Можно также ввести еще тип O_F для случая $\overset{+}{F}_{ij} = 0$.) Индекс F означает тип для электромагнитного поля.

Аналогично (53) главные изотропные направления и фундаментальные спиноры для этих типов удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{array}{l} \text{III}_F: \quad \mu_{[i}\overset{+}{F}_{j]k}l^k = 0; \quad \varphi_{AB}\xi^A\xi^B = 0; \quad \varphi_{AB} = \alpha_{(A}\beta_{B)}; \\ N_F: \quad \overset{+}{F}_{jk}l^k = 0; \quad \varphi_{AB}\xi^A = 0; \quad \varphi_{AB} = \alpha_A\alpha_B. \end{array} \right\} \quad (58)$$

Справа в (58) указана алгебраическая структура φ_{AB} , выраженная через фундаментальные спиноры.

В терминах формализма Ньюмена — Пенроуза при выборе вектора l^i в качестве первого вектора изотропной базисной тетрады или фундаментального спинора α^A в качестве базисного спинора α^A согласно (58) для скаляров $\varnothing_0, \varnothing_1, \varnothing_2$ будем иметь:

$$\begin{array}{l} \text{III}_F: \quad \varnothing_0 = 0, \quad \varnothing_1 \neq 0; \\ N_F: \quad \varnothing_0 = \varnothing_1 = 0, \quad \varnothing_2 \neq 0, \end{array}$$

причем если одновременно в типе III_F в качестве вектора n^i выбрать другое главное изотропное направление тензора F_{ij} , соответствующее фундаментальному спинору β^A , то для этого

* Изложение этой классификации в терминах формализма Ньюмена — Пенроуза можно найти, например, в [30].

типа будем иметь:

$$\text{III}_F: \varnothing_0 = \varnothing_2 = 0, \quad \varnothing_1 \neq 0.$$

Согласно формулам преобразования величин \varnothing_0 , \varnothing_1 , \varnothing_2 при b -вращениях спинорных диад или B -вращениях тетрад (с $b = B$), определение типа электромагнитного поля сводится к определению кратности уравнения второго [а не четвертого, как в (56)] порядка:

$$\varnothing_2 b^2 + 2\varnothing_1 b + \varnothing_0 = 0.$$

Асимптотически-плоские гравитационные поля и теорема расщепления Сакса. Если предположить, что гравитационное поле создается системой источников, занимающей некоторую ограниченную область пространства, вне которой источники отсутствуют, то естественно ожидать, что при удалении от источников создаваемое ими поле «ослабевает» — пространство — время по своим свойствам приближается к пространству Минковского, т. е. является асимптотически-плоским.

Асимптотически-плоские гравитационные поля представляют весьма важный и интересный класс полей. В первую очередь, это связано с двумя обстоятельствами [1]: во-первых, в подавляющем большинстве физических ситуаций, в которых следует ожидать существенных общерелятивистских эффектов (за исключением космологических задач), значения кривизны, входящие в локальный процесс, на много порядков будут превосходить характерные значения кривизны общего космологического фона, т. е. асимптотическая евклидовость является в этих случаях хорошим приближением; во-вторых, именно в асимптотически-плоских случаях Общая теория относительности «начинает напоминать остальную физику» [1]: именно в этих полях можно определить энергию и импульс системы источников и потерю энергии системой на излучение, рассматривать падающие и уходящие волны и их рассеяние, изучать мультипольную структуру источников, а также многие другие вопросы [31—38].

Конформное отображение пространства — времени на компактное многообразие с границей [1, 4], построение так называемой «функции информации», определяющей испускаемое системой излучение, а также использование полной группы асимптотических симметрий (группы Бонди — Метцнера — Сакса) [33, 34] в сочетании с формализмом Ньюмена — Пенроуза или некоторыми его элементами составляют изящный и мощный аппарат, сыгравший существенную роль в исследовании асимптотически-плоских полей.

Ограничившись здесь лишь этими немногими перечислениями и ссылками, рассмотрим далее одно важное общее свойство асимп-

тотически-плоских полей, тесно связанное с классификацией Петрова, — теорему расщепления Сакса [31—32].

Согласно этой теореме, в асимптотически-плоском пространстве на больших расстояниях от локализованной системы гравитационное поле обладает специфическим поведением, а именно вдоль всякой уходящей на бесконечность изотропной геодезической γ с аффинным параметром r тетрадные компоненты тензора Вейля в главном по $1/r$ приближении имеют вид [2] *

$$\Psi_N = O(r^{-5+N}), \quad N = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Это значит, что вдали от источников все пространство асимптотически разделяется на пять зон. Самая внешняя — волновая зона, где из всех величин $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_4$ существенна лишь $\Psi_4 = O(1/r)$, а остальные пренебрежимо малы и, следовательно, в главных по $1/r$ членах в волновой зоне гравитационное поле имеет тип N , причем касательный к γ вектор совпадает с кратным главным изотропным направлением. Главный член величины Ψ_4 в волновой зоне непосредственно выражается через функцию информации [4], что характеризует ее связь с асимптотическим полем излучения.

По мере приближения вдоль изотропной геодезической γ из бесконечности к источникам мы последовательно проходим остальные четыре зоны, в которых одна за другой «включаются», давая существенный вклад в кривизну, величины $\Psi_3, \Psi_2, \Psi_1, \Psi_0$ и, следовательно, вырождение типа поля по Петрову при приближении к источникам уменьшается. Общее асимптотическое поведение кривизны пространства (определяемой тензором Вейля) вдоль γ можно условно выразить следующей формулой:

$$C = N/r + III/r^2 + II/r^3 + I/r^4 + I'/r^5 + O(1/r^6).$$

Здесь N, III, II, I — типы поля по Петрову в соответствующих асимптотических зонах; r — аффинный параметр на γ .

В первых трех зонах поле асимптотически принадлежит к вырожденным типам по Петрову, причем геодезическая γ определяет его главное кратное изотропное направление. В четвертой и пятой зонах поле имеет алгебраически общий тип, но в четвертой зоне

* Детальное и строгое определение асимптотически-плоского пространства — времени было дано Пенроузом [1]. Наиболее важными предполагаемыми свойствами этих полей, на которых основано доказательство теоремы Сакса, являются аналитичность характеристик поля и их производных по обратным степеням аффинного параметра r на γ , а также специфическое поведение одной из тетрадных компонент тензора Вейля — величины Ψ_0 (вектор l^i изотропной тетрады направлен вдоль γ). Предполагается, что $\Psi_0 = O(1/r^5)$. Это предположение оказывается выполненным во многих частных случаях, например, для западающих решений в слабом поле или даже при наличии падающего на систему излучения конечной длительности [34].

эта геодезическая по-прежнему указывает главное направление, тогда как в самой ближней, пятой, зоне поле вообще не связано с γ .

Последовательное «отщепление» главных изотропных направлений от γ при переходе от самой дальней, волновой, к ближним зонам изображено на рис. 3.

Таким образом, теорема расщепления Сакса придает наглядный геометрический смысл типам гравитационных полей и главным изотропным направлениям. Аналогичная теорема расщепления может быть сформулирована для электромагнитных полей в плоском пространстве, создаваемых локализованной системой зарядов, а также для асимптотически-плоских электровакуумных гравитационных полей [35].

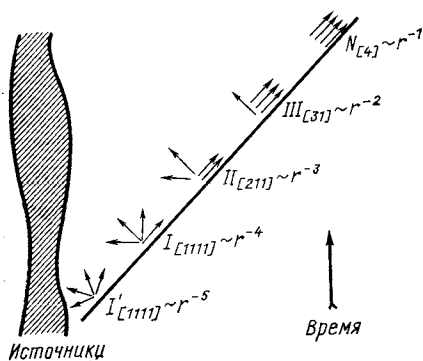


Рис. 3. Диаграмма Сакса (свойство последовательного вырождения и асимптотическое поведение гравитационных полей островных систем)

3. ФОРМАЛИЗМ НЬЮМЕНА — ПЕНРОУЗА КАК МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

Техника интегрирования уравнений Эйнштейна в формализме Ньюмена — Пенроуза была развита в основном в работах [38—41]. Использование этой техники в целом ряде задач имеет определенные преимущества перед непосредственным интегрированием «в лоб» уравнений гравитационного поля. В порядке перечисления укажем здесь некоторые из них.

1. Одним из наиболее существенных моментов является переход к «каноническим» переменным гравитационного поля, осуществляемый в рамках метода спиновых коэффициентов. Все три группы переменных поля соответствующим образом преобразуются при лоренцевых вращениях изотропной тетрады (см. разд. 1), в то время как полная система НП-уравнений (уравнений Ньюмена — Пенроуза) остается при таких преобразованиях инвариантной (переменные первой группы, кроме того, зависят от выбора системы координат). Указанные преобразования используются с тем расчетом, чтобы преобразованная тетрада учитывала реальную симметрию изучаемых нами пространств; при таком выборе базиса полная система НП-уравнений в целом ряде случаев распадается на систему обыкновенных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

2. Использование формализма Ньюмена — Пенроуза предполагает понижение порядка уравнений гравитационного поля при одновременном увеличении их числа. Действительно, в то время как уравнения Эйнштейна являются (квазилинейными) уравнениями *второго* порядка, полная система уравнений Ньюмена — Пенроуза содержит лишь инвариантные дифференциальные операторы *первого* порядка.

3. Некоторые спиновые коэффициенты (такие, как ρ , σ и т. п.), используемые в формализме Ньюмена — Пенроуза, имеют простой геометрический смысл, поэтому отпадает необходимость в дополнительном геометрическом исследовании пространства — времени, описываемого тем или иным частным решением уравнений Эйнштейна. Более того, по заданным тетрадным компонентам тензора Вейля однозначно устанавливается тип по Петрову рассматриваемого гравитационного поля (см. разд. 2).

Следует отметить также, что если в пространстве — времени кроме гравитационного имеются, например, электромагнитное или другие физические поля, то знание полного набора проекций на изотропную тетраду соответствующих тензоров, описывающих эти поля, дает информацию об алгебраической структуре, асимптотических свойствах этих полей, о поведении связанных с ними главных изотропных конгруэнций и т. п.

При детальном исследовании структуры пространства — времени, порождаемого данным гравитационным полем, часто оказывается, что не только оптические скаляры, но и некоторые другие спиновые коэффициенты тесным образом связаны с физическими и геометрическими характеристиками процессов, протекающих в рассматриваемом гравитационном поле. Так, например, если мы имеем дело с плоской гравитационной волной, распространяющейся вдоль некоторой вырожденной ($\rho = \sigma = 0$) конгруэнции геодезических лучей, то спиновый коэффициент τ характеризует скорость изменения направления распространения волны; если при этом $\tau = 0$, то семейство волновых фронтов является плоскопараллельным. Ниже, в настоящем разделе, рассмотрено гравитационное поле, порождаемое некоторым телом, анизотропно излучающим высокочастотные безмассовые поля или ультрарелятивистские частицы и в силу анизотропии излучения испытывающим отдачу. Движение такого тела, называемого иначе «фотонной ракетой» Киннерслея [41, 104], очевидно, будет ускоренным. При том выборе изотропной тетрады Ньюмена — Пенроуза, который сделан нами в этом разделе, спиновый коэффициент ν характеризует величину этого ускорения относительно локально-геодезической системы координат, а мнимая часть γ — скорость изменения его направления.

4. В процессе интегрирования уравнений Эйнштейна в формализме Ньюмена — Пенроуза ряд промежуточных выкладок

может быть автоматизирован. Так, для получения трансверсальных уравнений (см. ниже) Киннерслеем [41] использовался компьютер с применением языка FORMAC. Для тех же целей применим язык АНАЛИТИК (алгоритмический язык для описания вычислительных процессов с использованием аналитических преобразований [42]), приспособленный в ЭВМ МИР-2 *; возможно использование также языка ФОРТРАН **. В ряде задач общей теории относительности (ОТО) требуется знание в аналитическом виде (хотя бы в виде функционального ряда) решения уравнений Эйнштейна, отвечающего тому или иному тензору энергии — импульса; в таких задачах применение формализма Ньюмена — Пенроуза с дальнейшим использованием вычислительной техники может существенно сократить время счета.

В качестве примеров, носящих, однако, весьма общий характер, ниже будет рассмотрено интегрирование полной системы НП-уравнений для полей тяготения типа D по Петрову в вакууме и в пространстве, заполненном излучением.

Тип D вакуумных метрик. В фундаментальном исследовании [41] Киннерслею удалось в явном виде найти все вакуумные решения уравнений Эйнштейна, отвечающие гравитационным полям типа D . Остановимся на основных этапах этой работы, а также укажем на некоторые ее обобщения.

Для полей тяготения типа D единственной отличной от нуля тетрадной компонентой тензора Вейля будет Ψ_2 , если два действительных вектора l_i и n_i изотропной тетрады выбрать совпадающими с направлениями распространения (см. разд. 2). В силу теоремы Гольдберга — Сакса [2, 45—47] вырожденные собственные векторы тензора Вейля в пустоте образуют конгруэнцию бессдвиговых геодезических (и обратно). Поэтому, как обычно, выбираем систему координат так, чтобы $l^i = \delta_1^i$ и координата $x^1 \equiv r$ была аффинным параметром вдоль геодезической l^i . При этом оказывается, что спиновый коэффициент ϵ будет чисто мнимой величиной и за счет вращения тетрады $m^i \rightarrow \exp(iH) m^i$ можно обратить ϵ в нуль. С учетом сказанного выше можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0; \quad \Psi_2 \neq 0; \quad \sigma = k = \nu = \lambda = \epsilon = 0; \\ l^i = \{0, 1, 0, 0\}; \quad n^i \equiv \{X^0, U, X^2, X^3\}; \quad m^i \equiv \{\xi^0, \omega, \xi^2, \xi^3\}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

* Пример отлаженной программы на языке АНАЛИТИК для вычисления коммутаторов инвариантных производных (один из этапов интегрирования НП-системы, см. ниже) содержится, например, в [43].

** При составлении больших программ преимущества ФОРТРАНа перед АНАЛИТИКом довольно очевидны, поскольку соответствующая ЭВМ (БЭСМ-6) значительно превосходит МИР-2 по быстродействию и памяти. Следует отметить, однако, что стандартные возможности ФОРТРАНа не позволяют выполнять преобразований над аналитическими выражениями. О других машинных языках, используемых для выполнения аналитических преобразований в ОТО, см., например, [44].

Отметим, что векторы тетрады и координатная система еще не определены однозначно, а допускают следующие преобразования, сохраняющие соотношения (59):

$$x^{1'} = x^1 + R^*(x^0, x^2, x^3); \quad (60)$$

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^0, x^2, x^3); \quad (61)$$

$$m^{i'} = m^i; \quad n^{i'} = A^* n^i; \quad l^{i'} = (A^*)^{-1} l^i; \quad r' = A^* r; \quad (62)$$

$$n^{i'} = n^i; \quad l^{i'} = l^i; \quad m^{i'} = \exp(iH^*) m^i \quad (63)$$

(здесь и всюду в дальнейшем греческие индексы α, β, \dots пробегает значения 0, 2, 3, а величины со звездочкой * не зависят от r).

Тетрадные компоненты тензора Риччи $\Phi_{\mu\nu}$ и скалярная кривизна Λ для вакуумных полей тяготения равны нулю (космологический член в уравнениях Эйнштейна отсутствует).

Ограничившись рассмотрением случая $\rho \neq 0^*$, выпишем общее решение уравнения (II.12) при сформулированных предположениях:

$$\rho = -[r + R^*(x^0, x^2, x^3) + i\rho^*]^{-1}; \quad R^* = \bar{R}^*; \quad \rho^* = \bar{\rho}^*, \quad (64)$$

где величины со звездочкой появляются как постоянные интегрирования. Легко видеть, что преобразованием (60) это решение приводится к виду

$$\rho = -(r + i\rho^*)^{-1}. \quad (65)$$

Дальнейшее интегрирование радиальных уравнений, содержащих оператор $D = \partial/\partial r$, требует некоторой дополнительной работы. Именно, подействуем коммутаторами инвариантных производных (6) на скаляры Ψ_2 и ρ ; получающиеся таким образом уравнения являются нетривиальными следствиями НП-системы и оказываются полезными при ее интегрировании:

$$\Delta\rho + D\mu = \rho(\gamma + \bar{\gamma}) + \pi\bar{\pi} - \tau\bar{\tau}; \quad (66)$$

$$\bar{\delta}\rho + D\pi = \rho(\alpha + \bar{\beta}); \quad (67)$$

$$\delta\mu + \Delta\tau = -\mu(\bar{\alpha} + \beta) + \tau(\gamma - \bar{\gamma}); \quad (68)$$

$$D(\bar{\delta}\rho) = 3\rho(\bar{\delta}\rho) + \rho^2(\pi - \alpha - \bar{\beta}); \quad (69)$$

$$2\rho\Delta\rho - D(\Delta\rho) = \rho^2(\gamma + \bar{\gamma}) - (\tau + \pi)\bar{\delta}\rho - (\bar{\tau} + \pi)\delta\rho. \quad (70)$$

Уравнение (69) с учетом (II.12), (II.15) и (II.16) легко интегрируется:

$$\bar{\delta}\rho = \rho(\alpha + \bar{\beta}) - 2\bar{\tau}^*\rho^3. \quad (71)$$

* Случай $\rho = 0$, рассмотренный в [41], приводит к так называемым B -метрикам Элерса и Кундта [48], физическая интерпретация которых не ясна.

Комбинируя (71) и (67), получаем уравнение

$$D\pi = 2\bar{\tau}^*\rho^3. \quad (72)$$

Наконец, последовательное интегрирование (72), (П.16), (П.15), (П.14), (П.30) — (П.32), (П.2), (П.17), (П.33), (70) и (66) приводит к следующей зависимости переменных гравитационного поля от радиальной координаты:

$$\left. \begin{aligned} \pi &= \pi^* + \bar{\tau}^*\rho^2; \\ \beta &= \bar{\rho}\beta^*; \\ \alpha &= \rho\alpha^* - \pi^* + \rho^2\bar{\tau}^*; \\ \tau &= \rho\eta^* + \rho\bar{\rho}\tau^* - \bar{\pi}^*; \\ \omega &= \bar{\rho}\omega^* + \bar{\alpha}^* + \beta^* - \bar{\pi}^*/\bar{\rho}; \\ \xi^\alpha &= \bar{\rho}\xi^{*\alpha}; \\ X^\alpha &= X^{*\alpha} + \bar{\rho}\bar{\rho}(\bar{\tau}^*\xi^{*\alpha} + \tau^*\bar{\xi}^{*\alpha}) + \rho\eta^*\bar{\xi}^{*\alpha} + \bar{\rho}\bar{\eta}^*\xi^{*\alpha}; \\ \Psi_2 &= \rho^3\Psi^*; \\ \gamma &= \gamma^* + \rho(\eta^*\alpha^* - \bar{\tau}^*\bar{\pi}^*) + \bar{\rho}(\bar{\eta}^*\beta^* - \tau^*\pi^*) + \\ &+ \rho^2(\Psi^*/2 + \bar{\tau}^*\eta^*) + \bar{\rho}\bar{\rho}(\tau^*\alpha^* + \bar{\tau}^*\beta^*) + \rho^2\bar{\rho}\tau^*\bar{\tau}^* - r\pi^*\bar{\pi}^*; \\ U &= U^* - r(\gamma^* + \bar{\gamma}^* + \eta^*\pi^* + \bar{\eta}^*\bar{\pi}^*) + r^2\pi^*\bar{\pi}^* + \\ &+ \rho[\bar{\tau}^*(\bar{\alpha}^* + \beta^*) - \bar{\tau}^*\eta^* + \eta^*\bar{\omega}^* - \Psi^*/2] + \\ &+ \bar{\rho}[\tau^*(\alpha^* + \bar{\beta}^*) - \tau^*\bar{\eta}^* + \bar{\eta}^*\omega^* - \bar{\Psi}^*/2] + \\ &+ \bar{\rho}\bar{\rho}(\bar{\tau}^*\omega^* + \tau^*\bar{\omega}^* - \tau^*\bar{\tau}^*) - (\bar{\rho}/\bar{\rho})\bar{\tau}^*\bar{\pi}^* - (\bar{\rho}/\bar{\rho})\tau^*\pi^*; \\ \Delta\rho &= -\rho^2M^* + \rho^2\eta^*(\alpha^* + \bar{\beta}^*) + \rho(\gamma^* + \bar{\gamma}^* + \eta^*\pi^*) + \\ &+ \bar{\rho}\bar{\eta}^*\bar{\pi}^* + \bar{\rho}\bar{\rho}[\bar{\eta}^*(\bar{\alpha}^* + \beta^*) - \tau^*\pi^* + \bar{\tau}^*\bar{\pi}^* - \eta^*\bar{\eta}^*] - \\ &- \rho^3(\Psi^*/2 + \bar{\tau}^*\eta^*) - \rho^2\bar{\rho}[\bar{\Psi}^*/2 + \bar{\tau}^*\eta^* - \tau^*(\alpha^* + \bar{\beta}^*) - \\ &- \bar{\tau}^*(\bar{\alpha}^* + \beta^*)] - \rho^3\bar{\rho}\tau^*\bar{\tau}^* + r^2\rho^2\pi^*\bar{\pi}^*; \\ \mu &= \mu^* + \rho(M^* - \bar{\tau}^*\bar{\pi}^*) + \bar{\rho}\tau^*\pi^* + \rho^2(\Psi^*/2 + \bar{\tau}^*\eta^*) + \\ &+ \bar{\rho}\bar{\rho}\bar{\Psi}^*/2 + \rho^2\bar{\rho}\tau^*\bar{\tau}^* - r^2\rho\pi^*\bar{\pi}^*. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

На следующем этапе производятся подстановка соотношений (73) в не использованные до сих пор уравнения НП-системы и приведение последних к полиномиальному относительно ρ виду (из соображений краткости результат такого рода процедуры мы приведем в упрощающем предположении $\pi^* = 0$). Приравнявая в получающихся соотношениях члены, стоящие справа и слева

при одинаковых степенях ρ , после довольно длинных преобразований получаем ряд алгебраических следствий

$$\eta^* = \mu^* = U^* + M^* = 0; \quad \omega^* = -i\rho^* (\bar{\alpha}^* + \bar{\beta}^*)$$

и систему трансверсальных уравнений вида

$$\xi^{*\alpha}(\Psi^*)_{,\alpha} = -3\Psi^*(\bar{\alpha}^* + \beta^*); \quad \bar{\xi}^{*\alpha}(\Psi^*)_{,\alpha} = -3\Psi^*(\alpha^* + \bar{\beta}^*); \quad (74)$$

$$X^{*\alpha}(\Psi^*)_{,\alpha} = -3\Psi^*(\gamma^* + \bar{\gamma}^*); \quad (75)$$

$$\xi^{*\alpha}(\rho^*)_{,\alpha} = -\rho^*(\bar{\alpha}^* + \beta^*) - i\tau^*; \quad (76)$$

$$X^{*\alpha}(\rho^*)_{,\alpha} = -\rho^*(\gamma^* + \bar{\gamma}^*); \quad (77)$$

$$\xi^{*\alpha}(\tau^*)_{,\alpha} = -\tau^*(3\bar{\alpha}^* + \beta^*); \quad (78)$$

$$\bar{\xi}^{*\alpha}(\tau^*)_{,\alpha} = -\tau^*(\alpha^* + 3\bar{\beta}^*) + 2i\rho^*U^* + (\Psi^* - \bar{\Psi}^*)/2; \quad (79)$$

$$X^{*\alpha}(\tau^*)_{,\alpha} = -\tau^*(\gamma^* + 3\bar{\gamma}^*); \quad (80)$$

$$\xi^{*\alpha}(U^*)_{,\alpha} = -2U^*(\bar{\alpha}^* + \beta^*); \quad (81)$$

$$X^{*\alpha}(U^*)_{,\alpha} = -2U^*(\gamma^* + \bar{\gamma}^*); \quad (82)$$

$$X^{*\alpha}(\alpha^*)_{,\alpha} - \bar{\xi}^{*\alpha}(\gamma^*)_{,\alpha} = \gamma^*(\bar{\beta}^* - \alpha^*); \quad (83)$$

$$X^{*\alpha}(\beta^*)_{,\alpha} - \xi^{*\alpha}(\gamma^*)_{,\alpha} = \gamma^*(\bar{\alpha}^* + \beta^*) - 2\bar{\gamma}^*\beta^*; \quad (84)$$

$$\xi^{*\alpha}(\alpha^*)_{,\alpha} - \bar{\xi}^{*\alpha}(\beta^*)_{,\alpha} = 2\beta^*(\bar{\beta}^* - \alpha^*) + 2i\rho^*\gamma^* - U^*; \quad (85)$$

$$\xi^{*\alpha}(X^{*\beta})_{,\alpha} - X^{*\alpha}(\xi^{*\beta})_{,\alpha} = 2\bar{\gamma}^*\xi^{*\beta} - (\bar{\alpha}^* + \beta^*)X^{*\beta}; \quad (86)$$

$$\bar{\xi}^{*\alpha}(\xi^{*\beta})_{,\alpha} - \xi^{*\alpha}(\bar{\xi}^{*\beta})_{,\alpha} = (\alpha^* - \bar{\beta}^*)\xi^{*\beta} + (\beta^* - \bar{\alpha}^*)\bar{\xi}^{*\beta} - 2i\rho^*X^{*\beta}. \quad (87)$$

Оставшаяся часть задачи сводится к нахождению всех решений этой системы и определению координатной зависимости компонент векторов изотропной тетрады.

Начнем с того, что посредством координатных преобразований (61) добьемся выполнения соотношений $X^{*\alpha} = \delta^{\alpha}_0$. Оставшийся после этого произвол в выборе координат состоит в преобразованиях:

$$x^{0'} = x^0 + f(x^2, x^3); \quad (88)$$

$$x^{2'} = g(x^2, x^3); \quad (89)$$

$$x^{3'} = h(x^2, x^3). \quad (90)$$

Далее, воспользуемся преобразованием (62) для того, чтобы добиться выполнения условия $\Psi^*\bar{\Psi}^* = \text{const}$. После этого уравнения (74), (75) и (81), (82) соответственно дадут:

$$\alpha^* + \bar{\beta}^* = \gamma^* + \bar{\gamma}^* = \omega^* = 0; \quad U^* = \text{const}, \quad (91)$$

и мы сможем вторично воспользоваться допустимыми тетрадными A^* -преобразованиями (62) для приведения величины U^* к виду

$$(U^*)' = (A^*)^2 U^* = -\varepsilon^0 \equiv \begin{cases} -1/2, & U^* < 0; \\ 0, & U^* = 0; \\ +1/2, & U^* > 0. \end{cases} \quad (92)$$

Условия (91), (92) существенным образом упрощают систему трансверсальных уравнений; при интегрировании этой системы удобно рассмотреть отдельно случаи $\tau^* = 0$ и $\tau^* \neq 0$. Начнем с первого случая.

I. Семейство Ньюмена — Унти — Тамбурино (НУТ) ($\tau^* = 0$) [40]. Из уравнений (74) — (79) следует:

$$\Psi^* \equiv m + 2ibe^0 = \text{const}; \quad \rho^* \equiv b = \text{const}. \quad (93)$$

Воспользуемся теперь преобразованием (63), чтобы добиться

$$\gamma^* = 0. \quad (94)$$

Это возможно, так как под действием преобразования (63) γ^* переходит в $\gamma^{*'} = \gamma^* + (1/2) i\partial H^*/\partial x^0$. Условие (94) не нарушается при дальнейших преобразованиях (63) с функцией $H^* = H^*(x^2, x^3)$. Используя, наконец, координатные преобразования (89), (90), методом, впервые примененным в работе [40] и получившим дальнейшее развитие в [49, 50], приведем величины ξ^{*2} , ξ^{*3} к виду

$$\xi^{*2'} = p(x^2, x^3); \quad \xi^{*3'} = ip(x^2, x^3), \quad (95)$$

где $p(x^2, x^3)$, вообще говоря, комплексная функция, мнимая часть которой с помощью (63) может быть обращена в нуль. Оставшаяся после этого свобода преобразований координат x^2 и x^3 сводится к конформному преобразованию $\zeta' = \zeta'(\zeta)$, где $\zeta \equiv x^2 + ix^3$ и ζ' — произвольная аналитическая функция. С учетом (92) — (96) уравнения (83) — (87) могут быть переписаны в виде

$$2\alpha^* = \bar{\nabla} p; \quad (96)$$

$$2ib = p^2 [\nabla(\bar{\xi}^{*0}/p) - \bar{\nabla}(\xi^{*0}/p)]; \quad (97)$$

$$2\varepsilon^0 = (\sqrt{2} p)^2 \nabla \bar{\nabla} \ln(\sqrt{2} p), \quad (98)$$

где $\nabla \equiv \partial/\partial x^2 + i\partial/\partial x^3$. При этом (98) представляет собой уравнение для плоской (конформно-плоской) поверхности постоянной кривизны с метрикой $(\sqrt{2}p)^2 \delta^{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 2, 3$. Любая такая поверхность посредством конформного преобразования может быть приведена к псевдосфере ($2\varepsilon^0 = -1$), сфере ($2\varepsilon^0 = +1$) или плоскости ($2\varepsilon^0 = 0$), а для них известно, что

$$\sqrt{2} p(x^2, x^3) = 1 + \varepsilon^0 \bar{\zeta} \zeta / 2.$$

Подставляя это выражение для p в оставшееся уравнение (97), замечаем, что

$$\xi^{*0} = -ib\zeta/\sqrt{2} \quad (99)$$

является решением (по крайней мере, частным) неоднородного уравнения. Поскольку, однако, координатное преобразование (88) индуцирует $\xi^{*0'} = \xi^{*0} + p\nabla f$, а условие интегрируемости уравнения $\nabla f = -\xi^{*0}/p$, записанное в форме $\nabla\bar{\nabla}f = \bar{\nabla}\nabla f$, эквивалентно однородному уравнению (97), утверждается, что с помощью подходящего преобразования (88) общее решение (97) может быть приведено к виду (99).

На этом заканчивается интегрирование уравнений НП в рассматриваемом случае. Объединяя полученные выше результаты, получаем

$$\left. \begin{aligned} l^i &= \{0, 1, 0, 0\}; \quad n^i = \{1, U, 0, 0\}; \quad m^i = \bar{\rho} \{ -ib\zeta/\sqrt{2}, 0, p, ip \}; \\ l_i &= \{1, 0, -A^0, -B^0\}; \quad n_i = \{-U, 1, A^0U, B^0U\}; \\ m_i &= (-1/2\rho p) \{0, 0, 1, i\}, \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

где $U = -\varepsilon^0 + \bar{\rho}\rho (mr + 2b^2\varepsilon^0)$; $A^0 \equiv bx^3/\sqrt{2}p$; $B^0 \equiv -bx^2/\sqrt{2}p$.

Метрика I.A. ($\varepsilon^0 = +1/2$). Применяя к общему решению (100) координатное преобразование

$$t = x^0 - \int (dr/2U); \quad \sin \theta = (\zeta\bar{\zeta})^{1/2} (1 + \zeta\bar{\zeta}/4)^{-1}; \quad \operatorname{tg} \varphi = x^3/x^2,$$

получим метрику в стандартных координатах:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \Phi [dt + 4b \sin^2(\theta/2) d\varphi]^2 - \Phi^{-1} dr^2 - \\ &\quad - (r^2 + b^2) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2); \\ \Phi &\equiv 1 - (2mr + 2b^2)/(r^2 + b^2). \end{aligned}$$

Метрика I.B ($\varepsilon^0 = -1/2$):

$$\begin{aligned} ds^2 &= \Phi [dt + 4b \operatorname{sh}^2(\theta/2) d\varphi]^2 - \Phi^{-1} dr^2 - (r^2 + b^2) (d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\theta d\varphi^2); \\ \Phi &\equiv -1 - (2mr - 2b^2)/(r^2 + b^2). \end{aligned}$$

Метрика I.B ($\varepsilon^0 = 0$):

$$\begin{aligned} ds^2 &= \Phi (dt + b\theta^2 d\varphi)^2 - \Phi^{-1} dr^2 - (r^2 + b^2) (d\theta^2 + \theta^2 d\varphi^2); \\ \Phi &\equiv -2mr/(r^2 + b^2). \end{aligned}$$

II. *Семейство Керра — НУТ* [41] ($\tau^* \neq 0$). Используем преобразование (63) для того, чтобы сделать $i\tau^*$ действительной функцией [это возможно, поскольку при данном преобразовании τ^* превращается в $\tau^{*'} = \tau^* \exp(iH^*)$]. Из уравнений (74), (75),

(78), (79) и (85) получим

$$\Psi^* \equiv m - i [4\beta^* \tau^* - 2\rho^* \varepsilon^0] = \text{const}, \quad \beta^* = \bar{\beta}^*;$$

$$\xi^{*\alpha}(\tau^*)_{,\alpha} = 2\beta^* \tau^*; \quad \xi^{*\alpha}(\beta^*)_{,\alpha} = -\varepsilon^0/2 - 2(\beta^*)^2.$$

Выберем, далее, новую координату $x^{2'}$ таким образом, чтобы выполнялось соотношение $\rho^* = \rho^*(x^{2'})$ ($\rho^* \neq \text{const}$). В силу (77) величина $\xi^{*\alpha}(\rho^*)_{,\alpha}$ — действительная, поэтому ξ^{*2} тоже должно быть действительным. Последующим применением допустимых координатных преобразований можно получить

$$\xi^{*2} = -1/\sqrt{2}; \quad \text{Re}(\xi^{*0}) = \text{Re}(\xi^{*3}) = 0.$$

С учетом полученных соотношений из уравнений

$$\xi^{*\alpha}(\xi^{*\beta})_{,\alpha} = \bar{\xi}^{*\alpha}(\xi^{*\beta})_{,\alpha}; \quad \xi^{*\alpha}(\tau^*)_{,\alpha} = \bar{\xi}^{*\alpha}(\tau^*)_{,\alpha};$$

$$\xi^{*\alpha}(\beta^*)_{,\alpha} = \bar{\xi}^{*\alpha}(\beta^*)_{,\alpha};$$

$$X^{*\alpha}(\xi^{*\beta})_{,\alpha} = X^{*\alpha}(\tau^*)_{,\alpha} = X^{*\alpha}(\beta^*)_{,\alpha} = 0$$

вытекает, что $\xi^{*\alpha}$, τ^* и β^* зависят лишь от x^2 , так что трансверсальные уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными. Результат интегрирования этих уравнений для различных частных случаев представим в следующем виде ($x^0 = u$; $x^1 = r$; $x^2 = \theta$; $x^3 = \varphi$; $a = \text{const}$; $b = \text{const}$).
С л у ч а й П.А ($\varepsilon^0 = +1/2$);

$$\rho = -(r + ib - ia \cos \theta)^{-1}.$$

$$ds^2 = \rho \bar{\rho} (r^2 - 2mr - b^2 + a^2 \cos^2 \theta) du^2 + 2du dr -$$

$$- 4\rho \bar{\rho} [b \cos \theta (r^2 - 2mr - b^2 + a^2) - a \sin^2 \theta (mr + b^2)] du d\varphi -$$

$$- 2(a \sin^2 \theta + 2b \cos \theta) dr d\varphi - [r^2 + (b - a \cos \theta)^2] d\theta^2 +$$

$$+ \rho \bar{\rho} [(r^2 - 2mr - b^2 + a^2)(a \sin^2 \theta + 2b \cos \theta)^2 - \sin^2 \theta (r^2 + b^2 + a^2)^2] d\varphi^2.$$

С л у ч а й П.Б ($\varepsilon^0 = -1/2$, $|\beta^*| > 1/2\sqrt{2}$); $\rho = -(r - ib + ia \text{ch } \theta)^{-1}$.

$$ds^2 = -\rho \bar{\rho} (r^2 + 2mr - b^2 + a^2 \text{ch}^2 \theta) du^2 + 2du dr -$$

$$- 4\rho \bar{\rho} [b \text{ch } \theta (r^2 + 2mr - b^2 + a^2) - a \text{sh}^2 \theta (mr - b^2)] du d\varphi +$$

$$+ 2(a \text{sh}^2 \theta - 2b \text{ch } \theta) dr d\varphi - [r^2 + (b - a \text{ch } \theta)^2] d\theta^2 +$$

$$+ \rho \bar{\rho} [(r^2 + 2mr - b^2 + a^2)(a \text{sh}^2 \theta - 2b \text{ch } \theta)^2 - \text{sh}^2 \theta (r^2 + b^2 + a^2)^2] d\varphi^2.$$

Случай II.В ($\epsilon^0 = -1/2$, $|\beta^*| < 1/2 \sqrt{2}$); $\rho = -(r - ib + ia \operatorname{sh} \theta)^{-1}$.

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\rho \bar{\rho} (r^2 + 2mr - b^2 + a^2 \operatorname{sh}^2 \theta) du^2 + 2du dr + \\ & + 4\rho \bar{\rho} [b \operatorname{sh} \theta (r^2 + 2mr - b^2 - a^2) - a \operatorname{ch}^2 \theta (mr - b^2)] du d\varphi + \\ & + 2(a \operatorname{ch}^2 \theta - 2b \operatorname{sh} \theta) dr d\varphi - [r^2 + (b - a \operatorname{sh} \theta)^2] d\theta^2 - \\ & - \rho \bar{\rho} [(r^2 + 2mr - b^2 - a^2)(a \operatorname{ch}^2 \theta - 2b \operatorname{sh} \theta)^2 + \operatorname{ch}^2 \theta (r^2 + b^2 - a^2)^2] d\varphi^2. \end{aligned}$$

Случай II.Г ($\epsilon^0 = -1/2$, $|\beta^*| = 1/2 \sqrt{2}$);

$$\rho = -[r - ib + ia \exp(\theta)]^{-1}.$$

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\rho \bar{\rho} [r^2 + 2mr - b^2 + a^2 \exp(2\theta)] du^2 + \\ & + 2du dr + 4\rho \bar{\rho} \{b \exp(\theta) [r^2 + 2mr - b^2] - \\ & - a \exp(2\theta) [mr - b^2]\} du d\varphi + 2[a \exp(2\theta) - \\ & - 2b \exp(\theta)] dr d\varphi - \{r^2 + [b - a \exp(\theta)]^2\} d\theta^2 - \\ & - \rho \bar{\rho} \{(r^2 + 2mr - b^2) [a \exp(2\theta) - 2b \exp(\theta)]^2 + \\ & + (r^2 + b^2)^2 \exp(2\theta)\} d\varphi^2. \end{aligned}$$

Случай II.Д ($\epsilon^0 = 0$, $\beta^* \neq 0$); $\rho = -(r + ib + i\theta^2/2)^{-1}$.

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\rho \bar{\rho} (2mr + 2b + \theta^2) du^2 + 2du dr + \\ & + 2\rho \bar{\rho} \theta^2 (r^2 - 2mbr - mr\theta^2/2 - b^2 - b\theta^2/2) du d\varphi + \\ & + (b\theta^2 + \theta^4/4) dr d\varphi - [r^2 + (b + \theta^2/2)^2] d\theta^2 - \\ & - \rho \bar{\rho} [(2mr + 2b)(b\theta^2 + \theta^4/4)^2 + \theta^2 (r^2 + b^2)^2] d\varphi^2. \end{aligned}$$

Случай II.Е ($\epsilon^0 = 0$, $\beta^* = 0$); $\rho = -(r + i\theta)^{-1}$.

$$\begin{aligned} ds^2 = & -2\rho \bar{\rho} mr du^2 + 2du dr + 2\rho \bar{\rho} (r^2 - 2mr\theta^2 + \theta^2) du d\varphi + \\ & + 2\theta^2 dr d\varphi - (r^2 + \theta^2) d\theta^2 - \rho \bar{\rho} (r^4 + 2mr\theta^4 - \theta^4) d\varphi^2. \end{aligned}$$

Следует отметить, что метрики II.А; II.Б, II.В, II.Г и II.Д, II.Е при $a \rightarrow 0$ переходят соответственно в метрики I.А, I.Б и I.В. Наибольший интерес представляет решение II.А, впервые полученное в работе [51] и подробно проанализированное в [52]. Здесь и далее в настоящем разделе мы будем пользоваться системой единиц, в которой скорость света в вакууме c и ньютонова гравитационная постоянная G равны 1. В этих единицах m идентифицируется с полной энергией (массой) источника, a (Керровский параметр) — с удельным угловым моментом; параметр b , вносящий дополнительное вращение в конгруэнцию геодезических лучей, получил название параметра НУТ («мнимая масса», «масса типа магнитного монополя» [51] и т. п.).

Решение II.A при $a, b \rightarrow 0$ переходит в метрику Шварцшильда; естественно считать поэтому, что гравитационное поле, описываемое метрикой II.A, порождается источником, движущимся со скоростью, меньшей скорости света. Относительно остальных решений из приведенного выше семейства следует отметить [41], что соответствующий этим решениям гравитирующий источник движется по пространственноподобной ($\epsilon^0 = -1/2$) или светоподобной ($\epsilon^0 = 0$) мировой линии. Дополнительное расщепление

в этих случаях происходит за счет различного пространственного расположения 4-вектора углового момента источника, ортогонального 4-вектору скорости (табл. 4). Таким образом, формализм Ньюмена — Пенроуза позволяет с единой точки зрения получать полные семейства решений, отвечающих заданному набору параметров и описывающих источники традиционного* и люксонового типов.

Остановимся, наконец, на случае $\pi^* \neq 0$ [41]; интегрирование при этом приводит к S -метрике Элерса — Кундта ($\pi^* \neq 0, \rho^* = 0$) [48], а также к решению, являющемуся обобщением S -метрики на случай вращения ($\pi^* \neq 0, \rho^* \neq 0$). Согласно интерпретации работы

Таблица 4
Семейство вакуумных решений уравнений Эйнштейна типа Керра — Ньюмена — Уэти — Тамбурино (v — скорость; M — угловой момент источника; t, s, l — соответственно времени, пространственно- и светоподобное направления)

$M \backslash v$	t	s	l
t	—	II. Б	—
s	II. А	II. В	II. Е
l	—	II. Г	II. Д

[57], S -метрика описывает гравитационное поле равномерно ускоренного массивного тела, излучающего гравитационные волны; замечательно, что пространство — время в этом случае является асимптотически-плоским. Обратим внимание на то обстоятельство, что наиболее общее «частицеподобное» решение вакуумных уравнений Эйнштейна типа D ($\pi^* \neq 0, \rho^* \neq 0$) впервые было получено именно в терминах метода спиновых коэффициентов.

* На основании полученных тахионных решений без дополнительных экспериментальных исследований или теоретических ограничений, связанных с причинностью, разумеется, нельзя делать выводы о «реальности» или «физической неприемлемости» сверхсветового движения. Мы умышленно не касаемся здесь (весьма широкого) круга проблем, связанных со сверхсветовым движением и сверхсветовыми системами отсчета, а интересующихся этими вопросами отсылаем к литературе [53—55]. По поводу тахионов в общей теории относительности см. работы Готта [56].

Работа Киннерслея [41] имеет принципиальное значение. Дело в том, что к типу D принадлежит, в частности, важный класс гравитационных полей в пустоте, а именно стационарные асимптотически-плоские гравитационные поля, обладающие несингулярным односвязным горизонтом событий (поля тяготения черных дыр). Простой анализ всех решений типа D показывает, что наиболее общим решением, обладающим этими свойствами, является метрика Керра [61] (решение II.A при $b = 0$). Отсюда вытекают важные физические выводы.

Представим себе, что в результате коллапса массивной звезды возникает черная дыра, которая после быстрого излучения гравитационных волн переходит в основное, стационарное состояние. Согласно сказанному выше, это состояние целиком определяется значениями массы m черной дыры и ее удельного углового момента a . «Черные дыры не имеют волос» — так образно охарактеризовал Уилер то свойство стационарных черных дыр, что для их описания не требуется никаких дополнительных характеристик, таких, как мультипольные электромагнитные и гравитационные моменты, барионный заряд и т. п. (см., например, [58—60]) *.

Некоторые обобщения решений [41] (на случай теории гравитации с космологическим членом, наличия в пространстве — времени электромагнитного поля и т. п.), принадлежащие типу D , содержатся в [68—72]. Отметим, что наиболее общее «частицеподобное» решение уравнений Эйнштейна — Максвелла с космологическим членом типа D , представленное в [72] и полученное методом, близким методу Ньюмена — Пенроуза, содержит семь произвольных параметров; «генеалогическое дерево» указанного решения (по Плебаньскому — Демьянскому [72]) изображено на рис. 4.

Остановимся на некоторых других работах, посвященных решениям уравнений Эйнштейна и Эйнштейна — Максвелла в формализме Ньюмена — Пенроуза, в которых для интегрирования полной системы НП-уравнений использовались методы, аналогичные представленным в [38—41].

Прежде всего следует заметить, что метрики типа II по классификации Петрова уже в значительно меньшей степени поддаются детальному исследованию в рамках метода спиновых коэффициентов, чем метрики типа D . Исторически впервые вакуумные решения уравнений Эйнштейна типа II, содержащие невырожденную бессдвиговую неврашающуюся конгруэнцию геодезических лучей, еще до возникновения формализма Ньюмена — Пенроуза были исследованы Робинсоном и Траутманом [77], поэтому

* Описание свойств стационарных черных дыр, а также дальнейшие ссылки на литературу содержатся, например, в обзоре [62].

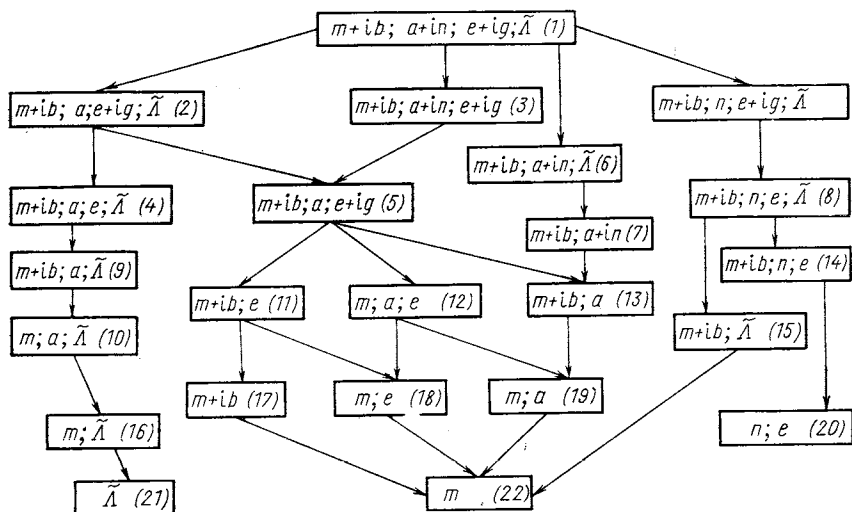


Рис. 4. «Генеалогическое дерево» общего «частичнеподобного» решения уравнений Эйнштейна — Максвелла с космологическим членом типа D по Петрову [72]:

m — масса; b — параметр НУТ; a — вращение; n — ускорение; e и g — электрический и магнитный заряды источника; $\tilde{\Lambda}$ — космологический член; 1 — Плебанский, Демьянский [72]; 2 — Плебанский [73]; 3 — Киннерслей [74]; 4 — Картер [75]; 5 — Демьянский, Ньюмен [51]; 6 — Картер [75]; 7 — Киннерслей [41]; 8 — Картер [75]; 9 — Фролов [69]; 10 — Демьянский [78]; 11 — Брилл [85]; 12 — Ньюмен, [Роуч, Чиннапаред, Эвстон, Пракаш, Торренс [79], Черес [80], Эрнст [81]; 13 — Демьянский [82], Крамер, Нейгебауэр [83], И. Робинсон, Дж. Робинсон, Зунд [84]; 14 — Леви-Чивита [76], Ньюмен, Тамбурино [135], Робинсон, Траутман [77], Элсер, Кундт [48]; 15 — Демьянский [86], Фролов [69]; 16 — Коттлер [87]; 17 — Ньюмен, Тамбурино, Унти [40], Тауб [89]; 18 — Рейсснер, Нордстрем [88]; 19 — Керр [61]; 20 — Берготи [90], Робинсон [91]; 21 — де Ситтер [92]; 22 — Шварцшильд [93].

этот класс метрик получил название метрик Робинсона — Траутмана. Как сами метрики Робинсона — Траутмана, так и их эйнштейн-максвелловские обобщения представлены в НП-формализме соответственно работами [39] и [143]. Значительно более широкий класс решений уравнений Эйнштейна в пустоте, обобщающих решения Робинсона — Траутмана на случай наличия вращения у конгруэнции геодезических лучей, в рамках метода спиновых коэффициентов был рассмотрен Талботом [49]; в общем случае метрическая форма оказалась зависящей от трех произвольных функций угловых координат и времени, удовлетворяющих системе трех нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, неинтегрируемой в квадратурах. Наконец, электровакуумные алгебраически специальные гравитационные поля, содержащие бессдвиговую конгруэнцию изотропных геодезических, обладающую расширением, были исследованы Линдом [50]; как и в предыдущей работе, задача интегрирования полной систе-

мы уравнений Ньюмена — Пенроуза была сведена к рассмотрению системы меньшего числа (в данном случае — пяти) нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для функций, не зависящих от аффинного параметра r вдоль лучей. Некоторые нетривиальные частные решения уравнений Эйнштейна и Эйнштейна — Максвелла из классов метрик, описанных в [49] и [50] (другими методами) были получены в работах [84, 144—146]. Интересная интерпретация решений [50] была предложена в [148].

К [49, 50] непосредственно примыкают близкие им по характеру работы [63, 64], в которых исследовались алгебраически специальные решения уравнений гравитационного поля с тензором энергии — импульса, описывающим электромагнитное и нейтринное поля.

Остановимся кратко на результатах работ [67, 147], в которых методом спиновых коэффициентов рассматривались регулярные (т. е. без угловых сингулярностей) электровакуумные гравитационные поля, для которых кратный собственный вектор тензора Вейля в каждой точке пространства — времени совпадает с одним из главных изотропных направлений тензора Максвелла и является касательным к дивергентной бессдвиговой геодезической конгруэнции (для таких гравитационных полей в работах [67, 147] принято наименование «пространства Керра — Максвелла»). В этих работах показано, что, во-первых, класс пространств Керра — Максвелла типов III и IV по Петрову является пустым и, во-вторых, метрика Керра — Ньюмена [79] является единственным решением уравнений поля среди пространств Керра — Максвелла без излучения, характеризующимся компактной поверхностью $r = \text{const}$, $u = \text{const}$ (доказательство теоремы единственности для метрики Керра — Ньюмена см. также в [50]).

Изучению конформно-плоских решений уравнений Эйнштейна — Максвелла с неизотропным ($\varnothing_0 = \varnothing_2 = 0$, $\varnothing_1 \neq 0$) и изотропным ($\varnothing_0 = \varnothing_1 = 0$, $\varnothing_2 \neq 0$) электромагнитным полем в терминах метода спиновых коэффициентов посвящены соответственно работы [149] и [150]. Оказалось, что все такие решения сводятся, с одной стороны, к так называемой «электромагнитной Вселенной» Бертоцци — Робинсона [90, 91, 149] и, с другой, к решению [150], описывающему семейство плоских электромагнитных волн ($k = \rho = \sigma = \tau = 0$). Обобщения этих решений на случай уравнений Эйнштейна — Максвелла с тензором энергии — импульса «нулевой жидкости» (см. ниже) представлены в работах [151, 152].

Наконец, что касается алгебраически общих решений уравнений гравитационного поля (тип I по Петрову), до настоящего времени довольно мало исследовавшихся в формализме Ньюмена — Пенроуза, то мы ограничимся лишь ссылками на литературу

[39, 65, 66, 153] без каких-либо дополнительных комментариев по этому вопросу.

Некоторые «излучающие» решения уравнений Эйнштейна. Рассмотрим в формализме Ньюмена — Пенроуза решения уравнений Эйнштейна типа D с тензором энергии — импульса «нулевой жидкости»:

$$8\pi T_{ij} = 2Sl_i l_j, \quad l_i l^i = 0, \quad (101)$$

где l_i — вырожденный собственный вектор тензора Вейля ($\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$; $\Psi_2 \neq 0$), совпадающий с одним из действительных векторов изотропной тетрады. Как показано в работах [94—96], тензор (101) может рассматриваться как тензор энергии — импульса высокочастотного монохроматического излучения, усредненный по области пространства, содержащей большое число длин волн. При этом оказывается, что высокочастотные (электромагнитные, гравитационные и т. п.) волны распространяются по изотропным геодезическим фоновому пространства с медленно меняющейся метрикой g_{ij} , обусловленной усредненным эффективным распределением энергии и импульса (101).

Таким образом, уравнения Эйнштейна с правой частью вида (101) описывают (нелинейное) обратное воздействие волн на фон, или, как иногда говорят, «прогибание» фона под действием излучения. По-видимому, первое решение этих уравнений было получено Вайдья [97—99] и подробно исследовано в [100]. Указанное решение описывает гравитационное поле сферически-симметричного изотропно излучающего тела; обобщение этого решения на случай, когда излучение может уносить заряд, содержится в [101]. Позднее, в работе [102], Киннерслеем было найдено решение с излучением, распределенным по закону $S = S_0(u) + S_1(u) \cos \theta(u)$, где u — запаздывающее время. Вследствие анизотропии излучения источник для метрики Киннерслея должен испытывать отдачу и, следовательно, двигаться ускоренно в любой инерциальной системе отсчета. Поэтому в решение Киннерслея явным образом входят три функции $a(u)$, $b(u)$ и $c(u)$ — независимые компоненты 4-вектора ускорения.

Решения Вайдья и Киннерслея принадлежат типу D по Петрову. Здесь мы получим все решения уравнений Эйнштейна типа D с правой частью вида (101) ($\Phi_{22} \neq 0$, остальные Φ_{mn} и Λ равны нулю), содержащие бессдвиговую невырожденную конгруэнцию геодезических лучей без вращения* ($k = \sigma = \varepsilon = 0$, $\rho = \bar{\rho} \neq 0$) [103]. Используя обозначения (введенные ранее), ставшие в настоящее время общеупотребительными, выпишем результат радиальных интегралов для соответствующей системы

* Напомним, что под невырожденной конгруэнцией геодезических лучей понимается такая конгруэнция, для которой хотя бы один из оптических скаляров отличен от нуля.

уравнений Ньюмена — Пенроуза:

$$\begin{aligned} \rho &= -1/r; \quad \pi = \pi^* + \bar{\tau}^*/r^2; \quad \beta = -\beta^*/r; \quad \alpha = -\alpha^*/r - \pi^* + \bar{\tau}^*/r^2; \\ \tau &= -\eta^*/r + \tau^*/r^2 - \bar{\pi}^*; \quad \gamma = \gamma^* - (1/r)(\eta^*\alpha^* - \bar{\tau}^*\bar{\pi}^*) - \\ & - (1/r)(\bar{\eta}^*\beta^* - \tau^*\pi^*) + (1/r^2)(\Psi^*/2 + \bar{\tau}^*\eta^* + \tau^*\alpha^* + \bar{\tau}^*\beta^*) - \\ & - \tau^*\bar{\tau}^*/r^3 - r\pi^*\bar{\pi}^*; \quad \Psi_2 = -\Psi^*/r^3; \quad \Phi_{22} = \Phi^*/r^2 \quad \xi^\alpha = -\xi^{*\alpha}/r; \\ \omega &= -\omega^*/r + (\bar{\alpha}^* + \beta^*) + r\bar{\pi}^*; \quad X^\alpha = X^{*\alpha} + \\ & + (1/r^2)(\bar{\tau}^*\xi^{*\alpha} + \tau^*\bar{\xi}^{*\alpha}) - \eta^*\bar{\xi}^{*\alpha}/r - \bar{\eta}^*\xi^{*\alpha}/r; \\ U &= U^* - r(\gamma^* + \bar{\gamma}^* + \eta^*\pi^* + \bar{\eta}^*\bar{\pi}^*) + r^2\pi^*\bar{\pi}^* - \\ & - (1/r)[(\bar{\alpha}^* + \beta^*)\bar{\tau}^* - \bar{\tau}^*\eta^* + \eta^*\bar{\omega}^* - \Psi^*/2] - \\ & - (1/r)[(\alpha^* + \bar{\beta}^*)\tau^* - \tau^*\bar{\eta}^* + \bar{\eta}^*\omega^* - \bar{\Psi}^*/2] + (1/r^2)[(\bar{\tau}^*\omega^* + \\ & + \tau^*\bar{\omega}^*) - \tau^*\bar{\tau}^*] - \bar{\tau}^*\bar{\pi}^* - \tau^*\pi^*; \quad \mu = \mu^* - (1/r)(M^* - \bar{\tau}^*\bar{\pi}^*) - \\ & - \tau^*\pi^*/r + (1/r^2)(\Psi^*/2 + \bar{\Psi}^*/2 + \bar{\tau}^*\eta^*) - \tau^*\bar{\tau}^*/r^3 + r\pi^*\bar{\pi}^*; \\ v &= (\Phi^*\pi^*/\Psi^*)r - (1/r)(\Phi^*\bar{\tau}^*/3\Psi^*) + v^*; \quad \lambda = 0. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в не использованные ранее уравнения НП-системы и разделяя переменные, получаем ряд алгебраических соотношений

$$\omega^* = \tau^* = \eta^* = 0; \quad \mu^* = \bar{\mu}^*; \quad \Psi^* = \bar{\Psi}^*; \quad M^* + U^* = 0; \quad v^*\pi^* = 0$$

и систему трансверсальных уравнений:

$$\xi^{*\alpha}(\Psi^*)_{,\alpha} = -3\Psi^*(\bar{\alpha}^* + \beta^*); \quad (102)$$

$$X^{*\alpha}(\Psi^*)_{,\alpha} = -3\Psi^*(\gamma^* + \bar{\gamma}^* + \mu^*) - \Phi^*; \quad (103)$$

$$\xi^{*\alpha}(\Phi^*)_{,\alpha} = 3\bar{v}^*\Psi^* - 4\Phi^*(\bar{\alpha}^* + \beta^*); \quad (104)$$

$$\bar{\xi}^{*\alpha}(\pi^*)_{,\alpha} = \pi^*(\bar{\beta}^* - \alpha^*); \quad (105)$$

$$\xi^{*\alpha}(\pi^*)_{,\alpha} = \pi^*(\bar{\alpha}^* - \beta^*) - \mu^*; \quad (106)$$

$$X^{*\alpha}(\pi^*)_{,\alpha} = -\pi^*(\gamma^* - \bar{\gamma}^*) + \pi^*\Phi^*/\Psi^*; \quad (107)$$

$$\bar{\xi}^{*\alpha}(\mu^*)_{,\alpha} = -2\pi^*U^* - \mu^*(\alpha^* + \bar{\beta}^*); \quad (108)$$

$$X^{*\alpha}(\mu^*)_{,\alpha} = -\mu^*(\mu^* + \gamma^* + \bar{\gamma}^*) + \mu^*\Phi^*/\Psi^*; \quad (109)$$

$$\bar{\xi}^{*\alpha}(U^*)_{,\alpha} = -3\pi^*\Psi^* - 2U^*(\alpha^* + \bar{\beta}^*); \quad (110)$$

$$X^{*\alpha}(U^*)_{,\alpha} + \bar{\xi}^{*\alpha}(v^*)_{,\alpha} = -2U^*(\mu^* + \gamma^* + \bar{\gamma}^*) - v^*(\bar{\alpha}^* + 3\beta^*); \quad (111)$$

$$\bar{\xi}^{*\alpha}(v^*)_{,\alpha} = -v^*(\bar{\beta}^* + 3\alpha^*); \quad (112)$$

$$X^{*\alpha}(\alpha^*),_{\alpha} - \bar{\xi}^{*\alpha}(\gamma^*),_{\alpha} = \nu^* + \gamma^*(\bar{\beta}^* - \alpha^*) - \alpha^*\mu^* - \pi^*U^*; \quad (113)$$

$$X^{*\alpha}(\beta^*),_{\alpha} - \xi^{*\alpha}(\gamma^*),_{\alpha} = -\beta^*(\mu^* - \gamma^* + 2\bar{\gamma}^*) + \bar{\alpha}^*\gamma^* - \bar{\pi}^*U^*; \quad (114)$$

$$\xi^{*\alpha}(\alpha^*),_{\alpha} - \bar{\xi}^{*\alpha}(\beta^*),_{\alpha} = -U^* + 2\beta^*(\bar{\beta}^* - \alpha^*); \quad (115)$$

$$\xi^{*\alpha}(X^{*\beta}),_{\alpha} - X^{*\alpha}(\xi^{*\beta}),_{\alpha} = (\mu^* + 2\bar{\gamma}^*)\xi^{*\beta} - (\bar{\alpha}^* - \beta^*)X^{*\beta}; \quad (116)$$

$$\bar{\xi}^{*\alpha}(\xi^{*\beta}),_{\alpha} - \xi^{*\alpha}(\bar{\xi}^{*\beta}),_{\alpha} = (\alpha^* - \bar{\beta}^*)\xi^{*\beta} + (\beta^* - \bar{\alpha}^*)\bar{\xi}^{*\beta}. \quad (117)$$

Интегрирование трансверсальных уравнений удобно рассмотреть отдельно для трех различных случаев, соответствующих условию $\nu^*\pi^* = 0$.

Случай А. $\nu^* = 0$; $\pi^* = 0$. Интегрирование производится аналогично случаю I, рассмотренному ранее. В результате получаются:

Метрика А.1: $ds^2 = [1 - 2m(u)/r] du^2 + 2du dr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$.

Метрика А.2: $ds^2 = [-1 - 2m(u)/r] du^2 + 2du dr - r^2 (d\theta^2 + \text{sh}^2 \theta d\varphi^2)$.

Метрика А.3: $ds^2 = [-2m(u)/r] du^2 + 2du dr - r^2 (d\theta^2 + \theta^2 d\varphi^2)$.

Метрика А.1 есть метрика Вайдья [97—100]; интерпретация остальных решений аналогична интерпретации I.Б и I.В.

Случай В. $\nu^* \neq 0$; $\pi^* = 0$. Предположим сначала, что $U^* < 0$ (подслучай В.1) и зададимся следующей калибровкой величин $\xi^{*\alpha}$:

$$\xi^{*0} = \text{Re } \xi^{*0}; \quad \xi^{*2} = \text{Re } \xi^{*2}; \quad \xi^{*3} = \text{Re } \xi^{*3} - i/\sqrt{2}; \quad (118)$$

при этом оставшаяся свобода координатных преобразований есть

$$x^{0'} = x^{0'}(x^0, x^2); \quad x^{2'} = x^{2'}(x^0, x^2); \quad (119)$$

$$x^{3'} = x^3 + f(x^0, x^2). \quad (120)$$

В результате тетрадных A^* и H^* -преобразований соответственно получим

$$U^* = -1/2; \quad \nu^* = \bar{\nu}^*. \quad (121)$$

С учетом этих соотношений из (111), (112) и (116) вытекает $\beta^* = \bar{\beta}^*$ и $(\text{Re } \xi^{*0})_{,3} = (\text{Re } \xi^{*2})_{,3} = 0$, так что путем координатных преобразований (119) можно получить

$$\text{Re } \xi^{*0} = 0; \quad \text{Re } \xi^{*2} = -1/\sqrt{2}. \quad (122)$$

Аналогично из (116) следует $(X^{*0})_{,2} = (X^{*0})_{,3} = 0$; далее, после применения допустимого координатного преобразования приходим к равенству

$$X^0 = 1. \quad (123)$$

Выпишем, наконец, общее решение уравнения (115):

$$\beta^* = -(1/2 \sqrt{2}) \operatorname{ctg} [x^2 + \tilde{f}(x^0)]. \quad (124)$$

Если теперь в качестве новой координаты $x^{2'}$ принять величину в квадратных скобках в (124), то уравнение (117) можно легко решить, а его решение с помощью координатного преобразования (120) привести к виду

$$\operatorname{Re} \xi^{*3} = -(x^3 / \sqrt{2}) \operatorname{ctg} (x^2). \quad (125)$$

Дальнейшее интегрирование системы трансверсальных уравнений несложно, и мы сразу приведем результат:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \gamma^* &= -(1/2) a(u) \cos \theta; \quad \operatorname{Im} \gamma^* = \\ &= (1/\sin \theta) [\tilde{A}(u) \cos(\varphi/\sin \theta) + \tilde{B}(u) \sin(\varphi/\sin \theta)]; \end{aligned}$$

$$\nu^* = (1/\sqrt{2}) a(u) \sin \theta;$$

$$\begin{aligned} X^{*2} &= -a(u) \sin \theta + 2[\tilde{B}(u) \cos(\varphi/\sin \theta) - \\ &\quad - \tilde{A}(u) \sin(\varphi/\sin \theta)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^{*3} &= -2\tilde{A}(u) [(\varphi/\sin \theta) \sin(\varphi/\sin \theta) + \cos(\varphi/\sin \theta)] \cos \theta - \\ &\quad - 2\tilde{B}(u) [-(\varphi/\sin \theta) \cos(\varphi/\sin \theta) + \\ &\quad + \sin(\varphi/\sin \theta)] \cos \theta - \varphi a(u) \cos \theta + \tilde{g}(u) \sin \theta, \end{aligned}$$

где $x^0 \equiv u$; $x^2 \equiv \theta$; $x^3 \equiv \varphi$; $a(u)$, $\tilde{A}(u)$, $\tilde{B}(u)$ и $\tilde{g}(u)$ — постоянные интегрирования. Переход к координатам Киннерслея [102] осуществляется с помощью преобразования $\varphi' = (\varphi/\sin \theta) -$

$$- \int_0^u \tilde{g}(\tau) d\tau.$$

Метрика В. I ($U^* < 0$):

$$\begin{aligned} ds^2 &= [1 - 2ra(u) \cos \theta - r^2(f^2 + h^2 \sin^2 \theta) - 2m(u)/r] du^2 + \\ &+ 2du dr + 2r^2 f du d\theta + 2r^2 h \sin^2 \theta du d\varphi - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2); \\ f &\equiv -a(u) \sin \theta + b(u) \sin \varphi + c(u) \cos \varphi; \\ h &\equiv \operatorname{ctg} \theta [b(u) \cos \varphi - c(u) \sin \varphi]. \end{aligned}$$

Метрика В. II ($U^* > 0$; $|\beta^*| > 1/2\sqrt{2}$):

$$\begin{aligned} ds^2 &= [-1 - 2ra(u) \operatorname{ch} \theta - r^2(f^2 + h^2 \operatorname{sh}^2 \theta) - 2m(u)/r] du^2 + \\ &+ 2du dr + 2r^2 f du d\theta + 2r^2 h \operatorname{sh}^2 \theta du d\varphi - r^2(d\theta^2 + \operatorname{sh}^2 \theta d\varphi^2); \\ f &\equiv -a(u) \operatorname{sh} \theta + b(u) \sin \varphi + c(u) \cos \varphi; \\ h &\equiv \operatorname{cth} \theta [b(u) \cos \varphi - c(u) \sin \varphi]. \end{aligned}$$

Метрика В.III ($U^* > 0$; $|\beta^*| < 1/2\sqrt{2}$):

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & [-1 - 2ra(u) \operatorname{sh} \theta - r^2 (f^2 + h^2 \operatorname{ch}^2 \theta) - \\
 & - 2m(u)/r] du^2 + 2du dr + 2r^2 f du d\theta + \\
 & + 2r^2 h \operatorname{ch}^2 \theta du d\varphi - r^2 (d\theta^2 + \operatorname{ch}^2 \theta d\varphi^2); \\
 f \equiv & -a(u) \operatorname{ch} \theta - b(u) \exp(\varphi) - c(u) \exp(-\varphi); \\
 h \equiv & \operatorname{th} \theta [b(u) \exp(\varphi) - c(u) \exp(-\varphi)].
 \end{aligned}$$

Метрика В.IV ($U^* > 0$; $|\beta^*| = 1/2\sqrt{2}$):

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \{-1 + 2ra(u) \exp(\theta) - r^2 [f^2 + h^2 \exp(2\theta)] - \\
 & - 2m(u)/r\} du^2 + 2du dr + 2r^2 f du d\theta + \\
 & + 2r^2 h \exp(2\theta) du d\varphi - r^2 [d\theta^2 + \exp(2\theta) d\varphi^2]; \\
 f \equiv & a(u) \exp(\theta) - 2b(u) \varphi; \\
 h \equiv & b(u) [\varphi^2 - \exp(-2\theta)].
 \end{aligned}$$

Метрика В.V ($U^* = 0$):

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & [-2\theta r - r^2 (f^2 + h^2) - 2m(u)/r] du^2 + \\
 & + 2du dr + 2r^2 f du d\theta + 2r^2 h du d\varphi - r^2 (d\theta^2 + d\varphi^2); \\
 f \equiv & \frac{1}{2} (\varphi^2 - \theta^2) + b(u); \\
 h \equiv & -\theta\varphi + c(u).
 \end{aligned}$$

Метрика В.I — метрика Киннерслея [102]. Произвольная (из условия детерминированности энергии — невозрастающая) функция $t(u)$ описывает изменение массы источника в зависимости от запаздывающего времени; функция $a(u)$ характеризует значение ускорения, а $b(u)$ и $c(u)$ — скорость изменения его направления. Сопутствующая сферическая система координат ориентирована таким образом, что направление на северный полюс $\theta = 0$ всегда совпадает с направлением ускорения. Отметим также, что в силу специального выбора калибровки тетрады для случая В.V функция $a(u)$ при любом значении запаздывающего времени u в принятой нами системе единиц ($G = c = 1$) численно равна 1. В целях краткости мы опустили эту функцию в записи для компонент метрического тензора В.V-метрики (то же самое относится и к переменным гравитационного поля, отвечающим В*.V-метрике, которые приведены ниже). Очевидно, что из соответствующих размерных соображений местонахождение этой функции в формулах без труда

можно восстановить. Метрики В. I, В. II—В. IV и В. V в пределе $v^* \rightarrow 0$ переходят соответственно в А. 1, А. 2 и А. 3, а в пределе $\Phi^* \rightarrow 0$ — в метрики I. А, I. Б и I. В при $b = 0$. В указанных трех случаях поверхность $r = \text{const}$, $u = \text{const}$ представляет собой 2-мерное аналитическое многообразие (риманову поверхность) эллиптического, гиперболического или параболического типа, а гравитирующий источник движется по временноподобной, пространственноподобной или светоподобной мировой линии соответственно. Пространственное расположение [4-векторов скорости источника и его ускорения ясно из табл. 5.

Случай С. $v^* = 0$, $\pi^* \neq 0$. Мы не будем здесь останавливаться на конкретных координатных и тетрадных преобразованиях (аналогичных примененным в работе [41]), использование которых позволяет упр-

остить и в явном виде проинтегрировать полную систему уравнений Ньюмена — Пенроуза в рассматриваемом случае. Получающаяся при этом метрика имеет вид ($x^0 \equiv u$; $x^1 \equiv r$; $x^2 \equiv x$; $x^3 \equiv y$):

$$ds^2 = -2U du^2 + 2du dr + 2c^2(u) r^2 du dx - \frac{r^2}{f^2(x) c^2(u)} [dx^2 + f^4(x) dy^2];$$

$$U = -3mxc^2(u) - \frac{1}{2} c^4(u) \frac{d[f^2(x)]}{dx} r + r \frac{1}{c(u)} \frac{dc(u)}{du} + \frac{m}{r} + \frac{1}{2} r^2 f^2(x) c^6(u);$$

$$X^0 = 1, X^2 = X^3 = 0;$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} c^3(u) f(x) r;$$

$$\xi^0 = 0, \xi^2 = -\frac{f(x) c(u)}{\sqrt{2} r}, \xi^3 = -\frac{ic(u)}{\sqrt{2} r f(x)};$$

$$\rho = -\frac{1}{r};$$

$$\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} f(x) c^3(u);$$

Таблица 5
Семейство «излучающих» решений уравнений Эйнштейна типа Киннерслея (v — скорость; a — ускорение источника; t, s, l означают времени-, пространственно- и светоподобное направления соответственно)

$v \backslash a$	t	s	l
t	—	—	В. I
s	В. II	В. III	В. IV
l	—	В. V	А. 3

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{1}{r} \frac{c(u)}{4f(x)\sqrt{2}} (a - 6mx^2); \\ \alpha &= -\frac{1}{r} \frac{c(u)}{4f(x)\sqrt{2}} (6mx^2 - a) - \frac{1}{\sqrt{2}} f(x) c^3(u); \\ \tau &= -\frac{1}{\sqrt{2}} f(x) c^3(u); \\ \gamma &= \frac{1}{4} c^4(u) (a - 6mx^2) - \frac{1}{2c(u)} \cdot \frac{dc(u)}{du} + \\ &\quad + \frac{m}{2r^2} - \frac{1}{2} rf^2(x) c^6(u); \\ \Psi_2 &= -\frac{m}{r^3}; \\ \Phi_{22} = S &= \frac{3m}{r^2 c(u)} \cdot \frac{dc(u)}{du}; \\ \mu &= \frac{1}{2} c^4(u) (6mx^2 - a) - \frac{1}{r} 3mxc^2(u) + \\ &\quad + \frac{m}{r^2} + \frac{1}{2} rf^2(x) c^6(u); \\ \nu &= \frac{3r}{\sqrt{2}} f(x) c^2(u) \frac{dc(u)}{du}, \end{aligned}$$

где $f(x) \equiv \sqrt{-2mx^3 + ax + b}$; a , b , m — произвольные константы; $c(u)$ — произвольная положительная функция.

Это решение в предельном случае $\Phi^* \equiv 0$ ($c(u) \equiv 1$) переходит в S -метрику Элерса — Кундта [48, 41, 57] и представляет собой обобщение последней на случай наличия в пространстве — времени высокочастотного излучения с тензором энергии — импульса вида (101).

Таким образом, решения А.1—А.3, В.1—В.5 и С исчерпывают класс «излучающих» невырожденных решений уравнений Эйнштейна типа D без вращения.

Остановимся кратко на результатах работы [118], в которой было продолжено изучение гравитационного поля излучающих систем. В этой работе найдено общее решение типа II по Петрову уравнений Эйнштейна с тензором энергии — импульса (101), где l_i представляет собой невращающуюся конгруэнцию бессдвиговых геодезических, обладающую расширением. Как показано в [64], метрика в этом случае имеет следующий вид:

$$ds^2 = 2du(dr - U du) - (r^2/2P^2) d\zeta d\bar{\zeta}; \quad P = P(u, \zeta, \bar{\zeta}), \quad (126)$$

где U и P — действительные функции, а ζ и $\bar{\zeta}$ — комплексные координаты; $d\zeta = dx + i dy$; $d\bar{\zeta} = dx - i dy$.

Выберем теперь изотропную тетраду Ньюмена — Пенроуза, подчинив ее следующим соотношениям [первый вектор тетрады

выбирается совпадающим с вектором l_i в формуле (101)]:

$$l_i dx^i = du; \quad n_i dx^i = dr - U du; \quad m_i dx^i = (r/2P) d\zeta. \quad (127)$$

Соответствующие данной тетраде спиновые коэффициенты выглядят следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} k = \varepsilon = \pi = \sigma = \tau = \lambda = 0; \quad \rho = \bar{\rho} = -1/r; \\ \alpha = -\bar{\beta} = -(1/r) \partial P / \partial \zeta; \\ \mu = U/r - \partial (\ln P) / \partial u; \quad \gamma = -(\partial U / \partial r) / 2; \\ \nu = (2P/r) \partial U / \partial \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

В дальнейшем в работе [118] подробно рассматривается случай, когда поверхность $r = \text{const}$, $u = \text{const}$ компактна (конформно-эквивалентна полной сфере). В этом случае удобно функцию P представить в виде $P = VP_0$, $P_0 = (1 + \zeta\bar{\zeta})/2$, где стереографическая координата ζ пробегает всю комплексную плоскость, а $V = V(u, \zeta, \bar{\zeta})$ — ограниченная функция, отличная от нуля. Стереографические координаты $\zeta, \bar{\zeta}$ связаны с полярными координатами θ, φ на единичной сфере соотношением $\zeta = \exp(i\varphi) \times \times \text{ctg}(\theta/2)$; в этих координатах элемент длины (126) переписется в виде

$$ds^2 = 2 du (dr - U du) - (r^2/2V^2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (129)$$

Подставляя (128) во вторую группу уравнений Ньюмена — Пенроуза [уравнения (П.12)—(П.29) Приложения Б], определяем тетрадные компоненты тензора Вейля (при этом часть уравнений удовлетворяется тождественно):

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0 = \Psi_1 = 0; \quad \Psi_2 = -m(u)/r^3; \quad \Psi_3 = \\ = -(2P/r^2) \partial U^* / \partial \zeta = (V^3/r^2) \bar{\partial}_0 R; \\ \Psi_4 = -\frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left[P^2 \frac{\partial^2 (\ln P)}{\partial \zeta \partial u} \right] - \frac{4}{r^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(P^2 \frac{\partial U^*}{\partial \zeta} \right) = \\ = -\frac{V^2}{r} \frac{\partial R}{\partial u} + \frac{1}{r^2} \bar{\partial}_0 (V^4 \bar{\partial}_0 R), \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

где

$$U^* = -4P^2 \partial^2 (\ln P) / \partial \zeta^2 \partial \bar{\zeta}; \quad R = (1/V) \bar{\partial}_0^2 V.$$

Дифференциальные операторы $\bar{\partial}_0$ и $\bar{\partial}_0$ [136—138], использованные в записи (130), действуя на величины с определенным спиновым весом, повышают ($\bar{\partial}_0$) или понижают ($\bar{\partial}_0$) спиновый вес на единицу.

Оставшиеся неиспользованными уравнения из второй группы уравнений Ньюмена — Пенроуза приводят к следующим соотношениям (для получения их можно воспользоваться также фор-

мулами приложения работы [63]):

$$S = (1/r^2) Q(u, \zeta, \bar{\zeta}); \quad (131)$$

$$U = -4P^2 \partial^2 (\ln P) / \partial \zeta \partial \bar{\zeta} + (r/P) \partial P / \partial u + m(u)/r; \quad (132)$$

$$\frac{1}{16} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{m}{P^3} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \bar{\zeta}^2} \right) + \frac{1}{P} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left(P \frac{\partial^2 P}{\partial \bar{\zeta}^2} \right) = - \frac{Q(u, \zeta, \bar{\zeta})}{16P^3}. \quad (133)$$

Соотношение (131) показывает, что через поверхности $r = \text{const}$, $u = \text{const}$ при разных $r = r_0$ протекает одинаковое количество энергии, причем величина $Q = Q(u, \zeta, \bar{\zeta})$ характеризует интенсивность излучения в данный момент времени в зависимости от направления. Уравнение (133), переходящее при $Q \equiv 0$ в известное уравнение Робинсона — Траутмана [77], связывает метрику с интенсивностью излучения. Обратное, задавшись произвольным $P = P(u, \zeta, \bar{\zeta})$ и подобрав соответствующее $m = m(u)$ с тем, чтобы выполнялось условие $Q \geq 0$, мы получим решение уравнений Эйнштейна с тензором энергии — импульса (101).

При условиях отсутствия длинноволнового (фонового) гравитационного излучения и компактности поверхности $r = \text{const}$, $u = \text{const}$ общее решение уравнений Эйнштейна с излучением (101), где l_i — неврашающаяся бессдвиговая невырожденная конгруэнция геодезических лучей, сводится к решению Киннерслея [102, 118] (см. приведенную выше метрику В.1).

В работах [105, 139, 140] в формализме Ньюмена — Пенроуза были исследованы «излучающие» решения уравнений Эйнштейна — Максвелла с космологическим членом типа II по Петрову (в работах [104, 141] подобное исследование проводилось методом Керра — Шильда [68, 142]). При этом рассматривалась следующая система уравнений:

$$R_{ij} - R g_{ij} / 2 - \tilde{\Lambda} g_{ij} = 2(E_{ij} + \tilde{S} l_i l_j); \quad (134)$$

$$E_{ij} = -F_i^h F_{jh} + g_{ij} (F_{kl} F^{kl}) / 4; \quad (135)$$

$$F_{ij} = A_j; i - A_i; j; \quad (136)$$

$$F_{ij; h} + F_{hi; j} + F_{jh; i} = 0; \quad (137)$$

$$F^{ij}; j = \tilde{J}^i; \tilde{J}^i = 2J l^i, \quad (138)$$

где l^i — касательный вектор к бессдвиговой неврашающейся изотропной геодезической конгруэнции, обладающей расширением:

$$(l^i; i)^2 = 2l_{(i; j)} l^{i; j}; l_{[i; j]} l^{i; j} = 0;$$

$$l_i l^i = 0, l^i l_{i; j} = 0; l^i; i \neq 0.$$

При условиях отсутствия низкочастотного гравитационного излучения (понимаемого как равенство нулю функции информации [33, 34] для фоновой метрики) и угловых сингулярностей для указанной системы получено семейство общих решений, отвечающих гравитирующим источникам соответственно тардионного (В*.I), тахионного (В*.II—В*.IV) и люксоного (В*.V) типов. Ниже в справочных целях приведены отличные от нуля спиновые коэффициенты, тетрадные компоненты тензоров Вейля и Максвелла, тетрадная компонента 4-тока \tilde{J} и средняя плотность потока энергии высокочастотного излучения \tilde{S} , а также компоненты векторов изотропной тетрады для решений, непосредственно обобщающих В.I—В.V-метрики на случай наличия в пространстве — времени фонового (низкочастотного) электромагнитного поля. Функции $e(u)$ и $g(u)$ означают соответственно электрический и магнитный заряды источника, интерпретация остальных произвольных функций запаздывающего времени аналогична представленной выше для В-метрик. Заметим, что, зная компоненты векторов изотропной тетрады, по формулам (3) легко вычислить и компоненты метрики; мы не будем по этой причине выписывать здесь g_{ij} , а отметим лишь, что при $e(u) \equiv g(u) \equiv 0$ соответствующие метрики В* и В совпадают.

Радиальная зависимость \tilde{J} и \tilde{S} для всех В*-метрик одна и та же:

$$\begin{aligned}\tilde{J} &= \frac{1}{r^2} J^* = \frac{1}{2r^2} \cdot \frac{d}{du} [e(u) + ig(u)]; \\ \tilde{S} &= \frac{1}{r^2} S^* + \frac{1}{2r^3} \cdot \frac{d}{du} [e^2(u) + g^2(u)].\end{aligned}$$

Метрика В*.I ($U^* < 0$):

$$\begin{aligned}\rho &= -1/r; \quad \beta = -\alpha = (1/2 \sqrt{2} r) \operatorname{ctg} \theta; \\ \gamma &= -(1/2) a(u) \cos \theta + (i/2 \sin \theta) [c(u) \sin \varphi - b(u) \cos \varphi] + \\ &\quad + (1/2r^2) \{m(u) + 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \cos \theta\} - \\ &\quad - (1/2r^3) [e^2(u) + g^2(u)] - \tilde{\Lambda}r/6; \quad \nu = (1/\sqrt{2}) a(u) \sin \theta + \\ &\quad + (\sqrt{2}/r^2) [e^2(u) + g^2(u)] a(u) \sin \theta; \quad \mu = -1/2r + \\ &\quad + (1/r^2) \{m(u) + 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \cos \theta\} - \\ &\quad - (1/2r^3) [e^2(u) + g^2(u)] + \tilde{\Lambda}r/6; \quad \Psi_2 = -(1/r^3) \{m(u) + \\ &\quad + 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \cos \theta\} + (1/r^4) [e^2(u) + g^2(u)]; \quad \Psi_3 = \\ &= -(3/\sqrt{2} r^3) [e^2(u) + g^2(u)] a(u) \sin \theta; \quad \varnothing_1 = -(1/2r^2) [e(u) + \\ &\quad + ig(u)]; \quad \varnothing_2 = (1/\sqrt{2} r) [e(u) + ig(u)] a(u) \sin \theta;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^* = & -\frac{\partial}{\partial u} \{m(u) + 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \cos \theta\} + \\
& + 3a(u) \cos \theta \{m(u) + 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \cos \theta\} - \\
& - 3[e^2(u) + g^2(u)] a^2(u) \sin^2 \theta + 2[e^2(u) + \\
& + g^2(u)] a(u) \sin \theta [b(u) \sin \varphi + c(u) \cos \varphi]; \\
\xi^0 = & 0; \quad \xi^2 = 1/\sqrt{2}r; \quad \xi^3 = i/\sqrt{2}r \sin \theta; \quad \omega = 0; \\
X^0 = & 1; \quad X^2 = -a(u) \sin \theta + b(u) \sin \varphi + \\
& + c(u) \cos \varphi; \quad X^3 = \operatorname{ctg} \theta [b(u) \cos \varphi - c(u) \sin \varphi]; \\
U = & -1/2 + (1/r) \{m(u) + 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \cos \theta\} + \\
& + ra(u) \cos \theta - (1/2r^2) [e^2(u) + g^2(u)] + \tilde{\Lambda}r^2/6.
\end{aligned}$$

Метрика $B^*.II$ ($U^* > 0$; $|\beta^*| > 1/2\sqrt{2}$):

$$\begin{aligned}
\rho = & -1/r; \quad \beta = -\alpha = (1/2\sqrt{2}r) \operatorname{cth} \theta; \quad \gamma = -(1/2)a(u) \operatorname{ch} \theta + \\
& + (i/2 \operatorname{sh} \theta) [c(u) \sin \varphi - b(u) \cos \varphi] + (1/2r^2) \{m(u) - 2[e^2(u) + \\
& + g^2(u)] a(u) \operatorname{ch} \theta\} - (1/2r^3) [e^2(u) + g^2(u)] - \\
& - \tilde{\Lambda}r/6; \quad \nu = -(1/\sqrt{2}) a(u) \operatorname{sh} \theta + (\sqrt{2}/r^2) [e^2(u) + \\
& + g^2(u)] a(u) \operatorname{sh} \theta; \quad \mu = 1/2r + (1/r^2) \{m(u) - \\
& - 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \operatorname{ch} \theta\} - (1/2r^3) [e^2(u) + \\
& + g^2(u)] + \tilde{\Lambda}r/6; \quad \Psi_2 = -(1/r^3) \{m(u) - 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \operatorname{ch} \theta\} + \\
& + (1/r^4) [e^2(u) + g^2(u)]; \\
\Psi_3 = & -(3/\sqrt{2}r^3) [e^2(u) + g^2(u)] a(u) \operatorname{sh} \theta; \\
\varnothing_1 = & -(1/2r^2) [e(u) + ig(u)]; \quad \varnothing_2 = (1/\sqrt{2}r) \times \\
& \times [e(u) + ig(u)] a(u) \operatorname{sh} \theta; \quad S^* = -\frac{\partial}{\partial u} \{m(u) - \\
& - 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \operatorname{ch} \theta\} + \\
& + 3a(u) \operatorname{ch} \theta \{m(u) - 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \operatorname{ch} \theta\} - \\
& - 3[e^2(u) + g^2(u)] a^2(u) \operatorname{sh}^2 \theta + 2[e^2(u) + \\
& + g^2(u)] a(u) \operatorname{sh} \theta [b(u) \sin \varphi + c(u) \cos \varphi]; \\
\xi^0 = & 0; \quad \xi^2 = (1/\sqrt{2}r); \quad \xi^3 = i/\sqrt{2}r \operatorname{sh} \theta; \\
\omega = & 0; \quad X^0 = 1; \quad X^2 = -a(u) \operatorname{sh} \theta + b(u) \sin \varphi + \\
& + c(u) \cos \varphi; \quad X^3 = \operatorname{cth} \theta [b(u) \cos \varphi - c(u) \sin \varphi]; \\
U = & 1/2 + (1/r) \{m(u) - 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \operatorname{ch} \theta\} + \\
& + ra(u) \operatorname{ch} \theta - (1/2r^2) [e^2(u) + g^2(u)] + \tilde{\Lambda}r^2/6.
\end{aligned}$$

Метрика В*.III ($U^* > 0; |\beta^*| < 1/2 \sqrt{2}$):

$$\rho = -1/r; \beta = -\alpha = (1/2 \sqrt{2} r) \operatorname{th} \theta;$$

$$\begin{aligned} \gamma = & -(1/2) a(u) \operatorname{sh} \theta + (i/2 \operatorname{ch} \theta) [b(u) \exp(\varphi) - c(u) \exp(-\varphi)] + \\ & + (1/2r^2) \{m(u) - 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \operatorname{sh} \theta\} - (1/2r^3) [e^2(u) + \\ & + g^2(u)] - \tilde{\Lambda} r/6; \end{aligned}$$

$$\nu = - (1/\sqrt{2}) a(u) \operatorname{ch} \theta + (\sqrt{2}/r^2) [e^2(u) + g^2(u)] a(u) \operatorname{ch} \theta;$$

$$\begin{aligned} \mu = & 1/2r + (1/r^2) \{m(u) - 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \operatorname{sh} \theta\} - \\ & - (1/2r^3) [e^2(u) + g^2(u)] + \tilde{\Lambda} r/6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 = & -(1/r^3) \{m(u) - 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \operatorname{sh} \theta\} + (1/r^4) \times \\ & \times [e^2(u) + g^2(u)]; \end{aligned}$$

$$\Psi_3 = - (3/\sqrt{2} r^3) [e^2(u) + g^2(u)] a(u) \operatorname{ch} \theta;$$

$$\varnothing_1 = - (1/2r^2) [e(u) + i g(u)];$$

$$\varnothing_2 = (1/r \sqrt{2}) [e(u) + i g(u)] a(u) \operatorname{ch} \theta;$$

$$\begin{aligned} S^* = & - \frac{\partial}{\partial u} \left\{ m(u) - 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \operatorname{sh} \theta \right\} + 3a(u) \operatorname{sh} \theta \{m(u) - \\ & - 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \operatorname{sh} \theta\} - 3[e^2(u) + g^2(u)] a^2(u) \operatorname{ch}^2 \theta - \\ & - 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \operatorname{ch} \theta [b(u) \exp(\varphi) + c(u) \exp(-\varphi)]; \end{aligned}$$

$$\xi^0 = 0; \xi^2 = 1/\sqrt{2} r; \xi^3 = i/\sqrt{2} r \operatorname{ch} \theta;$$

$$\omega = 0; X^0 = 1; X^2 = -a(u) \operatorname{ch} \theta - b(u) \exp(\varphi) - c(u) \exp(-\varphi);$$

$$X^3 = \operatorname{th} \theta [b(u) \exp(\varphi) - c(u) \exp(-\varphi)];$$

$$\begin{aligned} U = & 1/2 + (1/r) \{m(u) - 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \operatorname{sh} \theta\} + \\ & + r a(u) \operatorname{sh} \theta - (1/2r^2) [e^2(u) + g^2(u)] + \tilde{\Lambda} r^2/6. \end{aligned}$$

Метрика В*.IV ($U^* > 0; \beta^* = \pm 1/2 \sqrt{2}$):

$$\rho = -1/r; \beta = -\alpha = \mp \frac{1}{2 \sqrt{2} r}; \gamma = (1/2) a(u) \exp(\theta) \mp$$

$$\begin{aligned} \mp i b(u) \exp(-\theta) + (1/2r^2) \{m(u) + 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \exp(\theta)\} - \\ - (1/2r^3) [e^2(u) + g^2(u)] - \tilde{\Lambda} r/6; \end{aligned}$$

$$\nu = \mp (1/\sqrt{2}) a(u) \exp(\theta) \pm (\sqrt{2}/r^2) [e^2(u) + g^2(u)] a(u) \exp(\theta);$$

$$\begin{aligned} \mu = & 1/2r + (1/r^2) \{m(u) + 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \exp(\theta)\} - \\ & - (1/2r^3) [e^2(u) + g^2(u)] + \tilde{\Lambda} r/6; \end{aligned}$$

$$\Psi_2 = -(1/r^3) \{m(u) + 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \exp \theta\} + \\ + (1/r^4) [e^2(u) + g^2(u)];$$

$$\Psi_3 = \mp (3/\sqrt{2}r^3) [e^2(u) + g^2(u)] a(u) \exp(\theta);$$

$$\varnothing_1 = -(1/2r^2) [e(u) + ig(u)];$$

$$\varnothing_2 = \pm (1/\sqrt{2}r) [e(u) + ig(u)] a(u) \exp(\theta);$$

$$S^* = -\frac{\partial}{\partial u} \{m(u) + 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \exp(\theta)\} - 3a(u) \exp(\theta) \times \\ \times \{m(u) + 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \exp(\theta)\} - 3[e^2(u) + \\ + g^2(u)] a^2(u) \exp(2\theta) + 4[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \exp(\theta) \cdot b(u) \varphi;$$

$$\xi^0 = 0; \xi^2 = \mp 1/\sqrt{2}r; \xi^3 = i/\sqrt{2}r \exp(\theta); \omega = 0;$$

$$X^0 = 1; X^2 = a(u) \exp(\theta) - 2b(u) \varphi; X^3 = b(u) [\varphi^2 - \exp(-2\theta)];$$

$$U = 1/2 + (1/r) \{m(u) + 2[e^2(u) + g^2(u)] a(u) \exp(\theta)\} - \\ - ra(u) \exp(\theta) - (1/2r^2) [e^2(u) + g^2(u)] + \tilde{\Lambda}r^2/6.$$

Метрика $V^* \cdot V(U^* = 0)$:

$$\rho = -1/r; \gamma = -(\theta + i\varphi)/2 + (1/2r^2) \{m(u) - (2/3) [e^2(u) + \\ + g^2(u)] \theta^3\} - (1/2r^3) [e^2(u) + g^2(u)] - \tilde{\Lambda}r/6;$$

$$\nu = \pm 1/\sqrt{2} \mp (\sqrt{2}/r^2) [e^2(u) + g^2(u)] \theta^2;$$

$$\mu = (1/r^2) \{m(u) - (2/3) [e^2(u) + g^2(u)] \theta^3\} - (1/2r^3) [e^2(u) + \\ + g^2(u)] + \tilde{\Lambda}r/6;$$

$$\Psi_2 = -(1/r^3) \{m(u) - (2/3) [e^2(u) + g^2(u)] \theta^3\} + (1/r^4) [e^2(u) + g^2(u)];$$

$$\Psi_3 = \pm (3/\sqrt{2}r^3) [e^2(u) + g^2(u)] \theta^2;$$

$$\varnothing_1 = -(1/2r^2) [e(u) + ig(u)];$$

$$\varnothing_2 = \mp (1/\sqrt{2}r) [e(u) + ig(u)] \theta^2;$$

$$S^* = -\frac{\partial}{\partial u} \{m(u) - (2/3) [e^2(u) + g^2(u)] \theta^3\} + 3\theta \{m(u) - \\ - (4/3) [e^2(u) + g^2(u)] \theta^3\} + 2\theta^2 [e^2(u) + g^2(u)] [b(u) + \varphi^2/2];$$

$$\xi^0 = 0; \xi^2 = \mp 1/\sqrt{2}r; \xi^3 = \mp i/\sqrt{2}r;$$

$$\omega = 0; X^0 = 1; X^2 = (\varphi^2 - \theta^2)/2 + b(u); X^3 = -\theta\varphi + c(u);$$

$$U = \theta r + (1/r) \{m(u) - (2/3) [e^2(u) + g^2(u)] \theta^3\} - \\ - (1/2r^2) [e^2(u) + g^2(u)] + \tilde{\Lambda}r^2/6.$$

Как уже отмечалось выше, V^* -метрики описывают гравитационное поле анизотропно излучающих заряженных источников,

отличающихся различным пространственным расположением 4-векторов скорости и ускорения (ортогональных друг другу). Так, для метрики $V^*.I$ скорость источника времениподобна и, следовательно, ускорение пространственноподобно. В случаях $V^*.II$, $V^*.III$ и $V^*.IV$ скорость пространственноподобна, а ускорение соответственно времениподобно, пространственноподобно и светоподобно. Наконец, случаю $V^*.V$ отвечают светоподобная скорость и пространственноподобное ускорение источника (нетрудно показать, что если скорость и ускорение одновременно светоподобны, то посредством перепараметризации мировой линии источника можно обратить ускорение в нуль [103]).

Примеры применения метода спиновых коэффициентов к интегрированию и дальнейшему исследованию конкретных частных решений уравнений поля в ОТО, представленные в настоящем разделе, при первоначальном знакомстве с ними могут показаться довольно громоздкими, а сам формализм по этой причине — неудобным для пользования. Однако это первое впечатление является обманчивым. Действительно, знание всех трёх групп переменных гравитационного поля в формализме Ньюмена — Пенроуза даёт нам, по существу, наиболее полную информацию о структуре рассматриваемого пространства — времени.

Большое количество работ, посвящённых исследованию различных решений уравнений Эйнштейна в формализме Ньюмена — Пенроуза, появившихся за последние 10—15 лет, и фундаментальных результатов, полученных с помощью этого формализма, в полной мере доказало плодотворность применения этого метода к изучению гравитационного, электромагнитного и других полей в общей теории относительности.

4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ВО ВНЕШНИХ ВАКУУМНЫХ И ЭЛЕКТРОВАКУУМНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ

В этом разделе рассмотрены приложения формализма Ньюмена — Пенроуза к описанию распространения гравитационных и электромагнитных волн на фоне некоторого вакуумного или электровакуумного гравитационного поля.

Подробно рассмотрены распространение волн малой амплитуды на фоне вакуумных и электровакуумных полей алгебраически специальных типов по классификации Петрова, в частности во внешних полях вращающихся незаряженных (поле Керра) или заряженных (поле Керра — Ньюмена) черных дыр и рассеяние волн малой амплитуды сильной электромагнитно-гравитационной волной.

В приближении геометрической оптики рассмотрено распространение коротких волн малой амплитуды в произвольном

вакуумном или электровакуумном гравитационном поле и описаны некоторые особенности этих процессов.

Распространение волн малой амплитуды в гравитационных полях алгебраически специальных типов. Рассмотрим в линейном приближении произвольные малые возмущения гравитационного и электромагнитного полей на фоне некоторого вакуумного или электровакуумного поля алгебраически специального типа по классификации Петрова.

Необходимые свойства поля фона. В качестве поля фона далее может рассматриваться любое вакуумное или электровакуумное поле, для которого в некотором изотропном базисе

$$\Psi_0 = \Psi_1 = 0; \quad \varnothing_0 = 0, \quad (139)$$

т. е. гравитационное поле фона является алгебраически специальным, причем допускаются только такие фоновые электромагнитные поля, для которых вырожденное главное изотропное направление тензора Вейля является главным изотропным направлением тензора Максвелла.

В общем случае из условий (139) и тождеств Бианки (П.1), (П.4) следует, что в этом же базисе

$$k = \sigma = 0. \quad (140)$$

(Исключение составляют специальные случаи $3\Psi_2 = \pm 2\Phi_{11}$.) Для электромагнитного поля фона при условии (139) имеет место один из трех случаев (последние два — в специально выбранной тетраде):

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } \Phi_{mn} = 0 \text{ — электромагнитное поле отсутствует,} \\ \text{б) } \Phi_{11} \neq 0, \quad \Phi_{mn} = 0, \text{ если } m \neq 1 \text{ или } n \neq 1, \\ \text{в) } \Phi_{22} \neq 0, \quad \Phi_{mn} = 0, \text{ если } m \neq 2 \text{ или } n \neq 2. \end{array} \right\} \quad (141)$$

К полям такого типа относятся многие известные точные решения вакуумных уравнений Эйнштейна или Эйнштейна — Максвелла, в частности рассматриваемые далее поля статических и стационарных черных дыр (решения Шварцшильда, Керра, Нордстрема — Рейсснера и Керра — Ньюмена) — поля типа D , а также плоские гравитационные или гравитационно-электромагнитные волны, принадлежащие типу N по Петрову.

Линеаризованные уравнения для возмущений. Для произвольных малых возмущений поля фона любую характеристику возмущенного поля $\tilde{\chi}$ можно представить в виде

$$\tilde{\chi} = \chi + \chi^B, \quad (142)$$

где χ — соответствующая характеристика поля фона; χ^B — ее малое возмущение. Если в пространстве присутствуют также

источники электромагнитных и гравитационных возмущений (частицы или другие поля), дающие непосредственный вклад в тензор энергии — импульса, то для величин $\tilde{\Phi}_{mn}$ вместо (142) будем иметь

$$\tilde{\Phi}_{mn} = \Phi_{mn} + \Phi_{mn}^B + \Phi_{mn}^M, \quad (143)$$

где $\Phi_{mn}^{(M)}$ описывают вклад источников.

Сохраняя только линейные по возмущениям члены, из тождеств Бианки (П.1), (П.4) и из (П.13) с учетом (139)—(141) и (28) получаем для возмущений переменных поля неоднородные уравнения:

$$\begin{aligned} (D - 4\rho - 2\varepsilon) \Psi_1^B - (\bar{\delta} - 4\alpha + \pi) \Psi_0^B + (3\Psi_2 - 2\Phi_{11}) k^B - \\ - (D - 2\bar{\rho} - 2\varepsilon) \Phi_{01}^B = A; \end{aligned} \quad (144)$$

$$\begin{aligned} (\delta - 4\tau - 2\beta) \Psi_1^B - (\Delta - 4\gamma + \mu) \Psi_0^B + (3\Psi_2 + 2\Phi_{11}) \sigma^B + (\delta - 2\beta + \\ + 2\bar{\pi}) \Phi_{01}^B - (D - 2\varepsilon + 2\bar{\varepsilon} - \bar{\rho}) \Phi_{02}^B = B; \end{aligned} \quad (145)$$

$$(D - \rho - \bar{\rho} - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon}) \sigma^B - (\delta - \tau - \bar{\alpha} + \bar{\pi} - 3\beta) k^B - \Psi_0^B = 0, \quad (146)$$

$$\text{где } A = (D - 2\bar{\rho} - 2\varepsilon) \Phi_{01}^M - (\delta - 2\beta - 2\bar{\alpha} + \bar{\pi}) \Phi_{00}^{(M)};$$

$$B = (D - 2\varepsilon + 2\bar{\varepsilon} - \bar{\rho}) \Phi_{02}^{(M)} - (\delta - 2\beta + 2\bar{\pi}) \Phi_{01}^{(M)}.$$

Преобразуем (144)—(146), используя коммутационные соотношения для операторов D и δ , которые в силу (П.12)—(П.29) записываются в виде

$$\begin{aligned} [D - (p + 1)\varepsilon + \bar{\varepsilon} + q\rho - \bar{\rho}] (\delta - p\beta + q\tau) - [\delta - (p + 1)\beta - \bar{\alpha} + \\ + \bar{\pi} + q\tau] (D - p\varepsilon + q\rho) = \sigma\bar{\delta} - k\Delta + (2q - p) \Psi_1 + q [(\Delta - 3\gamma - \bar{\gamma} - \\ - \mu + \bar{\mu}) k - (\bar{\delta} - 3\alpha + \bar{\beta} - \pi - \bar{\tau}) \sigma] - p [(\alpha + \pi) \sigma - (\mu + \gamma) k], \end{aligned} \quad (147)$$

где p и q — произвольные комплексные параметры, причем правая часть (147) обращается в нуль для поля фона в силу условий (139), (140).

Применяя к (144) оператор $(\delta - 3\beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi} - 4\tau)$ и вычитая из получившегося уравнения (145), к которому применен оператор $(D - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - 4\rho - \bar{\rho})$, с учетом (147) с нулевой правой частью, уравнения (146) и уравнений Максвелла (П.38)—(П.41) для поля

фона, получаем

$$\begin{aligned}
 & [(D - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - 4\rho - \bar{\rho}) (\Delta - 4\gamma + \mu) - (\delta - 3\beta - \bar{\alpha} + \\
 & \quad + \bar{\pi} - 4\tau) (\bar{\delta} - 4\alpha + \pi) - 3\Psi_2] \Psi_0^B - \\
 & \quad - (\kappa/4\pi) \bar{\varnothing}_1 [(\delta - 3\beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi} - 4\tau) (D - 2\varepsilon) + \\
 & \quad + (D - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - 4\rho + \bar{\rho}) (\delta - 2\beta)] \varnothing_0^B - [(\delta - 3\beta - \\
 & \quad - \bar{\alpha} + \bar{\pi} - \tau) (2\Phi_{11} k^B) + (D - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \rho - \bar{\rho}) \times \\
 & \quad \times (2\Phi_{11} \sigma^B)] + (\kappa/4\pi) \bar{\varnothing}_2 [(D - 3\varepsilon - \bar{\varepsilon} - \\
 & \quad - 4\rho) (D - 2\varepsilon)] \varnothing_0^B = I_0, \tag{148}
 \end{aligned}$$

где

$$I_0 = (\delta - 3\beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi} - 4\tau) A - (D - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - 4\rho - \bar{\rho}) B.$$

Рассмотрим теперь уравнения Максвелла (П.38)–(П.41). Применим к (П.38) оператор $(\delta - \beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi} - 2\tau)$ и вычтем из него (П.39), к которому применен оператор $(D - \varepsilon + \bar{\varepsilon} - 2\rho - \bar{\rho})$, после чего наложим возмущения. В силу (147), (139), (140), (146) и уравнений Максвелла для фона получим

$$\begin{aligned}
 & [(D - \varepsilon + \bar{\varepsilon} - 2\rho - \bar{\rho}) (\Delta - 2\gamma + \mu) - (\delta - \bar{\alpha} - \\
 & \quad - \beta + \bar{\pi} - 2\tau) (\bar{\delta} - 2\alpha + \pi)] \varnothing_0^B + 4 \varnothing_1 \Psi_1^B + \\
 & \quad + 2 \varnothing_1 [(\Delta - 3\gamma - \bar{\gamma} - 2\mu + \bar{\mu}) k^B - \\
 & \quad - (\bar{\delta} - 3\alpha + \bar{\beta} - 2\pi - \bar{\tau}) \sigma^B] - \varnothing_2 \Psi_0^B = J_0, \tag{149}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 J_0 = & (D - \varepsilon + \bar{\varepsilon} - 2\rho - \bar{\rho}) [(2\pi/c) J_{(m)}] - \\
 & - (\delta - \beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi} - 2\tau) [(2\pi/c) J_{(l)}].
 \end{aligned}$$

В случае «а», когда электромагнитное поле фона отсутствует, уравнения (148) и (149) становятся независимыми и каждое из них содержит только одну неизвестную функцию:

$$\begin{aligned}
 & [(D - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - 4\rho - \bar{\rho}) (\Delta - 4\gamma + \mu) - (\delta - \bar{\alpha} - 3\beta + \bar{\pi} - 4\tau) \times \\
 & \quad \times (\bar{\delta} - 4\alpha + \pi) - 3\Psi_2] \Psi_0^B = I_0; \tag{150}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [D - \varepsilon + \bar{\varepsilon} - 2\rho - \bar{\rho}) (\Delta - 2\gamma + \mu) - (\delta - \bar{\alpha} - \beta + \bar{\pi} - 2\tau) \times \\
 & \quad \times (\bar{\delta} - 2\alpha + \pi)] \varnothing_0^B = J_0. \tag{151}
 \end{aligned}$$

Уравнения (150) описывают гравитационные, а (151) — электромагнитные возмущения. Эти уравнения были получены Тьюкольским [9] и были затем использованы для описания возмущений

на фоне поля вращающейся черной дыры — поля Керра [106—117, 119, 120].

В случае «б», т. е. при $\varnothing_2 = 0$, вводя новые переменные

$$\left. \begin{aligned} \varnothing_{(k)} &= (\kappa/4\pi) [(D - 2\varepsilon - 3\rho) \varnothing_0^B + 2 \varnothing_1 k^B]; \\ \varnothing_{(\sigma)} &= (\kappa/4\pi) [(\delta - 2\beta - 3\tau) \varnothing_0^B + 2 \varnothing_1 \sigma^B] \end{aligned} \right\} \quad (152)$$

и используя (147), уравнения (148), (149) и (146) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} &[(D - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - 4\rho - \bar{\rho})(\Delta - 4\gamma + \mu) - \\ & - (\delta - \bar{\alpha} - 3\beta + \bar{\pi} - 4\tau)(\bar{\delta} - 4\alpha + \pi) - 3\Psi_2] \Psi_0^B - \\ & - \bar{\varnothing}_1 [(\delta - \bar{\alpha} - 3\beta - \bar{\pi} - \tau) \varnothing_{(k)} + (D - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \rho + \bar{\rho}) \varnothing_{(\sigma)}] = I_0; \end{aligned} \quad (153)$$

$$\begin{aligned} &[(D - 6\rho - 2\varepsilon)(\Delta - 3\gamma - \bar{\gamma} + \bar{\mu}) - 2(3\Psi_2 - 2\Phi_{11})] \varnothing_{(k)} - \\ & - (D - 6\rho - 2\varepsilon)(\bar{\delta} - 3\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau}) \varnothing_{(\sigma)} + \frac{\kappa}{\pi} \varnothing_1 (\bar{\delta} - 4\alpha + \pi) \Psi_0^B = J_1; \end{aligned} \quad (154)$$

$$\begin{aligned} &(D - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - 3\rho - \bar{\rho}) \varnothing_{(\sigma)} - (\delta - \bar{\alpha} - 3\beta + \bar{\pi} - 3\tau) \varnothing_{(k)} - \\ & - (\kappa/2\pi) \varnothing_1 \Psi_0^B = 0, \end{aligned} \quad (155)$$

где $J_1 = (\kappa/4\pi) [(D - 6\rho - 2\varepsilon) J_0 - 4 \varnothing_1 A]$.

Эта система, полученная в несколько ином виде в [121], как и эквивалентные ей системы [122, 123], оказывается весьма сложной для анализа поведения произвольных малых возмущений во внешнем поле заряженной вращающейся черной дыры — поле Керра — Ньюмена. Однако при некоторых дополнительных предположениях (см. ниже) она может быть значительно упрощена, что позволяет использовать ее, например, для описания распространения электромагнитных и гравитационных волн в поле Керра — Ньюмена или излучения ультрарелятивистских заряженных частиц, движущихся в этом поле [121, 124].

В случае «в», полагая в (148), (149) $\varnothing_1 = 0$, получаем

$$\begin{aligned} &[(D - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - 4\rho - \bar{\rho})(\Delta - 4\gamma + \mu) - (\delta - 3\beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi} - 4\tau) \times \\ & \times (\bar{\delta} - 4\alpha + \pi) - 3\Psi_2] \Psi_0^B + \\ & + (\kappa/4\pi) \bar{\varnothing}_2 (D - 3\varepsilon - \bar{\varepsilon} - 4\rho) (D - 2\varepsilon) \varnothing_0^B = I_0; \end{aligned} \quad (156)$$

$$\begin{aligned} &[(D - \varepsilon + \bar{\varepsilon} - 2\rho - \bar{\rho})(\Delta - 2\gamma + \mu) - \\ & - (\delta - \beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi} - 2\tau)(\bar{\delta} - 2\alpha + \pi)] \varnothing_0^B - \varnothing_2 \Psi_0^B = J_0. \end{aligned} \quad (157)$$

Эта система уравнений была получена в [126] и использована там для анализа процесса рассеяния волн малой амплитуды сильной электромагнитно-гравитационной волной*.

Интересно отметить, что хотя в возмущенном пространстве изотропные тетрады и система координат выбраны лишь с точностью до произвольных инфинитезимальных преобразований, функции Ψ_0^B , $\varnothing_{(h)}$ и $\varnothing_{(s)}$ в (153) — (155), а также Ψ_0^B и \varnothing_0^B в (150) — (151) и в (156) — (157) (причем \varnothing_0^B именно в силу $\varnothing_1 = 0$) не зависят от этого выбора, так как являются инвариантными относительно этих преобразований.

Каждая из полученных систем уравнений (150) — (151), (153) — (155) и (156) — (157) при наличии источников возмущений — частиц или других полей (помимо электромагнитного и гравитационного) — еще не является замкнутой, и к ней следует добавить уравнения, определяющие эволюцию этих источников. Однако во многих случаях движение источников можно вычислить, пренебрегая «реакцией излучения», т. е. считая, что вызываемые возмущения не оказывают существенного обратного влияния на эволюцию источников. Возмущения электромагнитного и гравитационного полей определяются затем из соответствующих неоднородных уравнений (150) — (151), (153) — (155) или (156) — (157), правые части которых определены по заданному движению источников.

Частные виды поля фона. Рассмотрим подробнее использование уравнений (150) — (151), (153) — (155) и (156) — (157) для описания поведения возмущений во внешних полях черных дыр.

Поле вращающейся черной дыры — поле Керра. Решение Керра при специальном выборе изотропной тетрады в координатах Бойера — Линдквиста (ct , r , θ , φ) определяется формулами:

$$\left. \begin{aligned} l^i &= \{(r^2 + a^2)/\Delta, 1, 0, a/\Delta\}; \quad n^i = (1/2) \rho \bar{\rho} \{r^2 + a^2, -\Delta, 0, a\}; \\ m^i &= -(1/\sqrt{2}) \bar{\rho} \{ia \sin \theta, 0, 1, i/\sin \theta\}; \quad \Psi_2 = m \rho^3; \\ \rho &= -(r - ia \cos \theta)^{-1}, \quad \beta = -(1/2\sqrt{2}) \bar{\rho} \operatorname{ctg} \theta; \\ \pi &= (1/\sqrt{2}) i a \sin \theta \rho^2; \\ \tau &= -(1/\sqrt{2}) ia \sin \theta \rho \bar{\rho}; \\ \mu &= \Delta \rho^2 \bar{\rho} / 2; \quad \gamma = \mu + (r - m) \rho \bar{\rho} / 2; \quad \alpha = \pi - \bar{\beta}, \end{aligned} \right\} \quad (158)$$

где $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$; $m = GM/c^2$; $a = L/Mc$;

M — масса; L — момент вращения черной дыры. Остальные

* Перечисленные уравнения можно использовать также для анализа нелинейных эффектов, если в качестве источников взяты нелинейные члены, вычисленные по линейному приближению.

спиновые коэффициенты и другие скаляры Ньюмена — Пенроуза равны нулю.

На фоне поля Керра уравнения для возмущений гравитационного (150) и электромагнитного (151) полей, а также уравнение для скалярного поля φ ($\square\varphi = -4\pi T$) и уравнения Вейля можно записать в виде одного «базисного» уравнения с дискретным параметром s («спиновый вес»), содержащего одну неизвестную функцию Y_s . (Для гравитационных возмущений $s = 2$, $Y_2 = \Psi_0^B$, для электромагнитных — $s = 1$, $Y_1 = \varnothing_0^B$, для нейтрино $s = 1/2$, $Y_{1/2} = \chi_{+1}$, а для скалярного поля $s = 0$, $Y_0 = \varphi$.) Благодаря существованию в поле типа D второго вырожденного главного изотропного направления в поле Керра можно получить еще по одному уравнению для другой возмущенной характеристики каждого из этих полей, причем все эти уравнения сводятся к тому же базисному уравнению для Y_s , но при других значениях параметра s (для гравитационных возмущений $s = -2$, $Y_{-2} = \rho^{-4}\Psi_4^B$, для электромагнитных — $s = -1$, $Y_{-1} = \rho^{-2}\varnothing_2^B$, для нейтрино $s = -1/2$, $Y_{-1/2} = \rho^{-1}\chi_{-1}$). Это базисное уравнение для Y_s в координатах Бойера — Линдквиста допускает полное разделение переменных и после фурье-разложения искомой функции по азимутальной угловой координате φ и преобразования Фурье по времени сводится к неоднородному радиальному уравнению * [9, 107]:

$$\begin{aligned} & [\Delta d^2/dr^2 + 2(s+1)(r-m) d/dr + (K^2 - 2is(r-m)K)/\Delta + \\ & + 4is\omega r - \lambda]_s R_{\omega n}^h(r) = {}_s T_{\omega n}^h, \end{aligned} \quad (159)$$

где $K \equiv (r^2 + a^2)\omega - an$; $\lambda = {}_s A_{\omega n}^h - 2a\omega n + a^2\omega^2 - s(s+1)$;

ω — частота волны; n — номер азимутальной гармоники; ${}_s T_{\omega n}^h$ — фурье-компонента умноженного на $-2\rho^{s-|s|-1}\bar{\rho}^{-1}$ источника в уравнениях (150), (151) для Ψ_0^B , \varnothing_0^B или в аналогичных уравнениях для $\rho^{-4}\Psi_4^B$, $\rho^{-2}\varnothing_2^B$. Задача на собственные значения, возникающая для уравнения на функции полярного угла θ

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \sin\theta \frac{d}{d\theta} + a^2\omega^2 \cos^2\theta - \frac{n^2}{\sin^2\theta} - \right. \\ & \left. - 2a\omega s \cos\theta - \frac{2sn \cos\theta}{\sin^2\theta} - s^2 \operatorname{ctg}^2\theta - \right. \\ & \left. - s^2 + {}_s A_{\omega n}^h \right]_s S_{\omega n}^h(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (160)$$

при дополнительном условии регулярности решений при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ приводит к полной ортонормированной системе спиновых

* Свойства радиальных функций, удовлетворяющих однородным уравнениям (159), в частности их асимптотическое поведение, описаны в [107]; о построении решений радиальных уравнений в различных случаях см. [12, 106, 107, 112, 119, 120]. Решение неоднородных радиальных уравнений можно построить методом функций Грина [12, 119].

сфероидальных гармоник ${}_s S_{\omega n}^k(\theta)$ *; (индекс $k = 0, 1, 2, \dots$ нумерует различные гармоники) [9, 107]. Искомая функция $Y_s(t, r, \theta, \varphi)$ в общем случае определяется по решениям (159) и (160) в виде

$$Y_s(t, r, \theta, \varphi) = \int \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{k=0}^{k=+\infty} {}_s Y_{\omega n}^k \frac{d\omega}{2\pi};$$

$${}_s Y_{\omega n}^k = {}_s R_{\omega n}^k(r) {}_s S_{\omega n}^k(\theta) \exp(-i\omega t + in\varphi).$$

Таким образом, каждое поле возмущений (кроме скалярного) при заданных ω , n , k характеризуется двумя функциями ${}_s Y_{\omega n}^k(t, r, \theta, \varphi)$, однако оказывается, что между этими двумя функциями существуют простые локальные соотношения [107], позволяющие однозначно выразить каждую из этих функций через другую. Кроме того, для каждого значения s радиальное базисное уравнение (159) может быть записано в шести различных формах, соответствующих еще двум возможным способам выбора временной координаты («запаздывающее» и «опережающее» время, которое регулярно соответствует на горизонте прошлого и горизонте будущего) и иному выбору изотропной тетрады, регулярной не на горизонте прошлого, как в (158), а на горизонте будущего.

Получаемые при этом двенадцать уравнений обладают тем свойством, что любая из входящих в них функций поля однозначно определяет все остальные, но разная форма этих уравнений, а также различное асимптотическое поведение решений делают использование того или иного уравнения предпочтительным в зависимости от конкретных условий задачи [107]. Как показано в [113], каждая из функций Y_s для данного поля несет полную информацию о возмущенном поле, определяя его лишь с точностью до тривиальных составляющих, соответствующих малым добавкам массы, момента вращения и появлению малого заряда у черной дыры.

Большое удобство использования уравнений Тьюкольского для описания волновых процессов в поле Керра состоит еще в том, что нет необходимости обращаться к полной системе уравнений для возмущений, так как многие наиболее важные характеристики распространяющихся в этом поле волн, такие, как поток энергии падающих из бесконечности или уходящих на бесконечность волн, их поляризация, а также спектральное и угловое распределения, могут быть определены только с помощью функции Ψ_0^B (Ψ_4^B) для гравитационных возмущений и \mathcal{O}_0^B (\mathcal{O}_2^B) для электромагнитных [9, 107]. Так, для углового распределения потока

* Свойства сфероидальных гармоник и приближенное вычисление соответствующих им собственных значений для различных частных случаев описаны в [12, 106, 107, 112, 119, 120].

энергии волн имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dt d\Omega} E_{\text{эл}}^{\text{out}} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{c}{2\pi} r^2 \left| \Phi_2^{\text{B}} \right|^2; \\ \frac{d^2}{dt d\Omega} E_{\text{гп}}^{\text{out}} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{c^5}{4\pi G} \frac{r^2}{\omega^2} \left| \Psi_4^{\text{B}} \right|^2; \\ \frac{d^2}{dt d\Omega} E_{\text{эл}}^{\text{in}} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{c}{8\pi} r^2 \left| \Phi_0^{\text{B}} \right|^2; \\ \frac{d^2}{dt d\Omega} E_{\text{гп}}^{\text{in}} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{c^5}{64 \pi G} \frac{r^2}{\omega^2} \left| \Psi_0^{\text{B}} \right|^2, \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

причем действительная и мнимая части Ψ_0^{B} (Ψ_4^{B}) и Φ_0^{B} (Φ_2^{B}) соответствуют двум различным состояниям поляризации волн.

Немного сложнее вычисляется поток энергии волн, падающих к горизонту и поглощаемых черной дырой:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dt d\Omega} E_{\text{эл}}^{\text{H}} &= \lim_{r \rightarrow r_+} \frac{c}{2\pi} \frac{\omega \Delta^2}{8mr_+ k} \left| \Phi_0^{\text{B}} \right|^2; \\ \frac{d^2}{dt d\Omega} E_{\text{гп}}^{\text{H}} &= \lim_{r \rightarrow r_+} \frac{c^5}{64\pi G} \frac{\omega \Delta^4}{k(k^2 + 4\epsilon^2)(2mr_+)^3} \left| \Psi_0^{\text{B}} \right|^2, \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

где $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$; $r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2}$ — радиус горизонта;
 $\epsilon = \sqrt{m^2 - a^2} / 4mr_+$; $k = \omega - n\omega_+$; $\omega_+ = a/2mr_+$.

Исходя из базисного уравнения, можно показать, что для волн каждого типа (гравитационных, электромагнитных и др.) имеет место закон сохранения энергии [107]:

$$\frac{d}{dt} E^{\text{in}} - \frac{d}{dt} E^{\text{out}} = \frac{d}{dt} E^{\text{H}}. \quad (163)$$

Из (162) и (163) следует удивительный факт, что если $k/\omega < 0$, то энергия, уносимая волнами на бесконечность, больше энергии, приносимой падающими к черной дыре волнами; иными словами, происходит усиление волн определенного сорта при их рассеянии в поле вращающейся черной дыры [107, 108, 112, 120]*. Этот процесс, отсутствующий при нулевом моменте вращения черной дыры, является необратимым и сопровождается увеличением площади горизонта [107, 112].

Описанные выше результаты позволяют детально изучать взаимодействие черной дыры с внешними полями — поглощение волн черной дырой и их рассеяние в ее внешнем поле, сопровождающееся усилением волн определенного сорта и изменением поляризации волн, а также рассматривать различные процессы

* В [107] даны также результаты численного анализа этого явления.

при наличии источников возмущений — появление «плавающих» орбит, приливное трение, приводящее к уменьшению момента вращения черной дыры [59, 108—111], влияние приливного воздействия движения спутника на черную дыру [114, 115], излучение частиц как на нерелятивистских [116], так и на неустойчивых, релятивистских, орбитах, движение по которым сопровождается излучением синхротронного характера [12, 117, 119].

Поле заряженной вращающейся черной дыры — поле Керра — Ньюмена. В поле Керра — Ньюмена компоненты векторов изотропной тетрады и спиновые коэффициенты имеют выражения, совпадающие с соответствующими выражениями для поля Керра (158), в которых, однако, $\Delta = r^2 - 2mr + a^2 + q^2$, где $q^2 = GQ^2/c^4$, Q — заряд черной дыры, а для других отличных от нуля скаляров Ньюмена — Пенроуза имеем

$$\Psi_2 = m\rho^3 + q^2\bar{\rho}\rho^3; \quad \varnothing^1 = -Q\rho^2/2; \quad \Phi_{11} = q^2\rho^2\bar{\rho}^2/2.$$

Наличие у черной дыры электрического заряда приводит к новым качественным особенностям различных явлений, происходящих в ее внешнем поле. В первую очередь к ним относятся возникновение возмущений электромагнитного поля и излучение электромагнитных волн при движении даже нейтральной материи в этом поле [127], а также взаимопревращение электромагнитных и гравитационных волн, протекающее со значительной интенсивностью при распространении этих волн в ближайших окрестностях заряженной черной дыры [121, 125].

Многие детали этих явлений могут быть описаны на основе уравнений (153) — (155) при рассмотрении их коротковолновых решений [121, 124]. Для коротковолновых, т. е. быстроосциллирующих по сравнению с более плавно меняющимся фоном, возмущений члены этих уравнений, содержащие производные от характеристик возмущенного поля, значительно превосходят по порядку величины члены, не содержащие производные или содержащие производные меньшего порядка. Опуская в уравнениях (153) — (155) низшие по порядку члены и вводя переменные

$$\Psi = \Psi_0^B; \quad \Phi = \bar{\rho}^{-1}\delta\varnothing_{(k)},$$

эти уравнения в рассматриваемом приближении можно свести к двум уравнениям второго порядка [121]:

$$L\Psi - 2\bar{\rho}\varnothing_1\Phi = I_0; \quad L\Phi + \frac{\kappa}{2\pi}\bar{\rho}^{-1}\varnothing_1\delta\delta\Psi = J_2 = \bar{\rho}^{-1}\delta J_1, \quad (164)$$

где $L = D\Delta - \delta\bar{\delta} + (-4\gamma + \mu)D + (-3\epsilon + \bar{\epsilon} - 4\rho - \bar{\rho})\Delta + (4\alpha - \pi)\delta + (\bar{\alpha} + 3\beta - \bar{\pi} + 4\tau)\bar{\delta}$. Заметим, что оператор L совпадает в главных членах с оператором в уравнении Тьюкольского (150) для поля Керра и, следовательно, допускает разделение

переменных. Это приводит к тому же уравнению для собственных значений (160) для угловых гармоник. Оператор $\delta\bar{\delta}$ в старших (содержащих вторые производные) членах совпадает с угловой частью оператора L , взятой с противоположным знаком, поэтому во втором уравнении (164) $\delta\bar{\delta}$ можно заменить на угловую часть оператора L , взятую со знаком минус. После разложения искомых функций по сфероидальным гармоникам ${}_s S_{\omega n}^h(\theta)$ и фурье-преобразований по φ и t угловая часть оператора $\delta\bar{\delta}$ сводится к умножению на величину $\rho\bar{\rho}\lambda/2$, где $\lambda = {}_s A_{\omega n}^h - 2a\omega n + a^2\omega^2 - s(s+1)$; ${}_s A_{\omega n}^h$ — собственное значение для гармоники ${}_s S_{\omega n}^h(\theta)$ *.

После этих преобразований переменные в (164) еще не разделяются из-за наличия множителей $\rho\bar{\rho}\mathcal{O}_1$ и $\rho\bar{\rho}\bar{\mathcal{O}}_1$, однако если ограничиться рассмотрением области пространства, прилежащей к экватору вблизи черной дыры и простирающейся вплоть до полярной оси вдали от нее и определяемой условием

$$|a \cos \theta| \ll r \tag{165}$$

(при малых a это условие, очевидно, тождественно выполняется), то зависимость от θ в этих множителях можно пренебречь и переменные полностью разделяются. Кроме того, при условии (165) система (164) после введения новых переменных

$$Y_{\pm} = \Psi \mp (c^2 / \sqrt{G\lambda}) \Phi$$

распадается на два независимых уравнения для Y_+ и Y_- :

$$(L \pm (q/r^3) \sqrt{\lambda}) Y_{\pm} = I_{\pm},$$

$$\text{где } I_{\pm} = I_0 \mp (c^2 / \sqrt{G\lambda}) J_2. \tag{167}$$

Аналогичные уравнения при тех же предположениях в поле Керра — Ньюмена можно получить для двух других функций: $\tilde{Y}_{\pm} = \tilde{\Psi} \mp (c^2 / \sqrt{G\lambda}) \tilde{\Phi}$, где

$$\tilde{\Psi} = \rho^{-4} \Psi_B; \quad \tilde{\Phi} = \rho^{-4} \delta \mathcal{O}_{(v)};$$

$$\mathcal{O}_{(v)} = (\kappa / 4\pi) [(\Delta + 2\gamma + 3\mu) \mathcal{O}_2^B + 2\mathcal{O}_1^{vB}].$$

* Для коротких волн $|n| \gg 1$, $|\omega m| \gg 1$. Кроме того, при условиях

$$n^2 - a^2\omega^2 \gg 1; \quad k \ll |n| \tag{166}$$

угловые гармоники оказываются сосредоточенными вблизи экваториальной плоскости и быстро убывают при удалении от нее. (Именно этим условиям удовлетворяют частоты, излучаемые, например, ультрарелятивистскими частицами на круговых орбитах вблизи черной дыры, что приводит к синхротронному характеру их излучения.) При этом

$${}_s A_{n\omega}^h = n^2 + \sqrt{n^2 - a^2\omega^2} (2k + 1) + O(n^0), \quad \omega^0 = n^2 + O(n, \omega)$$

и, следовательно, $\lambda \approx (n - a\omega)^2$.

Получающиеся при разделении переменных радиальные уравнения удобно записывать, вводя параметр s [$s = 2$ для Y_{\pm} в (167) и $s = -2$ для \tilde{Y}_{\pm}]:

$$(\mathcal{L} \mp 2q \sqrt{\bar{\lambda}}/r) Y_{\pm}^s = (T_{\pm}^s)_{\omega n}^h, \quad (168)$$

где \mathcal{L} совпадает по виду с оператором в уравнениях Тьюкольского (159) для поля Керра, отличаясь лишь другим выражением для Δ ($\Delta = r^2 - 2mr + a^2 + q^2$).

Поток энергии, переносимой волнами, уходящими на бесконечность или падающими на черную дыру из бесконечности, равен сумме соответствующих потоков, вычисленных по формулам (161), так как вдали от заряженной черной дыры эти волны не взаимодействуют, распространяясь независимо друг от друга. Для этих потоков можно получить

$$\frac{d^2}{dt d\Omega} E^{\text{in}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{c^5}{G} \frac{r^2}{64\pi\omega^2} (|Y_+^{s=2}|^2 + |Y_-^{s=2}|^2);$$

$$\frac{d^2}{dt d\Omega} E^{\text{out}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{c^5}{G} \frac{r^{-6}}{4\pi\omega^2} (|Y_+^{s=-2}|^2 + |Y_-^{s=-2}|^2).$$

Решения однородных радиальных уравнений (168) всюду, за исключением малых окрестностей точек поворота потенциального барьера в (168), точнее, при $|r - r_{\text{пов}}| \ll |\omega|^{-1/2}$, могут быть построены методом ВКБ, а в этих малых окрестностях должны быть сшиты с функциями Эйри или параболического цилиндра, аппроксимирующими решение в этих областях. Решения неоднородных уравнений (167) строятся обычным образом с помощью функций Грина. Угловые гармоники при условиях (166) могут быть выражены через полиномы Якоби [121].

Уравнения (168) могут быть использованы для анализа процесса распространения коротковолнового электромагнитного и гравитационного излучения и взаимопревращения этих волн вблизи экваториальной плоскости заряженной вращающейся черной дыры*, а также для исследования свойств синхротронного излучения ультрарелятивистских частиц, движущихся в экваториальной плоскости этой дыры [121]**.

* Впервые на явление взаимопревращения электромагнитных и гравитационных волн, возникающее при попадании волнового пакета в область сильного однородного магнитного поля, было указано Герценштейном [133]. Взаимопревращение волн в поле Керра — Ньюмена в приближении геометрической оптики впервые рассмотрено в [125] (там же см. историю вопроса). О приближении геометрической оптики см. следующий пункт настоящего раздела.

** Отметим здесь, что в поле невращающейся заряженной черной дыры (поле Нордстрема — Рейсснера) уравнения (168) для коротких волн без всяких ограничений типа (165), (166), как и значительно более сложные системы уравнений для волн произвольной частоты [122, 123] допускают разделе-

Распространение коротких волн в произвольном внешнем электровакуумном гравитационном поле. Рассмотрим сначала в приближении геометрической оптики поведение коротковолновых возмущений электромагнитного и гравитационного полей на фоне некоторого произвольного электровакуумного гравитационного поля. Короткими волнами обычно называют такие малые возмущения поля фона, значительные изменения которых происходят на расстояниях, много меньших характерных неоднородностей поля фона. Таким образом, в случае коротких волн имеем малый параметр — отношение характерных размеров неоднородностей возмущений и фона, что позволяет строить решения в виде разложений по степеням этого малого параметра [94, 125].

Коротковолновое возмущение χ^B некоторой характеристики поля χ в приближении геометрической оптики представляется в виде

$$\chi^B = \hat{\chi} \exp(i\omega S), \quad (169)$$

где безразмерный постоянный параметр $\omega \gg 1$ имеет смысл частоты волны, умноженной на некоторую характерную длину неоднородности фона; $\omega S(x^i)$ — быстро меняющаяся фаза волны; $\hat{\chi}$ — ее плавно меняющаяся амплитуда.

Распространение волн будем рассматривать в линейном по возмущениям приближении, не учитывая их обратного влияния на поле фона * и предполагая, что в рассматриваемой области источники возмущений отсутствуют.

Так как возмущения предполагаются малыми, то будем считать, что их амплитуды $\hat{\chi}$ [формула (169)] имеют порядок $O(1/\omega)$ **.

В первом приближении по ω из возмущенных уравнений Максвелла (II.38) — (II.41) получаем

$$\begin{cases} S_l \hat{\partial}_1 - S_m \hat{\partial}_0 = 0; \\ S_m \hat{\partial}_1 - S_n \hat{\partial}_0 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} S_l \hat{\partial}_2 - S_m \hat{\partial}_1 = 0; \\ S_m \hat{\partial}_2 - S_n \hat{\partial}_1 = 0, \end{cases}$$

где $S_l = l^i S_{,i}$; $S_n = n^i S_{,i}$; $S_m = m^i S_{,i}$. Эти уравнения имеют нетривиальное решение для $\hat{\partial}_0$, $\hat{\partial}_1$, $\hat{\partial}_2$ только если $S_l S_n -$

ние переменных и могут быть в принципе использованы для анализа поведения возмущений. Однако эту задачу для поля Нордстрема — Рейсснера можно решить методом, аналогичным использованному в [128, 129] для поля Шварцшильда, более громоздким, но приводящим к более простому и полному решению [130—132].

* «Прогибание» фона можно учесть, определив эффективный вклад в тензор энергии — импульса от коротковолновых возмущений (усредненный по масштабам, много большим длины волны) и решая затем совместно задачу о поведении волн и об отыскании поля фона из уравнений поля, в правой части которых учтен эффективный тензор энергии — импульса волны [94].

** На самом деле значение отрицательного показателя степени у ω не существенно, важен лишь относительный порядок малости различных величин.

— $S_m S_m = 0$, т. е. согласно (3) фронты волн $S(x^i) = \text{const}$ — изотропные поверхности. Тот же самый вывод может быть получен из тождеств Бьянки (II.1), (II.4), (II.7), (II.8) для гравитационных волн.

Выберем изотропную тетраду так, чтобы вектор l^i был касательным к изотропным геодезическим — лучам на поверхностях $S(x^i) = \text{const}$ и вся тетрада переносилась вдоль лучей параллельно (см. разд. 1). Тогда для этой тетрады

$$k = \varepsilon = \pi = 0; \quad \rho = \bar{\rho} \quad (170)$$

и, кроме того, $DS = 0$, $\delta S = 0$, $\bar{\delta} S = 0$, так как l^i , m^i , \bar{m}^i будут касательны к фронтам. При этом операторы D , δ , $\bar{\delta}$, действуя на функцию вида (169), не повышают порядок ее величины по ω . А так как $\Delta S = n^i l_i = 1$, то в главном приближении по ω действие оператора Δ на (169) сводится к умножению на $i\omega$.

Рассмотрим теперь линеаризованные по возмущениям систему уравнений Ньюмена — Пенроуза (II.1) — (II.11), (II.12) — (II.29) и уравнения Максвелла (II.38) — (II.41). В силу того что все амплитуды возмущений суть $O(1/\omega)$, а все операторы, кроме Δ , не повышают порядок величины возмущенной функции по ω , амплитуды всех величин, на которые в этих уравнениях действует оператор Δ , должны иметь более высокий порядок малости — $O(1/\omega^2)$. Таким образом, из (II.1) — (II.11) имеем

$$\hat{\Psi}_0, \hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3, \hat{\Phi}_{00}, \hat{\Phi}_{10}, \hat{\Phi}_{20}, \hat{\Phi}_{01}, \hat{\Phi}_{11}, \hat{\Phi}_{21} \sim O(1/\omega^2). \quad (171)$$

Из уравнений (II.12) — (II.29) аналогично получим

$$\hat{k}, \hat{\varepsilon}, \hat{\pi}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}, \hat{\rho}, \sim O(1/\omega^2), \quad (172)$$

а из уравнений Максвелла (II.38) — (II.41) с учетом (172)

$$\hat{\mathcal{O}}_0, \hat{\mathcal{O}}_1, \hat{\mathcal{O}}_2 \sim O(1/\omega^2). \quad (173)$$

Кроме того, из рассмотрения возмущений коммутаторов (1.6), действующих на некоторую скалярную функцию, найдем

$$\hat{D}, \hat{\delta}, \hat{\bar{\delta}}, \sim O(1/\omega^2). \quad (174)$$

Следовательно, только амплитуды $\hat{\Psi}_4, \hat{\tau}, \hat{\gamma}, \hat{\nu}, \hat{\Delta}$ могут быть порядка $O(1/\omega)$.

Прежде чем рассматривать распространение волн по произвольному электровакуумному фону, рассмотрим значительно более простой случай, когда электромагнитное поле фона отсутствует.

Геометрическая оптика в произвольном вакуумном гравитационном поле. Из уравнений (II.7) и (II.40) с учетом (170) — (174) на фоне вакуумного гравитационного поля, т. е. при условии $\Phi_{\text{мп}} = 0$ для фона, в приближении $\sim 1/\omega$ можно получить два

независимых уравнения

$$(D - \rho) \hat{\Psi}_4 = 0; (D - \rho) \hat{\phi}_2 = 0, \quad (175)$$

описывающих соответственно гравитационные и электромагнитные волны и представляющих собой записанные в несколько иной форме обычные уравнения «переноса амплитуды» волн вдоль лучей в приближении геометрической оптики [94].

Так как согласно (170) $\rho = \bar{\rho} = -\nabla_i l^i/2$, то из уравнений (175) получаем

$$l^i \nabla_i \hat{\chi} + (1/2) (\nabla_i l^i) \hat{\chi} = 0 \text{ или } \nabla_i (l^i |\hat{\chi}|^2) = 0, l^i \nabla_i (\arg \hat{\chi}) = 0, \quad (176)$$

где $\hat{\chi}$ — либо $\hat{\Psi}_4$, либо $\hat{\phi}_2$. Последнее из равенств означает, что при распространении волн сохраняется состояние их поляризации относительно тетрады, параллельно переносимой вдоль лучей (действительная и мнимая части $\hat{\chi}$ описывают разные состояния поляризации).

Поскольку l^i — параллельно переносимый вдоль лучей касательный вектор, то оператор $D = d/dr$ есть полная производная вдоль лучей по их аффинному параметру r , и если ввести «яркостный параметр» r [4], определяемый равенством $dr/dr = -\rho r$, то из (176) можно получить

$$|\hat{\chi}|^2 = A/r^2, \text{ где } dA/dr = 0. \quad (177)$$

Величина $|\hat{\chi}|^2$ характеризует поток энергии в волне, приходящийся на единицу площади поперечного сечения некоторой тонкой лучевой трубки, а r^2 в изотропной геодезической системе координат (см. разд. 1) равно $\sqrt{\bar{g}}$ и, следовательно, определяет изменение площади сечения этой трубки при смещении вдоль лучей. Таким образом, (177) есть не что иное, как аналог известного закона «обратных квадратов» для интенсивностей волн, выражающий закон сохранения энергии волны.

Из (177) следует, в частности, что если лучи приближаются к каустике и, следовательно, $r = \sqrt[4]{\bar{g}} \rightarrow 0$ (близкие лучи начинают пересекаться), то амплитуды волн неограниченно возрастают. Однако вблизи каустики приближение геометрической оптики уже неприменимо [так как нарушается основное предположение (169)], и здесь должны быть использованы другие приближенные методы [134]. Более детальное исследование показывает [125], что амплитуды волн вблизи каустик остаются ограниченными.

Распространение волн в произвольном электровакуумном гравитационном поле. Взаимопревращение электромагнитных и гравитационных волн. На фоне произвольного электровакуумного гравитационного поля линеаризованные по возмущениям уравнения (II.7) и (II.40) в приближении $\sim 1/\omega$ кроме амплитуд $\hat{\Psi}_4$

и $\hat{\varnothing}_2$ содержат еще $\hat{\tau}$, $\hat{\nu}$, $\hat{\gamma}$ и $\hat{\Delta}$, которые, как было сказано выше, могут иметь порядок $O(1/\omega)$ и не могут быть обращены в нуль одновременно малыми вращениями базисной тетрады в возмущенном пространстве. Однако удается найти такие комбинации этих переменных, относительно которых линейризованные уравнения (П.7) и (П.40) в приближении $\sim 1/\omega$ образуют замкнутую систему. Действительно, из (П.7), используя уравнения Максвелла для возмущений, получаем

$$(D - \rho) \hat{\Psi} + (\kappa/4\pi) \hat{\varnothing}_0 \hat{\Phi} = 0 \quad (178)$$

где $\psi = \hat{\psi}_4^B$, а $\hat{\Phi}$ есть амплитуда величины $\Phi = [(\Delta + 2\gamma) \hat{\varnothing}_2 - 2\nu \hat{\varnothing}_1]^B$. Второе уравнение для Ψ и Φ вытекает из (П.40), к которому применен оператор Δ , после чего наложены возмущения. В силу коммутационных соотношений (6), а также (П.21) и остальных уравнений Максвелла в приближении $\sim 1/\omega$ получим

$$(D - \rho) \hat{\Phi} - \hat{\varnothing}_0 \hat{\Psi} = 0. \quad (179)$$

Интересно отметить, что величины $\hat{\Phi}$ и $\hat{\Psi}$, входящие в замкнутую систему (178) — (179), являются инвариантными в рассматриваемом приближении относительно малых вращений изотропной тетрады (46), принадлежащих группам А и В.

Уравнения (178), (179) описывают взаимодействие гравитационных и электромагнитных волн при наличии фонового электромагнитного поля. При отсутствии фонового электромагнитного поля это взаимодействие исчезает в рассматриваемом приближении, что выражается в независимости уравнений (175). Уравнения (178), (179) эквивалентны полученным в [125] из рассмотрения коротковолновых возмущений метрики при специальном выборе координат в возмущенном пространстве.

В общем случае взаимодействие этих волн приводит к тому, что аргументы комплексных функций $\hat{\Psi}$ и $\hat{\Phi}$ не остаются постоянными вдоль лучей и, следовательно, происходит вращение плоскостей поляризации волн относительно параллельно переносимой тетрады. Кроме того, для электромагнитной и гравитационной волн по отдельности уже не имеет места закон сохранения энергии вида (176), который выполняется теперь лишь для суммарной энергии, переносимой волнами обоих типов [125]. Действительно, из (178), (179) имеем

$$\nabla_i [l^i (|\hat{\Psi}|^2 + (\kappa/4\pi) |\hat{\Phi}|^2)] = 0.$$

Распределение этой энергии между электромагнитной (функция Φ) и гравитационной (функция Ψ) составляющими волн периодически изменяется вдоль луча, т. е. происходит поочередное превращение этих составляющих друг в друга.

Интересен один частный случай [125], когда поле фона или траектории лучей таковы, что аргумент комплексной функции \varnothing_0 , описывающей в (178), (179) электромагнитное поле фона, постоянен вдоль лучей*. В этом случае можно ввести новые переменные

$$\hat{Y}_{\pm} = \hat{\Psi}_{\mp} i [V \sqrt{\kappa/4\pi} \exp(-i \arg \varnothing_0)] \hat{\Phi}, \quad (180)$$

для которых (178), (179) распадутся на два независимых уравнения**:

$$(D - \rho \pm i_1 V \sqrt{\kappa/4\pi} |\varnothing_0|) \hat{Y}_{\pm} = 0. \quad (181)$$

Снова, как и в (176), вводя яркостный параметр r вдоль лучей, уравнения (181) запишем в виде $d(r \hat{Y}_{\pm})/dr = \mp V \sqrt{\kappa/4\pi} |\varnothing_0| \times (r \hat{Y}_{\pm})$, откуда получим

$$\hat{Y}_{\pm} = \left(\frac{B_{\pm}}{r}\right) \exp\left[\mp i \sqrt{\frac{\kappa}{4\pi}} \int_{r_0}^r |\varnothing_0| dr\right] \quad (182)$$

где B_{\pm} не зависит от параметра r вдоль лучей. После этого из (180) легко найти гравитационную и электромагнитную составляющие:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} &= (\hat{Y}_+ + \hat{Y}_-)/2; \exp(-i \arg \varnothing_0) \hat{\Phi} = \\ &= (i/2) (\hat{Y}_+ - \hat{Y}_-) V \sqrt{4\pi/\kappa}. \end{aligned} \quad (183)$$

Если источник, находящийся в точке луча с $r = r_0$, испускает, например, только электромагнитные волны, то в (182) $B_+ = -B_- = iB$ и из (183) получаем

$$\hat{\Psi} = \left(\frac{-B}{r}\right) \sin\left(V \sqrt{\frac{\kappa}{4\pi}} \int_{r_0}^r |\varnothing_0| dr\right);$$

$$\hat{\Phi} = V \sqrt{\frac{4\pi}{\kappa}} \exp(i \arg \varnothing_0) \frac{B}{r} \cos\left(V \sqrt{\frac{\kappa}{4\pi}} \int_{r_0}^r |\varnothing_0| dr\right).$$

* Именно таким свойством обладают все лучи в поле невращающейся заряженной черной дыры — поле Нордстрема — Рейсснера, а также лучи, движущиеся вблизи экваториальной плоскости в поле вращающейся заряженной черной дыры (поле Керра — Ньюмена).

** Такое распадение уже имело место в уравнениях (167) для коротких волн в поле Керра — Ньюмена. Что касается уравнений (167) и (181), то заметим здесь, что приближение геометрической оптики (181), (182) пригодно лишь вне окрестностей каустических поверхностей для лучей (или при разделении переменных — вне окрестностей точек поворота¹ для радиальных и угловых потенциальных барьеров). Уравнения же (167) в отличие от (181), применимы для описания возмущений во всем пространстве, включая окрестности каустик и области, находящиеся «под потенциальным барьером», что позволяет использовать (167) для описания соединения источников с волновым полем, т. е. определять испускаемое источниками излучение [121, 124].

Аналогичные формулы можно получить и для волн от источника чисто гравитационных возмущений. Эти формулы явно демонстрируют, каким образом происходит превращение волн: амплитуды электромагнитной и гравитационной составляющих высокочастотной волны, попавшей в область сильного электромагнитного поля, оказываются промодулированными плавными синусоидами с фазами вида $\sqrt{\frac{\kappa}{4\pi}} \int |\mathcal{O}_0| dr$, сдвинутыми на четверть периода.

Значительной интенсивности этот процесс может достигать в ближайших окрестностях заряженной черной дыры. В частности, если некоторый локализованный пакет волн, например гравитационных, приблизившись к заряженной черной дыре, совершает несколько оборотов вокруг нее (двигаясь вблизи фотонной круговой орбиты), а затем снова уходит на бесконечность, то в результате превращения волн этот пакет может стать «видимым», т. е. превратиться в пакет чисто электромагнитных волн (без искажения первоначальной формы), испытав в процессе движения полное (возможно, неоднократное) превращение своих составляющих [121].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами было рассмотрено далеко не все многообразие задач ОТО, в которых формализм Ньюмена — Пенроуза или отдельные его элементы в сочетании с другими методами разнообразного характера находят широкое применение. Многочисленные полезные приложения этого формализма свидетельствуют о том, что он является одним из наиболее мощных методов современной теории гравитации.

П Р И Л О Ж Е Н И Я

А. Первая группа уравнений Ньюмена — Пенроуза:

$$(D - 4\rho - 2\varepsilon) \Psi_1 - (\bar{\delta} - 4\alpha + \pi) \Psi_0 + 3k\Psi_2 + (\delta - 2\beta - 2\bar{\alpha} + \bar{\pi}) \Phi_{00} - (D - 2\bar{\rho} - 2\varepsilon) \Phi_{01} - 2k\Phi_{11} + 2\sigma\Phi_{10} - \bar{k}\Phi_{02} = 0; \quad (\text{II. 1})$$

$$(D - 3\rho) \Psi_2 - (\bar{\delta} + 2\pi - 2\alpha) \Psi_1 + 2k\Psi_3 + \lambda\Psi_0 + (\delta - 2\bar{\alpha} + \bar{\pi}) \Phi_{10} - (D - 2\bar{\rho}) \Phi_{11} - k\Phi_{21} - \bar{k}\Phi_{12} - \mu\Phi_{00} + \pi\Phi_{01} + \sigma\Phi_{20} - D\Lambda = 0; \quad (\text{II. 2})$$

$$(D - 2\rho + 2\varepsilon) \Psi_3 - (\bar{\delta} + 3\pi) \Psi_2 + 2\lambda\Psi_1 + k\Psi_4 + (\delta - 2\bar{\alpha} + 2\beta + \bar{\pi}) \Phi_{20} - (D - 2\bar{\rho} + 2\varepsilon) \Phi_{21} - 2\mu\Phi_{10} + 2\pi\Phi_{11} - \bar{k}\Phi_{22} - 2\bar{\delta}\Lambda = 0; \quad (\text{II. 3})$$

$$(\delta - 4\tau - 2\beta) \Psi_1 - (\Lambda - 4\gamma + \mu) \Psi_0 + 3\sigma\Psi_2 + (\delta - 2\beta + 2\bar{\pi}) \Phi_{01} - (D - 2\varepsilon + 2\bar{\varepsilon} - \bar{\rho}) \Phi_{02} - 2k\Phi_{12} + 2\sigma\Phi_{11} - \bar{\lambda}\Phi_{00} = 0; \quad (\text{II. 4})$$

$$(\delta - 3\tau) \Psi_2 - (\Lambda + 2\mu - 2\gamma) \Psi_1 + 2\sigma\Psi_3 + \nu\Psi_0 + (\delta + 2\bar{\pi}) \Phi_{11} - (D + 2\bar{\varepsilon} - \bar{\rho}) \Phi_{12} - k\Phi_{22} - \mu\Phi_{01} + \pi\Phi_{02} + \sigma\Phi_{21} - \bar{\lambda}\Phi_{10} - \delta\Lambda = 0; \quad (\text{II. 5})$$

$$(\delta + 2\beta - 2\tau) \Psi_3 - (\Delta + 3\mu) \Psi_2 + 2\nu\Psi_1 + \sigma\Psi_4 + (\delta + 2\beta + 2\bar{\pi}) \Phi_{21} - \\
 - (D + 2\varepsilon + 2\bar{\varepsilon} - \bar{\rho}) \Phi_{22} - 2\mu\Phi_{11} + 2\pi\Phi_{12} - \bar{\lambda}\Phi_{20} - 2\Delta\Lambda = 0; \quad (\text{П. 6})$$

$$(D + 4\varepsilon - \rho)\Psi_4 - (\bar{\delta} + 4\pi + 2\alpha) \Psi_3 + 3\lambda\Psi_2 + (\Delta + 2\gamma - 2\bar{\gamma} + \bar{\mu}) \Phi_{20} - \\
 - (\bar{\delta} + 2\alpha - 2\bar{\tau}) \Phi_{21} - 2\nu\Phi_{10} + 2\lambda\Phi_{11} - \bar{\sigma}\Phi_{22} = 0; \quad (\text{П. 7})$$

$$(\delta + 4\beta - \tau) \Psi_4 - (\Delta + 2\gamma + 4\mu) \Psi_3 + 3\nu\Psi_2 + (\Delta + 2\gamma + 2\bar{\mu}) \Phi_{21} - \\
 - (\bar{\delta} + 2\alpha + 2\bar{\beta} - \bar{\tau}) \Phi_{22} - 2\nu\Phi_{11} + 2\lambda\Phi_{12} - \bar{\nu}\Phi_{20} = 0; \quad (\text{П. 8})$$

$$(D - 2\rho - 2\bar{\rho}) \Phi_{11} - (\delta - 2\bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi}) \Phi_{10} - (\bar{\delta} - 2\bar{\tau} - 2\alpha + \pi) \Phi_{01} + \\
 + (\Delta - 2\gamma - 2\bar{\gamma} + \mu + \bar{\mu}) \Phi_{00} + \bar{k}\Phi_{12} + k\Phi_{21} - \bar{\sigma}\Phi_{02} - \sigma\Phi_{20} + 3D\Lambda = 0; \quad (\text{П. 9})$$

$$(D - 2\rho + 2\bar{\varepsilon} - \bar{\rho}) \Phi_{12} - (\delta + 2\bar{\pi} - 2\tau) \Phi_{11} - (\bar{\delta} + 2\bar{\beta} - 2\alpha - \bar{\tau} + \pi) \Phi_{02} + \\
 + (\Delta + 2\bar{\mu} - 2\gamma + \mu) \Phi_{01} + k\Phi_{22} - \bar{\nu}\Phi_{00} + \bar{\lambda}\Phi_{10} - \sigma\Phi_{21} + 3\delta\Lambda = 0; \quad (\text{П. 10})$$

$$(D + 2\bar{\varepsilon} + 2\varepsilon - \rho - \bar{\rho}) \Phi_{22} - (\bar{\delta} + 2\bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau}) \Phi_{12} - (\delta + 2\bar{\pi} + \\
 + 2\beta - \tau) \Phi_{21} + (\Delta + 2\bar{\mu} + 2\mu) \Phi_{11} - \bar{\nu}\Phi_{10} - \nu\Phi_{01} + \bar{\lambda}\Phi_{20} + \lambda\Phi_{02} + 3\Delta\Lambda = 0. \quad (\text{П. 11})$$

Б. Вторая группа уравнений Ньюмена — Пенроуза:

$$\Phi_{00} = (D - \rho - \varepsilon - \bar{\varepsilon}) \rho - (\bar{\delta} - 3\alpha - \bar{\beta} + \pi) k - \bar{\sigma}\bar{\sigma} + \tau k; \quad (\text{П. 12})$$

$$\Psi_0 = (D - \rho - \bar{\rho} - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon}) \sigma - (\delta - \tau + \bar{\pi} - \bar{\alpha} - 3\beta) k; \quad (\text{П. 13})$$

$$\Psi_1 + \Phi_{01} = (D - \rho - \varepsilon + \bar{\varepsilon}) \tau - (\Delta - 3\gamma - \bar{\gamma}) k - \bar{\rho}\bar{\pi} - \bar{\sigma}\bar{\tau} - \pi\sigma; \quad (\text{П. 14})$$

$$\Phi_{10} = (D - \rho - \bar{\varepsilon} + 2\varepsilon) \alpha - (\bar{\delta} - \bar{\beta} + \pi) \varepsilon - \beta\bar{\sigma} + k\bar{\lambda} + \bar{k}\bar{\gamma} - \pi\rho; \quad (\text{П. 15})$$

$$\Psi_1 = (D - \bar{\rho} + \bar{\varepsilon}) \beta - (\delta - \bar{\alpha} + \bar{\pi}) \varepsilon - (\alpha + \pi) \sigma + (\mu + \gamma) k; \quad (\text{П. 16})$$

$$-\Lambda + \Psi_2 + \Phi_{11} = (D + \varepsilon + \bar{\varepsilon}) \gamma - (\Delta - \gamma - \bar{\gamma}) \varepsilon - (\tau + \bar{\pi}) \alpha - (\pi + \bar{\tau}) \beta - \pi\tau + \nu k; \quad (\text{П. 17})$$

$$\Phi_{20} = (D - \rho + 3\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \lambda - (\bar{\delta} + \pi + \alpha - \bar{\beta}) \pi - \mu\bar{\sigma} + \bar{\nu}k; \quad (\text{П. 18})$$

$$2\Lambda + \Psi_2 = (D - \bar{\rho} + \varepsilon + \bar{\varepsilon}) \mu - (\delta + \bar{\pi} - \bar{\alpha} + \beta) \pi - \sigma\bar{\lambda} + \nu k; \quad (\text{П. 19})$$

$$\Psi_3 + \Phi_{21} = (D + 3\varepsilon + \bar{\varepsilon}) \nu - (\Delta + \mu + \gamma - \bar{\gamma}) \pi - \mu\bar{\tau} - (\bar{\pi} + \tau) \lambda; \quad (\text{П. 20})$$

$$-\Psi_4 = (\Delta + \mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma}) \lambda - (\bar{\delta} + 3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau}) \nu; \quad (\text{П. 21})$$

$$-\Psi_1 + \Phi_{01} = (\delta - \bar{\alpha} - \beta - \tau) \rho - (\bar{\delta} - 3\alpha + \bar{\beta}) \sigma + \bar{\tau}\bar{\rho} - (\mu - \bar{\mu}) k; \quad (\text{П. 22})$$

$$\Lambda - \Psi_2 + \Phi_{11} = (\delta - \bar{\alpha} + 2\beta) \alpha - (\bar{\delta} + \bar{\beta}) \beta - \mu\rho + \sigma\bar{\lambda} - (\rho - \bar{\rho}) \gamma - \varepsilon(\mu - \bar{\mu}); \quad (\text{П. 23})$$

$$-\Psi_3 + \Phi_{21} = (\delta - \bar{\alpha} + 3\beta) \lambda - (\bar{\delta} + \pi + \alpha + \bar{\beta}) \mu - (\rho - \bar{\rho}) \nu + \pi\bar{\mu}; \quad (\text{П. 24})$$

$$\Phi_{22} = (\delta - \tau + 3\beta + \bar{\alpha}) \nu - (\Delta + \mu + \gamma + \bar{\gamma}) \mu - \lambda\bar{\lambda} + \pi\bar{\nu}; \quad (\text{П. 25})$$

$$\Phi_{12} = (\delta - \tau + \bar{\alpha} + \beta) \gamma - (\Delta - \gamma + \bar{\gamma} + \mu) \beta - \mu\tau + \sigma\nu + \varepsilon\bar{\nu} - \alpha\bar{\lambda}; \quad (\text{П. 26})$$

$$\Phi_{02} = (\delta - \tau - \beta + \bar{\alpha}) \tau - (\Delta + \mu - 3\gamma + \bar{\gamma}) \sigma - \bar{\lambda}\rho + \bar{k}\bar{\nu}; \quad (\text{П. 27})$$

$$-2\Delta - \Psi_2 = (\Delta + \bar{\mu} - \gamma - \bar{\gamma}) \rho - (\bar{\delta} + \bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau}) \tau + \sigma \lambda - \nu k; \quad (\text{П.28})$$

$$-\Psi_3 = (\Delta - \bar{\gamma} + \bar{\mu}) \alpha - (\bar{\delta} + \bar{\beta} - \bar{\tau}) \gamma - (\rho + \varepsilon) \nu + (\tau + \beta) \lambda. \quad (\text{П.29})$$

В. Третья группа уравнений Ньюмена—Пенроуза (координатные уравнения):

$$\delta V - D\omega = (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi}) V + kU - \sigma\bar{\omega} - (\bar{\rho} + \varepsilon - \bar{\varepsilon}) \omega; \quad (\text{П.30})$$

$$\delta Y^\alpha - D\xi^\alpha = (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi}) Y^\alpha + kX^\alpha - \sigma\bar{\xi}^\alpha - (\bar{\rho} + \varepsilon - \bar{\varepsilon}) \xi^\alpha; \quad (\text{П.31})$$

$$\Delta Y^\alpha - DX^\alpha_1 = (\gamma + \bar{\gamma}) Y^\alpha + (\varepsilon + \bar{\varepsilon}) X^\alpha - (\tau + \bar{\pi}) \bar{\xi}^\alpha - (\bar{\tau} + \pi) \xi^\alpha; \quad (\text{П.32})$$

$$\Delta V - DU = (\gamma + \bar{\gamma}) V + (\varepsilon + \bar{\varepsilon}) U - (\tau + \bar{\pi}) \bar{\omega} - (\bar{\tau} + \pi) \omega; \quad (\text{П.33})$$

$$\delta U - \Delta\omega = -\bar{\nu}V + (\tau - \bar{\alpha} - \beta) U + \bar{\lambda}\bar{\omega} + (\mu - \gamma + \bar{\gamma}) \omega; \quad (\text{П.34})$$

$$\delta X^\alpha - \Delta\xi^\alpha = -\bar{\nu}Y^\alpha + (\tau - \bar{\alpha} - \beta) X^\alpha + \bar{\lambda}\bar{\xi}^\alpha + (\mu - \gamma + \bar{\gamma}) \xi^\alpha; \quad (\text{П.35})$$

$$\bar{\delta}\omega - \delta\bar{\omega} = (\bar{\mu} - \mu) V + (\bar{\rho} - \rho) U - (\bar{\alpha} - \beta) \bar{\omega} - (\bar{\beta} - \alpha) \omega; \quad (\text{П.36})$$

$$\bar{\delta}\xi^\alpha - \delta\bar{\xi}^\alpha = (\bar{\mu} - \mu) Y^\alpha + (\bar{\rho} - \rho) X^\alpha - (\bar{\alpha} - \beta) \bar{\xi}^\alpha - (\bar{\beta} - \alpha) \xi^\alpha. \quad (\text{П.37})$$

Г. Уравнения Максвелла в формализме Ньюмена—Пенроуза:

$$(D - 2\rho) \varnothing_1 - (\bar{\delta} - 2\alpha + \pi) \varnothing_0 + k\varnothing_2 = (-2\pi/c) J_{(l)}; \quad (\text{П.38})$$

$$(\delta - 2\tau) \varnothing_1 - (\Delta - 2\gamma + \mu) \varnothing_0 + \sigma\varnothing_2 = -(2\pi/c) J_{(m)}; \quad (\text{П.39})$$

$$(D + 2\varepsilon - \rho) \varnothing_2 - (\bar{\delta} + 2\pi) \varnothing_1 + \lambda\varnothing_0 = -(2\pi/c) J_{(\bar{m})}; \quad (\text{П.40})$$

$$(\delta + 2\beta - \tau) \varnothing_2 - (\Delta + 2\mu) \varnothing_1 + \nu\varnothing_0 = -(2\pi/c) J_{(n)}. \quad (\text{П.41})$$

Для проекций 4-тока приняты следующие обозначения:

$$J_{(l)} = J_i l^i; \quad J_{(m)} = J_i m^i; \quad J_{(\bar{m})} = J_i \bar{m}^i; \quad J_{(n)} = J_i n^i. \quad (\text{П.42})$$

Д. Преобразования тетрадных компонент тензоров Вейля и Максвелла при лоренцевых вращениях изотропной тетрады:

$$\Psi'_0 = G^2 \exp(2iH) \Psi_0; \quad (\text{П.43})$$

$$\Psi'_1 = G \exp(iH) \Psi_1; \quad (\text{П.44})$$

$$\Psi'_2 = \Psi_2; \quad (\text{П.45})$$

$$\Psi'_3 = G^{-1} \exp(-iH) \Psi_3; \quad (\text{П.46})$$

$$\Psi'_4 = G^{-2} \exp(-2iH) \Psi_4; \quad (\text{П.47})$$

$$\Psi'_0 = \Psi_0; \quad (\text{П.48})$$

$$\Psi'_1 = \Psi_1 + \bar{A}\Psi_0; \quad (\text{П.49})$$

$$\Psi'_2 = \Psi_2 + 2\bar{A}\Psi_1 + \bar{A}^2\Psi_0; \quad (\text{П.50})$$

$$\Psi'_3 = \Psi_3 + 3\bar{A}\Psi_2 + 3\bar{A}^2\Psi_1 + \bar{A}^3\Psi_0; \quad (\text{П.51})$$

$$\Psi'_4 = \Psi_4 + 4\bar{A}\Psi_3 + 6\bar{A}^2\Psi_2 + 4\bar{A}^3\Psi_1 + \bar{A}^4\Psi_0. \quad (\text{П.52})$$

$$\varnothing'_0 = G \exp(iH) \varnothing_0; \quad (\text{П.53})$$

$$\varnothing'_1 = \varnothing_1; \quad (\text{П.54})$$

$$\varnothing'_2 = G^{-1} \exp(-iH) \varnothing_2; \quad (\text{П.55})$$

$$\varnothing'_0 = \varnothing_0; \quad (\text{П.56})$$

$$\varnothing'_1 = \varnothing_1 + \bar{A} \varnothing_0; \quad (\text{П.57})$$

$$\varnothing'_2 = \varnothing_2 + 2\bar{A} \varnothing_1 + \bar{A}^2 \varnothing_0. \quad (\text{П.58})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пенроуз Р. Структура пространства — времени. Пер. с англ. М., «Мир», 1972.
2. Newman E. T., Penrose R. «J. Math. Phys.», 1962, v. 3, p. 566; Errata. Ibid., 1963, v. 4, p. 998.
3. Penrose R. «Ann. Phys.», 1960, v. 10, p. 171.
4. Сакс Р. В кн.: Гравитация и топология. Актуальные проблемы. Пер. с англ. М., «Мир», 1966, с. 84.
5. Pirani F. A. E. In: Lectures on General Relativity. Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics, 1964. V. 1. New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1965, p. 249.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., «Наука», 1973.
7. Buchdahl H. A. «Nuovo cimento», 1958, v. 10, p. 96.
8. Buchdahl H. A. Ibid., 1962, v. 25, p. 486.
9. Teukolsky S. A. «Astrophys. J.», 1973, v. 185, p. 635.
10. Page Don N. Preprint OAP-456, 1976; «Phys. Rev. D», 1976, v. 14, p. 1509.
11. Geroch R., Held A., Penrose R. «J. Math. Phys.», 1973, v. 7, p. 874.
12. Breuer R. A. «Lecture notes in physics», 1975, v. 44.
13. Robinson I., Trautman A. «Phys. Rev. Lett.», 1960, v. 4, p. 431.
14. Sachs R. «Proc. Roy. Soc. A», 1961, v. 264, p. 309.
15. Jordan P., Ehlers J., Sachs R. «Acad. Wiss. Litt. Mainz, Abh. Math.—Nat.», 1961, Kl. N1 (Mainz 2).
16. Penrose R. In: Perspectives in Geometry and Relativity. Bloomington, Indiana University Press, 1966.
17. Khan K. A., Penrose R. «Nature», 1971, v. 229, p. 185.
18. Szekeres P. «J. Math. Phys.», 1972, v. 13, p. 286.
19. Griffiths J. B. «Ann. Phys.», 1976, v. 102, p. 388.
20. Сбытов Ю. Г. «ЖЭТФ», 1976, т. 71, с. 2001.
21. Петров А. З. «Уч. зап. Казанск. гос. ун-та», 1954, т. 114, с. 55.
22. Петров А. З. «Докл. АН СССР. Сер. физ.», 1951, т. 81, с. 149.
23. Петров А. З. Там же, 1955, т. 105, с. 905.
24. Петров А. З. «УМН», 1956, т. 11, с. 70.
25. Debever R. «Compt. rend. Acad. sci. colon.», 1959, v. 249, p. 1324.
26. Sachs R. «Proc. Roy. Soc. A», 1962, v. 265, p. 463.
27. Захаров В. Д. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. М., «Наука», 1972.
28. Synge J. L. «Univ. of Toronto Studies in Appl. Math. Sec.», 1935, v. 1, p. 1.
29. Ruse H. S. «Proc. London Math. Soc.», 1936, v. 41, p. 302.
30. Debnay G. C., Zund J. D. «Tensor», 1971, v. 22, p. 333.
31. Sachs R. K. «Proc. Roy. Soc. A», 1962, v. 270, p. 103.
32. Sachs R. K. In: Recent Developments in General Relativity. London, PWN — Polish Scientific Publishers, Warsaw and Pergamon Press, 1962.
33. Bondi H., van der Burg M., Metzner A. «Proc. Roy. Soc. A», 1962, v. 269, p. 21.
34. Janis A. I., Newman E. T. «J. Math. Phys.», 1965, v. 6, p. 902.
35. Kozarzewski B. «Acta phys. polon.», 1965, v. 27, p. 775.
36. Hawking S. W. «J. Math. Phys.», 1968, v. 9, p. 598.
37. Stachel J. «Phys. Rev.», 1969, v. 179, p. 1251.

38. Newman E. T., Unti T.W.J. «J. Math. Phys.», 1962, v. 3, p. 891.
39. Newman E. T., Tamburino L. Ibid., p. 902.
40. Newman E. T., Tamburino L., Unti T.W.J. Ibid., 1963, v. 4, p. 915.
41. Kinnersley W. Ibid., 1969, v. 10, p. 1195.
42. Глушков В. М. и др. «Кибернетика», 1971, № 3, с. 102.
43. Хлебников В. И. Решения уравнений Эйнштейна типа D по Петрову с термодинамическим излучением и нулевым вращением в формализме Ньюмена — Пенроуза. Дипломная работа (физический фак-т МГУ им. М. В. Ломоносова), М., 1974.
44. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Ч. I. Пер. с англ. М., «Мир», 1977.
45. Goldberg G., Sachs R. «Acta phys. Polon. Suppl.», 1962, v. 22, p. 13.
46. Kundt W., Trümper M. «Acad. Wiss. Litt. Mainz, Abh. Math.— Nat.», 1962, Kl. N 12.
47. Robinson I., Schild A. «J. Math. Phys.», 1963, v. 4, p. 484.
48. Ehlers J., Kundt W. In: Gravitation: An Introduction to Current Research. Ed. L. Witten. N.Y., 1962.
49. Talbot C. «Commun. Math. Phys.», 1969, v. 13, p. 45.
50. Lind R. «General Relativity and Gravitation», 1974, v. 5, p. 25.
51. Demianski M., Newman E. T. «Bull. Acad. polon. sci. Cl. III», 1966, v. 14, p. 653.
52. Семенов В. П. «Изв. вузов. Сер. физ.», 1974, № 12, с. 146; 1975, № 2, с. 11.
53. Эйнштейновский сборник, 1973. М., «Наука», 1974.
54. Recami E., Mignani R. «Riv. Nuovo cimento», 1974, v. 4, p. 209.
55. Feldman L. M. «Amer. J. Phys.», 1974, v. 42, p. 179.
56. Gott J. «Nuovo cimento B», 1974, v. 22, p. 49; Preprint OAP-328. Pasadena, 1973.
57. Kinnersley W., Walker M. «Phys. Rev. D.», 1970, v. 2, p. 1359.
58. Carter B. «Phys. Rev. Lett.», 1971, v. 26, p. 331.
59. Hawking S. W. «Commun. Math. Phys.», 1972, v. 25, p. 152.
60. Robinson D. C. «Phys. Rev. Lett.», 1975, v. 34, p. 905.
61. Kerr R. P. Ibid., 1963, v. 11, p. 237.
62. Фролов В. П. «УФН», 1976, т. 118, с. 473.
63. Trim D. W., Wainwright J. «J. Math. Phys.», 1971, v. 12, p. 2494.
64. Trim D. W., Wainwright J. Ibid., 1974, v. 15, p. 535.
65. Tarig N., Tupper B. O. J. «General Relativity and Gravitation», 1975, v. 6, p. 345.
66. Tupper B. O. J. Ibid., 1976, v. 7, p. 479.
67. Lind R. W. «J. Math. Phys.», 1975, v. 16, p. 34.
68. Debnay G. C., Kerr R. P., Schild A. Ibid., 1969, v. 10, p. 1842.
69. Frolov V. P. Preprint PhIAN USSR No. 114. М., 1973; Фролов В. П. «ТМФ», 1974, т. 21, с. 213.
70. Хлебников В. И. «Изв. вузов. Сер. физ.», 1976, № 7, с. 140; В кн.: Тезисы докладов Всесоюзной конференции «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации». Минск, Изд-во Белорусск. гос. ун-та, 1976, с. 216; В кн.: Гравитация и теория относительности, вып. 14—15. Казань, Изд-во Казанск. гос. ун-та, 1978.
71. Хлебников В. И. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ., астроном.», 1976, т. 17, с. 590, 663; «Изв. вузов. Сер. физ.», 1976, № 3, с. 113, 118.
72. Plebanski J. F., Demianski M. Preprint OAP-401. Pasadena, 1975; «Ann. Phys.», 1976, v. 98, p. 98.
73. Plebanski J. F. «Ann. Phys.», 1975, v. 90, p. 196.
74. Kinnersley W. Ph. D. Thesis. Pasadena, Cal Inst. Tech., 1969.
75. Carter B. «Commun. Math. Phys.», 1968, v. 10, p. 280.
76. Levi-Civita T. «Atti Accel dei — Lincei, Rendiconti», 1918, v. 27, p. 343.
77. Robinson I., Trautman A. «Proc. Roy. Soc. A», 1962, v. 265, p. 463.

78. Demianski M. «Acta astron. (Polska)», 1973, v. 23, p. 197.
79. Newman E. T. e.a. «J. Math. Phys.», 1965, v. 6, p. 918.
80. Perjes Z. «Commun. Math. Phys.», 1969, v. 12, p. 275.
81. Ernst F. J. «Phys. Rev.», 1968, v. 168, p. 1415.
82. Demianski M. Ph. D. Thesis. University of Warsaw, 1966.
83. Kramer D., Neugebauer G. «Commun. Math. Phys.», 1968, v. 10, p. 132.
84. Robinson I., Robinson J., Zund J. D. «J. Math. Mech.», 1969, v. 18, p. 881.
85. Brill D. «Phys. Rev.», 1964, v. 133, p. 845.
86. Demianski M. «Phys. Lett. A», 1972, v. 42, p. 157.
87. Kottler F. «Ann. Physik», 1918, Bd. 4, S. 56.
88. Reissner H. «Ann. Physik», 1916, Bd 50, S. 106.
89. Taub A. «Ann. Math.», 1951, v. 53, p. 472.
90. Bertotti B. «Phys. Rev.», 1959, v. 116, p. 1331.
91. Robinson I. «Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III», 1959, v. 7, p. 351.
92. De Sitter W. «Mon. Not. RAS», 1917, v. 78, p. 3.
93. Schwarzschild K. «Sitzungsber. Dtsch. Acad. Wiss. Berlin. Kl. Math. und allgem. Naturwiss.», 1916, Bd 7, S 189.
94. Isaacson R. A. «Phys. Rev.», 1968, v. 166, p. 1263, 1272.
95. Whitham G. B. «Studies in Appl. Math.», 1971, v. 7.
96. MacCallum M. A. H., Taub A. H. «Commun. Math. Phys.», 1973, v. 30, p. 153.
97. Vaidya P. C. «Phys. Rev.», 1951, v. 83, p. 10.
98. Vaidya P. C. «Proc. Indian Acad. Sci. A», 1951, v. 33, p. 264.
99. Vaidya P. C. «Nature», 1953, v. 171, p. 260.
100. Lindquist R. W., Schwartz R. A., Misner C. W. «Phys. Rev. B», 1965, v. 137, p. 1364.
101. Plebanski J. F., Stachel J. «J. Math. Phys.», 1968, v. 9, p. 269.
102. Kinnorsley W. «Phys. Rev.», 1969, v. 186, p. 1335.
103. Frolov V. P., Khlebnikov V. I. Preprint PhIAN USSR No. 27. М., 1975; Фролов В. П., Хлебников В. И. В кн.: Тезисы докладов Всесоюзной конференции «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации». Минск, Изд-во Белорусск. гос. ун-та, 1976, с. 94; В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 8. М., Атомиздат, 1977, с. 22.
104. Bonnor W. B., Vaidya P. C. In: Studies in Relativity. Papers in honour of J. L. Synge. Ed. L. Raifeartaigh. Oxford, Clarendon Press, 1972, p. 119.
105. Хлебников В. И. Препринт ИПМ АН СССР № 2. М., 1977; В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 9. М., Атомиздат, 1978, с. 116.
106. Press W. H., Teukolsky S. A. «Astrophys. J.», 1973, v. 185, p. 649.
107. Teukolsky S. A., Press W. H. Ibid., 1974, v. 193, p. 443.
108. Teukolsky S. A., Press W. H. «Nature», 1972, v. 238, p. 211.
109. Press W. H. «Astrophys. J.», 1972, v. 175, p. 243.
110. Hawking S. W., Hartle J. B. «Commun. Math. Phys.», 1973, v. 27, p. 293.
111. Hartle J. B. «Phys. Rev. D», 1973, v. 8, p. 1010.
112. Старобинский А. А., Чурилов С. М. «ЖЭТФ», 1973, т. 65, с. 3.
113. Wald R. M. «J. Math. Phys.», 1973, v. 14, p. 1453.
114. Hartle J. B. «Phys. Rev. D», 1974, v. 9, p. 2749.
115. Chrzanowski P. L. «Phys. Rev. D», 1976, v. 13, p. 806.
116. Яковлев Д. Г. «ЖЭТФ», 1975, т. 68, с. 369.
117. Bardeen J. M., Press W. H., Teukolsky S. A. «Astrophys. J.», 1972, v. 178, p. 347.
118. Фролов В. П. Препринт ФИАН СССР № 49. М., 1975; «ТМФ», 1976, т. 27, с. 337.
119. Тернов И. М. и др. «ЖЭТФ», 1975, т. 68, с. 377.
120. Старобинский А. А. «ЖЭТФ», 1973, т. 64, с. 48.
121. Алексеев Г. А. «Излучение и распространение волн в сильных полях тяготения». Канд. дис. М., Изд-во МГУ, 1976.

122. Chitre D. M. «Phys. Rev. D», 1976, v. 13, p. 2713.
123. Lee C. H. «J. Math. Phys.», 1976, v. 17, p. 1226.
124. Алексеев Г. А. В кн.: Тезисы докладов IV Всесоюзной конференции «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации». Минск, Изд-во Белорусск. гос. ун-та, 1976.
125. Сибгатуллин Н. Р. «ЖЭТФ», 1974, т. 66, с. 1187.
126. Динареев О. Ю., Сибгатуллин Н. Р. «ЖЭТФ», 1977, т. 72, с. 1231.
127. Chitre D. V., Price R. H., Sandberg B. D. «Phys. Rev. Lett.», 1973, v. 31, p. 1018.
128. Regge T., Wheeler J. A. «Phys. Rev.», 1957, v. 108, p. 1063.
129. Zerilli F. J. «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 24, p. 737.
130. Алексеев Г. А., Сибгатуллин Н. Р. «ИММ», 1974, т. 38, с. 1122.
131. Сибгатуллин Н. Р., Алексеев Г. А. «ЖЭТФ», 1974, т. 67, с. 1233.
132. Алексеев Г. А. «Докл. АН СССР. Сер. физ.», 1975, т. 222, с. 312.
133. Герценштейн М. Е. «ЖЭТФ», 1961, т. 41, с. 113.
134. Маслов В. П. Операторные методы. М., «Наука», 1973.
135. Newman E. T., Tamburino L. A. «J. Math. Phys.», 1961, v. 2, p. 667.
136. Newman E. T., Penrose R. Ibid., 1966, v. 7, p. 863.
137. Goldberg J. N. e.a. Ibid., 1967, v. 8, p. 2155.
138. Held A., Newman E. T., Posadas R. Ibid., 1970, v. 11, p. 3145.
139. Хлебников В. И. Препринт ИПМ АН СССР № 94, М., 1977; «ТМФ», 1978, т. 35, № 3.
140. Khlebnikov V. I. In: Proc. of the 8th Intern. Conf. on General Relativity and Gravitation. Waterloo, University of Waterloo, 1977, p. 211.
141. Vaidya P. C. In: Ondes et Radiations Gravitationnelles. Colloques Internationaux du Centre de la Recherche Scientifique, Institut Henri Poincaré, 18—22 Juin, 1973, Paris, Ed. du CNRS, 1974, N 220, p. 379.
142. Kerr R. P., Schild A. In: Atti Conv. Relativita Generale probl. energia e onde gravitaz, Firenze, 1965, p. 222.
143. Newman E. T., Posadas R. «Phys. Rev.», 1969, v. 187, p. 1784.
144. Robinson I., Robinson J. R. «Intern. J. Theor. Phys.», 1969, v. 2, p. 231.
145. Robinson I., Schild A., Strauss H. Ibid., 1969, v. 2, p. 243.
146. Zund J. «Nuovo Cimento Lett.», 1973, v. 7, p. 233.
147. Lind R. W. «J. Math. Phys.», 1975, v. 16, p. 39.
148. Lind R. W., Newman E. T. Ibid., 1974, v. 15, p. 1103.
149. Tarig N., Tupper V. O. J. Ibid., 1974, v. 15, p. 2232.
150. McLenaghan R. G., Tarig N., Tupper V. O. J. Ibid., 1975, v. 16, p. 829.
151. Хлебников В. И., Шелковенко А. Э. В кн.: Тезисы докладов IV Всесоюзной конференции «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации». Минск, Изд-во Белорусск. гос. ун-та, 1976, с. 218.
152. Хлебников В. И., Шелковенко А. Э. «Изв. вузов. Сер. физ.», 1976, № 7, с. 148.
153. Unti T. W. J., Torrence R. J. «J. Math. Phys.», 1966, v. 7, p. 535.