«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1979, ТОМ 10, ВЫП. 3

УДК 53.12.1

СИНГУЛЯРНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

А. Т. Филиппов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В работе изложены методы и результаты теории уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом, недостаточно освещенные в литературе. Приведена детальная классификация сингулярных потенциалов, аналогичная классификации теорий поля (перенормируемые, неперенормируемые и т. п.). Изложены методы определения асимптотики волновой функции вблизи особой точки потенциала и исследована ее зависимость от константы связи и орбитального момента. Обсуждены основные приближенные методы решения уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом: асимптотическая теория возмущений и дифференциальная интерполяция. Рассмотрены потенциалы с особенностью на конечном расстоянии, имеющие важные приложения в кварковой модели. Кратко обсуждается переход к импульсному пространству и способы вычисления амплитуды рассеяния на сингулярных потенциалах.

Not widely recognized methods and results of the theory of the Schroedinger equation with a singular potential are reviewed. Singular potentials, like field theories, are classified into renormalizable, non-renormalizable, asymptotically free etc. Methods for calculating asymptotic behaviour of the Schroedinger wave function near the singularity of the potential are reviewed. The coupling constant as well as the angular momentum dependence of the wave function is investigated. Approximate methods for solving the singular Schroedinger equation, such as asymptotic perturbation theory and differential interpolation, are exposed and discussed. A special attention is paid to potentials with a surface singularity which have interesting applications to quark theory. Finally, a brief discussion of the transition to the momentum space and of calculating the scattering amplitude is given.

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи квантовой теории поля сводятся к решению уравнений типа уравнения Шредингера и его обобщений (квазипотенциальные уравнения). В отличие от задач обычной квантовой механики, соответствующие потенциалы (квазипотенциалы) оказываются *сингулярными* на малых расстояниях. Этот обзор посвящен теории уравнения Шредингера с сингулярными потенциалами, возникающими в перенормируемых и неперенормируемых теориях поля *.

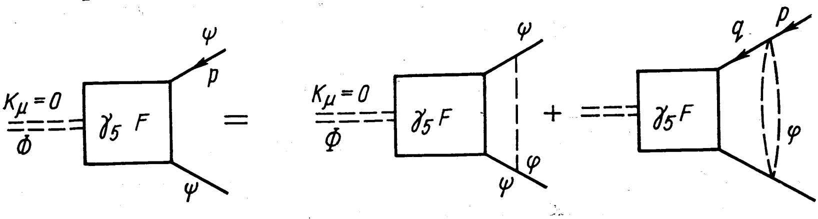
Хорошо известно, что уравнения Шредингера с сингулярным при $r \to 0$ потенциалом $gV(r)$ ($V_1(r) = 1/r^2$; $V_2 = \ln(r_0/r)/r^2$; $V_3 = 1/r^3$, $V_4 = 1/r^4$ и т. п.) имеют решение. Это решение единственное ** при $g > 0$ (отталкивание) и зависит от одной произвольной константы при $g < 0$ (притяжение). Если же уравнение Шредингера решать методом возмущений по константе связи g, то немедленно получаются расходимости (на нижнем пределе расходятся интегралы в r-пространстве или на верхнем пределе — в p-пространстве). Эти расходимости — логарифмические для V_1, V_2 и степенные для V_3, V_4. Чтобы устранить расходимости, в первом случае можно использовать теорию ренормировок, и такие потенциалы естественно назвать *перенормируемыми* (П); во втором — обычная теория перенормировок не работает, потенциалы — *неперенормируемые* (Н). Причина состоит в том, что точную волновую функцию для неперенормируемого потенциала нельзя разложить ни в сходящийся, ни в асимптотический ряд по степеням g, так как она содержит члены типа $g^{m/n} \ln^N g$. Чтобы получать правильные результаты в неперенормируемом случае, необходимо научиться «ухватывать» эту неаналитическую зависимость от g. Чтобы методы, найденные для уравнения Шредингера, можно было использовать в квантовой теории поля, они должны быть достаточно простыми, не требующими явного аналитического решения задачи. Такие методы модификации теории возмущений (*асимптотическая теория возмущений*, *метод дифференциальной интерполяции*, *метод сведения интегральных уравнений к дифференциальным*) были разработаны в последнее время и используются для исследования некоторых проблем физики элементарных частиц (теория слабого взаимодействия лептонов, поправки к модели векторной доминантности, кварковая модель мезонов и др.)

В частном случае неперенормируемых теорий поля — в неполиномиальных теориях — потенциал может быть еще более сингулярным [$gV_5(r) = g \exp(-h/r)$], а для теорий, лежащих на границе локальных и нелокальных теорий, он может иметь сингулярность на конечном расстоянии от начала [$gV_6(r) = g/(r^2 - R^2)$]. Такие потенциалы нашли интересные приложения в кварковой модели адронов, так как они сильно сдерживают кварки внутри адрона и естественно возникают при обмене бесконечно большим числом адронных резонансов.

* Существует довольно хороший обзор [1] по теории сингулярных потенциалов; вопросы, хорошо освещенные в нем, рассматриваться здесь не будут.

** Полагаем, что решение $u(r)$ удовлетворяет условию $u \xrightarrow[r \to 0]{} 0$.

Систематический метод получения потенциалов в квантовой теории поля основывается на *квазипотенциальном* подходе [2—6]. В некоторых случаях к простым квазипотенциальным уравнениям можно прийти и непосредственно суммируя диаграммы Фейнмана. Рассмотрим, например, уравнение:



для псевдоскалярного связанного состояния Φ фермионов ψ и $\bar{\psi}$, взаимодействующих со скалярным полем φ (глюоны):

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = f_1\colon \bar{\psi}\psi\varphi\colon + \frac{1}{2!} f_2\colon \bar{\psi}\psi\varphi^2\colon + \ldots \tag{1}$$

Определив волновую функцию соотношением (4-преобразование Фурье в евклидовом пространстве) *

$$F(p^2) = p^{-1}(M^2+p^2)^{-1}\int\limits_0^\infty dr J_{3/2}(pr)\, r^{1/2} u(r), \tag{2}$$

находим для u уравнение (в евклидовом r-пространстве)

$$u'' - [M^2 + 3/(4r^2) + f_1^2\Delta_F(r) + f_2^2\Delta_F^2(r)/2 + \ldots]\, u(r) = 0, \tag{3}$$

где $\Delta_F(r) \equiv mK_1(mr)(4\pi^2 r)^{-1}$.

В уравнении (3) потенциал — просто пропагатор (произведение пропагаторов) глюона. Первый член есть П-потенциал, второй — Н-потенциал. На этом примере нетрудно проследить, как получить потенциал, соответствующий суперпропагатору [7—9]. Для этого достаточно в лагранжиане (1) взять бесконечное число членов

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = f\colon \bar{\psi}\psi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!}(h\varphi)^n\colon. \tag{4}$$

Структура членов, появляющихся в (3), очевидна из предыдущих рассуждений, и мы приходим к потенциалу вида

$$gV(r) = f^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n [h^2\Delta_F(r)]^n \equiv f^2 V(r), \tag{5}$$

* Здесь и ниже J_ν, N_ν — цилиндрические функции первого и второго рода; I_ν, K_ν — цилиндрические функции мнимого аргумента.

где $b_n = a_n/n!$. Этот потенциал имеет смысл, если ряд сходится. Если ряд расходится при некоторых или при всех значениях r, то необходимо использовать более сложные методы аналитического продолжения [5].

Аналогичные уравнения можно получить для амплитуды рассеяния. Так, уравнение Бете — Солпитера для рассеяния лептонов в 4-фермионной теории

$$\mathcal{L}_{\rm int} = \frac{G_W}{\sqrt{2}} j^+_\mu j_\mu;$$

$$j_\mu = \bar{e}\gamma_\mu (1+\gamma_5)\nu_e + \bar{\mu}\gamma_\mu (1+\gamma_5)\nu_\mu \tag{6}$$

можно свести к уравнению Шредингера, которое при равном нулю 4-импульсе сталкивающихся лептонов имеет вид [10]

$$u'' - [M^2 + (n(n+2) + 3/4) r^{-2} + gV(r)]\, u(r) = 0, \tag{7}$$

где $gV \underset{r\to 0}{\sim} G_W^2 r^{-6}$; n — номер парциальной волны в разложении амплитуды рассеяния по полиномам Гегенбауэра. Такого же типа уравнения можно построить и в теории с промежуточным W-бозоном:

$$\mathcal{L}_{\rm int} = g_W [j^+_\mu W_\mu + j_\mu W^+_\mu], \tag{8}$$

а также в теориях с неполиномиальным взаимодействием, например в теории, в которой $j_\mu \to j_\mu \exp(h\overset{+}{\varphi}\varphi/2)$, где φ — заряженное скалярное поле [11]. В последнем случае борновский член содержит дополнительный множитель $\sim [1 - h^2\Delta_F^2(r)]^{-1}$, т. е. потенциал в (7) имеет вид $\sim V(r)\,[1 - h^2\Delta_F^2]^{-1}$. Это выражение имеет при некотором значении $r = R$ полюс, т. е. помимо особенности в нуле потенциал имеет особенность на конечном расстоянии (СКР-потенциал, *или потенциал с сингулярностью на конечном расстоянии*) [5]. Сверхперенормируемые теории поля, $\mathcal{L}_{\rm int} = f\varphi^3$, приводят к регулярным потенциалам, растущим медленнее r^{-2}. Более строгая классификация потенциалов приводится ниже.

Отметим, что при частичном суммировании диаграмм, описывающих потенциал, его характер может измениться. Например, в квантовой электродинамике потенциал в $2n$-м приближении теории возмущений ведет себя при $r \to 0$ как $gV_{2n} \sim (\alpha^n/r^2) \times \ln(m_e r)]^{n-1}$, но если просуммировать его с помощью метода ренормгруппы [12], то получим на малых расстояниях

$$gV(r) \underset{r\to 0}{\sim} (\alpha/r^2)\,[1 + \alpha \ln(m_e r)]^{-1}. \tag{9}$$

Этот сингулярный потенциал в то же время является СКР-потенциалом. Теории с асимптотической свободой [13] приводят к потенциалам вида

$$gV(r) \sim (\alpha/r^2)\,[1 - \alpha \ln(mr)]^{-1}, \tag{10}$$

не имеющим особенности на малых расстояниях $r < m^{-1}$. Такие сингулярные потенциалы находятся на границе между сингулярными и регулярными и имеют особенно сложные свойства.

1. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ

В обычной теории уравнения Шредингера потенциалы подчиняются условию

$$\int_0^{r_0} dr\, r\, |V(r)| < \infty. \tag{11}$$

Такие потенциалы называются *регулярными* * и для них можно пользоваться всеми результатами обычной теории потенциального рассеяния [14—18]. Ряды теории возмущений, рассматриваемые ниже, не содержат расходимостей, точные решения регулярно зависят от константы связи, а асимптотика точной волновой функции совпадает с асимптотикой «свободной» волновой функции (см. Приложение 1). *Сингулярными* при $r \to 0$ потенциалами называются потенциалы, для которых

$$\int_0^{r_0} dr\, r\, |V(r)| = \infty. \tag{12}$$

Приведем более подробную классификацию таких потенциалов. Рассмотрим уравнение Шредингера для парциальной волновой функции $u(k, l, r)$ **:

$$d^2u/dr^2 + [k^2 - l(l+1)/r^2 - gV(r)]\, u(r) = 0. \tag{13}$$

Для регулярного потенциала существует решение u, удовлетворяющее граничному условию $u \underset{r \to 0}{\to} 0$ или, точнее,

$$u = u(k, l, r) \sim r^{l+1}, \quad r \to 0. \tag{14}$$

С помощью этого выражения можно стандартными способами [14—18] найти фазы рассеяния, связанные состояния и т. п. Решение уравнения (13), удовлетворяющее этому граничному условию, можно получить, пользуясь интегральным уравнением

$$u(r) = Zu_0(r) - \frac{g}{W[u_0, v_0]} \times$$
$$\times \int_0^r d\rho V(\rho)\, u(\rho)\, [u_0(r)\, v_0(\rho) - u_0(\rho)\, v_0(r)], \tag{15}$$

* Точнее, в точке $r = 0$. Ниже будем считать, что $V(r)$ не имеет особенностей при $0 < r < r_0$ и в этом интервале $V(r)$ не меняет знак.

** При малых r в аналогичном виде можно записать и уравнение Логунова — Тавхелидзе (см. [5]).

где

$$u_0 \equiv j_l(kr) \equiv \sqrt{kr}\, j_{l+1/2}(kr);$$

$$v_0 \equiv n_l(kr) \equiv \sqrt{kr}\, N_{l+1/2}(kr); \tag{16}$$

$$W(u_0,\ v_0] = u_0\, dv_0/dr - v_0\, du_0/dr = 2k/\pi. \tag{17}$$

При $k=0$ уравнение (15) имеет вид

$$u(r) = Zr^{l+1} + \frac{g}{2l+1}\int\limits_0^r d\rho V(\rho)\, u(\rho)\,[r^{l+1}\rho^{-l} - \rho^{l+1}r^{-l}], \tag{18}$$

где для удобства дальнейшего изложения выберем другую нормировку волновой функции. Уравнение (18) наиболее удобно для исследования обсуждаемых ниже проблем.

При достаточно малых значениях k поправки можно вычислять с помощью следующей теории возмущений, которую, как будет показано ниже, можно использовать и для сингулярных потенциалов. Положим $V = V_0 + V_1$ и обозначим линейно независимые решения (13) с $V = V_0$ символами $\tilde{u}_0$, $\tilde{v}_0$. Тогда решение полного уравнения (13) с потенциалом $V = V_0 + V_1$, можно найти, решая интегральное уравнение

$$u(k,\ r) = \tilde{u}_0(r) +$$

$$+ \int\limits_0^r d\rho \frac{k^2 - gV_1(\rho)}{W[\tilde{u}_0,\ \tilde{v}_0]}\, u(k,\ \rho)\,[\tilde{u}_0(r)\,\tilde{v}_0(\rho) - \tilde{u}_0(\rho)\,\tilde{v}_0(r)]. \tag{19}$$

Если потенциал регулярен, то (15) и (19) можно решать посредством итераций, получая представление $u(k,\ r)$ в виде ряда по степеням константы g. При этом каждый член ряда выражается в виде сходящегося интеграла, а сам ряд при достаточно малых g и r равномерно сходится, т. е. решение есть голоморфная функция g в некоторой окрестности точки $g = 0$. Доказательство этого утверждения (см. [15]) основано на том обстоятельстве, что отношение двух последовательных приближений в разложении

$$u(r) = u_0(r) + gu_1(r) + g^2u_2(r) + \ldots \tag{20}$$

удовлетворяет условию

$$u_{n+1}(r)/u_n(r) \to 0, \quad r \to 0, \tag{21}$$

вытекающему из условия регулярности потенциала (11). Из (21) следует, что асимптотика точного решения совпадает с асимптотикой нулевого приближения $\tilde{u}_0(r)$.

При сингулярном потенциале уже первое приближение теории возмущений для (18) выражается через расходящийся интеграл

$$u_1(r) = \frac{Z}{2l+1} \left\{ r^{l+1} \int_0^r \rho V(\rho)\, d\rho - r^{-l} \int_0^r \rho^{2l+2} V(\rho)\, d\rho \right\}. \qquad (22)$$

Строго говоря, для расходимости первого интеграла на нижнем пределе необходимо потребовать, чтобы потенциал при достаточно малых значениях сохранял знак. В дальнейшем будем считать, что это условие выполнено для всех рассматриваемых сингулярных потенциалов. Таким образом, для сингулярного потенциала уравнение (18) необходимо предварительно регуляризовать. Существует много способов *регуляризации*, для наших целей наиболее удобен простейший:

$$V_\varepsilon(r) = \left\{ \begin{matrix} V(r), & r > \varepsilon \\ 0, & r \leqslant \varepsilon \end{matrix} \right\} \equiv V(r)\,\theta(r-\varepsilon), \qquad (23)$$

подробно изученный в работах [19, 20]. Для произвольного сингулярного потенциала отталкивания физические величины (амплитуды и фазы рассеяния, энергии связанных состояний) при снятии регуляризации ($\varepsilon \to 0$) стремятся к точным значениям, вычисленным для точного потенциала $V(r)$ [19, 20]. Существенные преимущества регуляризации (23) — возможность ее использования для произвольных сингулярных потенциалов и сохранение вида уравнения (13) (меняются лишь граничные условия).

Выделим среди сингулярных потенциалов класс перенормируемых потенциалов, для которых все расходящиеся члены ряда теории возмущений можно собрать в нормировочный множитель волновой функции. Тогда при подходящем выборе множителя Z_ε (константа перенормировки), который может быть бесконечным (или равным 0) при $\varepsilon \to 0$, получим конечное решение, которое будем называть *перенормированным рядом теории возмущений*.

Рассмотрим следующую теорему.

Теорема 1. Пусть сингулярный потенциал $V(r)$ сохраняет знак и регулярен при $0 < r \leqslant r_0$. Такой потенциал перенормируем в том, и только в том случае, если для всякого $\delta > 0$ найдется такое C_δ и $r_\delta > 0$ $(r_\delta < r_0)$, что $|V(r)| < C_\delta r^{-2-\delta}$ при $r < r_\delta$.

Доказательство этой теоремы дано в Приложении 2 *. Примеры перенормируемых потенциалов: $V(r) = (1/r^2) \ln^\alpha (r_0/r)$, $\alpha \geqslant -1$; $V(r) = (1/r^2) \ln^\alpha (r_0/r) [\ln (\ln r_0/r)]^\beta$, $\alpha \geqslant -1$, $\beta \geqslant -1$ и т. д.

* Там же показано, как можно вычислить члены ряда перенормированной теории возмущений.

Эта теорема позволяет дать классификацию потенциалов, аналогичную классификации теорий поля. Можно показать, что квазипотенциальные уравнения, в которых квазипотенциал определяется первым приближением теории возмущений (борновский член), приводят при $r \to 0$ к уравнению Шредингера с потенциалом, который для перенормируемых теорий перенормируем, а для неперенормируемых теорий неперенормируем.

Среди неперенормируемых потенциалов будем различать *неполиномиальные* потенциалы, связанные с суперпропагаторами в неполиномиальных теориях поля (см. выше). Эти потенциалы, в свою очередь, разделим на *локализуемые* ($\sim \exp(h/r^n)$, $r \to 0$) и СКР-потенциалы, обращающиеся в бесконечность при некотором $r = R \neq 0$. Такие потенциалы связаны соответственно с локализуемыми и почти локализуемыми теориями поля (см. [7—9]). Из перенормируемых потенциалов будем специально выделять *асимптотически свободные* и *нуль-зарядные* потенциалы, возникающие в соответствующих квантовых теориях поля (см. выше). Такая более подробная классификация на регулярные, сингулярные, перенормируемые и неперенормируемые потенциалы в значительной мере условна, но мы ей будем пользоваться, так как она удобна и напоминает о соответствующих проблемах квантовой теории поля.

В данном обзоре в основном рассмотрим потенциалы, сингулярные при $r \to 0$ или на конечных расстояниях. Однако аналогичные методы можно использовать и для изучения сингулярности при $r \to \infty$. Соответствующую задачу можно свести к нашему случаю простой заменой $y = r_0/r$. Если $k = 0$, то критерий регулярности потенциала на бесконечности следует из (11):

$$\int_{r_0}^{\infty} dr\, r\, |V(r)| < \infty^{*}. \tag{24}$$

При $k \neq 0$ положение несколько сложнее, поэтому обсудим его после изложения асимптотической теории возмущений.

2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ И НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Для изучения поведения решений сингулярного уравнения Шредингера (13) при $r \to 0$ можно в большинстве случаев воспользоваться квазиклассическим приближением. При этом удобно сна-

---

* Чтобы показать это, необходимо сделать указанную замену в (13), написать условие (11) для преобразованного потенциала $y^{-4} V(y^{-1})$ и вернуться к переменной r.

чала перевести особую точку $r = 0$ в бесконечность. Сделав замену переменной $x = \ln(r_0/r)$ или $y = r_0/r$, можно представить уравнение (13) в следующем виде:

$$d^2\varphi/dx^2 = Q(x)\,\varphi(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty; \tag{25}$$

$$Q(x) = \lambda^2 + gq(x) - k^2 r_0^2 \exp(-2x), \quad q(x) = r^2 V(r); \tag{26}$$

$$\exp(-x/2)\,\varphi(x) = u(r), \quad x = \ln(r_0/r), \quad \lambda = l + 1/2. \tag{27}$$

Будем теперь интересоваться поведением решений уравнения (25) при $x \to \infty$, а это — хорошо изученная задача. Основные результаты об асимптотике решений этого уравнения можно найти в Приложении 1. Здесь приведем асимптотики, непосредственно получающиеся из теорем Приложения 1 (П. 10). Если потенциал $V(r) > 0$ и таков, что выполнены условия (12), то решения уравнения (13) имеют асимптотику

$$u(r) \underset{r \to 0}{\sim} [\lambda^2/r^2 + gV(r) - k^2]^{-1/4} \times$$
$$\times \exp\left\{\pm \int_{r_0}^{r} d\rho\, [\lambda^2/\rho^2 + gV(\rho) - k^2]^{1/2}\right\}. \tag{28}$$

Аналогичное представление можно написать для потенциала притяжения, когда $V(r) < 0$. Выражение (28) формально совпадает с ВКБ-приближением, но его смысл и условия применимости другие (см. Приложение 1).

Из выражения (28) следует, что для потенциалов, удовлетворяющих условию

$$r^2 V(r) \to +\infty, \quad r \to 0, \tag{29}$$

асимптотика $u(r)$ при $r \to 0$ не зависит от l. Основываясь на этом, можно предположить, что регулярное решение уравнения (25) — *целая функция переменной* l, а отсюда следует, что амплитуда рассеяния имеет в комплексной плоскости l лишь полюсы.

На самом деле это утверждение можно доказать в более общем виде. Предположим, что потенциал $V(r)$ таков, что выполнены условия теоремы Милна для уравнения (25) (см. Приложение 1) и что при $0 < r \leqslant r_0$ потенциал регулярен по r. Согласно теореме об аналитической зависимости решений линейных систем от параметра (см. [21], с. 47), при любом фиксированном значении x и при любых фиксированных начальных значениях $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi'(0) = \varphi_0'$ решение $\varphi(x)$, удовлетворяющее этим начальным условиям, является целой функцией параметра l. Если это решение обращается в нуль при $x \to \infty$, то наше предположение доказано. Если $\varphi(x) \not\to 0$ при $x \to \infty$, то по теореме Милна $\varphi(x) \to \infty$. Построим тогда другое решение $\psi(x)$ по (П.2), что законно, так как согласно той же теореме можно считать, что $\varphi(x)$ не имеет нулей при $x \gg x_0$. Из рассуждений, приведенных в Приложении 3, следует, что $\varphi(x)\ \psi(x) < \varphi(x)/\varphi'(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow}$. Так как $\varphi(x) \to \infty$, то $\psi(x) \to 0$, и мы построим регулярное решение, которым является целая функция параметра l.

Если $r^2 gV(r) \to c$ при $r \to 0$, то волновые функции и амплитуда рассеяния имеют в комплексной l-плоскости корневые точки ветвления при $l = \pm\sqrt{c}$. Если же $r^2 V(r) \to 0$ при $r \to 0$ (например, асимптотически свободный потенциал), то природа особенностей в комплексной плоскости (вблизи $\lambda = 0$) гораздо сложнее. При этом асимптотическое представление при $\lambda \to 0$ непригодно, и необходимо исследовать точные решения.

Если $r^2 gV(r,\ g) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} \infty$, то волновые функции имеют при $g = 0$ особенность, даже если $V(r,\ g)$ голоморфна в точке $g = 0$. Характер этой особенности очень сложен и общего способа ее выделения не существует.

Для *П-потенциалов* полезен следующий результат. Пусть

$$gV(r) = (g^2/r^2)\, f(g \ln r_0/r,\ g). \tag{30}$$

Потенциалы такого типа получаются в перенормируемых теориях поля [5], где функция $f(x,\ g)$ обладает свойствами: 1) при $|g| < g_0$ функция $f(x,\ g)$ голоморфна по x в точке $x = 0$; 2) при $|x| \leqslant x_0$ функция $f(x,\ g)$ разлагается в асимптотический (или сходящийся) ряд по степеням g. Положив $x = g \ln(r_0/r)$, приведем уравнение для φ к виду

$$d^2\varphi/dx^2 = [\lambda^2/g^2 + q(x,\ g)]\, \varphi(x). \tag{31}$$

Воспользовавшись теоремой Приложения 1 (П 11), покажем, что решения этого уравнения можно представить в следующем виде:

$$\varphi(x) = \exp[(\lambda/g)\, \chi(x)] \sum_{n=0}^{\infty} g^n \varphi_n(x), \tag{32}$$

где $\chi(x)$ и $\varphi_n(x)$ разлагаются в сходящиеся степенные ряды по x, а ряд в (32) — асимптотический. Функции χ и φ_n можно искать, подставляя (32) в (31). Так как перенормируемые теории поля приводят к потенциалам типа (32), этот результат дает сильные указания на то, что в перенормируемых теориях $g = 0$ существенна особая точка. Недавние исследования диаграмм теории возмущений произвольно высоких порядков в квантовой теории поля, по-видимому, подтверждают этот результат (см. [22—24]).

Для неперенормируемых потенциалов характер особой точки при $g = 0$ существенно иной. Рассмотрим неперенормируемый потенциал вида

$$gV(r) = f(g/r)/r^2, \quad r \leqslant r_0. \tag{33}$$

Положим $w = u(r)/r$, $y = g/r$. Тогда

$$d^2w/dy^2 = [-g^2K^2/y^4 + (\lambda^2 - 1/4)/y^2 + f(y)/y^2]\, w(y). \qquad (34)$$

Для исследования поведения $w(y, g)$ при $y \to 0$ и конечных значениях r достаточно исследовать поведение $w(y, g)$ при $y \to 0$ (и $g \to 0$). В общем случае решение уравнения (34) имеет при $y \to 0$ точку ветвления, характер ее зависит от вида функции $f(y)$.

Приведем теперь некоторые точно решаемые задачи при $k = 0$. Решение уравнения (13) с потенциалом *

$$gV(r) = \frac{1}{r^2}\left[\frac{f}{\ln^2(r_0/r)} + \frac{g}{\ln(r_0/r)}\right] \qquad (35)$$

заменой $x = \ln(r_0/r)$ можно выразить через вырожденную гипергеометрическую функцию. Анализ этого решения показывает, что оно регулярно по g при $g = 0$ и имеет существенную особенность и ветвление по f при $f = 0$. Этот результат, по-видимому, имеет место и для потенциала

$$gV(r) = (g/r^2)[\ln(r_0/r)]^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \qquad (36)$$

но точные решения в этом случае неизвестны.

Рассмотрим нуль-зарядные и асимптотически свободные потенциалы

$$gV(r) = (ag^2/r^2)[1 + bg\ln(r_0/r)]^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \ a > 0. \qquad (37)$$

Заменой переменной соответствующие уравнения сводятся в случае $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ к уравнениям Бесселя и к вырожденному гипергеометрическому уравнению. Приведем решение при $\alpha = 1$:

$$\varphi(x) = 2\lambda(x + 1/bg)\exp[-\lambda(x + 1/bg)]\,\Phi(1 + ag/\lambda, 2, 2\lambda(x + 1/bg)). \qquad (38)$$

Это решение имеет существенную особенность по g при $g = 0$ и существенную особенность с ветвлением по λ при $\lambda = 0$. (При $\alpha = 2$ в точке $\lambda = 0$ остается лишь ветвление, а при $g = 0$ — по-прежнему существенная особенность **.) Эти результаты не противоречат общим теоремам, так как потенциал (37) зависит от g весьма сложным образом. В частности, при $r = r_0 \exp(1/bg)$ он обращается в бесконечность (эта точка близка к $r = 0$, если $b < 0$, т. е. в нуль-зарядной ситуации).

* В асимптотически свободных теориях поля потенциалы имеют асимптотику такого или более общего вида (37).

** Результаты, относящиеся к потенциалу (37), были получены автором обзора в 1969 г. [25, 26]. Недавно наличие особенности при $\lambda = 0$ для более простых потенциалов типа (35) вновь было обнаружено в [27]. Хотя эти потенциалы имеют одинаковую асимптотику, их зависимость от g существенно различна.

Учитывая в перенормируемой теории поля вклады диаграмм теории возмущений до четвертого порядка включительно, можно получить потенциал

$$gV(r)=\frac{g^2}{r^2}\left[g^2a^4\ln^2(r_0/r)+2a^3bg\ln(r_0/r)+c\right], \tag{39}$$

где a, b, c — некоторые константы.

Решение уравнения (25) следующее:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)&=D_p\left[\sqrt{2}\,(gax+b)\right];\\ p&=-\left[1-c+\lambda^2/a^2g^2\right]/2,\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

где D_p — функция параболического цилиндра. Это решение есть целая функция λ и имеет существенную особенность по g при $g=0$ (в соответствии с полученными выше общими результатами).

В обзоре [1] можно найти некоторые точные решения для неперенормируемых потенциалов. Здесь приведем лишь одно простое решение. Для потенциала

$$gV(r)=ag^2r^{-2(n+1)},\quad a>0 \tag{41}$$

решение будет:

$$u(r)=\sqrt{r}\,K_{\lambda/n}(ag/nr^n). \tag{42}$$

Если λ/n — целое число, то решение имеет логарифмическую точку ветвления при $g=0$ ($\sim g^{\lambda/n}\ln g$), при λ/n, равном нецелому числу, точка ветвления будет корневого типа.

3. РЕГУЛЯРИЗОВАННАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ, ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРАТИЗАЦИИ И ОБРЕЗАНИЯ НА УНИТАРНОМ ПРЕДЕЛЕ

Структура ряда теории возмущений в перенормируемой теории, т. е. для перенормируемых потенциалов, была выяснена выше и в Приложении 2. Сумму всех членов ряда теории возмущений можно записать в виде

$$\varphi_D(x)=Z_D\left[\Psi(D)\,\varphi(x)+\Phi(D)\,\psi(x)\right], \tag{43}$$

где Φ, Ψ, φ, ψ представлены в виде рядов по степеням константы $\bar{g}\equiv g/2\lambda$:

$$\Phi(D)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{g}^n\Phi_n(D);\quad \Psi(D)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{g}^n\Psi_n(D); \tag{44}$$

$$\varphi(x)=\exp(-\lambda x)\sum_{n=0}^{\infty}\bar{g}^n\varphi_n(x);$$

$$\psi(x)=\exp(\lambda x)\sum_{n=0}^{\infty}\bar{g}^n\psi_n(x). \tag{45}$$

При этом $\Psi_n(D)\to\infty$, $\Phi_n(D)\to 0$, $D\to\infty$; $\exp(-\lambda x)\,\varphi_n(x)\to 0$, $\exp(-\lambda x)\,\psi_n(x)\to\infty$, $x\to\infty$.

Нетрудно показать, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — формальные решения уравнения (25). Как следует из рассмотрения примеров предыдущего раздела, эти ряды расходятся и в лучшем случае определяют асимптотические разложения решений. Представление (43) можно получить и не используя теорию возмущений.

Рассмотрим с этой целью уравнение ($k = 0$)

$$\varphi_D(x) = Z_D \exp(-\lambda x) + \\ + \frac{g}{2\lambda} \int_x^D d\xi q(\xi) \varphi_D(\xi) \{\exp[\lambda(\xi - x)] - \exp[-\lambda(\xi - x)]\}, \tag{46}$$

которое обсуждено в Приложении 2. Это интегральное уравнение эквивалентно дифференциальному уравнению

$$d^2\varphi_D/dx^2 = [\lambda^2 + gq(x)]\varphi_D(x) \tag{47}$$

с граничными условиями

$$\varphi_D(D) = Z_D \exp(-\lambda D); \\ \varphi_D'(D) = -\lambda Z_D \exp(-\lambda D). \tag{48}$$

Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — произвольные решения (линейно-независимые) уравнения (47), удовлетворяющие условию

$$W[\varphi(x), \psi(x)] = 1. \tag{49}$$

Решения уравнения (47), удовлетворяющие граничным условиям (48), очевидно, имеют вид (43), где

$$\Phi(D) = -\exp(-\lambda D)[\varphi'(D) + \lambda\varphi(D)] = \\ = -\frac{d}{dD}[\exp(+\lambda D)\varphi(D)]\exp(-2\lambda D); \tag{50}$$

$$\Psi(D) = \exp(-\lambda D)[\psi'(D) - \lambda\psi(D)] = \frac{d}{dD}[\exp(-\lambda D)\psi(D)]. \tag{51}$$

Для регулярных потенциалов φ и ψ можно выбирать так, что $\Psi(D)$ при $D \to \infty$ стремится к конечному пределу, а $\Phi(D)$ стремится к 0. Для этого достаточно взять $\varphi \sim \exp(-\lambda x)$ и $\psi \sim \exp(-\lambda x)$ при $x \to \infty$. Такой же выбор решений возможен и для сингулярных потенциалов, удовлетворяющих условию $r^2 V(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$. При этом, однако, $\Psi(D)$ уже не будет стремиться к конечному пределу, но $\Psi(D)/\Phi(D) \to \infty$ и для потенциалов отталкивания, и для потенциалов притяжения. Выбирая должным образом константу перенормировки Z_D, мы получим для таких потенциалов точное решение, которое совпадает с рядом теории возмущений, определяемым выражениями (43) — (45).

При потенциалах, для которых $r^2 V(r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} \infty$, необходимо отдельно рассмотреть случаи отталкивания ($r^2 V(r) \to +\infty$) и притяжения ($r^2V(r) \to -\infty$). В первом случае очевидный выбор $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ посредством граничных условий $\varphi(x) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ и $\psi(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ приводит к тому, что $\Psi(D) \to \infty$, $\Phi(D) \to 0$. Таким образом, выбирая Z_D так, что $Z_D\Psi(D) \xrightarrow[D\to\infty]{} 1$, мы получим при $D \to \infty$ точное решение, удовлетворяющее обычному граничному условию.

Важно подчеркнуть следующее обстоятельство, чрезвычайно существенное для понимания соотношения между рядом регуляризованной теории возмущений и точным решением. При любом конечном значении D ряд сходится, т. е. его сумма не имеет особенности по g при $g = 0$. Это, однако, не означает, что оба слагаемых в (43) не содержат таких особенностей. В действительности оба слагаемых имеют такие особенности, которые при конечном значении D взаимно уничтожаются.

Кратко остановимся на сингулярных потенциалах *притяжения*. Как следует из результатов разд. 1 и Приложения 2, для перенормируемых потенциалов перенормированная теория возмущений дает единственное решение независимо от знака потенциала. В то же время хорошо известно, что решение точной задачи не единственно, так как оба линейно-независимых решения уравнения Шредингера удовлетворяют граничному условию при $r \to 0$. В этом нет противоречия, поскольку точное решение содержит существенную особенность по g при $g = 0$, а это означает, что по ряду теории возмущений нельзя однозначно восстановить точное решение. Обрезание и предельный переход $D \to \infty$ также не дают единственного решения, так как отношение $\Psi(D)/\Phi(D)$ при $D \to \infty$ осциллирует между $-\infty$ и $+\infty$ *.

При неперенормируемых потенциалах отталкивания для точной волновой функции также можно написать представление (43), где $\Psi(D) \to \infty$; $\Phi(D) \to 0$, и при этом $\varphi \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$; $\psi \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$. Функции Φ Ψ, φ, ψ никак не связаны с выражениями (44), (45), построенными с помощью регуляризованной теории возмущений, так как их нельзя разложить даже в асимптотический ряд по степеням g. При притяжении не существует никакого способа построить единственное решение, и неоднозначность не устранима.

Для иллюстрации рассмотрим потенциал

$$V(r) = g^2 r^{-3}. \tag{52}$$

Решение, удовлетворяющее граничным условиям

$$u_\varepsilon(\varepsilon) = Z_\varepsilon \varepsilon^{l+1}; \quad u'_\varepsilon(\varepsilon) = Z_\varepsilon (l+1)\,\varepsilon^{l+1}, \tag{53}$$

имеет вид ($k = 0$):

$$u_\varepsilon(r) = Z_\varepsilon[\bar{v}(\varepsilon)\,u(r) + \bar{u}(\varepsilon)\,v(r)], \tag{54}$$

* Различные граничные условия в физических задачах рассмотрены в [28—31].

где

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}(\varepsilon) &= -\varepsilon^{l+1}u(\varepsilon)\,[u'(\varepsilon)/u(\varepsilon)-(l+1];\\ u(r) &= \sqrt{r}\,K_{2l+1}\left(2g/\sqrt{r}\right);\\ \bar{v}(\varepsilon) &= \varepsilon^{l+1}v(\varepsilon)\,[v'(\varepsilon)/v(\varepsilon)-(l+1)];\\ v(r) &= \sqrt{r}\,I_{2l+1}\left(2g/\sqrt{r}\right);\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

функции $u(r)$ и $\bar{u}(\varepsilon)$ имеют в точке $g = 0$ логарифмическое ветвление по g.

На этом примере удобно исследовать приближенные методы исследования неперенормируемых теорий поля — *ператизацию* [32—34] и *обрезание на унитарном пределе* [35—36].

Рассмотрим сначала общую задачу. Метод ператизации сводится к тому, что в уравнении

$$u_\varepsilon(r) = Z_\varepsilon r^{l+1} + \frac{g}{2l+1}\int\limits_\varepsilon^r d\rho V(\rho)\,[r^{l+1}\rho^{-l} - \rho^{l+1}r^{-l}]\,u_\varepsilon(\rho) \tag{56}$$

оставляют лишь «наиболее сингулярный» первый член в ядре, который дает наибольшую расходимость при первой итерации. Для перенормируемых потенциалов это приближение называется приближением «главных логарифмов» [37], и его использование позволяет получить все наиболее расходящиеся при $\varepsilon \to 0$ члены ряда регуляризованной теории возмущений. Для неперенормируемых потенциалов это неверно, в чем можно убедиться, рассмотрев вторую итерацию приближенного и точного уравнений.

Ператизованное уравнение

$$u_\varepsilon^p(r) = r^{l+1}\left\{Z_\varepsilon + \frac{g}{2l+1}\int\limits_\varepsilon^r d\rho V(\rho)\,\rho^{-l}u_\varepsilon^p(\rho)\right\} \tag{57}$$

можно решить при любом потенциале $V(r)$:

$$u_\varepsilon^p(r) = Z_\varepsilon r^{l+1}\exp\left[\frac{g}{2l+1}\int\limits_\varepsilon^r d\rho\rho V(\rho)\right]. \tag{58}$$

Положим $f'(\rho) = -\rho V(\rho)$. Если потенциал сингулярен, то $|f(\rho)| \xrightarrow[\rho\to\infty]{} \infty$, и если $V(\rho) > 0$ и $V(\rho)$ монотонно возрастает, то $f(\rho) > 0$ и также монотонно возрастает. Поэтому $u_\varepsilon^p(r)$ можно представить в виде

$$u_\varepsilon^p(r) = Z_\varepsilon\exp\left[\frac{g}{2l+1}f(\varepsilon)\right]r^{l+1}\exp\left[-\frac{g}{2l+1}f(r)\right], \tag{59}$$

где $f(r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} +\infty$. Полагая $Z_\varepsilon = Z \exp\left\{-\frac{g}{2l+1} f(\varepsilon)\right\}$, получим конечное решение $Zr^{l+1} \exp\{[-g/(2l+1)] f(r)\}$, которое обращается в нуль при $r \to 0$. Найденное пературизованное решение не имеет никакого отношения к точному. Асимптотика его при $r \to 0$ существенно отличается от точной, и оно регулярно в точке $r = 0$, тогда как точное решение имеет особенность. Даже при достаточно больших значениях r пературизованное решение не дает хорошего приближения к точному. В этом легко убедиться на примере потенциала (52). Точное решение можно представить в виде сходящегося ряда ($\Psi(n) \equiv \Gamma'(n)/\Gamma(n)$):

$$u(r) = r\{1 + (g^2/r)[\ln g^2/r - \psi(1) - \psi(2)] + \ldots\}, \quad l = 0, \tag{60}$$

а приближенное решение (пературизованное)

$$u^p(r) = r\{1 - g^2/r + \ldots\}, \quad l = 0. \tag{61}$$

При $g^2/r \ll 1$ уже первые нетривиальные поправки в этих решениях сильно отличаются.

Если найти все наиболее расходящиеся члены и просуммировать их, то вероятно получится более хорошее приближение. Однако, даже для перенормируемых потенциалов приближение главных логарифмов не воспроизводит асимптотику точного решения и особенность по константе связи.

Обсудим метод *обрезания на унитарном пределе*, применимый только к неперенормируемым теориям. Его идея основана на соображениях размерности. В применении к рассеянию на сингулярном потенциале это сводится к предположению, что волновые функции должны быстро убывать на расстояниях, определяемых единственным размерным параметром — константой связи. Пусть $gV = g^2 r^{-2(n+1)}$, тогда g имеет размерность $[g] = [r^n]$, и поэтому на расстояниях $r \leqslant g^{1/n}$ должно происходить такое «естественное» обрезание. Параметр обрезания $\varepsilon_v = g^{1/n}$ будем называть «унитарным пределом». Если обрезание действительно происходит на унитарном пределе, то можно ожидать, что вклад расстояний $r < \varepsilon_v$ должен быть малым и можно получить грубую оценку поправок высших приближений, воспользовавшись теорией возмущений при параметре обрезания $\varepsilon_v = g^{1/n}$. Приведем некоторые простые замечания о пределах применимости этого подхода. Метод можно применять лишь к перенормированным величинам или к величинам, которые не должны перенормироваться (фазы рассеяния, логарифмическая производная волновой функции и т. п.).

Из соображений размерности вытекает, что $\bar{u}(\varepsilon)$ и $\bar{v}(\varepsilon)$ зависят только от $\varepsilon_v/\varepsilon$, и поэтому при разложении этих величин по степеням g (или $\varepsilon_v/\varepsilon$) все члены будут одинакового порядка. Перенормированная волновая функция имеет вид $u + \bar{u}\, v/\bar{v}$, где при

$\varepsilon \sim \varepsilon_v$ имеем $\overline{u}/\overline{v} \sim 1$. Если разложение v по степеням g (или по степеням ε_v/r) начинается с более высоких степеней, чем разложение $u(r)$, то обрезание на унитарном пределе может дать неплохое приближение для низших порядков. Для потенциалов вида (41) разложение $u(r)$ начинается с членов $\sim (g/r^n)^{-\lambda/n}$, а разложение $v(r)$ с членов $\sim (g/r^n)^{\lambda/n}$. Пренебрегая логарифмическими членами, которые могут появляться лишь при нецелом значении параметра λ/n, запишем ряд для перенормированной волновой функции в виде

$$a_0\gamma^{-\lambda/n} + a_1\gamma^{-\lambda/n+2} + \ldots + a_N\gamma^{-\lambda/n+2N} + \ldots + b_0\gamma^{\lambda/n} + \\ + b_1\gamma^{\lambda/n+2} + \ldots + b_N\gamma^{\lambda/n+2N} + \ldots \quad (\gamma \equiv g/r^n, \quad \lambda = l + 1/2).$$

Тогда первые $N+1$ членов больше остальных только в том случае, если $-\lambda/n + 2N \leqslant \lambda/n$ (при целых значениях λ/n член $\sim a_N$ будет отличаться от члена $\sim b_0$ множителем $\sim \ln \gamma^n$). Таким образом, для того чтобы обрезание на унитарном пределе могло дать N поправочных членов (член $\sim a_0$ неинтересен, так как он определяется нормировкой волновой функции) необходимо, чтобы было выполнено условие

$$\lambda/n \geqslant N. \tag{62}$$

Для S-волны $\lambda = 1/2$, и это условие означает, что $(2n)^{-1} \geqslant N \geqslant 1$, т. е. $n \leqslant 1/2$. Таким образом, этим методом можно найти нетривиальные поправки к волновой функции лишь для потенциалов, растущих не быстрее, чем r^{-3}. Если условие (62) не выполнено, то метод обрезания на унитарном пределе может дать лишь порядок величины поправочных членов. Для потенциалов, растущих быстрее, чем r^{-3}, поправки можно получить для парциальных волн с $l \geqslant n - 1/2$.

4. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Выше было показано, что для сингулярного потенциала теория возмущений плохо приспособлена для получения хороших приближений к точному решению. Это обстоятельство, очевидно, связано с тем, что асимптотика «свободных» волновых функций резко отличается от асимптотики точных решений, в результате чего в членах ряда теории возмущений появляются расходимости. С изменением асимптотики тесно связана также неаналитичность по g решений, имеющих точную асимптотику. Все это было подробно прослежено в предыдущих разделах обзора, а теперь построим теорию возмущений, которая для каждого члена дает правильную асимптотику и правильную зависимость от константы связи. Следует ожидать, что ряд такой теории возмущений будет равномерно сходящимся.

Идея метода совершенно очевидна: необходимо точно учесть сингулярную часть потенциала $V_S(r)$, считая регулярную часть $V_R(r)$ возмущением. Разбиение V на V_S и V_R неоднозначно, и этой неоднозначностью можно воспользоваться для того, чтобы выбрать в качестве V_S наиболее простой потенциал. Часто удобно относить к возмущению и член $-k^2$, так как для многих потенциалов при $k=0$ известны решения уравнения Шредингера.

На самом деле в регулярную часть V_R можно включить и сингулярный потенциал, если сингулярная часть имеет достаточно сильную сингулярность. Метод асимптотической теории возмущений основан на следующей теореме.

Теорема 2. Пусть потенциал $V(r)$ удовлетворяет условию $r^2V \underset{r\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ и $V = V_S + V_R$, где $V_S/V_R \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Тогда точную волновую функцию можно получить итерацией уравнения

$$u(r) = u_0(r) = \int\limits_0^r d\rho \frac{k^2 - gV_R(\rho)}{W[u_0,\ v_0]} u(\rho)[u_0(r)v_0(\rho) - u_0(\rho)v_0(r)], \quad (63)$$

где u_0 и v_0 — точные решения при $k=0$, $V_R=0$, удовлетворяющие условиям

$$u_0(r) \to 0; \quad v_0(r) \to \infty \quad (r \to 0).$$

Ряд асимптотической теории возмущений

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

сходится при достаточно малых значениях r, если

$$\int\limits_0^{r_0} drV_R(r)[V_S(r)]^{-1/2} < \infty. \quad (64)$$

С л е д с т в и е. Любой перенормируемый потенциал можно считать возмущением по отношению к неперенормируемому потенциалу, удовлетворяющему условию (64).

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы приведено в Приложении 3. Ее нетрудно обобщить для волновых функций, которые встречаются в релятивистской теории и удовлетворяют уравнениям более высокого порядка (к дифференциальным уравнениям более высокого порядка сводятся также уравнения Шредингера в импульсном пространстве для степенных сингулярных потенциалов). В силе приведенной теоремы можно убедиться, рассмотрев простые точно решаемые примеры (подробнее см. [26]). Подчеркнем также, что эта теорема полезна и в задачах, не имеющих прямого отношения к потенциалам, сингулярным на малых расстояниях. Так, если потенциал растет при $r \to \infty$ быстрее, чем r^2, то все члены в уравнении Шредингера, ограниченные при $r \to \infty$, можно считать возмущением. Таким способом можно изучать решения сильно ангармоничного осциллятора (другой подход использован в [38, 39]).

Приведем простой пример применения асимптотической теории возмущений. Рассмотрим потенциал $g^2 r^{-4}$. Точные решения при $k = 0$, $l = 0$ известны (см. разд. 1):

$$u(r) = \sqrt{r}\, K_{1/2}(g/r); \quad v(r) = \sqrt{r}\, I_{1/2}(g/r). \tag{65}$$

С их помощью получаем из уравнения (63) следующее решение:

$$u(r) = Zkr\{(1 - k^2r^2/6) - g(1 - k^2r^2/2)/r + \\ + (g^2/2r^2)[1 + (4/3)k^2r^2(\ln(2g/r) + \gamma - 5/8)] + o(g^2)\}, \quad \gamma = 0{,}577\ldots \tag{65a}$$

Заметим, что при $k \neq 0$ получается логарифмическая особенность, которой нет при $k = 0$. Это решение можно сравнить с точным, которое выражается через функции Матье (см. [1]).

Метод асимптотической теории возмущений — строгий и весьма эффективный. Его применение ограничивается лишь тем, что он требует знания решений уравнения Шредингера с наиболее сингулярной частью потенциала. Имеется лишь небольшое число потенциалов, для которых решения известны в явном аналитическом виде (даже при $k = 0$ и $l = 0$). Кроме того, в задачах квантовой теории поля часто неизвестно даже уравнение, которому удовлетворяет искомая функция. Это побудило нас предложить более простой метод, называемый *методом дифференциальной интерполяции* (см. [40], а также [26]). Впоследствии этот метод получил различные приложения в других задачах математической физики (в зарубежной литературе его модификацию называют *дифференциальным приближением Падэ*, что мало отражает существо метода).

Идея дифференциальной интерполяции основана на существовании представления (54) для точного решения $u_\varepsilon(r)$, где функции $\bar{u}(\varepsilon)$, $\bar{v}(\varepsilon)$ удовлетворяют простому дифференциальному уравнению по ε, тесно связанному с уравнением Шредингера. Чтобы сформулировать метод в наиболее общем виде, пригодном для приложений к задачам квантовой теории поля, предположим, что нам известно лишь конечное число членов ряда регуляризованной теории возмущений для $\bar{u}_\varepsilon(r)$. Подберем тогда дифференциальное интерполирующее уравнение по параметру обрезания, которому удовлетворяют члены этого ряда, и найдем его общее решение. Сравнивая разложение общего решения в ряд по степеням g известными членами ряда теории возмущений, найдем выражение для произвольных, зависящих от r функций, которые входят в общее решение интерполирующего уравнения. В полученном таким образом уравнении выполним перенормировку и предельный переход $\varepsilon \to 0$. Предельное выражение и дает нам первые члены ряда модифицированной теории возмущений, учитывающей неаналитическую зависимость от g. Идея этого метода несколько напоминает идею метода ренормализационной группы в перенормируемых теориях поля. Недавно выполненные исследования приложений метода ренормгруппы к неперенормируемым теориям поля [41] подтверждают наличие более глубокой аналогии между этими двумя методами.

В самом общем случае применимость метода дифференциальной интерполяции обосновать невозможно (как и метода приближений Падэ в перенормируемых теориях поля). Однако для уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом легко показать, что его применение приводит к точному решению. Действительно, используя уравнения (36) для регуляризованного точного решения $u_\varepsilon(r)$, можно показать, что функции $\bar{u}(\varepsilon)$, $\bar{v}(\varepsilon)$ в выражении (54) соответствуют одному и тому же дифференциальному уравнению, откуда следует, что $u_\varepsilon(r)$ удовлетворяет этому уравнению:

$$d^2w/d\varepsilon^2\,[2\,(l+1)/\varepsilon + V'(\varepsilon)/V(\varepsilon)]\,dw/d\varepsilon = gV(\varepsilon)w(\varepsilon). \qquad (66)$$

Отсюда вытекает, что между членами ряда регуляризованной теории возмущений

$$u_\varepsilon(r) = u_\varepsilon^{(0)}(r) + gu_\varepsilon^{(1)}(r) + g^2u_\varepsilon^{(2)}(r) + \ldots \qquad (66a)$$

имеется рекуррентное дифференциальное соотношение

$$d^2u_\varepsilon^{(n+1)}/d\varepsilon^2 - [2\,(l+1)/\varepsilon + V'(\varepsilon)/V(\varepsilon)]\,du_\varepsilon^{(n+1)}/d\varepsilon = V(\varepsilon)\,u_\varepsilon^{(n)}. \qquad (67)$$

Наоборот, если известно рекуррентное соотношение (67), то из него можно получить дифференциальное уравнение для суммы $u_\varepsilon(r)$.

Таким образом, чтобы найти интерполирующее дифференциальное уравнение, достаточно найти рекуррентное соотношение типа (67). В данном простом случае ($k = 0$) для построения точного уравнения достаточно знать первые два члена разложения u_ε по g. В более сложных задачах (например, при $k \neq 0$) рекуррентное соотношение имеет более сложный вид, зависит от числа учтенных членов разложения u_ε по g и определяет лишь приближенное интерполирующее уравнение. При наличии лишь одной константы размерности длины g рекуррентное соотношение можно искать в виде ($\varepsilon \equiv L^{-1}$):

$$(gL)^n \sum_{k=0}^{N_n} c_k^{(0)} L^k\, \partial^k u_\varepsilon^{(0)}/\partial L^k + (gL)^{n-1} \sum_{k=0}^{N_{n-1}} c_k^{(1)} L^k\, \partial^k u_\varepsilon^{(1)}/\partial L^k + \\ + \ldots \sum_{k=0}^{N_0} c_k^{(n)} L^k\, \partial^k u_\varepsilon^{(n)}/\partial L^k = 0. \qquad (68)$$

Если такое соотношение найдено, опустим верхние индексы у функций $u_\varepsilon^{(n)}$ и получим приближенное интерполирующее уравнение. Решая это уравнение, представим $u_\varepsilon(r)$ в виде $\sum w_i(\varepsilon)u_i(r)$, где $w_i(\varepsilon)$ — решения (65), а $u_i(r)$ определяются сравнением разложения написанной суммы в ряд по степеням g с рядом теории возмущений. Примеры приложения этого метода можно найти в работах [26, 42]. Здесь приведем только полученное этим методом выражение для $u(r)$ в теории с потенциалом g^2r^{-4}:

$$u(r) = Zkr\{(1 - k^2r^2/6 + O(k^4r^4)) - (g/r)[1 - k^2r^2/2 + O(k^4r^4)] + \\ + (g^2/2r^2)[1 + (4/3)k^2r^2(\ln(2g/r) + \gamma - 1/8) + \\ + O(k^4r^4)] + \ldots\}, \quad \gamma = 0{,}577\ldots \qquad (69)$$

Это выражение можно сравнить с выражением (64) для той же величины, полученным более сложным способом.

Этот метод достаточно прост и эффективен, хотя хотелось бы получить какой-то более «алгоритмизованный» способ построения модифицированной теории возмущений.

5. ПОТЕНЦИАЛЫ С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ НА КОНЕЧНОМ РАССТОЯНИИ

Потенциалы такого типа эпизодически встречались в литературе. В основном обсуждался потенциал $V(r) = \delta(r - a)$ [17]. Однако их систематическое изучение и использование в физике было начато лишь после работ [5,43—45]. В этих работах было показано, как подобные потенциалы могут возникнуть в квантовой теории поля (неполиномиальные теории) и в физике элементарных частиц (экспоненциально растущий спектр масс резонансов), и были рассмотрены приложения таких потенциалов в кварковых моделях адронов (простейшая реализация «дубненского мешка» с кварками, обеспечивающего запирание кварков внутри адронов [46]). Связь СКР-потенциалов с дуальными резонансными моделями, намеченная в работе [5], более подробно прослежена в [43—45].

СКР-потенциалы можно разделить на два класса: *проницаемые* и *непроницаемые*. Если потенциал более сингулярен в точке $r = R$, чем $(r - R)^{-1}$, т. е. $(r - R)V(r)\underset{r\to R}{\longrightarrow}\infty$, то плотность потока вероятности в этой точке обращается в нуль, и решения слева и справа от точки $r = R$ не связаны друг с другом (в этом легко убедиться, получив разложение волновой функции вблизи этой точки). Такие потенциалы естественно называть непроницаемыми, а менее сингулярные — проницаемыми, для них $(r - R)V(r)\underset{r\to R}{\longrightarrow} 0$ и плотность потока вероятности не обращается в нуль. Особую роль играют потенциалы, для которых $(r - R)\, V(r) \underset{r \to R}{\longrightarrow} \text{const}$. Так, потенциал $V = (r - R)^{-1}\, \theta\,(r - R)$ непроницаем, тогда как потенциал

$$gV(r) = \mathscr{V}\mathscr{P}\,\{g\,(r^2 - R^2)^{-1}\} \tag{70}$$

«почти» проницаем. Это утверждение имеет следующий смысл. Запишем обобщенное условие непрерывности волновой функции и ее производной в точке $r = R$:

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \to 0} [u'(R + \varepsilon) - u'(R - \varepsilon)] = 0; \\ &\lim_{\varepsilon \to 0} u(R + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} u(R - \varepsilon). \end{aligned} \tag{71}$$

Нетрудно показать, что решения уравнения Шредингера вблизи точки $r = R$ можно разложить в следующие ряды $(r \equiv r^2/R^2)$:

$$u_1(z) = (z - 1) + g^2 (z - 1)^2/4 + \ldots \tag{72}$$

$$u_2(z) = 1 + g^2 (u_1(z) \ln|z - 1|)/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - 1)^n. \tag{73}$$

Отсюда видно, что решение

$$A_2 u_2(z) + A_1 u_1(z)$$

удовлетворяет обобщенному условию непрерывности (71). Это условие следует из требования непрерывности потока вероятности и уравнения Шредингера, если учесть, что потенциал определен в смысле главного значения.

Потенциал (70) изучался в связи с кварковыми моделями адронов; он почти непроницаем, и в образованной им ловушке имеются узкие резонансы. Траектории Редже, соответствующие этим резонансам, неограниченно растут. Заметим, что потенциалы такого типа, возможно, возникают в неабелевых калибровочных теориях поля. Известно, что классические (не квантованные) уравнения Янга — Миллса имеют решения с особенностью такого вида (см. [47, 48]). Можно ожидать, что статические решения для частиц, обменивающихся этим полем, описываются потенциалом взаимодействия с особенностью на конечном расстоянии. Эта особенность является аналогом шварцшильдовской особенности в общей теории относительности (соответствующий потенциал также есть СКР-потенциал).

Приведем некоторые точные решения уравнения Шредингера с СКР-потенциалом. При $k = 0$ уравнение (13) с потенциалом (70) можно выразить через гипергеометрическую функцию

$$\begin{aligned} u(r) = z^{l+1} [&\theta(R - r)\, F(\lambda_+,\ \lambda_-;\ \lambda + 1;\ z^2) + \\ &+ a\theta(r - R)\, F(\lambda_+,\ -\lambda_-;\ \lambda + 1;\ z^2)\, z^{-2\lambda_+}], \end{aligned} \tag{74}$$

где

$$a=\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(1-\lambda_-)/[\Gamma(\lambda_+-\lambda_-+1)\,\Gamma(1+\lambda_-)];$$

$$\lambda_+=(\lambda+\sqrt{\lambda^2+g})/2;\quad \lambda_-=(\lambda-\sqrt{\lambda^2+g})/2;\quad \lambda=l+1/2,\quad z=r/R.$$

Граничное условие в точке $r=R$ выполнено лишь в том случае,

$$\sqrt{\lambda^2+g}-\lambda=N,\quad N=1,\ 3,\ 5,\ \ldots \qquad (75)$$

Отсюда можно получить условие квантования траекторий Редже при $k=0$. Из этого условия можно вывести простое выражение для числа связанных состояний $N_b=[g/2]$ при $N=1$, где квадратные скобки означают целую часть заключенного в них числа (предполагается, что есть обменное вырождение, т. е. каждому целому значению l на траектории Редже соответствует некоторое связанное состояние).

Для потенциала $V=[2R\,(r-R)]^{-1}$ можно найти точное решение при $l=0$ и при любых значениях k с помощью функции Уиттекера, связанной с вырожденной гипергеометрической функцией. Полагая $\varkappa^2=-kR^2$, можно получить уравнение для определения связанных состояний $\nu\equiv g/4\varkappa$:

$$\pi\nu\,\mathrm{ctg}\,(\pi\nu)M_{\nu,\,1/2}(2\varkappa)+\Gamma(1-\nu)\,W_{\nu,\,1/2}(2\varkappa)=0. \qquad (76)$$

При $2\varkappa\gg1$, воспользовавшись асимптотическими формулами для $M_{\nu,\,1/2}$; $W_{\nu,\,1/2}$ [49], получим

$$\varkappa\approx g\,[1+4g^2\exp(-g^2)/\pi]^{-1}/2. \qquad (77)$$

Условие применимости этой формулы для наинизшего связанного состояния $g\gg1$.

Недостаток этих потенциалов — медленное убывание при больших r, что не позволяет непосредственно использовать полученные решения в тех задачах, где поведение на бесконечности существенно. Более реалистичен потенциал, напоминающий потенциал Вудса — Саксона, но имеющий сингулярность на конечном расстоянии. При $l=0$ уравнение Шредингера с этим потенциалом можно решить тем же способом, что и уравнение с потенциалом Вудса — Саксона. СКР-потенциал такого типа имеет вид

$$gV(r)=g\,[1-\exp\mu\,(r-R)]^{-1}. \qquad (78)$$

При $g>0$ он имеет вид ямы при $r>R$, отделенной барьером от «ямы на подставке» при $r<R$. Потенциал такого вида может представлять значительный интерес для описания взаимодействия двух нуклонов, так как содержит не очень жесткую сердцевину при $r<R$ и может образовывать резонансные состояния при $k^2>g\,[1-\exp(-\mu R)]^{-1}$. В последнее время появились некоторые указания на существование подобных состояний [50].

Потенциалы более общего вида, не допускающие решения в известных специальных функциях, можно изучать с помощью ВКБ-приближения. Единственная трудность — наличие сингулярности вблизи классической точки поворота — достаточно легко преодолевается, если использовать метод Цваана — Кембла (обход точек поворота в комплексной плоскости) и вблизи особой точки использовать разложения точных решений. Таким способом можно, например, показать, что условие квантования в яме, образованной потенциалом (70), имеет вид

$$\left.\begin{aligned}&\int_{z_0}^{1} dz\,[\varkappa^2+\lambda^2/z^2+g/(z^2-1)]^{1/2}=N\pi/2, \quad N=1,\ 3,\ 5,\ \ldots\\&[\varkappa^2+\lambda^2/z_0^2+g/(z_0^2-1)]=0.\end{aligned}\right\} \tag{79}$$

6. АМПЛИТУДА РАССЕЯНИЯ. ИМПУЛЬСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Для решения задачи о рассеянии на сингулярном потенциале отталкивания можно построить решения уравнения (13), удовлетворяющие условиям

$$u_1(k,\ l,\ r)\to 0; \quad u_2(k,\ l,\ r)\to\infty; \quad r\to 0. \tag{80}$$

Если потенциал достаточно быстро убывает при $r\to\infty$, то можно построить два других решения $f_1(k,\ l,\ r)$, $f_2(k,\ l,\ r)$, асимптотика которых

$$\begin{aligned}&f_1(k,\ l,\ r)\underset{r\to\infty}{\sim}\exp[\mathrm{i}(kr-l\pi/2)];\\&f_2(k,\ l,\ r)\sim\sin(kr-l\pi/2)/k.\end{aligned} \tag{81}$$

Эти решения можно выразить в виде линейных комбинаций u_1, u_2:

$$f_1=A_{11}u_1+A_{12}u_2; \quad f_2=A_{21}u_1+A_{22}u_2 \tag{82}$$

и обратно ($\Delta\equiv A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}$):

$$u_1=\Delta^{-1}(f_1A_{22}-f_2A_{12}); \quad u_2=\Delta^{-1}(-f_1A_{21}+f_2A_{11}). \tag{83}$$

Амплитуда рассеяния определяется асимптотикой регулярного в нуле решения

$$u_1(k,\ l,\ r)\underset{r\to\infty}{\sim}C\{\sin(kr-l\pi/2)/k+f(k,\ l)\exp[\mathrm{i}(kr-l\pi/2)]\}, \tag{84}$$

откуда получаем

$$f(k,\ l)=-A_{22}/A_{12}=-\lim_{r\to 0}[f_2(k,\ l,\ r)/f_1(k,\ l,\ r)]. \tag{85}$$

Это решение, построенное в работе [33], пригодно для любых сингулярных потенциалов отталкивания, но при практических расчетах неудобно, так как требует знания матрицы связи A_{ij}. Поэтому рассмотрим более простой способ, позволяющий точно учесть влияние на амплитуду рассеяния особенности потенциала при $r \to 0$. С этой целью выразим амплитуду рассеяния значениями u_1, u_2 при $r = r_0 - 0$ и значениями f_1, f_2 при $r = r_0 + 0$. Нетрудно показать, что ($W_u \equiv W[u_1, u_2]$):

$$A_{11} = W[f_1, u_2]/W_u; \quad A_{12} = W[u_1, f_1]/W_u;$$
$$A_{21} = W[f_2, u_2]/W_u; \quad A_{22} = W[u_1, f_2]/W_u. \tag{86}$$

Так как вронскианы решений уравнения Шредингера (13) не зависят от r, то их можно вычислять в произвольной точке. Используя условия непрерывности u, u', f, f', представим $f(k, l)$ в виде

$$f(k, l) = -\frac{A_{22}}{A_{12}} = -\frac{W[u_1, f_2]}{W[u_1, f_1]} =$$
$$= -\frac{f_2}{f_1}\bigg|_{r_0+0}\left[\frac{u_1'}{u_1}\bigg|_{r_0-0} - \frac{f_2'}{f_2}\bigg|_{r_0+0}\right]\Bigg/\left[\frac{u_1'}{u_1}\bigg|_{r_0-0} - \frac{f_1'}{f_1}\bigg|_{r_0+0}\right]. \tag{87}$$

Константы f_2/f_1, f_1'/f_1, f_2'/f_2 ($r = r_0 + 0$) зависят лишь от значений потенциала при $r \gg r_0$, и особенности, связанные с сингулярным характером потенциала, содержатся лишь в u_1'/u_1. Важно, что для вычисления величин, входящих в (87), не надо выполнять предельный переход $r \to 0$, который может оказаться весьма сложным.

Введя обозначения

$$\frac{u_1'}{u_1}\bigg|_{r_0+0} = U(k, l); \quad \frac{f_2}{f_1}\bigg|_{r_0+0} \equiv A(k, l);$$
$$\frac{f_{1,2}'}{f_{1,2}}\bigg|_{r_0+0} \equiv A_{1,2}(k, l), \tag{88}$$

перепишем (87) в более простой форме

$$f(k, l) = -A(k, l)\frac{U(k, l) - A_2(k, l)}{U(k, l) - A_1(k, l)}. \tag{89}$$

Величины A, A_1, A_2 можно находить любыми стандартными способами. Логарифмическую производную U строим методами, рассмотренными в предыдущих параграфах. При этом следует использовать свободу выбора параметра r_0 для того, чтобы найти достаточно хорошее приближение для волновых функций при $r < r_0$.

Используя полученные выше точные и приближенные решения, можно найти амплитуду рассеяния для различных сингулярных потенциалов. В частности, можно показать, что амплитуда рассеяния на сингулярном перенормируемом потенциале (39) имеет особенность по g при $g = 0$, а именно: сгущение полюсов в g-плоскости (существенная особенность). Амплитуда рассеяния на асимптотически свободном потенциале (37) имеет существенную особенность по λ при $\lambda = 0$ (и точку ветвления). Аналогично можно исследовать зависимость от g и λ для других потенциалов, используя построенные рассмотренными выше методами решения $u(k, l, r)$ при достаточно малых значениях g и r. Более подробное обсуждение свойств амплитуды рассеяния на сингулярных потенциалах можно найти в обзоре [1], где рассматриваются и другие методы.

Для некоторых задач нерелятивистской теории рассеяния необходимо знать амплитуду рассеяния вне энергетической поверхности (например, при исследовании задачи трех тел). Такую величину удобно изучать с помощью импульсного представления уравнения Шредингера. Импульсное представление наиболее удобно и для решения задач квантовой теории поля. Уравнение для соответствующей волновой функции $\varphi_l(p)$, связанной с $u_l(r)$ преобразованием Ханкеля [см. (16)]:

$$u_l(r) = \int_0^\infty dp\varphi_l(p)\, j_l(p, r); \qquad \int_0^\infty dr j_l(pr)\, j_l(qr) = \delta(p-q), \tag{90}$$

имеет вид

$$(k^2 - p^2)\,\varphi_l(p) = \int_0^\infty dq V_l(p, q)\,\varphi_l(q), \tag{91}$$

где

$$V_l(p, q) = \sqrt{pq}\int_0^\infty dr\, rV(r)\, J_{l+1/2}(pr)\, J_{l+1/2}(qr). \tag{92}$$

Если $V_l(p, q)$ удается представить в виде

$$V_l(p, q) = \theta(p-q)\sum_{i=1}^{M} f_1^{(i)}(p)\, f_2^{(i)}(q) + \theta(q-p)\sum_{i=1}^{M} g_1^{(i)}(p)\, g_2^{(i)}(q), \tag{93}$$

то уравнение (91) часто сводится к дифференциальному уравнению для $\varphi_l(p)$. Для $gV = gr^{-4}$ можно получить

$$\begin{aligned} V_l(p, q) = \frac{g}{2(4l^2-1)}\Big\{&\theta(p-q)\frac{q^{l+1}}{p^{l-2}}\left(1 - \frac{l-1/2}{l+3/2}\frac{q^2}{p^2}\right) + \\ &+ \theta(q-p)\frac{p^{l+1}}{q^{l-2}}\left(1 - \frac{l-1/2}{l+3/2}\frac{p^2}{q^2}\right)\Big\}, \end{aligned} \tag{94}$$

откуда следует, что $\psi_l \equiv (k^2 - p^2)\,\varphi_l$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} &\psi_l^{(\mathrm{IV})} - \frac{2l(l+1)}{p^2}\psi_l'' + \frac{4l(l+1)}{p^3}\psi_l' + \\ &+ l(l+1)\frac{[l(l+1)-6]}{p^4}\psi_l = \frac{g\psi_l}{k^2-p^2}. \end{aligned} \tag{95}$$

Частный случай этого уравнения ($l = 0$) был впервые изучен в работе [51]. С помощью уравнения (95) можно изучать как задачу рассеяния, так и задачу о связанных состояниях. Заметим, что при $k^2 = 0$ уравнение (95) можно решить с помощью известных специальных функций (функции Мейера [52]).

К дифференциальным уравнениям можно свести и задачу об амплитуде рассеяния на некоторых СКР-потенциалах. Особое удобство такого сведения состоит в том, что уравнение оказывается несингулярным, что, в частности, весьма упрощает применение квазиклассического приближения (см. [5, 44, 53]).

На этом закончим изложение некоторых методов работы с сингулярными потенциалами, так как поставленная задача — дать обзор идей и методов, неосвещенных или недостаточно освещенных в обзоре [1], а также некоторых новых результатов и подходов — представляется нам более или менее выполненной. Мы почти не касались здесь приложений к физическим задачам. Некоторые приложения рассмотрены в упомянутом обзоре, другие приложения (к задачам квантовой теории поля и физики элементарных частиц, в особенности к модели кварков) предполагаем обсудить в отдельной работе. Были процитированы лишь работы, имеющие непосредственное отношение к затрагиваемым проблемам, и поэтому список литературы, приводимый в обзоре, не претендует на полноту (подробнее см. [1]). Некоторые идеи и результаты, по-видимому, являются новыми, некоторые были получены в диссертации автора (1969 г.) и не были достаточно подробно опубликованы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим уравнение $[Q(x) = \lambda^2 + gq(x)]$:

$$d^2\varphi/dx^2 = Q(x)\,\varphi(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty. \tag{П.1}$$

1. Часто полезно использовать следующее элементарно проверяемое утверждение. Если $\varphi(x)$ — решение этого уравнения, не обращающееся в нуль при $x \geqslant x_0$, то

$$\psi(x) = \varphi(x) \int\limits_{x_0}^{x} d\xi\, [\varphi(\xi)]^{-1} \tag{П.2}$$

также есть решение (П.1), причем $W[\varphi, \psi] \neq 0$. Если известно одно решение уравнения (П.1), то (П.2) позволяет немедленно получить второе.

2. Если $Q(x) \to +\infty$ при $x \to \infty$, то каждое нетривиальное решение уравнения (П.1) имеет лишь конечное число нулей и $|\varphi'(x)/\varphi(x)| \to \infty$ при $x \to \infty$. Существует два линейно-независимых решения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, такие, что φ, $\varphi' \to 0$; ψ, $\psi' \to \infty$ при $x \to \infty$. Это — *теорема Милна*, из которой, в частности, следует, что регулярное решение (обращающееся в нуль при $x \to \infty$) единственно.

3. Единственность при $Q(x) \to \mathrm{const} \neq 0, \infty$, т. е. $q(x) \to 0$, следует из теоремы Пуанкаре [55] (см. также [56], с. 198). Если $Q(x) \to \lambda^2 > 0$ при $x \to \infty$, то существует единственное (с точностью до нормировки) решение $\varphi(x)$ уравнения (П.1), удовлетворяющее условию $\varphi(x) \to 0$ при $x \to \infty$. При этом $\varphi'/\varphi \to -\lambda$ при $x \to \infty$, а для всех остальных решений выполнены условия $\psi'/\psi \to \lambda$ при $x \to \infty$.

4. Теорема Милна относилась к сингулярным потенциалам отталкивания. Для притяжения ($Q(x) \to -\infty$) имеет место другая весьма общая теорема (см. [57], с. 57). Если $Q(x) < 0$, не возрастает и $\lim\limits_{x \to 0} Q(x) \to -\infty$, то все решения уравнения (П.1) ограничены при $x \to \infty$. При некоторых дополнительных предположениях [57] можно доказать, что все решения стремятся к нулю при $x \to \infty$. Если $Q(x) \leqslant c < 0$, то любое решение имеет бесконечно много нулей.

5. Следующая важная теорема показывает, что асимптотика точной волновой функции совпадает с асимптотикой «свободной» волновой функции (при $g = 0$) в том и только в том случае, когда *потенциал регулярен* (см. [58], с. 450).

Теорема. Если $\lambda > 0$, а $q(x)$ удовлетворяет условию регулярности [ср. с (11)]

$$\int^{\infty} dx q(x) < \infty, \tag{П.3}$$

то уравнение (П.1) имеет такие решения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, что

$$\begin{aligned} &\varphi \sim -\varphi'/\lambda \sim \exp(-\lambda x) \quad \text{(а)};\\ &\psi \sim \psi'/\lambda \sim \exp(\lambda x) \quad \text{(б)}. \end{aligned} \tag{П.4}$$

Наоборот, если $q(x)$ не меняет знака и уравнение (П.1) имеет решение $\varphi(x)$ или $\psi(x)$, удовлетворяющее соответственно условиям (П.4а) или (П.4б), то потенциал регулярен, т. е. выполнено условие (П.3).

6. Теоремы пп. 2—4 отличаются большой общностью, но они не слишком полезны при отыскании аналитических выражений для асимптотики решений уравнения (П.1). Большинство эффективных методов получения таких приближений основаны на *теоремах сравнения*.

Теорема. (см. [58], с. 437). Пусть $Q(x)$ и $Q_0(x)$ непрерывны, и любое решение уравнения

$$d^2\chi/dx^2 = Q_0(x)\,\chi(x) \tag{П.5}$$

удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} dx\, |\chi(x)|^2\, |Q(x) - Q_0(x)| < \infty. \tag{П.6}$$

Если $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$ — линейно-независимые решения уравнения (П.5), то любое решение уравнения (П.1) удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x) = [a + o(1)]\,\varphi_0(x) + [b + o(1)]\,\psi_0(x);\\ &\varphi'(x) = [a + o(1)]\,\varphi_0'(x) + [b + o(1)]\,\psi_0'(x), \end{aligned}\right\} \tag{П.7}$$

где a и b — некоторые постоянные. Любым двум постоянным a и b соответствует некоторое решение уравнения (П.1), удовлетворяющее условиям (П.7).

Эта теорема особенно полезна для потенциалов притяжения, когда решения уравнений (П.1), (П.5) ограниченны при $x \to \infty$.

7. Для достаточно сингулярных потенциалов притяжения все решения уравнения (П.1) осциллируют (имеют бесконечно много нулей при $x \to \infty$),

тогда как для потенциалов отталкивания решения не осциллируют (имеют конечное число нулей). Простой *критерий осцилляции* дается следующей **теоремой** (см. [58], с. 427). Если

$$-1/4<\overline{\lim_{x\to\infty}}\, x^2Q(x)\leqslant+\infty,$$

то решения не осциллируют, если же

$$-\infty\leqslant\lim_{x\to\infty} x^2Q(x)<-1/4,$$

то решения осциллируют.

8. Для неосциллирующего решения уравнения (П.1) всегда можно найти такое решение $\varphi(x)$, что $\varphi(x)/\psi(x)\to 0$ при $x\to\infty$ для любого линейно независимого с ним решения $\psi(x)$. При этом решение $\varphi(x)$ называется *главным*, а $\psi(x)$ — *неглавным*. Для главного решения интеграл в (П.2) расходится при $x\to\infty$, а для неглавного — сходится (см. [58], с. 419). В этом случае асимптотические оценки решений получаются из следующей *теоремы сравнения*.

Теорема. Пусть уравнения (П.1) и (П.5) — неосциллирующие, и φ_0, ψ_0 соответственно главное и неглавное решения уравнения (П.5). Если

$$\int\limits_0^\infty dx\,|\varphi_0(x)\psi_0(x)|\,|Q(x)-Q_0(x)|<\infty, \tag{П.8}$$

то уравнение (П.1) имеет решения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered}\varphi(x)\sim\varphi_0(x);\quad \psi(x)\sim\psi_0(x);\\ \varphi'(x)/\varphi(x)\sim\varphi_0'(x)/\varphi_0(x);\quad \psi'(x)/\psi(x)\sim\psi_0'(x)/\psi_0(x)\end{gathered} \tag{П.9}$$

при $x\to\infty$.

9. Из теорем сравнения легко получить удобные для приложений асимптотические разложения решений, если воспользоваться *преобразованием Лиувилля*. Это преобразование, или повторное применение его, во многих случаях позволяет привести уравнение (П.1) к уравнению того же типа, но с потенциалом $Q(x)$ «близким» к постоянной. Запишем это преобразование в следующей форме. Пусть уравнение имеет вид

$$d^2\varphi/dx^2=[q_0(x)+aq_1(x)]\,\varphi(x),$$

где $q_1(x)>0$ при $x>0$. Положим

$$\varphi(x)=[q_1(x)]^{-1/4}\,\Phi(y);\quad y=\int\limits_0^x d\xi\,[q_1(\xi)]^{1/2}. \tag{П.10}$$

Тогда $\Phi(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered}d^2\Phi/dy^2=P(y)\,\Phi(y);\\ P(y)=a+q_0/q_1+(1/4)\,q_1''/q_1^2-(5/16)\,q_1'^2/q_1^3,\end{gathered} \tag{П.11}$$

где штрих обозначает дифференцирование по x, и в (П.11) x выражено y с помощью (П.10).

10. Теперь нетрудно получить следующие результаты.

Теорема. Пусть $Q(x) < 0$, $Q''(x)$ — непрерывная функция и выполнены условия:

$$\int^{\infty} |Q(x)|^{1/2}\,dx = \infty; \quad \int^{\infty} dx \left| \frac{5}{16}\frac{Q'^2}{Q^3} - \frac{1}{4}\frac{Q''}{Q^2} \right| |Q(x)|^{1/2} < \infty. \qquad (\text{П.12})$$

Тогда любое решение уравнения (П.1) удовлетворяет при $x \to \infty$ соотношению

$$|Q(x)|^{1/4}\varphi(x) = [a + o(1)]\cos y(x) + [b + o(1)]\sin y(x), \qquad (\text{П.13})$$

где

$$y(x) = \int_0^x d\xi\, |Q(\xi)|^{1/2}. \qquad (\text{П.14})$$

Соотношение (П.13) можно формально продифференцировать.

Если $Q(x) > 0$ и удовлетворяет остальным условиям этой теоремы, то уравнение (П.1) имеет два линейно-независимых решения, удовлетворяющих при $x \to \infty$ соотношениям

$$Q^{1/4}(x)\varphi(x) \sim \exp[\pm y(x)], \qquad (\text{П.15})$$

которые можно продифференцировать.

Полученные асимптотические формулы (П.13) и (П.15) напоминают квазиклассические, и хотя их смысл несколько иной, будем называть их *ВКБ-приближениями*. Различные обобщения и уточнения этих результатов можно найти в работах [56—58], а также в [59—62] (см. особенно [59], Добавление 1 и [60], гл. 6).

Приведенные результаты вполне достаточны для исследования поведения решений сингулярного уравнения Шредингера при $r \to 0$ $(x \to \infty)$. В Приложении 3 воспользуемся следующей изящной *теоремой Вимена* [63]. Если $Q(x) \to +\infty$ при $x \to \infty$ и

$$\lim_{x\to\infty} [(Q(x) + 1/\sqrt{Q(x)})/Q(x)] = 1, \qquad (\text{П.16})$$

то всякое решение уравнения (П.1) удовлетворяет одному из условий

$$\varphi'(x)/(\varphi(x)\sqrt{Q(x)}) \xrightarrow[x\to\infty]{} +1 \quad \text{или} \quad \varphi'(x)/(\varphi(x)\sqrt{Q(x)}) = -1. \qquad (\text{П.17})$$

Если $Q(x) \to -\infty$ и удовлетворяет (П.16), то любое решение уравнения (П.1) имеет бесконечно много нулей и $\Delta(x)\,Q(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \pi$, где $\Delta(x)$ — расстояние между последовательными нулями. Заметим, что если $Q(x) \to c < 0$, причем $Q(x)$ монотонно убывает, то $\Delta(x) \to \pi/|c|$ (см. [62], с. 199).

11. При исследовании зависимости решений от константы связи полезна *теорема Перрона — Тжизинского* [64], которую приведем в упрощенном виде. Пусть $Q(x)$ непрерывна при $0 \leqslant x \leqslant x_0$ $(x_0 < \infty)$ и имеет равномерно на этом интервале асимптотическое разложение по g:

$$Q(x) \sim \frac{1}{g^{2N}} \sum_{n=0}^{\infty} g^n Q_n(x), \quad Q_0(x) \neq 0, \qquad (\text{П.18})$$

где N — натуральное число; $Q_n(x)$ имеют производные всех порядков. Тогда решения уравнения (П.1) можно представить в виде

$$\varphi(x) \sim \exp\left\{\frac{1}{g^N}\sum_{m=0}^{N-1}\chi_m(x)\,g^m\right\}\sum_{n=0}^{\infty} g^n\varphi_n(x), \tag{П.19}$$

и это представление можно дифференцировать. Коэффициенты $\chi_m(x)$, $\varphi_n(x)$ вычисляются формальной подстановкой (П.19) в (П.1) с учетом (П.18).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ТЕОРЕМА О ПЕРЕНОРМИРУЕМОСТИ

Чтобы упростить выкладки, проведем доказательство при $k = 0$. Оно полностью остается в силе, если $k \neq 0$. Уравнение (18) с регуляризованным потенциалом в переменных (26), (27) имеет вид

$$\varphi_D(x) = Z_D \exp(-\lambda) + \frac{g}{2\lambda}\int_x^D d\xi\, q(\xi)\,\varphi_D(\xi)\times$$
$$\times\{\exp[\lambda(\xi - x)] - \exp[-\lambda(\xi - x)]\}, \tag{П.20}$$

где $D = \ln(r_0/\varepsilon)$. Это уравнение эквивалентно дифференциальному уравнению (25) для $\varphi_D(x)$ с граничными условиями

$$\varphi_D'(D) + \lambda\varphi_D(D) = 0; \quad \varphi_D(D) = \exp(-\lambda D)\, Z_D \tag{П.21}$$

Если нам известны два линейно-независимых решения φ, ψ уравнения (25), удовлетворяющие условиям

$$\varphi(x) \to 0; \quad \psi(x) \to \infty; \quad x \to \infty. \tag{П.22}$$

то мы легко можем построить φ_D:

$$\varphi_D(x) = \exp(-\lambda D)\,(Z_D/W)\,[(\psi'(D) + \lambda\psi(D))\,\varphi(x) - (\varphi'(D) + \lambda\varphi(D))\,\psi(x)], \tag{П.23}$$

где $W = \varphi\psi' - \varphi'\psi$ — число, зависящее от выбора φ и ψ. Согласно теоремам Милна и Пуанкаре (Приложение 1), отношение коэффициентов при $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ стремится к нулю при $D \to \infty$. Поэтому

$$\exp(-\lambda D)\,\frac{Z_D}{W}\,[\psi'(D) + \lambda\psi(D)] = 1, \tag{П.24}$$

и, переходя к пределу $D \to \infty$, получим, что $\varphi_D(x) \to \varphi(x)$, т. е. регуляризованное решение после перенормировки (выбор Z_D) стремится к точному.

Такая процедура перенормировки точных решений регуляризованных уравнений пригодна для любых сингулярных *потенциалов отталкивания*, удовлетворяющих требованиям теоремы Милна или теоремы Пуанкаре. Для сингулярного *потенциала притяжения*, для которого $Q(x) \leqslant c < 0$, представление (П.23) по-прежнему пригодно, если φ и ψ любые линейно-независимые решения уравнения (25). Однако при этом отношение коэффициентов при φ и ψ в (П.23) принимает при $D \to \infty$ любые вещественные значения, так как φ и ψ осциллируют при $x \to \infty$ (это следует из теоремы Приложения 1, п. 4; см. также пп. 7, 10). Таким образом, в этом случае решение не единственное, и зависит от значения параметра D. (Так называемый случай «падения на центр», см. подробнее [28—31].)

Для регулярного потенциала, как легко показать с помощью теоремы Приложения 1, п. 5, в представлении (П.23) можно взять конечную константу перенормировки Z_D [по (П.24)] и получить при $D \to \infty$ точное решение $\varphi(x)$.

Если уравнение (П.20) решать по теории возмущений, то в каждом порядке по g возникнут расходимости при $D \to \infty$. Оказывается, существует класс перенормируемых потенциалов, для которых все расходящиеся члены можно в каждом порядке по g убрать подходящим выбором константы перенормировки Z_D. При этом конечная при $D \to \infty$ часть перенормированного решения совпадает с разложением должным образом нормированного точного решения по степеням g. Прежде чем сформулировать основную теорему, введем для удобства обозначения

$$w_D(x) = \exp(\lambda x)\,\varphi_D(x); \quad \bar{g} = g/2\lambda. \tag{П.25}$$

Тогда w_D удовлетворяет уравнению

$$w_D(x) = Z_D + \bar{g}\int_x^D d\xi\, w_D(\xi)\, q(\xi)\,\{1 - \exp[-2\lambda(\xi - x)]\}. \tag{П.26}$$

Представим Z_D и w_D в виде рядов по степеням $\bar{g}$:

$$w_D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{g}^n w_n(x, D); \quad Z_D = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{g}^n Z_n(D), \tag{П.27}$$

где возьмем Z_0 не зависящим от D и $w_0 = Z_0$. Будем считать, что Z_0 определяет нормировку $w_D(x)$ при $x = 0$, т. е. $w_D(0) = w_0 = Z_0$.

Произвольную функцию $f(x)$ назовем *медленно растущей*, если для всякого $\delta > 0$ найдется такое значение $x = x_\delta$ и такое C_δ, что

$$|f(x)| < C_\delta \exp(-\delta x) \quad \text{при} \quad x > x_\delta. \tag{П.28}$$

Теорема о перенормируемости. Если потенциал $q(x)$ медленно растет, то можно подобрать такие $Z_n(D)$, что $w_n(x, D) \xrightarrow[D\to\infty]{} Z_0 w_n(x)$, где $w_n(x)$ — медленно растущая функция, удовлетворяющая условию $w_n(0) = 0$. Более того, функции $w_n(x)$ можно вычислять рекуррентно с помощью итераций «перенормированного» уравнения

$$w(x) = Z_0 + \bar{g}\left\{\int_0^\infty d\xi\, q(\xi)\, w(\xi) \exp(-2\lambda\xi) - \right.$$
$$\left. - \exp(2\lambda x)\int_x^\infty d\xi\, q(\xi)\, w(\xi) \exp(-2\lambda\xi) - \int_0^x d\xi\, q(\xi)\, w(\xi)\right\}. \tag{П.29}$$

Если $w(x)$ — решение этого уравнения, то $\varphi(x) = \exp(-\lambda x)\, w(x)$ удовлетворяет уравнению (25) и граничным условиям

$$\varphi(0) = Z_0; \quad \exp(-\lambda x)(\varphi' + \lambda\varphi) \to 0; \quad x \to \infty, \tag{П.30}$$

и наоборот.

Доказательство. Изучая структуру низших приближений (например, $w_1(x, D)$ и $w_2(x, D)$), нетрудно сообразить, что $w_n(x, D)$ можно представить в виде

$$w_n(x, D) = Z_0\left\{w_n(x) + \exp(2\lambda x)\exp(-2\lambda D)\sum_{m=1}^{n} f_{n,m}(x)\, g_{n,m}(D)\right\}, \tag{П.31}$$

где функции w_n, f_m, g_m — медленно растущие. Поэтому предельный переход $D \to \infty$ при любом конечном значении x даст $w_n(x, D) \to Z_0 w_n(x)$.

Докажем утверждение (П.31) по индукции. Нулевое приближение w_0 тривиально удовлетворяет (П.31). Приближения w_n вычисляются по рекуррентной формуле

$$w_{n+1}(x, D) = Z_{n+1}(D) + \int_x^D d\xi w_n(\xi, D)\, q(\xi) - \\ -\exp(2\lambda x) \int_x^D d\xi \exp(-2\lambda\xi)\, w_n(\xi, D)\, q(\xi). \qquad (\text{П.32})$$

Предположим, что w_n представлено в виде (П.31) и подставим это выражение в (П.32). Определим новые функции $\overline{w}_n, \overline{\overline{w}}_n, \overline{f}_{n,m}, \overline{\overline{f}}_{n,m}$ соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &q(x)\, w_n(x) = \overline{w}_n'(x); \quad q(x)\, w_n(x) \exp(-2\lambda x) = [\overline{\overline{w}}_n \exp(-2\lambda x)]'; \\ &q(x)\, f_{n,m}(x) \exp(2\lambda x) = [\overline{\overline{f}}_{n,m}(x) \exp(2\lambda x)]'; \\ &q(x)\, f_{n,m}(x) = \overline{f}_{n,m}'(x). \end{aligned}\right\} \qquad (\text{П.33})$$

Эти функции заданы, конечно, с точностью до постоянных интегрирования, которые определим ниже. Выполняя очевидные интегрирования, получаем

$$w_{n+1}(x, D) = Z_{n+1}(D) + Z_0 \left\{\overline{w}_n(D) + \sum_{m=1}^{n} \overline{\overline{f}}_{n,m}(D)\, g_{n,m}(D)\right\} + \\ + Z_0 [\overline{\overline{w}}_n(x) - \overline{w}_n(x)] + Z_0 \exp(2\lambda x) \exp(-2\lambda D) \times \\ \times \left\{\sum_{m=1}^{n} [\overline{f}_{n,m}(x) - \overline{\overline{f}}_{n,m}(x)]\, g_{n,m}(D) - \sum_{m=1}^{n} \overline{f}_{n,m}(D)\, g_{n,m}(D) - \overline{w}_n(D)\right\}. \qquad (\text{П.34})$$

Определим $Z_{n+1}(D)$ так, чтобы не зависящие от x первые два члена обратились в нуль и выберем постоянные интегрирования так, чтобы функция $w_n(x) - \overline{w}_n(x) \equiv w_{n+1}(x)$ обращалась в нуль при $x = 0$ и чтобы $\exp(-2\lambda x)\, w_n(x) \to 0$. Остальные константы фиксируем произвольным способом. Нетрудно проверить, что функции $\overline{w}_n, \overline{\overline{w}}_n, \overline{f}_{n,m}, \overline{\overline{f}}_{n,m}$ можно определить:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{w}_n(x) = -\int_0^\infty d\xi q(\xi)\, w_n(\xi) \exp(-2\lambda\xi) + \int_0^x d\xi q(\xi)\, w_n(\xi); \\ &\overline{\overline{w}}_n(x) = -\exp(2\lambda x) \int_x^\infty d\xi q(\xi)\, w_n(\xi) \exp(-2\lambda\xi); \\ &\overline{f}_{n,m}(x) = \int_0^x d\xi q(\xi)\, f_{n,m}(\xi); \\ &\overline{\overline{f}}_{n,m}(x) = \exp(-2\lambda x) \int_0^x d\xi q(\xi)\, f_{n,m}(\xi) \exp(2\lambda\xi). \end{aligned}\right\} \qquad (\text{П.35})$$

Легко убедиться, что все эти функции медленно растущие, откуда теперь следует справедливость предположения индукции для w_{n+1}, т. е. первое утверждение теоремы доказано. Заметим, что конечная часть $w_n(x)$ определена однозначно. Произвол в выборе констант интегрирования в (П.36) влияет лишь на вид членов, которые обращаются в нуль при $D \to \infty$.

Легко проверить, что конечная часть $w_{n+1}(x)$ зависит лишь от конечной части $w_n(x)$:

$$w_{n+1}(x) = \int_0^\infty d\xi w_n(\xi) \exp(-2\lambda\xi) -$$

$$- \exp(2\lambda x) \int_x^\infty d\xi q(\xi) w_n(\xi) \exp(-2\lambda\xi) - \int_0^x d\xi q(\xi) w_n(\xi). \qquad (\text{П.36})$$

Отсюда вытекает, что перенормированную функцию

$$w(x) = \sum_{n=1}^\infty \bar{g}^n w_n(x)$$

можно получить итерациями перенормированного уравнения (П.29). Утверждение (П.30) проверяется без труда и мы оставляем проверку читателю. Теорема доказана.

Заметим, что при ее доказательстве нам не пришлось предполагать, что потенциал отталкивательный. Результат полностью сохраняется и для притяжения. Таким образом, *волновая функция для сингулярного перенормируемого потенциала притяжения определяется по перенормированной теории возмущений однозначно*. Это позволяет сделать примечательный вывод. Известно, что точная функция для сингулярного потенциала притяжения, для которого $Q(x) \underset{x\to\infty}{\to} -\infty$, определена не однозначно. Однако в силу нашего результата две такие различные (но одинаково нормированные) функции должны иметь одинаковое разложение по степеням $\bar{g}$, совпадающее с перенормированным рядом теории возмущений. Это возможно лишь, если волновые функции имеют при $\bar{g} = 0$ *существенную особенность* по $\bar{g}$. Таким образом, ряд перенормированной теории возмущений для перенормируемых потенциалов, удовлетворяющих условию $|q(x)| \underset{x\to\infty}{\to} \infty$, не может быть сходящимся и, по-видимому, является лишь асимптотическим.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ РЯДА АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Уравнение (63), записанное в переменных (26), (27) имеет вид

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \frac{1}{W_0} \int_x^\infty d\xi \varphi(\xi) p(\xi) [\varphi_0(x) \psi_0(\xi) - \psi_0(x) \varphi_0(\xi)], \qquad (\text{П.37})$$

где φ_0 и ψ_0 — соответственно регулярное и сингулярное решения ($\varphi_0 \to 0$, $\psi_0 \to \infty$, $x \to 0$) уравнения (25) с потенциалом $q \equiv r^2 V_s(r) = q_s$ и с $k = 0$; $W_0 = W[\varphi_0, \psi_0]$ — константа; и

$$p(x) = -k^2 r_0^2 \exp(-2x) + g q_R(x); \quad q_R(x) = r^2 V_R(r). \qquad (\text{П.38})$$

Будем решать уравнение (П.38) итерациями

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x); \tag{П.39}$$

$$\varphi_{n+1}(x)=\frac{\varphi_0(x)}{W_0}\int_x^{\infty}d\xi\varphi_n(\xi)\,p(\xi)\,\psi_0(\xi)-\frac{\psi_0(x)}{W_0}\int_x^{\infty}d\xi\varphi_n(\xi)\,p(\xi)\,\varphi_0(\xi) \tag{П.40}$$

и докажем, что ряд (П.39) сходится при достаточно больших значениях x, если выполнено условие (64).

С этой целью докажем, что при достаточно большом значении x

$$|\varphi_n(x)|\leqslant\varphi_0(x)\left[2\frac{1+\varepsilon}{W_0}\Phi(x)\right]^n;\quad \Phi(x)\equiv\int_x^{\infty}d\xi\frac{|p(\xi)|}{\sqrt{q_S(\xi)}}. \tag{П.41}$$

Так как $\Phi(x)\underset{x\to 0}{\to}0$, то отсюда следует сходимость ряда (П.39) при достаточно больших значениях x. Более того, отсюда следует, что асимптотика $\varphi(x)$ совпадает с асимптотикой $\varphi_0(x)$.

Докажем оценку (П.41) по индукции. Для $n=0$ она, очевидно, верна. Чтобы перейти от n к $n+1$, получим сначала некоторые неравенства. В качестве ψ_0 (по теореме Милна) всегда можно взять решение, не имеющее нулей при достаточно больших x. Тогда второе решение φ_0 можно взять в виде (см. п. 1, Приложение 1):

$$\varphi_0(x)=\psi_0(x)\int_0^{\infty}d\xi\,[\psi_0(\xi)]^{-2}. \tag{П.42}$$

Можно считать, что $\psi_0>0$, т. е. и $\varphi_0>0$. По теореме Милна $\psi_0'(x)\underset{x\to\infty}{\to}+\infty$, т. е. $\psi_0(x)$ — возрастающая функция. Покажем, что $\varphi_0'(x)<0$, т. е. $\varphi_0(x)$ — убывает. Из (П.42) получаем

$$\varphi_0'(x)=-[1-\varphi_0(x)\,\psi_0'(x)]/\psi_0(x). \tag{П.43}$$

Заметим, что $\psi_0''=(\lambda^2+gq_S(x))\,\psi_0>0$ при достаточно больших x, т. е. функция $\psi_0(\xi)$ обращена выпуклостью вниз и, значит, при $\xi>x$ лежит выше прямой

$$\psi_0'(x)(\xi-x)+\psi_0(x).$$

Отсюда следует, что

$$\int_x^{\infty}d\xi/\psi_0^2(\xi)<\int_x^{\infty}d\xi\,[\psi_0'(\xi-x)+\psi_0(x)]^{-2}=1/[\psi_0(x)\,\psi_0'(x)], \tag{П.44}$$

т. е.

$$\varphi_0(x)\,\psi_0'(x)=\psi_0(x)\,\psi_0'(x)\int_x^{\infty}d\xi\,[\psi_0(\xi)]^{-2}<1,$$

и из (П.43) следует, что $\varphi_0'(x)<0$.

Из доказанных утверждений теперь можно сделать вывод, что

$$\varphi_0(\xi) < \varphi_0(x); \quad \psi_0(\xi) > \psi_0(x) \quad \text{при} \quad x < \xi. \tag{П.45}$$

Кроме того, из (П.44) вытекает, что

$$\varphi_0(x)\,\psi_0(x) = \psi_0^2(x) \int\limits_0^\infty d\xi\,[\psi_0(\xi)]^{-2} < \psi_0(x)/\psi_0'(x) < (1+\varepsilon)/\sqrt{q_S(x)}. \tag{П.46}$$

Последнее неравенство следует из теоремы Вимена (п. 10, Приложение 1), причем ε можно взять сколь угодно малым, если x достаточно велико.

Подставляя теперь предположение индукции (П.41) в соотношение (П.40) и используя неравенства (П.45), (П.46), а также очевидное неравенство $\Phi(\xi) < \Phi(x)$ при $\xi > x$, получим

$$|\varphi_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{W_0}\left(2\frac{1+\varepsilon}{W_0}\right)^n \times$$

$$\times \left\{\varphi_0(x) \int\limits_x^\infty d\xi\,|p(\xi)|\,\varphi_0(\xi)\,\psi_0(\xi)\,\Phi^n(\xi) + \psi_0(x) \int\limits_x^\infty d\xi\,|p(\xi)|\,\varphi_0^2(\xi)\,\Phi^n(\xi)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \varphi_0(x)\left(2\frac{1+\varepsilon}{W_0}\right)^{n+1} \int\limits_x^\infty d\xi\,\frac{|p(\xi)|}{\sqrt{q_S(\xi)}}\,\Phi^n(\xi) \leqslant$$

$$\leqslant \varphi_0(x)\left(2\frac{1+\varepsilon}{W_0}\right)^{n+1} \Phi^{n+1}(x). \tag{П.47}$$

Тем самым предположение индукции, а значит, и сама теорема доказаны.

При доказательстве было использовано предположение, что $q_S(x)$ удовлетворяет условиям теорем Милна и Вимена. Эти условия имеют, однако, столь общий характер, что мы не оговаривали это специально при формулировке нашей теоремы. Во многих случаях с помощью этой теоремы можно получать и более сильные результаты, если предварительно преобразовать уравнение (25) подстановкой Лиувилля. Это особенно полезно, если $q_S(x)$ и $q_R(x)$ мало отличаются друг от друга, и условие сходимости интеграла $\Phi(x)$ не выполнено. Заметим также, что для достаточно сингулярных потенциалов (это требование можно ослабить, если использовать подстановку Лиувилля) центробежный член можно также включать в менее сингулярную часть потенциала V_R.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Frank W. M., Land D. J., Spector R. M.** «Rev. Mod. Phys.», 1971, v. 43, p. 36.
2. **Logunov A. A., Tavkhelidze A. N.** «Nuovo cimento», 1963, v. 29, p. 380.
3. **Фаустов Р. Н.** «ЭЧАЯ», 1975, т. 3, с. 238.
4. **Ризов В. А., Тодоров И. Т.** «ЭЧАЯ», 1975, т. 6, с. 669.
5. **Filippov A. T.** In: Proc. of the Intern. Conf. on Math. Probl. of Quantum Fields and Quantum Stat. M., «Nauka», 1975, p. 302.
6. **Erkelenz K.** «Phys. Reports», 1974, v. 130, p. 193.
7. **Atakishijev N. M., Filippov A. T.** «Comm. Math. Phys.», 1971, v. 24, p. 74.
8. **Волков М. К.** «ЭЧАЯ», 1971, т. 2, вып. 1, с. 33.
9. **Ефимов Г. В.** Нелокальные взаимодействия квантованных полей. М., «Наука», 1977.

10. **Sawyer R. F.** «Phys. Rev. B», 1964, v. 134, p. 448.
11. **Lane K., Chodos A.** «Phys. Rev. D», 1971, v. 4, p. 1667.
12. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. М., «Наука», 1973.
13. **Gross D., Wilczek F.** «Phys. Rev. D», 1973, v. 8, p. 3633.
14. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963.
15. **Де Альфаро В., Редже Т.** Потенциальное рассеяние. Пер. с англ. М., «Мир», 1966.
16. **Ньютон Р.** Теория рассеяния волн и частиц. Пер. с англ. М., «Мир», 1969.
17. **Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М.** Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., «Наука», 1971.
18. **Нуссенцвейг Х. М.** Причинность и дисперсионные соотношения. Пер. с англ. М., «Мир», 1976.
19. **Cornille M.** «Nuovo cimento», 1965, v. 38, p. 1243; 1965, v. 39, p. 557; 1966, v. 43, p. 786.
20. **Gale W. A.** «J. Math. Phys.», 1967, v. 8, p. 1050.
21. **Коддингтон Э. А., Левинсон Н.** Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
22. **Липатов Л. Н.** Препринт ЛИЯФ-255. Ленинград, 1976.
23. **Shirkov D. V.** Preprint JINR E2-9340. Dubna, 1975.
24. **Brezin E.** In: Proc. of the EPS Conf. on Particle Physics. Budapest, 1977.
25. **Филиппов А. Т.** Препринт ОИЯИ 2-4956. Дубна, 1970.
26. **Гогохия В. Ш., Филиппов А. Т.** «Ядерная физика», 1972, т. 15, с. 1294.
27. **Heckathorn D., Oehme R.** «Phys. Rev. D», 1976, v. 13, p. 1003.
28. **Case K. M.** «Phys. Rev.», 1950, v. 80, p. 797.
29. **Переломов А. М., Попов В. С.** «ТМФ», 1970, т. 4, с. 48.
30. **Аллилуев С. П.** «ЖЭТФ», 1971, т. 61, с. 15.
31. **Зельдович Я. Б., Попов В. С.** «УФН», 1971, т. 105, с. 403.
32. **Feinberg G., Pais A.** «Phys. Rev.», 1963, v. 131, p. 2734; 1964, v. 133, p. 477.
33. **Khuri N. N., Pais A.** «Rev. Mod. Phys.», 1964, v. 36, p. 590.
34. **Tiktopoulos G., Treiman S. B.** «Phys. Rev. B», 1964, v. 134, p. 844.
35. **Heisenberg W.** «Z. Phys.», 1936, Bd 101, S. 533; 1938, Bd 110, S. 251.
36. Ландау Л. Д. «ЖЭТФ», 1940, т. 10, с. 718.
37. Ландау Л. Д., **Абрикосов А. А., Халатников И. М.** «Докл. АН СССР», 1954, т. 95, с. 497; 1954, т. 96, с. 261.
38. **Bender C. M., Wu T. T.** «Phys. Rev.», 1969, v. 184, p. 1231.
39. **Banks T., Bender C. M., Wu T. T.** «Phys. Rev. D», 1973, v. 8, p. 3346.
40. **Филиппов А. Т.** Сб. Нелокальные, нелинейные и неперенормируемые теории поля. Изв. ОИЯИ, Дубна, 1970, с. 209.
41. **Блохинцев Д. И., Ефремов А. В., Ширков Д. В.** «Изв. вузов, серия физика», 1974, т. 12, с. 23.
42. **Гогохия В. Ш., Филиппов А. Т.** Сообщение ОИЯИ Р2-7142. Дубна, 1973.
43. **Filippov A. T.** Preprint JINR, E2-7929, Dubna, 1974.
44. **Filippov A. T.** «Phys. Lett. B», 1974, v. 51, p. 379.
45. **Filippov A. T.** In: Proc. of the 18 th Intern. Conf. on High Energy Physics. Vol. 1. Dubna, 1977, p. 129—159.
46. **Боголюбов П. Н.** «ЭЧАЯ», 1972, т. 3, с. 144.
47. **Rosen G.** «J. Math. Phys.», 1972, v. 13, p. 595.
48. **Hsu J. P., Mac E.** «J. Math. Phys.», 1977, v. 18, p. 100.
49. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм и рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
50. **In: Proc.** of the EPS Conf. on Particle Physics. Budapest, 1977.
51. **Arbuzov B. A., Filippov A. T.** «Phys. Lett.», 1964, v. 13, p. 95.
52. **Luke Yu. L.** Mathematical Functions and their Approximations, N.Y., Acad. Press, 1975.

53. **Filippov A. T., Puzynin I. V., Mavlo D. P.** «J. Comput. Phys.», 1976, v. 22, p. 150.
54. **Milne W. E.** «Trans. Amer. Math. Soc.», 1928, v. 30, p. 797.
55. **Poincare H.** «Amer. J. Math.», 1961, v. 7, p. 203.
56. **Трикоми Ф.** Дифференциальные уравнения. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
57. **Сансоне Дж.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. II. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
58. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Пер. с англ. М., «Мир», 1970.
59. **Вазов В.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Пер. с англ. М., «Мир», 1968.
60. **Беллман Р.** Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
61. **Чезари Л.** Асимптотическое поведение и устойчивость решений, обыкновенных дифференциальных уравнений. Пер. с англ. М., «Мир», 1964.
62. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1951.
63. **Wiman A.** «Acta math.», 1936, v. 66, p. 121.
64. **Trjitzinsky W. J.** «Acta math.», 1936, v. 67, p. 1.