

ТЕОРИЯ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ И ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ БЫСТРЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В КРИСТАЛЛАХ

А. И. Ахиезер, В. Ф. Болдышев, Н. Ф. Шульга
Харьковский Физико-технический институт, Харьков

В работе излагается теория упругого рассеяния и тормозного излучения быстрых частиц в периодических структурах. Особое внимание уделяется выявлению интерференционных и когерентных эффектов. Исследование рассеяния и излучения проводится как в рамках борновского приближения, так и в рамках квазиклассического приближения и классической электродинамики. Специально рассматривается излучение при каналировании.

A theory of elastic scattering and brehmsstrahlung of fast particles in periodic structures is presented. Special attention is paid to interference and coherent effects. Scattering and brehmsstrahlung are studied both in the framework of Born approximation and classical electrodynamics. Brehmsstrahlung of channeled particles is considered specially.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема взаимодействия быстрых заряженных частиц с веществом всегда привлекала к себе большое внимание как теоретиков, так и экспериментаторов. Особое место в этой проблеме занимает взаимодействие быстрых заряженных частиц с кристаллами, так как периодическая структура кристаллов может приводить к возникновению интерференционных и когерентных эффектов. Благодаря этим эффектам тормозные фотоны, возникающие при прохождении частиц через кристалл, обладают высокой степенью монохроматичности и оказываются линейно-поляризованными. Этим определяется практическая важность проблемы взаимодействия релятивистских электронов с кристаллами для физики высоких энергий. Но имеется еще и другая, чисто теоретическая, сторона вопроса. Дело в том, что, хотя взаимодействие быстрого электрона с отдельными атомами кристалла определяется параметром $Ze^2/\hbar v$ ($Z|e|$ — заряд ядра, v — скорость частицы), и поэтому, казалось бы, при малых Z допустимо использование первого борновского приближения квантовой теории возмущений, влияние большого числа атомов кристалла, с которыми происходит взаимодействие

электрона, приводит к тому, что первое борновское приближение быстро становится неприменимым. Таким образом, возникает вопрос о более точном по сравнению с борновским приближением исследовании взаимодействия быстрой заряженной частицы с кристаллической решеткой. Существенным оказывается при этом тот факт, что быстрая частица эффективно взаимодействует со всеми атомами, которые находятся в зоне формирования излучения. Продольные размеры этой зоны определяются величиной $l \sim 2\varepsilon\varepsilon'/m^2\omega$, где ε — энергия налетающей частицы; m — ее масса; ω — частота фотона, $\varepsilon' = \varepsilon - \hbar\omega$. (Здесь и далее мы пользуемся системой единиц, в которой скорость света $c = 1$.) Если в этой зоне находится N_l атомов, то эффективным параметром взаимодействия оказывается не $Ze^2/\hbar v$, а $N_l Ze^2/\hbar v$, последняя же величина может принимать, вообще говоря, произвольные значения, так что взаимодействие частицы с кристаллом может быть и очень слабым, и очень сильным. При этом будет существенно меняться характер упругого рассеяния и тормозного излучения.

В настоящей статье излагается теория упругого и неупругого взаимодействия быстрых заряженных частиц с кристаллической средой и выясняется, как меняется картина рассеяния и излучения в зависимости от эффективного параметра взаимодействия. Одновременно выясняется место, которое занимают результаты, полученные в рамках борновского приближения, в общей картине рассеяния и излучения релятивистских частиц.

Так как частицы предполагаются быстрыми, то можно пользоваться квазиклассическим приближением, которое позволяет получить как результаты борновского приближения, так и результаты классической теории рассеяния и излучения.

Сначала мы излагаем теорию упругого рассеяния быстрых частиц в квазиклассическом приближении, затем классическую теорию излучения и квазиклассическую теорию тормозного излучения электрона на простейшей периодической структуре — линейной цепочке атомов. Это позволяет установить все характерные особенности зависимости сечений рассеяния и излучения от величины эффективного параметра взаимодействия и энергии частицы. Далее описывается теория когерентного излучения релятивистских электронов (и позитронов) в монокристаллах. Заканчивается статья рассмотрением тормозного излучения быстрой частицы в условиях каналирования.

1. УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Волновая функция частицы в квазиклассическом приближении во внешнем поле $U(\mathbf{r})$ имеет вид [1]

$$\Psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \exp(iS(\mathbf{r})/\hbar), \quad (1)$$

где $S(\mathbf{r})$ — классическое действие, определяемое уравнением

$$(\nabla S)^2 = [\varepsilon - U(\mathbf{r})]^2 - m^2, \quad (2)$$

и $f(\mathbf{r})$ — биспинор, удовлетворяющий уравнению

$$2(\nabla S)(\nabla f) + (\nabla^2 S)f + \gamma_0 \gamma (\nabla U)f = i\hbar \nabla^2 f. \quad (3)$$

Для быстрых частиц S можно записать в виде $S = \mathbf{p}\mathbf{r} + \chi(\mathbf{r})$, где \mathbf{p} — импульс налетающей частицы, и искать χ и f в виде рядов по обратным степеням импульса [2]:

$$\left. \begin{aligned} \chi(\mathbf{r}) &= \chi_0(\mathbf{r}) + \chi_1(\mathbf{r}) + \dots; \\ f(\mathbf{r}) &= f_0 + f_1(\mathbf{r}) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Решая уравнения (2) и (3), находим

$$\left. \begin{aligned} \chi_0(\mathbf{r}) &= \frac{(-1)}{v} \int_{-\infty}^z U(\rho, z') dz'; \\ \chi_1(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{2p} \int_{-\infty}^z [(\nabla \chi_0)^2 - U^2] dz'; \\ f_0 &= u; \\ f_1(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{2p} \int_{-\infty}^z [\nabla^2 \chi_0 + \gamma_0 \gamma (\nabla U)] u dz', \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где ρ — прицельный параметр (ось z параллельна импульсу частицы \mathbf{p}); $v = p/\varepsilon$; u — биспинор свободного электрона и γ_0, γ — дираковские матрицы; $\gamma_0^2 = \gamma_0$; $\gamma^* = -\gamma$. [Предполагается, что при $z \rightarrow -\infty$ волновая функция имеет вид плоской волны $\psi(\mathbf{r}) \rightarrow u \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar)$.]

Зная волновую функцию частицы $\psi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar)$, можно найти амплитуду ее упругого рассеяния $a(\mathbf{q})$ в поле $U(\mathbf{r})$:

$$a(\mathbf{q}) = \frac{-1}{4\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}/\hbar) U(\mathbf{r}) \bar{u}' \gamma_0 \varphi(\mathbf{r}), \quad (6)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ — переданный импульс и u' — биспинор рассеянной частицы ($\bar{u}' = u'^* \gamma_0$). Дифференциальное сечение упругого рассеяния частицы $d\sigma_e(\mathbf{q})$ в элемент телесного угла dO' связано с $a(\mathbf{q})$ соотношением

$$d\sigma_e(\mathbf{q}) = |a(\mathbf{q})|^2 dO'. \quad (7)$$

Интегральное сечение упругого рассеяния согласно оптической теореме равно

$$\sigma_e = 4\pi (\hbar/p) \operatorname{Im} a(\mathbf{q}) \Big|_{\mathbf{q}=0}. \quad (8)$$

Используя квазиклассическую волновую функцию, можно получить следующее выражение для амплитуды упругого рассеяния [2, 3]:

$$a(\mathbf{q}_\perp) = i\bar{u}'\gamma_0 u \frac{v}{4\pi\hbar} \int d\rho \exp(i\mathbf{q}_\perp \rho/\hbar) \times \\ \times \{1 - \exp[i(\chi_0(\rho) + \chi_1(\rho) + \dots)/\hbar]\}, \quad (9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \chi_0(\rho) &= -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} U(\rho, z) dz; \\ \chi_1(\rho) &= \frac{1}{pv^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[z(\nabla_\perp U) \left(\nabla_\perp \int_{-\infty}^z U(\rho, z') dz' \right) - \frac{1-v^2}{2} U^2 \right] dz \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(\mathbf{q}_\perp — проекция вектора \mathbf{q} на плоскость, перпендикулярную оси z и $\nabla_\perp = \partial/\partial\rho$).

Для аксиально-симметричного потенциала амплитуда упругого рассеяния (9) и полное сечение (8) равны:

$$a(\mathbf{q}_\perp) = i\bar{u}'\gamma_0 u \frac{v}{2\hbar} \int_0^\infty \rho d\rho J_0(\mathbf{q}_\perp \rho/\hbar) \{1 - \exp[i(\chi_0 + \chi_1 + \dots)/\hbar]\}; \quad (11)$$

$$\sigma_e = 4\pi \operatorname{Re} \int_0^\infty \rho d\rho \{1 - \exp[i(\chi_0 + \chi_1 + \dots)/\hbar]\}. \quad (12)$$

Формула (9) для амплитуды рассеяния справедлива при выполнении условий

$$|\bar{U}|/pv \ll 1; z_{\text{эф}} |\chi_0|/p\rho^2 \ll 1; \hbar z_{\text{эф}}/p\rho^2 \ll 1, \quad (13)$$

где $z_{\text{эф}}$ — интервал изменения координаты z , в котором на частицу действует внешняя сила. Например, в случае рассеяния на отдельном атоме $z_{\text{эф}}$ по порядку величины равно радиусу экранирования R^* .

Подчеркнем, что условия (13) выполняются с тем большей точностью, чем больше энергия частицы.

Величина χ_0 , входящая в (9), может быть произвольной, но особенно интересны два предельных случая: $|\chi_0| \ll \hbar$

*Для рассеяния на отдельном атоме при $|\chi_0| \leq \hbar$ Шиффом [4] было получено ограничение на углы рассеяния θ_e , для которых справедливо разложение по обратным степеням импульса частицы $\theta_e < (pR)^{-1/2}$. Легко видеть, что это ограничение содержится в неравенствах (13), поскольку в рассматриваемом случае $z_{\text{эф}} \sim R$ и $\rho \sim \hbar/p\theta_e$.

а $|\chi_0| \gg \hbar$; первый — соответствует борновскому приближению, а второй — классической механике. В первом случае, согласно (11),

$$d\sigma_e(q_\perp) = \frac{2\pi}{\hbar^4} \left| \int_0^\infty \rho d\rho J_0(q_\perp \rho / \hbar) (\chi_0(\rho) + \chi_1(\rho) + \dots) \right|^2 q_\perp dq_\perp. \quad (14)$$

Пренебрегая здесь величиной χ_1 , получаем сечение упругого рассеяния в первом борновском приближении. Если учесть величину χ_1 , но пренебречь χ_2 , то получим сечение упругого рассеяния с учетом второго борновского приближения.

В предельном случае $|\chi_0| \gg \hbar$ и $|\chi_1| \gg \hbar$ (но $|\chi_0| \gg |\chi_1|$), дифференциальное сечение упругого рассеяния (7) на углы ϑ_e , удовлетворяющие условию $p\vartheta_e\rho(\vartheta_e) \gg \hbar$ (т. е. для $q_\perp\rho \gg \hbar$), совпадает с результатом классической теории рассеяния:

$$d\sigma_e(\vartheta_e) = 2\pi\rho(\vartheta_e) |d\rho(\vartheta_e)/d\vartheta_e| d\vartheta_e, \quad (15)$$

где $\rho(\vartheta_e)$ — классический прицельный параметр как функция угла рассеяния. Действительно, если $|\chi_0| \gg \hbar$, $|\chi_1| \gg \hbar$ и $q_\perp\rho \gg \hbar$, то интеграл, определяющий амплитуду упругого рассеяния (11), может быть вычислен с помощью метода перевала [5]:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \rho d\rho J_0(q_\perp\rho) \{1 - \exp[i(\chi_0(\rho) + \chi_1(\rho) + \dots)/\hbar]\} \approx \\ & \approx \hbar \sqrt{\left| \frac{\tilde{\rho}}{q_\perp} \left| \frac{d\tilde{\rho}}{dq_\perp} \right| \right|} \exp[i(-q_\perp\tilde{\rho} + \chi_0(\tilde{\rho}) + \chi_1(\tilde{\rho}) + \dots)/\hbar], \end{aligned}$$

где функция $\tilde{\rho} = \rho(q_\perp)$ определяется из соотношения

$$q_\perp = \left| \frac{d}{d\rho} (\chi_0(\rho) + \chi_1(\rho) + \dots) \right|. \quad (16)$$

Подставляя это выражение в (7), получаем после усреднения по спиновым состояниям электрона формулу (15).

Таким образом, квазиклассическая амплитуда рассеяния (11) допускает предельный переход как в область применимости борновского приближения, так и в область применимости классической механики.

Если в (9) сохранить $\chi_0(\rho)$, но пренебречь $\chi_1(\rho)$, то можно получить амплитуду упругого рассеяния в эйкональном приближении [4, 6, 7]:

$$a(q_\perp) = i\bar{u}'\gamma_0 u \frac{v}{4\pi\hbar} \int d\rho \exp(iq\rho/\hbar) \{1 - \exp(i\chi_0(\rho)/\hbar)\}. \quad (17)$$

Мы видим, что $\chi_1(\rho)$ определяет поправку к приближению эйконала, пропорциональную p^{-1} .

В заключение этого раздела отметим, что формула (9) для амплитуды упругого рассеяния, полученная с использованием квазиклассических волновых функций, охватывает известные результаты других авторов, получивших амплитуду рассеяния другими методами [8—14, 16]. Так в нерелятивистском приближении при $|\chi_1| \ll \hbar$ поправка к эйкональной амплитуде рассеяния бесспиновой частицы была получена в работе Ву [8] с помощью предложенного Шиффом [4] метода суммирования борновского ряда для амплитуды рассеяния. Результат этой работы совпадает с формулой (9), если в ней разложить экспоненту $\exp[i\chi_1(\rho)/\hbar]$, отбросить в $\chi_1(\rho)$ члены порядка v/c и заменить $\bar{u}'\gamma_0 u$ на 2ε (эта замена соответствует переходу к бесспиновой частице).

В работах Абарбанела и Итжиксона [9] и Сугара и Бланкенбеклера [10] был развит метод эйконального разложения амплитуды упругого рассеяния. Этот метод затем был использован Валлесом [11—13] для нахождения амплитуды рассеяния быстрой бесспиновой частицы. Результат Валлеса с точностью до членов порядка p^{-2} совпадает с формулой (9), если в ней заменить $\bar{u}'\gamma_0 u$ на 2ε .

Бэкер [14, 15] нашел эйкональную волновую функцию быстрой нерелятивистской бесспиновой частицы во внешнем центрально-симметричном поле с поправкой порядка p^{-1} путем решения интегрального уравнения. С помощью этой волновой функции он получил амплитуду упругого рассеяния. Результат Бэкера совпадает с формулой (9), если в последней в выражении для $\chi_1(\rho)$ отбросить члены v/c , воспользоваться центральной симметрией потенциала и заменить $\bar{u}'\gamma_0 u$ на 2ε .

Амплитуда упругого рассеяния (9) с учетом $\chi_1(\rho)$ была получена недавно методом операторного квазиклассического приближения, развитого в работах В. Н. Байера, В. М. Каткова, В. С. Фадына [16, 17].

2. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ БЫСТРОЙ ЧАСТИЦЫ

Когерентные эффекты при излучении в периодических структурах описываются уже классической теорией излучения, поэтому мы изложим здесь результаты классической теории излучения быстрой заряженной частицы, движущейся в произвольном поле.

Энергия, излучаемая быстрой частицей, движущейся по траектории $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, в интервал частот $d\omega$ в элемент телесного угла dO , определяется в классической электродинамике формулой [18]:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \frac{e^2}{(2\pi)^2} |\mathbf{k} \times \mathbf{l}_{\mathbf{k}}|^2 dO d\omega, \quad (18)$$

где

$$I_{\mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{v}(t) \exp [i (\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r}(t))]; \quad (19)$$

$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$; \mathbf{k} — волновой вектор электромагнитной волны.

Если на частицу действует внешнее электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, то скорость частицы $\mathbf{v}(t)$ определяется уравнением

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}(t)}{\sqrt{1-v^2(t)}} = e\mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (20)$$

В интересующем нас случае больших энергий можно искать решение этого уравнения в виде разложения по обратным степеням энергии налетающей частицы ε [19, 20]:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1(t) + \mathbf{v}_2(t) + \dots, \quad (21)$$

где \mathbf{v}_0 — скорость налетающей частицы (т. е. скорость частицы при $t \rightarrow -\infty$) и $v_n(t) \sim \varepsilon^{-n}$. Чтобы найти отдельные члены этого разложения, удобно исходить из формального решения уравнения (20)

$$\mathbf{v}(t) = \left(\mathbf{v}_0 + \varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^t e\mathbf{E}(\mathbf{r}') dt' \right) \left(1 + \varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^t e\mathbf{v}(t') \mathbf{E}(\mathbf{r}') dt' \right)^{-1}, \quad (22)$$

где $\mathbf{r}' = \mathbf{r}(t')$ (при выводе (22) использовано соотношение $d[m(1-v^2)^{-1/2}]/dt = e\mathbf{E}\mathbf{v}$). Разложению (21) для скорости отвечает разложение радиус-вектора частицы

$$\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}_0 t + \int_{-\infty}^t \mathbf{v}_1(t') dt' + \dots,$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — прицельный параметр. Легко убедиться, что первые члены разложения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_1(t) &= \varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^t e(\mathbf{E}' - \mathbf{v}_0(\mathbf{v}_0 \mathbf{E}')) dt'; \\ \mathbf{v}_2(t) &= -\frac{1}{2} \mathbf{v}_0 (\mathbf{v}_{1\perp})^2 - \mathbf{v}_{1\perp} \varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^t e \mathbf{v}_0 \mathbf{E}' dt' + \\ &+ \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' (\mathbf{v}_{1\perp}(t'') \nabla) \dot{\mathbf{v}}_{1\perp}(t'), \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где $E' = E(\rho + v_0 t)$; $v_{1\perp}$ — компонента скорости $v_1(t)$, перпендикулярная v_0 .

Определив члены разложения (21), можно вычислить величину I_k , предварительно представив ее в виде

$$I_k = i \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp [i(\omega t - k r(t))] \frac{d}{dt} \left(\frac{v(t)}{\omega - kv(t)} \right). \quad (24)$$

Эта форма записи I_k имеет то преимущество, что в подынтегральное выражение входит ускорение \dot{v} , непосредственно определяемое электрическим полем $E(r)$. Подставляя (21) в (24), находим

$$I_k = i \exp(-ik\rho) \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp \left[i(\omega - kv_0)t - ik \int_{-\infty}^t v_1 dt' - \dots \right] \times \\ \times \frac{d}{dt} \left(\frac{v_0 + v_1(t) + \dots}{\omega - kv_0 - kv_1(t) - \dots} \right). \quad (25)$$

Если энергия частицы велика, то излучение и рассеяние происходят под малыми углами. При этом угол рассеяния определяется формулой $\sin \vartheta_e = |v_{\perp}(\infty)|/v$. Для малых углов ($\vartheta_e \ll 1$), используя (22), легко получить следующее выражение для угла рассеяния:

$$\vartheta_e = \vartheta_e(\rho) = \rho^{-1} |\nabla_{\perp}(\chi_0(\rho) + \chi_1(\rho) + \dots)|, \quad (26)$$

где функции $\chi_0(\rho)$ и $\chi_1(\rho)$ определяются формулами (10); $z = v_0 t$; $\nabla_{\perp} = \partial/\partial \rho$; $eE = \nabla U$. Что касается угла излучения ϑ_k , то по порядку величины $\vartheta_k \sim m/\varepsilon$.

Если угол рассеяния мал по сравнению с углом излучения ($\vartheta_e \ll \vartheta_k$), то $|kv_1| \ll (\omega - kv_0)$ и

$$I_k = \frac{i}{\omega - kv_0} \exp(-ik\rho) (W + v_0 \frac{kW}{\omega - kv_0}) \left[1 + O\left(\frac{\vartheta_e}{\vartheta_k}\right) \right], \quad (27)$$

где

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp [i(\omega - kv_0)t] (\dot{v}_1(t) + \dot{v}_2(t) + \dots).$$

Подстановка этого выражения в (18) дает

$$d\mathcal{E}_k = \frac{e^2}{(2\pi)} \frac{\omega^2}{(\omega - kv)^2} \left[W_{\perp}^2 - (1 - v_0^2) \frac{(kW_{\perp})^2}{(\omega - kv_0)^2} \right] dO d\omega. \quad (28)$$

Введем теперь эффективное излучение dI_k [18]:

$$\frac{dI_k}{d\omega} = \int \frac{d\mathcal{E}_k}{d\omega} d\rho. \quad (29)$$

Раскладывая потенциал $U(\mathbf{r})$ в интеграл Фурье

$$U(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3} \int U(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) d\mathbf{q} \quad (30)$$

и пренебрегая слагаемым $\dot{\mathbf{v}}_2$, получаем

$$\frac{dI_{\mathbf{k}}}{d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{\delta'}{m^2} \int dq_{\parallel} dq_{\perp} \frac{q_{\perp}^2}{q_{\parallel}^2} \left[1 - 2 \frac{\delta'}{q_{\parallel}} \left(1 - \frac{\delta'}{q_{\parallel}} \right) \right] \times \\ \times |U(\mathbf{q})|^2 [1 + O(v_e/v_k, v_2/v_1)], \quad (31)$$

где $\delta' = \omega m^2 / 2e^2$; q_{\parallel} и q_{\perp} — компоненты вектора \mathbf{q} параллельная и перпендикулярная \mathbf{v}_0 , причем $q_{\parallel} = (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0) \geq \delta'$.

Отметим, что величина δ' , входящая в (31), имеет глубокий физический смысл. Именно, она характеризует размеры области, в которой формируется излучение. Действительно, поскольку скорость электрона близка к скорости света, то после излучения фотона при столкновении электрона с атомом электрон и фотон некоторое время движутся вместе и их нельзя рассматривать как свободные частицы [21]. Продольный размер l пространственной области, на котором электрон «отстанет» от фотона и обе частицы будут вести себя как свободные, можно назвать зоной формирования излучения. Но продольные размеры этой зоны порядка $(\delta')^{-1}$. В самом деле, продольные «размеры» электрона порядка $r_0 (m/e)$ ($r_0 \sim e^2/m$), а «размеры» фотона k^{-1} , поэтому электрон отстанет от фотона настолько, что пространственные области $r_0 (m/e)$ и k^{-1} не будут перекрываться за время $\Delta t = (r_0 m/e + k^{-1})/(c - v)$. За это время электрон пройдет путь $l = v\Delta t$. Таким образом, действительно, $l \sim (\delta')^{-1}$.

Эффективное излучение можно определить также и в том случае, когда соотношение между ϑ_e и ϑ_k произвольно, но выполнено неравенство

$$z_{\text{эф}} \ll (\delta')^{-1}, \quad (32)$$

где $z_{\text{эф}}$ — эффективная длина вдоль \mathbf{v}_0 , на которой частица испытывает действие внешнего поля. При выполнении неравенства (32) экспонента в подынтегральном выражении (25) может быть заменена единицей, после чего получим

$$I_{\mathbf{k}} = i \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) \left(\frac{\mathbf{v}(\infty)}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}(\infty)} - \frac{\mathbf{v}_0}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0} \right) [1 + O(z_{\text{эф}}\delta')] \quad (33)$$

и, следовательно,

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \frac{e^2}{(2\pi)^2} \left| \mathbf{k} \times \left(\frac{\mathbf{v}(\infty)}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}(\infty)} - \frac{\mathbf{v}_0}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0} \right) \right|^2 dO d\omega. \quad (34)$$

Эффективное излучение после интегрирования по dO принимает вид

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = \omega \int \frac{dW^{cl}(\rho)}{d\omega_j} d\rho, \quad (35)$$

где

$$\frac{dW^{cl}(\rho)}{d\omega} = \frac{2e^2}{\pi\omega} \left[\frac{2\xi^2 + 1}{\xi \sqrt{\xi^2 + 1}} \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) - 1 \right];$$

$\xi = \varepsilon\vartheta_e(\rho)/2m$; $\vartheta_e(\rho)$ определяется формулой (26).

Формула (35) справедлива при выполнении условия (32). Кроме того, должно быть справедливо разложение (21), а для этого должны выполняться неравенства

$$\bar{U}/pv \ll 1; \quad \frac{z_{\text{эф}}\chi_0}{p\rho^2} \ll 1, \quad (36)$$

где \bar{U} — среднее значение потенциальной энергии.

Второе из этих неравенств может быть представлено в виде

$$\Delta\rho \ll \rho,$$

где $\Delta\rho \sim z_{\text{эф}}\vartheta_e$ и $\vartheta_e \sim \chi_0/p\rho$. Таким образом, второе из неравенств означает, что прицельный параметр должен мало изменяться в области действия сил.

3. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ БЫСТРОЙ ЧАСТИЦЫ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Эффективное поперечное сечение излучения фотона электроном во внешнем поле в низшем порядке теории возмущений по взаимодействию с излучением определяется выражением [1]

$$d\sigma = \frac{e^2}{4(2\pi)^4} \frac{p'}{p} |\mathbf{e}\mathbf{J}|^2 \omega d\omega dO dO', \quad (37)$$

где \mathbf{p} и \mathbf{p}' — начальный и конечный импульсы электрона вдали от рассеивателя; \mathbf{e} — вектор поляризации фотона; \mathbf{J} — ток перехода. Если волновые функции электрона в начальном и конечном состояниях в поле $U(\mathbf{r})$ представить в виде:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar);$$

$$\Psi'(\mathbf{r}) = \varphi'(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{p}'\mathbf{r}/\hbar),$$

то

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} \varphi'(\mathbf{r}) \nabla\varphi(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}/\hbar) \quad (38)$$

и $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}' + \mathbf{k}$ — импульс, переданный внешнему полю.

Дифференциальное сечение тормозного излучения релятивистских частиц (37) можно выразить через компоненты \mathbf{q} [22]:

$$d\sigma(\mathbf{q}, y) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} |\mathbf{eJ}(\mathbf{q})|^2 \frac{i\delta}{m^2} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \frac{d\omega}{\omega} dq'_z d\mathbf{q}_\perp, \quad (39)$$

где $q'_z = (q_z - q_\perp^2/2\varepsilon) \geq \delta$; $\delta = \omega m^2/2\varepsilon\varepsilon'$ и вместо переменной ϑ_h введена переменная y ; $1 \geq y \geq -1$, определяемая соотношением

$$\left(\frac{\varepsilon\vartheta_h}{m}\right)^2 = \left(\frac{q'_z}{\delta} - 1 + \frac{q_\perp^2}{m^2}\right) + y \frac{2q_\perp}{m} \sqrt{\frac{q'_z}{\delta} - 1}. \quad (40)$$

Используя в качестве $\Psi(\mathbf{r})$ и $\Psi'(\mathbf{r})$ волновые функции (1) и (4), можно найти сечение излучения в квазиклассическом приближении. Для исследования тормозного излучения в кристаллах особый интерес представляют два случая, когда $\vartheta_e \ll \vartheta_h$ и соотношение между $z_{\text{эф}}$ и δ^{-1} произвольно и когда $z_{\text{эф}} \ll \delta^{-1}$ и соотношение между ϑ_e и ϑ_h произвольно. При этом следует иметь в виду, что борновское приближение может как выполняться, так и не выполняться.

Рассмотрим сначала тот случай, когда $\vartheta_e \ll \vartheta_h$ и соотношение между $z_{\text{эф}}$ и δ^{-1} произвольно [3, 22]. Тогда в первом борновском приближении сечение излучения имеет вид

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{\delta}{m^2} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \int dq'_z d\mathbf{q}_\perp \frac{q_\perp^2}{q_z'^2} \times \\ &\times \left[1 + \frac{(\hbar\omega)^2}{2\varepsilon\varepsilon'} - 2 \frac{\delta}{q'_z} \left(1 - \frac{\delta}{q'_z} \right) \right] \times \\ &\times |U(\mathbf{q})|^2 \frac{d\omega}{\omega} \left[1 + O\left(\frac{\vartheta_e}{\vartheta_h}, \frac{\chi_1}{\chi_0}, \frac{\chi_0}{\hbar}\right) \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Если условие применимости борновского приближения не выполняется (но $\vartheta_e \ll \vartheta_h$), т. е. χ_0 сравнима с \hbar , то для сечения излучения имеет место формула

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{e^2}{\pi} \frac{\delta}{m^2} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \int dq'_z d\mathbf{q}_\perp \frac{q_\perp^2}{q_z'^2} \times \\ &\times \left[1 + \frac{(\hbar\omega)^2}{2\varepsilon\varepsilon'} - 2 \frac{\delta}{q'_z} \left(1 - \frac{\delta}{q'_z} \right) \right] \times \\ &\times |A(\mathbf{q})|^2 \frac{d\omega}{\omega} \left[1 + O\left(\frac{\vartheta_e}{\vartheta_h}, \frac{\chi_1}{\chi_0}\right) \right], \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A(\mathbf{q}) &= \varepsilon_0 q_\perp^{-1} \int_0^\infty \rho d\rho J_1(q_\perp \rho/\hbar) \exp[i(\chi_0 + \chi_1 + \dots)/\hbar] W_\perp(\rho); \\ W_\perp(\rho) &= \varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^\infty dz \exp(iq'_z z) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} U(\rho, z) + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

(При выводе соотношения (42) предполагалось, что потенциал внешнего поля обладает аксиальной симметрией.)

Если область действия внешних сил такова, что наряду с условием $\vartheta_e \ll \vartheta_k$ выполняется также условие $z_{\text{эф}} \ll \delta^{-1}$, то формула (42) существенно упрощается. Полагая в (43) $\exp(iq'_z z) = 1$, получаем

$$d\sigma(\mathbf{q}_\perp) = dw(\mathbf{q}_\perp) d\sigma_e(\mathbf{q}_\perp) [1 + O(z_{\text{эф}}\delta)], \quad (44)$$

где $d\sigma_e(\mathbf{q}_\perp)$ — сечение упругого рассеяния, определяемое формулами (7) и (11), в которых следует заменить $\bar{u}'\gamma_0 u$ на 2ε , и

$$dw(\mathbf{q}_\perp) = \frac{2e^2}{3\pi\hbar} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{(\hbar\omega)^2}{\varepsilon\varepsilon'}\right) \frac{q_\perp^2}{m^2} \frac{d\omega}{\omega}. \quad (45)$$

Мы видим, что при выполнении условия $z_{\text{эф}}\delta \ll 1$ имеет место факторизация сечения излучения как в области малых частот, так и в области частот $\hbar\omega \sim \varepsilon$.

Если же выполняется условие $q_{\text{эф}} \ll m$, где $q_{\text{эф}}$ определяет порядок значения характерных переданных импульсов, то в формуле (44) можно выполнить интегрирование по q_\perp ; в результате чего, используя (13), получим

$$d\sigma = \frac{4e^2}{3m^2\hbar} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \left(1 + \frac{3(\hbar\omega)^2}{4\varepsilon\varepsilon'}\right) \int_0^\infty \rho d\rho |\nabla_\perp (\chi_0 + \chi_1 + \dots)|^2 \frac{d\omega}{\omega}. \quad (46)$$

В этом случае формула для сечения тормозного излучения имеет один и тот же вид независимо от значения параметра χ_0/\hbar , т. е. как в борновском приближении, так и в квазиклассическом приближении и в классическом пределе (при $\hbar\omega \ll \varepsilon$) [19].

До сих пор мы предполагали, что $\vartheta_e \ll \vartheta_k$. Отбросим теперь это предположение, но будем считать, что выполнено условие $z_{\text{эф}}\delta \ll 1$. При этом по-прежнему имеет место факторизация сечения [16, 22]:

$$d\sigma(q_\perp) = dw(q_\perp) d\sigma_e(q_\perp) [1 + O(z_{\text{эф}}\delta)], \quad (47)$$

где $d\sigma_e(q_\perp)$ так же как и в (44) — сечение упругого рассеяния. Но теперь

$$dw(q_\perp) = \frac{2e^2}{\pi\hbar} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} K(q_\perp/2m); \quad (48)$$

$$K(\xi) = \frac{2\xi^2 [1 + (\hbar\omega)^2/2\varepsilon\varepsilon'] + 1}{\xi \sqrt{\xi^2 + 1}} \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) - 1.$$

Заметим, что

$$K(\xi) = (4\xi^2/3) [1 + 3(\hbar\omega)^2/4\varepsilon\varepsilon'], \quad \xi \ll 1; \quad (49)$$

$$K(\xi) = 2 \ln(2\xi) (1 + (\hbar\omega)^2/2\varepsilon\varepsilon'), \quad \xi \gg 1. \quad (50)$$

Для факторизации сечения излучения не существенно соотношение между углами ϑ_e и ϑ_h , важно лишь выполнение условия $z_{\text{эф}} \ll \delta^{-1}$. Следует подчеркнуть, что в формуле (47) отношение χ_0/\hbar может быть произвольным.

Если величина χ_0 очень велика, т. е. $\chi_0 \gg \hbar$ ($\chi_1 \gg \hbar$), то сечение излучения приобретает вид

$$d\sigma = 4e^2 \frac{d\omega}{\hbar\omega} \frac{e'}{\varepsilon} \int_0^\infty \rho d\rho K(\xi) |_{\xi=(2m)^{-1}|\mathbf{v}_\perp(\chi_0+\chi_1+\dots)}.$$

Умножая эту величину на $\hbar\omega$ и считая, что $\hbar\omega \ll \varepsilon$, получаем классическую формулу (35).

4. УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ ЦЕПОЧКОЙ АТОМОВ

В предыдущих разделах была изложена общая теория упругого рассеяния и тормозного излучения быстрых частиц в произвольном внешнем поле. Теперь перейдем к изучению рассеяния и излучения в поле, создаваемом совокупностью атомов. Особенно интересен случай, когда атомы образуют периодическую структуру. Наличие такой структуры может оказать существенное влияние на характер рассеяния и излучения.

Рассмотрим прежде всего упругое рассеяние быстрых электронов линейной цепочкой N атомов, расположенных вдоль оси z на расстояниях a друг от друга. Если $U(\rho, z)$ — потенциальная энергия взаимодействия электрона с одним атомом, то потенциальная энергия взаимодействия электрона с цепочкой из N атомов будет иметь вид

$$U^{(N)}(\rho, z) = \sum_{n=1}^N U(\rho, z - na). \quad (51)$$

Подставив (51) в выражения (10) для χ_0 и χ_1 , получим при $N \gg 1$:

$$\left. \begin{aligned} \chi_0^{(N)} &= N\chi_0; & \chi_1^{(N)} &= \frac{N^3 a}{12p} (\nabla\chi_0)^2; \\ \chi_0 &\equiv \chi_0(\rho) = -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} U(\rho, z) dz. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

(Направление движения налетающей на цепочку частицы совпадает с осью цепочки.) Отсюда по формуле (11) можно найти амплитуду упругого рассеяния электронов цепочкой атомов [2]:

$$a^{(N)}(q_\perp) = i(\bar{u}' \gamma_0 uv / \hbar) \times \\ \times \int_0^\infty \rho d\rho J_0(q_\perp \rho / \hbar) \left\{ 1 - \exp \left[i \frac{N}{\hbar} \left(\chi_0 + \frac{N^2 a}{12p} (\nabla_\perp \chi_0)^2 + \dots \right) \right] \right\}. \quad (53)$$

Это выражение применимо, если выполнены неравенства (13). Для цепочки атомов $z_{эф} \sim Na$ и $\rho_{эф} \sim R$, поэтому условия (13) приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}/pv \ll 1; \quad N^2 a \chi_0 / p R^2 \ll 1; \\ \hbar Na / p R^2 \ll 1, \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

где R — радиус экранирования.

Второе и третье неравенства ограничивают число атомов в цепочке. С увеличением N первым, очевидно, нарушается неравенство $N^2 a \chi_0 / p R^2 \ll 1$. Переписав его в виде $N \chi_0 / p R \ll R / Na$ и заметив, что средний угол рассеяния частицы по порядку величины равен $\bar{\vartheta}_e \sim N \chi_0 / p R$ [см. (67)], придем к выводу, что угол рассеяния должен быть мал по сравнению с R / Na (эту величину можно назвать углом раствора цепочки). Иными словами, выражение для амплитуды рассеяния (53) справедливо, если частица, рассеиваясь, остается в пределах цепочки на всей ее длине. Так как с ростом энергии средний угол рассеяния убывает, то с ростом энергии увеличивается допустимая длина цепочки, для которой справедлива формула (53).

Заметим, что условие применимости борновского приближения для цепочки атомов имеет вид $N \chi_0 \ll \hbar$ ($\chi_0^{(N)} \ll \hbar$), которое при $v \rightarrow C$ не зависит от ϵ . Поэтому при больших ϵ область применимости формулы (53) гораздо шире области применимости борновской амплитуды рассеяния.

Выясним теперь характерные особенности поведения сечения упругого рассеяния в зависимости от числа атомов в цепочке.

Если число атомов в цепочке таково, что выполняется условие применимости борновского приближения $N \chi_0 \ll \hbar$, то экспоненту в (53) можно разложить в ряд. В результате получим следующее выражение для дифференциального сечения упругого рассеяния неполяризованных частиц:

$$d\sigma_e^{(N)}(q_{\perp}) = 2\pi (N/\hbar)^2 \left\{ \int_0^{\infty} \rho d\rho J_0(q_{\perp} \rho / \hbar) \times \right. \\ \left. \times [\chi_0(\rho) + (N^2 a / 12 p) (\nabla_{\perp} \chi_0(\rho))^2 + \dots] \right\}^2 (q_{\perp} / \hbar) d(q_{\perp} / \hbar). \quad (55)$$

Так как $N^2 a (\nabla \chi_0)^2 / 12 p \ll \chi_0$, то в первом борновском приближении сечение рассеяния пропорционально квадрату числа атомов цепочки [2, 23—25]. Иными словами, в борновском приближении взаимодействие частицы с цепочкой носит когерентный характер, т. е. складываются не сечения, а амплитуды рассеяния на каждом из рассеивающих центров.

Второе слагаемое в квадратной скобке формулы (55) соответствует вкладу в сечения рассеяния второго борновского приближе-

ния. Мы видим, что относительный вклад второго борновского приближения также пропорционален квадрату числа атомов цепочки.

Учет второго борновского приближения приводит к зависимости сечения от знака заряда частицы. При рассеянии электрона и позитрона на отдельном атоме различие сечений их упругого рассеяния незначительно. Так, например, при рассеянии в кулоновском поле отдельного атома из (14) следует выражение для сечения рассеяния под малыми углами

$$d\sigma_e(q_{\perp}) = \frac{8\pi(Ze^2)^2}{v^2 q_{\perp}^3} \left(1 - \frac{e}{|e|} \frac{Ze^2}{\hbar v} \frac{\pi}{2} \frac{q_{\perp}}{p} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) dq_{\perp}, \quad (56)$$

т. е. для больших p поправка, учитывающая знак заряда, исчезающе мала. Если же рассеяние происходит на цепочке атомов, то различие в сечениях рассеяния электронов и позитронов может быть большим, так как оно пропорционально N^2 .

Перейдем теперь к большому N , когда $N\chi_0 \gg \hbar$. В этом случае, борновское приближение не применимо. Если $N\chi_0 \gg \hbar$, то для всех углов рассеяния, за исключением очень малой области вблизи нуля (где $q_{\perp} \rho \sim p\vartheta_e \rho (\vartheta_e) \leq \hbar$), для вычисления амплитуды рассеяния можно пользоваться методом стационарной фазы. Таким путем можно найти зависимость переданного импульса от прицельного параметра

$$q_{\perp} = N |\nabla_{\perp} \chi_0| [1 + (N^2 a/6p) \nabla_{\perp}^2 \chi_0 + \dots] \quad (57)$$

и получить дифференциальное сечение рассеяния [см. (15)]

$$d\sigma_e^{(N)}(q_{\perp}) = 2\pi \rho(q_{\perp}) \left| \frac{d\rho(q_{\perp})}{dq_{\perp}} \right| dq_{\perp}. \quad (58)$$

При малых углах рассеяния ($p\vartheta_e \rho (\vartheta_e) \leq \hbar$) пользоваться методом стационарной фазы нельзя, так как вблизи нулевого угла нет стационарной точки. Амплитуду рассеяния в этом случае следует вычислять непосредственно по формуле (53).

Для цепочки атомов с экранированным кулоновским потенциалом

$$U(r) = \frac{Ze|e|}{r} \exp(-r/R) \quad (59)$$

можно получить явное выражение для сечения рассеяния при $NZe^2/\hbar v \gg 1$. При этом следует различать три характерных интервала значений переданного импульса q_{\perp} . При малых значениях q_{\perp} , $q_{\perp} \leq \hbar/(R \ln(NZe^2/\hbar v))$, для вычисления сечения следует

пользоваться выражением (53) для амплитуды рассеяния. При этом [24]

$$d\sigma_e^{(N)}/dq_{\perp} = (2\pi R^2/q_{\perp}) \ln^2(NZe^2\gamma \sqrt{\pi/\hbar v}) J_1 \times \\ \times [(q_{\perp} R/\hbar) \ln(NZe^2\gamma \sqrt{\pi/\hbar v})], \quad (60)$$

где $\gamma = \exp(-G)$, $G = 0,577\dots$ — постоянная Эйлера.

Для переданных импульсов $q_{\perp} \gg \hbar/R \ln(NZe^2/\hbar v)$ дифференциальное сечение рассеяния может быть вычислено методом стационарной фазы по формулам (57) и (58). Если при этом

$\hbar/(R \ln(NZe^2/\hbar v)) \leq q_{\perp} \leq 2NZe^2/vR$, то [2]

$$d\sigma_e/dq_{\perp} = (2\pi R^2/q_{\perp}) \ln(2NZe^2/q_{\perp} vR); \quad (61)$$

если же $q_{\perp} \geq 2NZe^2/vR$, то

$$d\sigma_e^{(N)}/dq_{\perp} = 8\pi (NZe^2)^2/v^2 q_{\perp}^3. \quad (62)$$

Выполнив интегрирование в дифференциальном сечении упругого рассеяния по переданному импульсу, получим полное сечение рассеяния $\sigma_e^{(N)}$. В рамках борновского приближения

$$\sigma_e^{(N)} = 2\pi \left(\frac{N}{\hbar}\right)^2 \int_0^{\infty} \rho d\rho \left(\chi_0 + \frac{N^2 a}{12} |(\nabla_{\perp} \chi_0)^2 + \dots\right)^2. \quad (63)$$

Из (63) следует, что при $N\chi_0 \ll \hbar$ полное сечение рассеяния значительно меньше геометрического поперечного сечения атома: $\sigma_e^{(N)} \approx (N\chi_0/\hbar)^2 R^2 \ll \pi R^2$. Это значит, что цепочка атомов для пучка налетающих частиц является как бы прозрачной.

Полное сечение упругого рассеяния в борновском приближении с увеличением N растет пропорционально N^2 . При $N\chi_0 \gg \hbar$ такое соотношение между $\sigma_e^{(N)}$ и N нарушается. Оценка полного сечения рассеяния при $N\chi_0 \gg \hbar$ показывает, что оно по порядку величины равно

$$\sigma_e^{(N)} \approx \bar{\rho}^2, \quad (64)$$

где $\bar{\rho}$ — эффективное значение прицельного параметра в интеграле (12); ρ определяется из соотношения $N\chi_0(\rho) \sim \hbar$.

Для цепочки атомов, потенциал которых представляет собой экранированный потенциал Кулона, $\chi_0^{(N)} = -2NZe|e|K_0(\rho/R)$, где $K_0(\rho/R)$ — функция Бесселя [26]. Отсюда легко найти порядок величины ρ : $\rho \sim R \ln(2NZe^2/\hbar v)$. Поэтому полное сечение упругого рассеяния при $NZe^2/\hbar v \gg 1$ будет иметь вид [24—25]

$$\sigma_e^{(N)} \sim R^2 \ln^2(2NZe^2/\hbar v). \quad (65)$$

Таким образом, при $NZe^2/\hbar v \gg 1$ полное сечение упругого рассеяния не пропорционально квадрату числа атомов цепочки,

как это имеет место в борновском приближении. Квадратичная зависимость от N заменяется более слабой — логарифмической. Другими словами, при $NZe^2/\hbar v \gg 1$ полное сечение рассеяния почти не зависит от N . Полное сечение теперь совпадает по порядку величины с геометрическим поперечным сечением атома: $\sigma_e^{(N)} \sim \pi R^2$. Это означает, что цепочка атомов перестает быть прозрачной, т. е. все частицы, попадающие на «прицельную» площадку порядка πR^2 , испытывают рассеяние.

Поправка, обусловленная величиной $\chi_1(\rho)$ в (57) так же как и в (55), пропорциональна N^2 и зависит от знака заряда налетающей частицы.

Обратим внимание на то обстоятельство, что в области применимости борновского приближения средний квадрат переданного импульса не зависит от числа атомов N и определяется в основном поперечными размерами области взаимодействия:

$$\bar{q}_\perp^2 = \frac{\int q_\perp^2 (d\sigma_e^{(N)}/dq_\perp) dq_\perp}{\sigma_e^{(N)}} \sim \left(\frac{\hbar}{R}\right)^2, \quad (66)$$

тогда как при $NZe^2/\hbar v \gg 1$, согласно (57) — (65),

$$\bar{q}_\perp^2 \sim (NZe^2/R)^2. \quad (67)$$

Подводя итоги, можно сказать, что характер упругого рассеяния быстрых частиц цепочкой атомов существенно изменяется при выходе за рамки борновского приближения. В области применимости борновского приближения ($N\chi_0 \ll \hbar$) дифференциальное и полное сечения упругого рассеяния пропорциональны квадрату числа атомов цепочки, а средний угол рассеяния не зависит от N . При выполнении условия квазиклассичности движения частицы в поле цепочки атомов ($N\chi_0 \ll \hbar$) полное сечение рассеяния почти не зависит от N , а средний угол рассеяния пропорционален N .

5. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ НА ЦЕПОЧКЕ АТОМОВ В СЛУЧАЕ БОЛЬШОЙ ЗОНЫ ФОРМИРОВАНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Перейдем теперь к исследованию тормозного излучения, возникающего при прохождении частиц через цепочку атомов. Оно может носить как когерентный, так и некогерентный характер в зависимости от числа атомов в цепочке, энергии частицы и частоты фотона. Наша задача будет заключаться в выяснении зависимости интенсивности излучения от этих величин. С этой целью мы воспользуемся общей теорией, развитой в разд. 2 и 3.

Существенное влияние на характер тормозного излучения релятивистских частиц оказывает соотношение между длиной

цепочки Na и длиной когерентности, которая, как сейчас покажем, совпадает с размерами зоны формирования излучения δ^{-1} . Пусть частица, движущаяся со скоростью v , излучает две волны $\exp[i(\omega t - \mathbf{kr})]$ в начале и в конце отрезка пути $l = v\Delta t$. Тогда разность фаз обеих волн будет равна $\Delta\varphi = (\omega\Delta t - kl) = (\omega l/v)(1 - v \cos \vartheta_k)$, где ϑ_k — угол между \mathbf{l} и \mathbf{k} . Релятивистская частица излучает в узком конусе вдоль направления своего движения с углом раствора порядка m/ε , поэтому $(1 - v \cos \vartheta_k) \sim m/2\varepsilon$.

Если $\Delta\varphi \ll \pi/2$, то амплитуды волн будут складываться, т. е. излучение будет носить когерентный характер. Мы видим, что условие когерентности имеет вид $l(\omega m^2/2\varepsilon) \ll \pi/2$. Определяемая отсюда величина l носит название длины когерентности [27—30]. Таким образом, $l \sim \delta^{-1}$, т. е. длина когерентности по порядку величины равна размеру зоны формирования излучения.

Рассмотрим вначале простейший случай, когда зоны формирования излучения значительно больше длины цепочки, $\delta^{-1} \gg Na$ (рис. 1, а, б); при достаточно высокой энергии частицы или же малой частоте фотона неравенство $\delta^{-1} \gg Na$ всегда может быть выполнено. Так

как на частицу действует поле в пространственной области $z_{эф} \sim Na$, то длина когерентности будет значительно больше $z_{эф}$. Поэтому интенсивность излучения релятивистских частиц на цепочке атомов $dI^{(N)}/d\omega$ может быть определена формулой (47).

$$\frac{dI^{(N)}}{d\omega} = \hbar\omega \int_0^\infty \left[\frac{dw(q_\perp)}{d\omega} \frac{d\sigma_e^{(N)}(q_\perp)}{dq_\perp} \right] dq_\perp. \quad (68)$$

Поскольку вероятность излучения $dw(q)/d\omega$ медленно меняется с изменением q_\perp , а дифференциальное сечение рассеяния быстро падает с ростом q_\perp , то основной вклад в интеграл (68) вносят те же значения переданного импульса, что и в полное сечение упругого рассеяния быстрых частиц цепочкой атомов. Поэтому, если $q_{эф}$ определяет порядок величины характерных переданных импульсов в упругом рассеянии, то интенсивность излучения

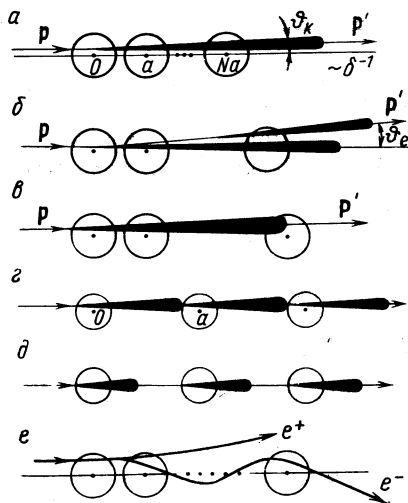


Рис. 1

по порядку величины будет определяться формулой

$$dI^{(N)}/d\omega \approx \hbar\omega (dw(q_{\text{эф}})/d\omega) \sigma_e^{(N)}, \quad (69)$$

где $\sigma_e^{(N)}$ — полное сечение упругого рассеяния частиц цепочкой атомов. Используя (49) и (50), определяющие асимптотики функции $dw(q_{\perp})/d\omega$, получим следующие оценки для интенсивности излучения при малых и больших значениях $q_{\text{эф}}$ [31]:

$$\frac{dI^{(N)}}{d\omega} \sim \begin{cases} e^2 (q_{\text{эф}}/m)^2 \sigma_e^{(N)}, & q_{\text{эф}} \ll m; \\ e^2 \ln(q_{\text{эф}}/m) \sigma_e^{(N)}, & q_{\text{эф}} \gg m. \end{cases} \quad (70)$$

$$(71)$$

Таким образом, зависимость интенсивности излучения от числа атомов в цепочке определяется зависимостью от N как полного сечения упругого рассеяния, так и эффективного переданного импульса.

В разд. 4 мы видели, что существенные изменения характера зависимости величин $q_{\text{эф}}$ и $\sigma_e^{(N)}$ от N возникают при нарушении условия применимости борновского приближения, поэтому рассмотрим отдельно две возможности: когда борновское приближение справедливо и когда — несправедливо.

В первом случае ($N\chi_0 \ll \hbar$) полное сечение упругого рассеяния пропорционально квадрату числа атомов цепочки (63), а эффективное значение переданного импульса от N не зависит [$q_{\text{эф}} \sim \hbar/R$ (66)]. Так как $\hbar/R \ll m$, то, согласно (70), интенсивность излучения в рамках борновского приближения определяется формулой

$$dI^{(N)}/d\omega \sim e^2 (NZe^2/m)^2; NZe^2/\hbar v \ll 1; Na \ll \delta^{-1}, \quad (72)$$

т. е. интенсивность излучения сохраняет квадратичную зависимость от N сечения, характерную для упругого рассеяния.

Во втором случае ($N\chi_0 \gg \hbar$) $\sigma_e^{(N)} \sim R^2$ и $q_{\text{эф}} \sim NZe^2/R$. Поскольку теперь импульс $q_{\text{эф}}$ пропорционален N , то в зависимости от числа атомов в цепочке его значение может быть как меньше, так и больше m . Если $q_{\text{эф}} \sim NZe^2/R \ll m$, то согласно (70), снова приходим к квадратичной зависимости интенсивности излучения от N :

$$\frac{dI^{(N)}}{d\omega} \sim e^2 \left(\frac{NZe^2}{m} \right)^2; \frac{NZe^2}{mR} \ll 1; \frac{NZe^2}{\hbar v} \gg 1; Na \ll \delta^{-1}. \quad (73)$$

Однако в отличие от случая борновского приближения теперь квадратичная зависимость интенсивности от числа атомов цепочки обусловлена зависимостью от N переданного импульса.

При $NZe^2/R \gg m$, согласно (71), приходим к гораздо более слабой — логарифмической зависимости интенсивности излучения от N :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI^{(N)}}{d\omega} &\sim e^2 R^2 \ln \frac{NZe^2}{mR}; \quad \frac{NZe^2}{\hbar mR} \gg 1; \\ \frac{NZe^2}{\hbar v} &\gg 1; \quad Na \ll \delta^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Обратим внимание на то, что когерентный характер тормозного излучения — квадратичная зависимость сечения излучения от N — сохраняется для значительно больших значений N , чем для упругого рассеяния, а именно, вплоть до значений $N \sim \sim mR/Ze^2$. Легко видеть, что $q_{эф}/m \sim \vartheta_e/\vartheta_h$, где $\vartheta_e \sim q_{эф}/p$ — характерные углы рассеяния и $\vartheta_h \sim m/\varepsilon$ — характерные углы излучения релятивистских частиц. Поэтому можно сказать, что когерентный характер излучения сохраняется до тех пор, пока частица не выходит за пределы конуса излучения (конуса с углом раствора $\vartheta_h \sim m/\varepsilon$ около импульса p) вследствие ее взаимодействия с атомами цепочки.

Отметим, что согласно (74), интенсивность излучения на цепочке N^* атомов, для которой $N^*Ze^2/mR \sim 1$, и на более длинной цепочке $N > N^*$ практически одинакова (вследствие слабой, логарифмической, зависимости $dI^{(N)}/d\omega$ от N). Это не означает, однако, что частица, рассеиваясь, покидает цепочку на длине N^*a ; на этой длине она лишь выходит из конуса излучения (см. рис. 1, б). Условия прохождения частицей всей цепочки N атомов $NZe^2/\varepsilon R < R/Na$ и условие выхода ее за пределы конуса излучения $NZe^2/R > m$ не противоречат друг другу.

Так как $dI^{(N)}/d\omega$ при нарушении когерентности практически не зависит от N , то отнесенная к одному атому интенсивность излучения $N^{-1}dI^{(N)}/d\omega$ стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. (Должно, однако, соблюдаться условие $Na \ll \delta^{-1}$.) Поэтому при больших N можно говорить о подавлении излучения.

Напомним, что подавление излучения имеет место и в аморфной среде. Это так называемый эффект Ландау — Померанчука [32], обусловленный многократным рассеянием быстрой частицы в пределах зоны формирования излучения [27, 28, 33, 34].

Существенной особенностью подавления излучения при взаимодействии быстрых частиц с цепочкой атомов (а также и при взаимодействии с кристаллом) является то, что подавление наступает при значительно меньших энергиях, чем в случае аморфной среды [35].

В аморфной среде средний квадрат угла рассеяния частицы в пределах зоны формирования излучения $l \sim \delta^{-1}$ равен [27, 32]

$$\overline{\vartheta_e^2} \sim (\varepsilon_s^2/\varepsilon^2)(\delta^{-1}/L),$$

где L — радиационная длина; $\varepsilon_s^2 = 4\pi \cdot 137m^2$. Подавление излучения имеет место при $\bar{\vartheta}_e > \vartheta_h$. Поэтому в аморфной среде подавление наступает при

$$\varepsilon \gtrsim m(\omega/\varepsilon)(m^2/\varepsilon_s^2)mL. \quad (75)$$

Для цепочки атомов подавление излучения наступает при выполнении условий $N \gtrsim mR/Ze^2$ и $Na \lesssim \delta^{-1}$. Отсюда следует, что оно имеет место при

$$\varepsilon \gtrsim m(\omega/\varepsilon)m^2aR/Ze^2. \quad (76)$$

Эта энергия значительно меньше энергии, определяемой формулой (75). Например, для кремния энергия (75) на два порядка больше энергии (76).

Все приведенные выше оценки справедливы независимо от вида потенциала отдельного атома. Но они носят в общем качественный характер. Поэтому представляет интерес получить количественные соотношения, которые одновременно иллюстрировали бы и качественную картину излучения. Это можно сделать, предполагая, что потенциал отдельного атома имеет вид экранированного кулоновского потенциала $U(r) = (Ze|e|/r) \exp(-r/R)$. Для такого потенциала можно непосредственно вычислить интенсивность излучения $dI^{(N)}/d\omega$ по формуле (68) [31]. (Напомним, что эта формула справедлива при $Na \ll \delta^{-1}$.)

Если $NZe^2/mR \ll 1$, то интегрирование выражения (68) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \frac{dI^{(N)}}{d\omega} &= \frac{16e^2}{3} \left(\frac{NZe^2}{m} \right)^2 \frac{e'}{\varepsilon} \left\{ \left(1 + \frac{3}{4} \frac{(\hbar\omega)^2}{\varepsilon\varepsilon'} \right) \times \right. \\ &\times \left[\ln(mR/\hbar) + \frac{1}{2} - \left(\frac{NZe^2}{\hbar v} \right)^2 \times \right. \\ &\times \left. \left. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n[n^2 + (NZe^2/\hbar v)^2]} \right] + \frac{1}{12} \right\}. \quad (77) \end{aligned}$$

Заметим, что эта формула по существу совпадает с известной формулой Бете — Максимова [36, 37] для интенсивности излучения быстрого электрона на отдельном кулоновском центре, полученной в приближении Фарри — Зоммерфельда — Мауэ [38], следует лишь в формуле Бете — Максимова заменить заряд ядра $Z|e|$ на $NZ|e|$. Иными словами, в процессе излучения при $Na \ll \delta^{-1}$ цепочка атомов ведет себя как один центр с зарядом $NZ|e|$.

При $NZe^2/\hbar v \ll 1$ формула (77) переходит в результат борновского приближения. При этом, как и следовало ожидать, излучение носит когерентный характер. Однако, как указано выше, когерентность имеет место и тогда, когда борновское приближение

несправедливо. Именно, если $NZe^2/\hbar \gg 1$, но по-прежнему $NZe^2/mR \ll 1$, то формула (77) приобретает вид

$$\frac{dI^{(N)}}{d\omega} = \frac{16e^2}{3} \left(\frac{NZe^2}{m} \right)^2 \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \left\{ \left(1 + \frac{3}{4} \frac{(\hbar\omega)^2}{\varepsilon\varepsilon'} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[\ln \frac{mR}{NZe^2} - G + \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{12} \right\}. \quad (78)$$

Таким образом, и в этом случае интенсивность излучения пропорциональна N^2 , хотя теперь появляется и дополнительная, слабая логарифмическая зависимость от N .

При $NZe^2/mR \gg 1$ формулы (77) и (78) несправедливы и интегрирование общего выражения (68) приводит к

$$\frac{dI^{(N)}}{d\omega} = \frac{4e^2}{3} R^2 \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \left(1 + \frac{(\hbar\omega)^2}{2\varepsilon\varepsilon'} \right) \ln^3 \frac{NZe^2}{mR}. \quad (79)$$

Формулы (77) — (79) показывают, что когерентный характер излучения быстрых частиц на цепочке атомов разрушается лишь при $NZe^2/mR \sim 1$.

6. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ НА ЦЕПОЧКЕ АТОМОВ ДЛЯ МАЛОЙ ЗОНЫ ФОРМИРОВАНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

В предыдущем разделе мы предполагали, что $Na \ll \delta^{-1}$. Рассмотрим теперь случай, когда размеры зоны формирования излучения малы или сравнимы с длиной цепочки $Na \gtrsim \delta^{-1}$. Обратимся для этого к формуле (42), определяющей интенсивность излучения при произвольных Na и δ^{-1} , если только выполнено условие $\vartheta_e \ll \vartheta_h$. Последнее условие приводит при $Na \sim \delta^{-1}$ к следующему ограничению на значение энергии:

$$\varepsilon \ll m (\omega/\varepsilon) m^2 a R / Ze^2. \quad (80)$$

Это неравенство выполняется в широком интервале энергий частицы [например, для кремния оно выполняется вплоть до энергий $\varepsilon \sim 10^6 (\hbar\omega/\varepsilon)m$].

Для цепочки N атомов функция $W_{\perp}^{(N)}(\rho)$ имеет, согласно (43), вид

$$W_{\perp}^{(N)}(\rho) = \frac{\sin(Nq'_z a/2)}{\sin(q'_z a/2)} W_{\perp}(\rho) [1 + O(\varepsilon^{-1})],$$

где $W_{\perp}(\rho) = \varepsilon^{-1} \nabla_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} U(\rho, z) dz$, и интенсивность излучения равна

$$\frac{dI^{(N)}}{d\omega} = \int_{\delta}^{\infty} \frac{\sin^2(Nq'_z a/2)}{\sin^2(q'_z a/2)} \frac{d^2 I}{dq'_z d\omega} dq'_z. \quad (81)$$

Здесь величина $d^2 I/dq'_z d\omega$ представляет собой интенсивность излучения на отдельном атоме, отнесенную к интервалу частот $d\omega$, и переданных импульсов dq'_z :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I}{dq'_z{}^2 d\omega} &= \frac{e^2}{\pi} \frac{\delta}{m^2} \frac{1}{q'_z{}^2} \int dq_{\perp} q_{\perp}^2 |A(q)|^2 \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \times \\ &\times \left[1 + \frac{(\hbar\omega)^2}{2\varepsilon\varepsilon'} - 2 \frac{\delta}{q'_z} \left(1 - \frac{\delta}{q'_z} \right) \right]. \end{aligned}$$

При $\delta^{-1} \gg Na$ отношение квадратов синусов под знаком интеграла равно N^2 (поскольку $q'_z \sim \delta$), и, следовательно, в этом случае имеет место когерентность излучения. Отметим, что при $Na \ll \ll \delta^{-1}$ расположение атомов в цепочке не влияет на когерентный характер излучения — интенсивность пропорциональна N^2 как при расположении атомов на равных расстояниях друг от друга, так и при неравных расстояниях.

Если же $Na \gtrsim \delta^{-1}$, то отношение квадратов синусов не приводит к появлению множителя N^2 и когерентность нарушается (при $Na \ll \delta^{-1}$ разность фаз последовательно излученных волн мала по сравнению с $\pi/2$, поэтому амплитуды волн складываются и интенсивность излучения пропорциональна N^2 , а когда $Na \gtrsim \delta^{-1}$, излученные волны могут частично погасить друг друга).

Если $Na \gg \delta^{-1}$, то можно воспользоваться формулой

$$\frac{\sin^2(Naq'_z/2)}{\sin^2(aq'_z/2)} = N \frac{2\pi}{a} \sum_{g_j} \delta(q'_z - g_j),$$

где $g_j = (2\pi/a)j$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и мы получим

$$\frac{dI^{(N)}}{d\omega} = N \frac{2\pi}{a} \sum_{g_j \gtrsim \delta} \frac{d^2 I}{dg_j d\omega}. \quad (82)$$

Определим величину входящей сюда суммы по g_j . Рассмотрим прежде всего случай, когда $\delta^{-1} \ll a$ (см. рис. 1, δ). Суммирование при этом начинается со значения $j = j_{\min} \approx a\delta/2\pi$, которое значительно больше единицы. Поэтому речь идет о суммировании

ряда $\sum_{n=j}^{\infty} f(n)$, где $j \gg 1$ и функция $f(n)$ быстро убывает с ростом n . Такая сумма может быть заменена интегралом [39]

$$\sum_{n=j}^{\infty} f(n) \approx \int_j^{\infty} f(n) dn + O(f(j)).$$

Таким образом, при $\delta^{-1} \ll a$ приходим к результату

$$dI^{(N)}/d\omega = N dI/d\omega, \quad (83)$$

где $dI/d\omega$ — интенсивность излучения на отдельном атоме; $dI/d\omega \sim e^2 (Ze^2/m)^2$. Итак, при $a\delta \gg 1$ интенсивность излучения на цепочке атомов не отличается от интенсивности излучения в аморфной среде. Это связано с тем, что при $a \gg \delta^{-1}$ излучение на отдельных атомах цепочки происходит независимо.

Пусть теперь $a \ll \delta^{-1} \ll Na$, т. е. размеры зоны формирования излучения значительно больше расстояния между атомами цепочки, но меньше длины цепочки. Тогда суммирование в (82) следует начинать с $j_{\min} = 1$. Так как $d^2I/dg_j d\omega \sim 2\pi\delta/ag_j^2 = (a\delta/2\pi)j^{-2}$, то главный вклад в сумму по g_j вносят лишь несколько первых членов. Поэтому теперь

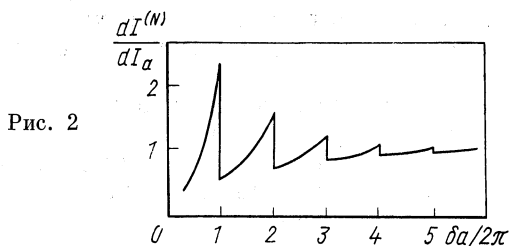
$$dI^{(N)}/d\omega \sim a\delta N dI/d\omega. \quad (84)$$

Мы видим, что при $a \ll \delta^{-1} \ll Na$ излучение частицы, движущейся вдоль цепочки атомов, содержит малый множитель $a\delta$, который отсутствует при излучении быстрой частицы в аморфной среде. Здесь сказывается периодическая структура цепочки и большая ее длина по сравнению с зоной формирования излучения.

Рассмотрим, наконец, тот случай, когда размеры зоны формирования излучения сравнимы с расстоянием между атомами цепочки $a \sim \delta^{-1} \ll Na$ (см. рис. 1, *з*). Характерным при этом является то, что для некоторых значений $a\delta$ возникают значительные изменения интенсивности излучения. Дело в том, что при $2\pi/a > \delta$ суммирование в (82) следует начинать с $j_{\min} = 1$. Если же $4\pi/a > \delta^{-1} > 2\pi/a$, то суммирование уже следует начинать с $j_{\min} = 2$ и т. д. Поэтому при $2\pi/a = \delta$ происходит скачок интенсивности излучения — из суммы по j выпадает вклад слагаемых с $j = 1$. Этот скачок можно легко найти при $\hbar\omega \ll \varepsilon$:

$$\frac{dI^{(N)}(2\pi/a \geq \delta)/d\omega}{dI^{(N)}\left(\frac{2\pi}{a} \leq \delta < \frac{4\pi}{a}\right)/d\omega} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} (1 - 2n^{-1} + 2n^{-2})}{\sum_{n=2}^{\infty} n^{-2} (1 - 2n^{-1} + 2n^{-2})} \approx 3,5.$$

Аналогично при $4\pi/a = \delta$ интенсивность излучения изменяется в 2,02 раза, при $6\pi/a = \delta$ — в 1,35 раза и т. д. Графическая зависимость $dI^{(N)}/d\omega$ от параметра $a\delta/2\pi$ приведена на рис. 2.



Отметим, что все полученные результаты справедливы как для релятивистских электронов, так и для релятивистских позитронов. Различие в излучении этих двух частиц $dI_{-}^{(N)}$ и $dI_{+}^{(N)}$ проявляется лишь в малых поправках [2, 40]:

$$dI_{\mp}^{(N)}/d\omega = (dI^{(N)}/d\omega) [1 \pm O(N^2 a Z e^2 / \epsilon R^2)], \quad (85)$$

которые, однако, растут с увеличением N как N^2 .

В приведенной ниже таблице даны основные результаты, полученные в этом и предыдущем разделах (I'_{ω} — интенсивность излучения на отдельном атоме в интервале частот $d\omega$).

Интенсивность излучения $dI^{(N)}/d\omega$	Условия применимости	Особенности излучения
$N^2 I'_{\omega}$	$\delta^{-1} \gg Na$ $\vartheta_e \ll \vartheta_{\kappa}$	Когерентность
$\sim e^2 R^2$	$\delta^{-1} \gg Na$ $\vartheta_e \gg \vartheta_{\kappa}$	Подавление излучения (аналог эффекта Ландау— Померанчука)
$\sim a\delta N I'_{\omega}$	$Na \gg \delta^{-1} \gg a$	Подавление излучения за счет интерференции
$\sim N I'_{\omega}$	$Na \gg \delta^{-1} \sim a$	Резкие интерференционные максимумы в спектре излучения
$N I'_{\omega}$	$a \gg \delta^{-1} \gg R$	Излучение, как в аморфной среде
(См. ниже разд. 8)	$Na \gtrsim R/\vartheta_{ch}$ $N^2 a Z e^2 / \epsilon R^2 \sim 1$	Излучение в условиях режима каналирования

7. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В КРИСТАЛЛЕ

Покажем теперь, что установленные в предыдущих разделах особенности излучения быстрых частиц, проходящих через цепочку атомов, характерны также и для излучения быстрых электронов в кристаллах [3].

Рассмотрим прежде всего тормозное излучение электронов в кристалле в рамках первого борновского приближения. Если $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)$ — потенциальная энергия взаимодействия электрона с отдельным атомом, то потенциальная энергия взаимодействия электрона со всем кристаллом

$$U_c(\mathbf{r}) = \sum_n U(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n), \quad (86)$$

а ее фурье-компонента

$$U_c(\mathbf{q}) = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^3 \sum_{\mathbf{g}_j} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{g}_j) U(\mathbf{q}),$$

где \mathbf{g}_j — вектор обратной решетки; a — постоянная решетки (для простоты рассматривается кубическая решетка). Отсюда следует, что

$$|U_c(\mathbf{q})|^2 = N_c \left(\frac{2\pi}{a}\right)^3 \sum_{\mathbf{g}_j} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{g}_j) |U(\mathbf{q})|^2, \quad (87)$$

где N_c — общее число атомов в кристалле. Подставляя это выражение в (41), получаем интенсивность излучения в первом борновском приближении [27, 41–45]:

$$\begin{aligned} \frac{dI_c}{d\omega} &= N_c \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{\delta}{m^2} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^3 \sum_j |U(\mathbf{g}_j)|^2 \times \\ &\times \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \frac{g_{\perp}^2}{g_{\parallel}^2} \left[1 + \frac{(\hbar\omega)^2}{2\varepsilon\varepsilon'} - 2 \frac{\delta}{g_{\parallel}} \left(1 - \frac{\delta}{q_{\parallel}}\right) \right], \end{aligned} \quad (88)$$

где g_{\parallel} — проекция вектора \mathbf{g}_j на направление движения электрона $g_{\parallel} \geq \delta$.

Если $\delta^{-1} \ll a$, то суммирование по \mathbf{g}_j можно заменить интегрированием. В этом случае кристаллическая структура не будет сказываться на излучении и оно будет происходить так же, как и в аморфной среде.

Кристаллическая структура влияет на излучение, лишь когда зона формирования излучения больше или сравнима с постоянной решетки, $\delta^{-1} \gtrsim a$. Действительно, при этом возможна интерференция волн, излученных электроном на различных атомах решетки, что может привести к существенному изменению харак-

тера излучения. Формально это находит свое отражение в том, что в выражении для интенсивности излучения теперь нельзя заменять суммирование по векторам обратной решетки интегрированием.

Наибольшим влияние кристаллической решетки на излучение будет, когда $\delta^{-1} \gg a$ и решетка ориентирована определенным образом по отношению к пучку налетающих частиц, а именно, когда мал угол Θ между направлением движения частицы и кристаллографической осью $\Theta < R/a$. При этом в зону формирования излучения попадает большое число атомов, расположенных вдоль кристаллографической оси. Следует различать две возможности: $R/\Theta \lesssim \delta^{-1} \ll \ll a/\Theta$ и $\delta^{-1} \gtrsim a/\Theta$.

Если $R/\Theta \lesssim \delta^{-1} \ll a/\Theta$, то интерференция между волнами, излученными на разных атомных цепочках, незначительна (рис. 3,а; две параллельные цепочки атомов кристалла обозначены цифрами 1 и 2). Если же $\delta^{-1} \gtrsim a/\Theta$ (см. рис. 3,б), то интерференция между излучениями на разных цепочках будет существенна. В обоих случаях сохраняется когерентный характер излучения на атомах одной и той же цепочки, поскольку $\delta^{-1} \gg a$.

Преобразуем общую формулу (88), учитывая, что $\delta^{-1} \gg a$ и $\Theta < R/a$. При этом $g_{\parallel} = g_{jz} + \Theta (g_{jx} \cos \alpha + g_{jy} \sin \alpha)$, где α — угол между плоскостью (z, p) и плоскостью (x, z) , и основной вклад в сумму по g_{jz} дает лишь одно слагаемое с $g_{jz} = 0$. Действительно, вклад этого слагаемого в интенсивность излучения равен

$$(dI_c/d\omega)_{g_{jz}=0} \sim N_c e^2 (Ze^2/m)^2 R/a\Theta, \quad (89)$$

вклад же остальных слагаемых с $g_{jz} \neq 0$ равен

$$(dI_c/d\omega)_{g_{jz} \neq 0} = N_c e^2 (Ze^2/m)^2 a\delta,$$

и, следовательно,

$$\frac{(dI_c/d\omega)_{g_{jz} \neq 0}}{(dI_c/d\omega)_{g_{jz} = 0}} \sim \frac{a}{\delta^{-1}} \frac{a\Theta}{R}. \quad (90)$$

Соотношение (89) можно представить также в виде

$$dI_c/d\omega \sim \bar{N} (N_1)^2 e^2 (Ze^2/m)^2, \quad (91)$$

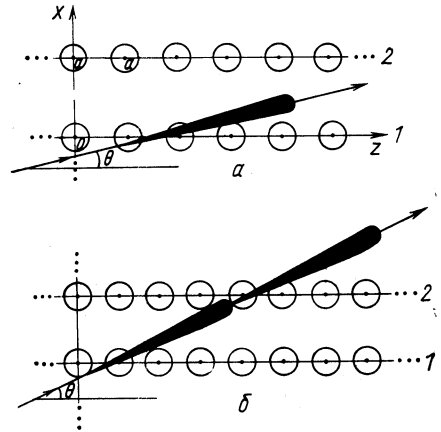


Рис. 3

где $\bar{N} \sim N_c/N_l$; N_l — число атомов, находящихся в зоне формирования излучения ($N_l \sim R/a\Theta$). Величина \bar{N} представляет собой число групп атомов кристалла, излучение на которых происходит когерентно.

Итак, при $\delta^{-1} \gg a$ и $\Theta < R/a$ интенсивность излучения определяется формулой

$$\frac{dI_c}{d\omega} = N_c \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{\delta}{m^2} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^3 \sum_{g_{jx}, g_{jy}} |U(\mathbf{g})|^2 \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \frac{g_{\perp}^2}{g_{\parallel}^2} \left[1 + \frac{(\hbar\omega)^2}{2\varepsilon\varepsilon'} - 2 \frac{\delta}{g_{\parallel}} \left(1 - \frac{\delta}{g_{\parallel}}\right) \right] \left[1 + O\left(a\delta \frac{a\Theta}{R}\right) \right], \quad (92)$$

где $g_{\parallel} = \Theta(g_{jx} \cos \alpha + g_{jy} \sin \alpha) \geq \delta$. Тот факт, что основной вклад в интенсивность излучения вносит только одно слагаемое с $g_{jz} = 0$ означает, что детали кристаллической структуры вдоль

оси z несущественны. Поэтому при исследовании излучения быстрых частиц, движущихся вблизи кристаллографической оси z , можно пользоваться усредненным вдоль оси потенциалом

$$U(x, y) = \frac{1}{N_z a} \int_{-\infty}^{\infty} U(\mathbf{r}) dz. \quad (93)$$

Выясним теперь зависимость интенсивности излучения (92) от угла α между плоскостями (z, p) и (z, x) . Если $\alpha = 0$ (т. е. движение частицы происходит в плоскости (z, x)), то неравенство $g_{\parallel} \geq \delta$ приобретает вид $\Theta g_{jx} \geq \delta$ и суммирование по g_{jy} можно заменить интегрированием. Остающаяся сумма по g_{jx} существенно зависит от параметра $a\delta/2\pi\Theta$: при целочис-

ленных значениях этого параметра спектр излучения имеет резкие максимумы (рис. 4). Аналогичная ситуация возникает и при $\alpha = \pi/2$ с той лишь разницей, что меняется роль осей x и y .

Таким образом, при движении частиц в одной из кристаллографических плоскостей ($\alpha = 0$; $\alpha = \pi/2$) и малых значениях угла Θ наряду с общим увеличением интенсивности излучения

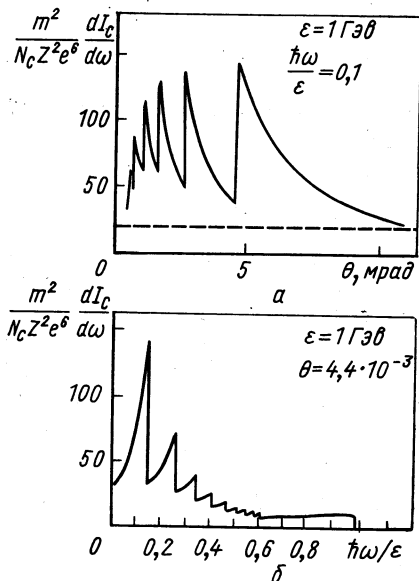


Рис. 4

(вследствие когерентности) по сравнению с интенсивностью в аморфной среде существует также и эффект интерференции волн, излученных частицей на различных цепочках атомов кристалла. Этот эффект приводит к возникновению резких максимумов в спектре излучения (ср. рис. 2 и рис. 4).

Характерные зависимости отношения интенсивности излучения в кристалле к интенсивности излучения в аморфной среде от угла влета Θ при фиксированных значениях ε и ω и от ω при фиксированных значениях ε и Θ , согласно (92), приведены на рис. 4 [45, 46].

Мы не предполагали до сих пор существования какого-либо неравенства между δ^{-1} и a/Θ . Пусть теперь зона формирования излучения значительно меньше расстояния, проходящего частицей между ее последовательными столкновениями с разными цепочками атомов кристалла (цепочки 1 и 2 на рис. 3,б). Тогда периодичность кристалла вдоль осей x и y для тормозного излучения не существенна, поскольку отсутствует интерференция волн, излученных на разных цепочках. Поэтому суммирование по g_{jx} и g_{jy} в (92) может быть заменено интегрированием и интенсивность излучения выразится формулой

$$\frac{dI_c}{d\omega} = N_c 2e^2 \left(\frac{Ze^2}{m} \right)^2 \left[\frac{R}{a\Theta} F \left(\frac{\delta R}{\Theta} \right) + O(\delta a) \right],$$

где

$$F(\xi) = \frac{\xi}{a^2} \int_{\xi}^{\infty} d\tilde{q}_x \int d\tilde{q}_y |U(\tilde{q})|^2 \times \\ \times \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \frac{\tilde{g}_y^2}{\tilde{g}_x^2} \left[1 + \frac{(\hbar\omega)^2}{2\varepsilon\varepsilon'} - 2 \frac{\xi}{g_x} \left(1 - \frac{\xi}{g_x} \right) \right] \quad (94)$$

и тильда служит для обозначения соответствующих безразмерных величин: $\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}}R$; $\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}}/R$; $U(\mathbf{r}) = (Ze|e|/R)\tilde{U}(\tilde{\mathbf{r}})$; $U(\mathbf{q}) = Ze|e|R^2\tilde{U}(\mathbf{g})$.

Отметим, что в эту формулу входят два параметра $R/a\Theta$ и $\delta R/\Theta$. Первый из них представляет собой число атомов, которые «пересекает» электрон, двигаясь под углом Θ к отдельной цепочке атомов. Второй характеризует соотношение между зоной формирования излучения δ^{-1} и длиной части цепочки $Na \sim R/\Theta$, пересекаемой электроном.

Таким образом, формула (92) для интенсивности излучения в кристалле приводит к следующей характерной зависимости $dI_c/d\omega$ от величин δ , a и Θ :

$$\frac{dI_c}{d\omega} \sim N_c \frac{dI}{d\omega} \left[\frac{R}{a\Theta} \mathcal{F} \left(\frac{\delta R}{\Theta}, \frac{\delta a}{2\pi\Theta} \right) + O(a\delta) \right], \quad (95)$$

где $dI/d\omega$ — интенсивность излучения на отдельном атоме и $\mathcal{F}(\delta R/\Theta, \delta a/2\pi\Theta)$ — некоторая функция от $\delta R/\Theta$ и $\delta a/2\pi\Theta$. Эта функция при $\delta R/\Theta \sim 1$ близка к единице, при $\delta R/\Theta \rightarrow \infty$ быстро убывает и при целочисленных значениях $\delta a/2\pi\Theta$ имеет резкие максимумы. Поэтому, если $\delta^{-1} \gg R/\Theta$, то [47]

$$dI_c/d\omega \sim N_c (dI/d\omega) R/a\Theta.$$

Если $\delta^{-1} \ll R/\Theta$, то

$$dI_c/d\omega \sim N_c (dI/d\omega) \delta a.$$

Мы изложили основные результаты теории излучения релятивистских частиц в кристалле в первом борновском приближении. Однако в ряде важных случаев это приближение теряет свою силу. Начнем с того, что если в зону формирования излучения попадает $N \sim R/a\Theta$ атомов, то вместо обычного борновского параметра $Ze^2/\hbar v$ в теорию должен входить параметр $RZe^2/a\Theta\hbar v$, и, следовательно, при $\Theta < RZe^2/a\hbar$ условие применимости борновского приближения, которое было использовано при выводе формулы (88), не выполняется [27, 31, 48—50]. Это довольно жесткое ограничение, так как неравенство $RZe^2/a\Theta\hbar \ll 1$ не выполняется уже в той области углов Θ , где возникают интерференционные максимумы в спектре излучения.

Заметим далее, что если интенсивность излучения выражена формулой (92), то в одном из максимумов ($\Theta \sim R\delta$) при $\varepsilon \rightarrow \infty$ сечение излучения будет неограниченно расти [27, 35, 49, 50]. Ясно, что должен существовать механизм, который ограничивает этот рост.

В последнее время был обнаружен эффект каналирования быстрых частиц в кристалле при $\Theta \leq \vartheta_{ch}$, где $\vartheta_{ch} \sim \sqrt{Ze^2/\varepsilon a}$ — критический угол каналирования [51—53]. В первом борновском приближении этот эффект, однако, не содержится.

Наконец, интенсивность излучения в первом борновском приближении не зависит от знака заряда налетающей частицы, в действительности же такая зависимость имеет место [54, 55].

Таким образом, излучение в кристаллах необходимо исследовать более точно, чем в рамках борновского приближения. Установим прежде всего критерии применимости формулы (92) для интенсивности излучения в кристалле. В разд. 3 мы видели, что борновская формула для сечения излучения (41) справедлива, если выполняются условия

$$\chi_0 \ll \hbar; \quad \vartheta_e \ll \vartheta_h; \quad \chi_1 \ll \chi_0. \quad (96)$$

Подставляя в выражение для $\chi_0 = \int U dl$ усредненный потенциал кристалла $U(x, y)$ и замечая, что $dl = dx/\Theta$, из критерия $\chi_0 \ll \hbar$

получаем ограничение на угол влета Θ частицы в кристалл: $RZe^2/a\Theta\hbar \ll 1$.

Условие $\vartheta_e \ll \vartheta_k$ означает, что $q_{эф} \ll m$. Так как $q_{эф}$, согласно (92), порядка \hbar/R , то приходим к условию $\hbar/mR \ll 1$, которое всегда выполняется. Наконец, третье из неравенств (96) приводит к ограничению на ε и Θ : $Ze^2/\varepsilon a\Theta^2 \ll 1$. Это неравенство представляет собой условие, при выполнении которого можно пренебречь эффектом каналирования.

Итак, условия применимости первого борновского приближения при исследовании излучения электронов, движущихся в кристалле, имеют вид

$$RZe^2/a\Theta\hbar \ll 1; \quad \hbar/mR \ll 1; \quad Ze^2/\varepsilon a\Theta^2 \ll 1. \quad (97)$$

В области высоких энергий при уменьшении Θ первым из условий (97) нарушается неравенство $RZe^2/a\Theta\hbar \ll 1$.

Исследуем теперь интенсивность излучения быстрых частиц в кристалле, когда условие применимости борновского приближения не выполняется. Рассмотрим тот случай, когда выполняются условия

$$\chi_0 \gg \hbar; \quad \vartheta_e \ll \vartheta_k; \quad \chi_1 \ll \chi_0, \quad (98)$$

т. е. из неравенств (96) нарушено лишь первое. Спектр излучения при этом может быть найден с помощью общих формул (14) и (42), которые получены в рамках классической электродинамики и квазиклассического приближения квантовой электродинамики и справедливы при выполнении условий (98).

Замечательной особенностью этих формул является то, что они имеют тот же вид, что и формула (41) для интенсивности излучения, полученная в рамках борновского приближения. Поэтому, если нарушено только первое из условий (97), то интенсивность излучения быстрых частиц в кристалле будет определяться формулой (92), справедливой в борновском приближении*.

Заметим однако, что условие $\vartheta_e \ll \vartheta_k$ при $\chi_0 \gg \hbar$ не эквивалентно условию $\hbar/mR \ll 1$, справедливому в первом борновском приближении, а эквивалентно неравенству $Ze^2/ma\Theta \ll 1$, поскольку при $\chi_0 \gg \hbar$ переданный импульс жестко связан с прицельным параметром $q_{\perp} \approx \nabla\chi_0$. Поэтому неравенства (98) приводят к следующим ограничениям на энергию частицы и угол ее влета в кристалл:

$$RZe^2/a\Theta\hbar \gg 1; \quad Ze^2/ma\Theta \ll 1; \quad Ze^2/\varepsilon a\Theta^2 \ll 1. \quad (99)$$

* Предположение о том, что формула для сечения излучения релятивистских электронов в кристалле, полученная в рамках борновского приближения, имеет более широкую область применимости, чем само борновское приближение, было впервые высказано М. Л. Тер-Микаеляном [27].

Так как $Ze^2/ma\Theta \sim (\hbar/mR) (RZe^2/a\Theta\hbar)$ и $\hbar/mR \ll 1$, то существует довольно большая область углов Θ , в которой выполняются неравенства $RZe^2/a\Theta\hbar \gg 1$ и $Ze^2/ma\Theta \ll 1$. Отметим, что именно эта область Θ оказывается наиболее интересной при изучении излучения быстрых электронов в кристалле, поскольку интенсивность излучения в ней достигает максимума и имеются резкие пики в спектре излучения.

Таким образом, спектр излучения релятивистских частиц в кристалле определяется формулой (92) вплоть до таких значений ε и Θ , для которых выполнены неравенства

$$Ze^2/ma\Theta \ll 1; \quad Ze^2/\varepsilon a\Theta^2 \ll 1. \quad (100)$$

Во второе из этих неравенств входит энергия частицы, и при достаточно большом ее значении это неравенство всегда может быть выполнено. Первое неравенство от ε не зависит и нарушается при $\Theta \sim Ze^2/ma$.

Получим теперь интенсивность излучения, когда первое из неравенств (100) не выполняется, т. е. выполняется неравенство $Ze^2/ma\Theta \gtrsim 1$. Воспользуемся для этого формулой (47) для интенсивности излучения, справедливой при выполнении неравенств

$$z_{\text{эф}} \ll \delta^{-1}; \quad \chi_1 \ll \chi_0 \quad (101)$$

(соотношение между углами ϑ_e и ϑ_h может быть произвольным). Так как $z_{\text{эф}} \sim R/\Theta$, то неравенства (101) приобретают вид

$$\delta R/\Theta \ll 1; \quad Ze^2/\varepsilon a\Theta^2 \ll 1. \quad (102)$$

Используя формулу (47), получим с учетом первой поправки по малому параметру χ_1/χ_0 следующее выражение для интенсивности излучения:

$$\frac{dI_c}{d\omega} = N_c \frac{2e^2}{\pi} Ra\Theta \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{y} K(\xi(\tilde{y})), \quad (103)$$

где функция $K(\xi)$ определяется формулой (48),

$$\begin{aligned} \xi(\tilde{y}) = \frac{\varepsilon\vartheta_e(\tilde{y})}{2m} = \frac{Ze^2}{2ma\Theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} - \frac{e}{|e|} \frac{Ze^2}{\varepsilon a\Theta^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} \tilde{x} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \int_{-\infty}^{\tilde{x}} \tilde{U}(\tilde{x}', \tilde{y}) d\tilde{x}' \right) + \dots \right] \right\} \end{aligned}$$

и тильда, как и прежде, служит для обозначения соответствующих безразмерных величин. (При выводе формулы (103) воспользовались тем, что интеграл по переменной x равен $N_z a\Theta$.)

Формула (103) справедлива как при $Ze^2/ma\Theta \gg 1$, так и при $Ze^2/ma\Theta \ll 1$. В последнем случае она приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{dI_c}{d\omega} = & N_c \frac{2e^2}{3\pi} \left(\frac{Ze^2}{m} \right)^2 \frac{R}{a\Theta} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{y} \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} - \right. \\ & - \frac{e}{|e|} \frac{Ze^2}{\epsilon a\Theta^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} \tilde{x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) \right) \times \\ & \left. \times \left(\frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\tilde{x}} \tilde{U}(\tilde{x}', \tilde{y}) d\tilde{x}' \right) + \dots \right]^2. \end{aligned} \quad (104)$$

Эта формула отличается от формулы (94), имеющей борновский характер, тем, что она содержит поправку, определяющую зависимость интенсивности излучения от знака заряда частицы. Отметим, что в зависимости от вида потенциала $U(x, y)$ эта поправка может приводить как к увеличению, так и к уменьшению излучения электрона (или позитрона); для гауссова потенциала $U(x, y) = U_0 \exp[-(x^2 + y^2)/R^2]$ вклад поправки равен нулю. С уменьшением угла Θ различие между излучением электрона и позитрона быстро возрастает. При тех условиях, когда вклад рассматриваемой поправки становится сравнимым с вкладом главного члена ($Ze^2/\epsilon a\Theta^2 \sim 1$), необходим учет эффекта каналирования частиц в кристалле, и, как будет показано в следующем разделе, в этом случае будет велико различие в излучении электрона и позитрона.

Формулы (103) и (104) показывают, что при $Ze^2/ma\Theta > 1$ когерентный характер излучения нарушается и имеет место подавление излучения (ср. с разд. 5). В частности, при $\epsilon \rightarrow \infty$ интенсивность излучения в максимуме, т. е. при $\Theta \sim \delta R$, стремится к нулю.

Итак, область применимости формулы для интенсивности излучения быстрых частиц в кристалле в первом борновском приближении является гораздо более широкой, чем область применимости самого борновского приближения. При $Ze^2/ma\Theta > 1$ происходит подавление излучения, и интенсивность излучения в максимуме при $\epsilon \rightarrow \infty$ не растет неограниченно. Наконец, интенсивность излучения зависит от знака заряда частицы, причем этот эффект определяется параметром $Ze^2/\epsilon a\Theta^2$. В тех случаях, когда становится существенным каналирование частиц ($Ze^2/\epsilon a\Theta^2 \sim 1$), формулы, представленные в этом разделе, перестают быть справедливыми.

8. ИЗЛУЧЕНИЕ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ И ПОЗИТРОНОВ ПРИ КАНАЛИРОВАНИИ

Рассмотрим, наконец, тормозное излучение релятивистских электронов и позитронов, когда в (100) не выполняется неравенство $Ze^2/\varepsilon a \Theta^2 \ll 1$. Переписав его в виде $Ze^2/\varepsilon a \Theta \ll \Theta$ и заметив, что по порядку величины $Ze^2/\varepsilon a \Theta$ представляет собой характерный угол ϑ_e рассеяния частицы цепочкой атомов кристалла, видим, что это неравенство требует малости угла рассеяния по сравнению с углом влета частиц в кристалл: $\vartheta_e \ll \Theta$. Если же $\vartheta_e \sim \Theta$, то возникает новое явление — каналирование, заключающееся в том, что частицы движутся в каналах, образованных атомами кристаллических осей (или плоскостей), периодически отклоняясь от направления оси канала на малые углы $\vartheta_e \sim \vartheta_{ch}$, где ϑ_{ch} — критический угол каналирования [51—53]. При осевом каналировании $\vartheta_{ch} \sim \sqrt{Ze^2/\varepsilon a}$, а при плоскостном каналировании $\vartheta_{ch} \sim \sqrt{RZe^2/\varepsilon a^2}$. Каналирование при выводе формул разд. 7 не учитывалось, поэтому теперь рассмотрим излучение в условиях каналирования [56].

Так как каналированная частица взаимодействует с большим числом атомов, то эффективная константа взаимодействия ее с атомами будет большой и, следовательно, для описания движения частицы в канале можно пользоваться классической теорией.

Предполагая, что движение частиц в канале близко к периодическому в плоскости, перпендикулярной к оси канала, так что $\mathbf{r}(t+T) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}T$, где T — период колебания, легко получить из (18) следующее выражение для спектральной плотности:

$$\frac{d\mathcal{E}_{ch}}{d\omega} = \frac{e^2}{(2\pi)^2} \int \frac{\sin^2(MT(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})/2)}{\sin^2(T(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})/2)} |\mathbf{k} \times \mathbf{l}_T|^2 dO, \quad (105)$$

где

$$\mathbf{l}_T = \int_0^T dt \dot{\mathbf{v}}(t) \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}(t))].$$

Если частица совершает в канале M колебаний, $M \gg 1$, и критический угол каналирования значительно меньше характерного угла излучения релятивистской частицы, $\vartheta_{ch} \ll \vartheta_k$, то, согласно (28), из (105) следует:

$$\frac{d\mathcal{E}_{ch}}{d\omega} = M \frac{e^2}{T} \sum_{g \geq \delta'} \frac{\omega \mathbf{W}^2(g)}{g^2} \left[1 - 2 \frac{\delta'}{g} \left(1 - \frac{\delta'}{g} \right) \right], \quad (106)$$

где

$$\mathbf{W}(g) = \int_0^\infty dt \dot{\mathbf{v}}_{\perp}(t) \exp(igt);$$

$g(2\pi/T)n$, $n=1, 2, \dots$; $\delta' = \omega m^2/2\varepsilon^2$ и $\mathbf{v}(t)$ — компоненты скорости частицы в плоскости перпендикулярной оси канала.

Полная энергия, излученная частицей в канале при тех же условиях, равна *

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{ch}} = M \frac{2e^2}{3} \left(\frac{\varepsilon}{m} \right)^4 \int_0^T \dot{\mathbf{v}}_{\perp}^2(t) dt (1 + O(\vartheta_{\text{ch}}/\vartheta_k)). \quad (107)$$

В частном случае движения частицы в осцилляторном потенциале

$$\mathbf{v}_{\perp}(t) = \mathbf{v}_{\perp} \sin(2\pi t/T), \quad v_z \neq v$$

и

$$W(g) = \mathbf{v}_{\perp} \delta_{n1}$$

(δ_{n1} — символ Кронекера). Формула (106) при этом приобретает вид [59, 60]

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{ch}}}{d\omega} = \begin{cases} M \frac{e^2}{4\pi} \mathbf{v}_{\perp}^2 \omega T \left[1 - 2 \frac{\delta'T}{2\pi} \left(1 - \frac{\delta'T}{2\pi} \right) \right], & \delta' \leq \frac{2\pi}{T}; \\ 0, & \delta' = \omega m^2 / 2e^2 > 2\pi/T \end{cases} \quad (108)$$

Таким образом, при осцилляторном движении каналированной частицы ее спектр излучения имеет резкий максимум в области частот $\omega \sim 4\pi e^2 / m^2 T$.

Умножив $d\mathcal{E}_{\text{ch}}/d\omega$ на сумму поперечных сечений всех каналов S , получим интенсивность излучения пучка каналированных частиц (при единичной плотности потока падающих частиц)

$$dI_{\text{ch}}/d\omega \approx d\mathcal{E}_{\text{ch}}/d\omega S. \quad (109)$$

Сравним полную интенсивность и спектр излучения каналированных частиц с соответствующими величинами для аморфной среды и для когерентного излучения в отсутствии каналирования.

Легко видеть, что (106) имеет ту же структуру, что и (92) для интенсивности когерентного излучения в кристалле. Спектр в обоих случаях имеет резкие максимумы, но они соответствуют разным частотам: для каналирования максимумы возникают при $\omega_{\text{ch}} = (4\pi e^2 / T m^2) n$, для когерентного излучения — при $\omega_c = (4\pi \Theta e^2 / a m^2) n$.

Заметим, что характерные периоды осцилляций каналированных электронов T_- и позитронов T_+ различны — они определяются отношением ширины канала к критическому углу каналирования.

* При выводе формул (106) и (107), описывающих излучение каналированной частицы, были использованы те же допущения, которые обычно делаются в теории ондуляторного излучения [57, 58]. Поэтому формулы (106) и (107) описывают тормозное излучение не только каналированной частицы, но и излучение в ондуляторе с той лишь разницей, что физические причины, приводящие к периодическому движению частицы в кристалле и в ондуляторе, различны.

Для электронов ширина канала по порядку величины равна радиусу экранировки, а для позитронов она равна постоянной решетки, и, следовательно, $T_- \sim R/\vartheta_{ch}$; $T_+ \sim a/\vartheta_{ch}$. Поэтому, согласно (106), интенсивности излучения каналированных электронов и позитронов существенно различны.

Основной вклад в полную интенсивность излучения каналированных частиц вносит область частот вблизи $\omega \sim \varepsilon^2/m^2 T$. Так как в этой области частот $|W(g)| \sim \vartheta_e \sim \vartheta_{ch}$, то

$$dI_{ch}/d\omega \sim Me^2 (\vartheta_{ch}/\vartheta_k)^2 S. \quad (110)$$

При осевом каналировании электронов $S \sim N_{\perp} R^2$ и $M \sim N_z a/T_-$, где N_{\perp} — число каналов и N_z — число атомов вдоль направления движения частиц, причем $N_z N_{\perp} = N_c$. Для частот $\omega \sim \varepsilon^2 \vartheta_c/m^2 R$, согласно (110), находим

$$dI_{ch}/d\omega \sim N_c e^2 a R \vartheta_{ch} (\vartheta_{ch}/\vartheta_k)^2.$$

В аморфной среде

$$dI_a/d\omega \sim N_c e^2 (Ze^2/m)^2$$

и, следовательно,

$$(dI_{ch}/d\omega)/dI_a/d\omega \sim R/a \vartheta_{ch}. \quad (111)$$

Легко видеть, что для релятивистских электронов это отношение всегда велико, например для кремния при $\varepsilon \sim 10$ Гэв $dI_{ch}/d\omega \sim 10^3 \cdot dI_a/d\omega$.

Заметим, что при невыполнении условия каналирования, т. е. при $\Theta > \vartheta_{ch}$, для $\omega \sim \varepsilon^2 \Theta/m^2 R$, согласно (92), $dI_c/d\omega \sim (R/a\Theta) (dI_a/d\omega)$. Если же $\Theta < \vartheta_{ch}$, то пользоваться формулой (92) нельзя. Интенсивность излучения в этом случае определяется формулой (106). Однако при осевом каналировании электронов формула (92) все же приводит по порядку величины к правильному результату (111), если в (92) положить $\Theta \sim \vartheta_{ch}$.

Полная интенсивность излучения каналированных частиц, согласно (107), равна

$$I_{ch} \sim N_c e^2 a (\vartheta_{ch}/\vartheta_k)^2;$$

для аморфной среды [1]

$$I_a \sim N_c \varepsilon e^2 (Ze^2/m)^2.$$

В теории когерентного излучения, согласно (95),

$$I_{ch} \sim (\varepsilon/m^2 a) I_a.$$

Поэтому при осевом каналировании электронов

$$I_{ch}/I_a \sim \varepsilon/ma^2, \quad I_{ch} \sim I_c. \quad (112)$$

Для кремния при $\varepsilon \sim 10$ Гэв $I_{ch} \sim 10I_a$.

Таким образом, при излучении электронов в осевом канале в спектре излучения есть выделенная область частот, интенсивность излучения в которой значительно превосходит интенсивность тормозного излучения в аморфной среде.

При падении электронов под малым углом к кристаллографической плоскости возникает плоскостное каналирование. Период колебания в плоскостном канале оказывается несколько большим, чем при осевом каналировании, так как при плоскостном каналировании уменьшается критический угол ϑ_{ch} . При этом в режим каналирования захватывается большее число частиц пучка, поскольку теперь $S_{пл} \sim (a/R)S_{ос}$. Поэтому в отличие от осевого каналирования максимум спектра излучения при плоскостном каналировании смещается в сторону меньших частот. Для получения спектра и полной интенсивности излучения необходимо умножить формулы (111) и (112) на a/R и в качестве ϑ_{ch} взять критический угол плоскостного каналирования.

Период T_+ каналированных позитронов в a/R раз больше периода T_- каналированных электронов из-за большей ширины канала. Поэтому максимум спектра излучения позитронов смещается в сторону меньших частот по сравнению с максимумом спектра электронов и его значение становится в a/R раз меньше интенсивности излучения электронов.

Следовательно, спектр излучения при каналировании отличается и от спектра излучения в отсутствие каналирования, и от спектра тормозного излучения в аморфной среде. Этот спектр зависит от характера каналирования и от знака заряда каналированной частицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., «Наука», 1969.
2. Ахиезер А. И., Болдышев В. Ф., Шульга Н. Ф. «ТМФ», 1975, т. 23, № 1, с. 11.
3. Шульга Н. Ф. Диссертация «Теория когерентных эффектов в тормозном излучении и упругом рассеянии быстрых заряженных частиц». Харьков, 1976.
4. Schiff L. I. «Phys. Rev.», 1956, v. 103, p. 443.
5. Морс П. М., Фешбах Х. Методы теоретической физики. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
6. Glauber R. J. Lectures in Theoretical Physics. V. 1, N.Y., 1959.
7. Барбашов Б. М. и др. «ЭЧАЯ», 1973, т. 4, вып. 3, с. 623.
8. Wu T. «Phys. Rev.», 1957, v. 108, p. 446.
9. Abarbanel H. D. I., Itzykson C. «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 23, p. 53.
10. Sugar R. L., Blancbencler R. «Phys. Rev.», 1969, v. 183, p. 1387.
11. Wallace S. J. «Phys. Rev. Lett.», 1971, v. 27, p. 622.
12. Wallace S. J. «Ann. Phys.», 1973, v. 78, p. 190.
13. Wallace S. J. «Phys. Rev. D», 1973, v. 8, p. 1934.
14. Baker A. Ibid., 1972, v. 6, p. 3462.

15. Vaker A. *Ibid.*, 1973, v. 8, p. 1937.
16. Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С. Излучение релятивистских электронов. М., Атомиздат, 1973.
17. Байер В. Н., Катков В. М. «Докл. АН СССР. Сер. физ.», 1976, т. 227, с. 325.
18. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., «Наука», 1967.
19. Болдышев В. Ф., Шульга Н. Ф. «УФЖ», 1976, т. 21, с. 10.
20. Ахиезер А. И., Болдышев В. Ф., Шульга Н. Ф. В кн.: Труды VII Всесоюзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами. М., Изд-во МГУ, 1976, с. 178.
21. Frish O. R., Olson D. N. «Phys. Rev. Lett.», 1959, v. 2, p. 219.
22. Ахиезер А. И., Болдышев В. Ф., Шульга Н. Ф. «Ядерная физика», 1975, т. 22, с. 1185.
23. Тер-Микаелян М. Л. «ЖЭТФ», 1953, т. 25, с. 289.
24. Калашников Н. П., Коптелов Э. А., Рязанов М. И. «Письма в ЖЭТФ», 1972, т. 15, с. 20.
25. Калашников Н. П., Мур В. Д. «Ядерная физика», 1972, т. 16, с. 1117.
26. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
27. Тер-Микаелян М. Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1969.
28. Рязанов М. И. «УФН», 1974, т. 114, с. 393.
29. Болотовский Б. М., Воскресенский Г. В. «УФН», 1966, т. 88, с. 209.
30. Гарибян Г. М. В кн.: Вопросы физики элементарных частиц. Материалы VIII Всесоюзной школы по физике элементарных частиц и высоких энергий. АРУС-1975. Ереван, Изд-во ЕФИ, 1975, с. 409.
31. Ахиезер А. И., Болдышев В. Ф., Шульга Н. Ф. «Докл. АН СССР. Сер. физ.», 1976, т. 226, с. 295; «УФЖ», 1976, т. 21, с. 353.
32. Ландау Л. Д., Померанчук И. Я. «Докл. АН СССР. Сер. физ.», 1953, т. 92, с. 535, 735.
33. Фейнберг Е. Л. «ЖЭТФ», 1966, т. 50, с. 202.
34. Фейнберг Е. Л. В кн.: Проблемы теоретической физики. Памяти И. Е. Тамма. М., «Наука», 1972.
35. Ахиезер А. И., Болдышев В. Ф., Шульга Н. Ф. В кн.: Тезисы докладов VIII Всесоюзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с монокристаллами. М., Изд-во МГУ, 1976, с. 14.
36. Bethe H., Maximon L. «Phys. Rev.», 1954, v. 93, p. 768.
37. Olsen H., Maximon L., Wergeland H. «Phys. Rev.», 1957, v. 106, p. 27.
38. Farry W. «Phys. Rev.», 1934, v. 46, p. 391; Sommerfeld A., Maue A. «Ann. Phys.», 1935, v. 22, p. 629.
39. Фихтенгольд Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М., «Наука», 1966.
40. Ахиезер А. И., Фомин П. И., Шульга Н. Ф. «Письма в ЖЭТФ», 1971, т. 13, с. 713.
41. Ferretti V. «Nuovo cimento», 1950, v. 7, p. 118.
42. Тер-Микаелян М. Л. «ЖЭТФ», 1953, т. 25, с. 296.
43. Überall H. «Phys. Rev.», 1956, v. 103, p. 1055.
44. Diambriani G. «Rev. Mod. Phys.», 1968, v. 40, p. 611.
45. Timm U. «Fortschr. Phys.», 1969, Bd 17, S. 766.
46. Kato S. e.a. «J. Phys. Soc. Japan», 1965, v. 20, p. 303.
47. Feinberg E. L., Pomerančuk I. «Nuovo cimento Suppl.», 1956, v. 3, p. 652.
48. Ferretti V., Gamberini G. «Nuovo cimento», 1970, v. 3, p. 113.
49. Ferretti V. «Nuovo cimento», 1972, v. 7B, p. 225.
50. Калашников Н. П. «ЖЭТФ», 1973, т. 64, с. 1425.
51. Линдхард Й. «УФН», 1969, т. 99, с. 249.
52. Томпсон М. *Ibid.*, с. 297.
53. Gemmell D. S. «Rev. Mod. Phys.», 1974, v. 46, p. 129.
54. Бочек Г. Л. и др. «ЖЭТФ», 1974, т. 67, с. 806.

55. Walker R. L., Bergman V. L., Bloom S. D. «Phys. Rev. A», 1975, v. 11, p. 736.
56. Ахизер А. И., Болдышев В. Ф., Шульга Н. Ф. Препринт 77-38 ХФТИ. Харьков, 1977.
57. Гинзбург В. Л. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 1947, т. 2, с. 165.
58. Алферов Д. Ф., Башмаков Ю. А., Бессонов Е. Г. «Тр. ФИАН СССР», 1975, т. 80, с. 100.
59. Kumachov M. A. «Phys. Lett. A», 1976, v. 57, p. 17.
60. Кумахов М. А. «Докл. АН СССР. Сер. физ.», 1976, т. 230, с. 1077.