«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1979, ТОМ 10, ВЫП. 4

УДК 539.12

# ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ МНОГОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ

*А. М. Переломов*

Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

В работе приведены некоторые точные результаты для одномерных многочастичных систем как классических, так и квантовых.

The paper is a short review of exact results for one-dimensional many-body problems both classical and quantum ones.

## ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что как классическая, так и квантовая задача трех и бо́льшего числа частиц с реалистическим взаимодействием между ними (кулоновским или ядерным) не допускает явного решения. Отсюда интерес к более простым, но зато допускающим точные решения, моделям $n$ взаимодействующих частиц. Имеются основания ожидать, что некоторые качественные особенности таких моделей сохранятся и в реальном случае. Кроме того, эти модели могут быть полезны для оценки точности различных приближенных методов, широко используемых в ядерной физике.

В трехмерном случае точное решение известно лишь для системы $n$ частиц, связанных осцилляторными силами:

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n) = \sum_{j<k} V(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k); \quad V(\mathbf{r}) = \omega^2 r^2/2.$$

Однако, после введения координат Якоби, эта модель переходит в модель $(n-1)$ частицы, каждая из которых движется независимо в поле общей осцилляторной ямы. Поэтому она несущественно отличается от модели одной частицы.

В одномерном случае (классическом и квантовом) удается получить точные результаты для более широкого класса потенциалов. По-видимому, первым примером точно разрешимой одномерной квантовой модели $n$ взаимодействующих частиц можно считать модель с $\delta$-взаимодействием между частицами: $V(q) = g\delta(q)$ [1—5]. Отметим еще модель с взаимодействием вида $V(q) = g\,|\,q\,|$ [6]. В настоящей статье обе эти модели рассматриваться не будут, так же как и классическая модель с взаимодействием лишь между ближайшими соседями вида $V(q) = g \exp(-q)$ так называемая цепочка Тода [7—11].

В настоящей статье подробно рассмотрим одномерные классические и квантовые модели $n$ взаимодействующих частиц с потенциалами следующих пяти видов:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad V(q) = g^2 q^{-2};\\
&\text{II.} \quad V(q) = g^2 a^2 \operatorname{sh}^{-2} aq;\\
&\text{III.} \quad V(q) = g^2 a^2 \sin^{-2} aq;\\
&\text{IV.} \quad V(q) = g^2 a^2 \wp(aq);\\
&\text{V.} \quad V(q) = g^2 q^{-2} + \omega^2 q^2.
\end{aligned}$$

Здесь $\wp(q)$ — функция Вейерштрасса.

Ряд точных результатов о виде волновых функций, спектре и характере рассеяния для квантовой одномерной многочастичной задачи с потенциалами вида I и V (модель Калоджеро) [12—17] и потенциалом вида III (модель Сазерленда) [18] был получен в 1969—1975 гг. К этому же циклу примыкают работы [19, 20], в которых изучалась трехчастичная система с непарным взаимодействием типа

$$U(q_1, q_2, q_3) = g_1^2 \sum_{i<j} V(q_i - q_j) + g_2^2 \sum_{\substack{i \neq j,\, j \neq k \\ i \neq k}} V(2q_i - q_j - q_k) \tag{1}$$

с функцией $V(q)$ вида I и V.

Дальнейший прогресс в рассматриваемой области связан с использованием (в классическом случае) нового метода — метода изоспектральной деформации, примененного впервые к уравнению Кортевега — де Фриза, а затем к нелинейному уравнению Шредингера и уравнению sine-Gordon. Применение этой техники к многочастичным задачам [9, 10, 21] позволило установить полную интегрируемость классических многочастичных задач с потенциалами вида I—V [21—27], цепочек Тода [9—11] и еще одной системы типа II [28].

В работе [24] показано, что рассматриваемые системы обладают высокой скрытой симметрией и являются частным случаем более широкого класса систем, связанных с полупростыми алгебрами Ли. В дальнейшем в работах [29, 30] установлены причины полной интегрируемости классических систем такого типа. В частности, показано, что системам с потенциалами вида I—III отвечает свободное движение (движение по геодезической) в определенных пространствах (симметрических пространствах) бóльшего чем $n$ числа измерений. Эта связь позволила найти естественное обобщение рассматриваемого класса систем и полностью проинтегрировать уравнения движения с помощью метода проектирования свободного движения [29—30].

Идея метода состоит в рассмотрении свободного движения по геодезической на определенном (симметрическом) пространстве нулевой, отрицательной или положительной кривизны, причем размерность пространства больше $n$. После специального проектирования на пространство меньшего числа измерений ($n$-мерное пространство) получается уже не свободное движение, а движение в потенциальном поле

$$U(q_1, \ldots, q_n) = \sum_{j<k} V(q_j - q_k),$$

где $V(q)$ имеет вид I—III.

Проиллюстрируем это на простейших примерах.

1. Пусть частица единичной массы движется свободно с импульсом $\mathbf{p}$ на двумерной плоскости $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Тогда радиальное движение описывается гамильтонианом

$$H = p^2/2 + g^2 q^{-2}, \tag{2}$$

где $p = |\mathbf{p}|$; $q = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; $E = \mathbf{p}^2/2$.

2. Если рассмотреть двумерный изотропный осциллятор с частотой $\omega$, то аналогично приходим к гамильтониану

$$H = p^2/2 + g^2 q^{-2} + \omega^2 q^2/2. \tag{3}$$

3. Для свободного движения частицы по верхней полости двуполостного гиперболоида $H^2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1, x_0 > 1\}$ получаем

$$H = p^2/2 + g^2 \operatorname{sh}^{-2} q \quad (x_0 = \operatorname{ch} q). \tag{4}$$

4. Для свободного движения частицы по однополостному гиперболоиду $H^2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = -1\}$ имеем

$$H = p^2/2 - g^2 \operatorname{ch}^{-2} q \quad (x_0 = \operatorname{sh} q). \tag{5}$$

5. Для свободного движения частицы по двумерной сфере

$$S^2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

получаем гамильтониан

$$H = p^2/2 + g^2 \sin^{-2} q \quad (x_0 = \cos q). \tag{6}$$

Оказалось, что аналогичное рассмотрение более сложных симметрических пространств позволяет эффективно проинтегрировать уравнения движения и в многочастичном случае.

В дальнейшем этот подход был распространен и на квантовый случай [31—33], что удалось сделать, во-первых, благодаря использованию результатов, полученных для классического случая в [24], и, во-вторых, в результате установления связи между многочастичным гамильтонианом и так называемым *оператором*

*Лапласа — Бельтрами* на соответствующем симметрическом пространстве [32]. Благодаря этой связи многие математические результаты можно перевести на язык рассматриваемых здесь квантовых систем. С другой стороны ряд формул, полученных в упомянутых выше физических работах, являются новыми математическими результатами.

## 1. КЛАССИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

**Вполне интегрируемые гамильтоновы системы.** Рассмотрим динамическую систему с $n$-степенями свободы и гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2+U(\mathbf{q}),\quad \mathbf{q}=(q_1,\ \ldots,\ q_n). \tag{7}$$

Здесь и далее $p_j$ и $q_k$ — импульсы и координаты, точка означает дифференцирование по времени. Такая система описывается уравнениями Гамильтона

$$\dot{p}_j=-\partial U/\partial q_j,\quad \dot{q}_j=p_j \tag{8}$$

и называется вполне интегрируемой, если существуют переменные $I_j(\mathbf{p},\mathbf{q})$, $\varphi_k(\mathbf{p},\mathbf{q})$ *типа действие — угол, определенные глобально на всем фазовом пространстве* * (см., например [34]).

Такие переменные обладают простой зависимостью от времени:

$$I_j(t)=\mathrm{const},\quad \varphi_k(t)=\varphi_k^0+\omega_k t.$$

Если величины $I_j(\mathbf{p}, q)$ и $\varphi_k(\mathbf{p},\mathbf{q})$ известны и удается выразить через них координаты и импульсы

$$q_j=q_j(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi}),\quad p_k=p_k(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi})$$

то тем самым удается проинтегрировать уравнения движения рассматриваемой системы. Таким образом для вполне интегрируемых систем принципиальная возможность интегрирования уравнений движения имеется, однако реализовать эту возможность практически удается лишь в редких случаях. Критерий полной интегрируемости системы дает теорема Лиувилля (см., например, [34]):

*Если существует $n$ функционально-независимых глобальных интегралов движения $I_i(\mathbf{p},\mathbf{q})$, находящихся в инволюции*, т. е. *таких, что скобки Пуассона любых двух интегралов равны нулю*:

$$\{I_j,\ I_k\}=\sum_l\left(\frac{\partial I_j}{\partial p_l}\frac{\partial I_k}{\partial q_l}-\frac{\partial I_j}{\partial q_l}\frac{\partial I_k}{\partial p_l}\right)=0, \tag{9}$$

*то система вполне интегрируема.*

---

* Не следует думать, что такие переменные существуют всегда. Обычно переменные типа угол — действие имеют локальный характер и их нельзя определить на всем фазовом пространстве.

Таким образом вполне интегрируемые системы обладают $n$ *глобальными* интегралами движения и, следовательно, определенной скрытой симметрией.

До недавнего времени было известно лишь несколько таких систем. Укажем некоторые из них:

1) движение в центральном потенциале (Ньютон) $U(\mathbf{q}) = U(|\mathbf{q}|)$;

2) движение в поле двух неподвижных центров (Эйлер)

$$U(\mathbf{q}) = \alpha_1 |\mathbf{q} - \mathbf{a}_1|^{-1} + \alpha_2 |\mathbf{q} - \mathbf{a}_2|^{-1};$$

3) свободное движение точки на поверхности трехосного эллипсоида (Якоби);

4) одномерное движение трех частиц с парным взаимодействием вида:

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{j<k}^{3} g_{jk}^2 (q_j - q_k)^{-2}$$

(Якоби [35]).

Относительно четырех и пяти частиц см. работы [14, 15]

5) движение твердого тела с неподвижной точкой в ряде специальных случаев (Эйлер, Лагранж, Ковалевская).

Недавно в этой области был достигнут значительный прогресс, связанный с открытием нового метода интегрирования нелинейных уравнений [36]. К динамическим системам механики этот метод был впервые применен в работах [9, 10, 21]. В настоящее время известно большое число вполне интегрируемых механических систем, ряд которых проинтегрирован до конца. Рассмотрим здесь лишь вполне интегрируемые многочастичные системы. Перейдем к нахождению возможного вида потенциальной энергии для таких систем.

**Многочастичные системы, обладающие дополнительными интегралами движения.** Для нахождения вида двухчастичного потенциала, при котором рассматриваемые системы (7) обладают дополнительными интегралами движения, следуя работам [21—23], используем метод изоспектральной деформации, часто называемый приемом Лакса [37]. Попытаемся найти пару эрмитовых $n \times n$ матриц $L$ и $M$, так называемую $L$ — $M$-пару, элементы которых зависят от координат $q_j$ и импульсов $p_k$, так что уравнения Гамильтона

$$\dot{q}_j = p_j, \quad \dot{p}_j = -\partial U/\partial q_j \tag{10}$$

эквивалентны одному матричному уравнению

$$i\dot{L} = [M, L] \tag{11}$$

Из (11) следует, что матрица $L(t)$ испытывает унитарное преобразование

$$L(t)=U(t)\,L(0)\,U^{-1}(t);\quad U^{-1}=U^{+};\quad M=\mathrm{i}\dot{U}U^{-1}. \tag{12}$$

Таким образом, собственные значения матрицы $L(t)$ не зависят от времени или, что то же самое, матрица $L(t)$ с течением времени подвергается изоспектральной деформации. Поэтому собственные значения матрицы $L$ или, что более удобно, симметрические функции собственных значений, например:

$$I_k = \mathrm{Sp}\,(L^k)/k \tag{13}$$

являются интегралами движения.

Если при этом удается найти $n$ независимых интегралов движения и показать, что они находятся в инволюции, т. е. скобки Пуассона равны нулю, то рассматриваемая система вполне интегрируема.

Перейдем к реализации этой программы для системы, характеризуемой гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2+\sum_{j<k}^{n} V(q_j-q_k);\quad V(-q)=V(q). \tag{14}$$

Для матриц $L$ и $M$ используем следующий абзац:

$$L_{jk}=p_j\delta_{jk}+\mathrm{i}\,(1-\delta_{jk})\,x\,(q_j-q_k); \tag{15}$$

$$M_{jk}=\delta_{jk}\Big(\sum_{l\neq j} z\,(q_j-q_l)\Big)-(1-\delta_{jk})\,y\,(q_j-q_k), \tag{16}$$

где $x(-q)=-x(q);\quad y(-q)=y(q);\quad z(-q)=z(q)$.

Подставляя $L$ и $M$ в уравнение Лакса (11) и требуя эквивалентности этого уравнения уравнениям Гамильтона (10), получаем выражение для функции $y(\xi)$:

$$y(\xi)=-x'(\xi) \tag{17}$$

и функциональное уравнение для функций $x(\xi)$ и $z(\xi)$:

$$x(\xi)\,x'(\eta)-x(\eta)\,x'(\xi)=x(\xi+\eta)\,[z(\xi)-z(\eta)]. \tag{18}$$

При этом потенциальная энергия $V(\xi)$ имеет вид

$$V(\xi)=x^2(\xi)+\mathrm{const}. \tag{19}$$

Решение функционального уравнения (18) дано в работах [24, 42, 43] (см. приложение).

Оказывается, что

$$z(\xi)=gx''(\xi)/2x(\xi), \tag{20}$$

а функция $x(\xi)$ имеет вид:

$$x(\xi)=\begin{cases} g\xi^{-1}; & (21)\\ ga\operatorname{cth} a\xi, \quad ga\operatorname{sh}^{-1} a\xi; & (22)\\ ga\operatorname{ctg} a\xi, \quad ga\sin^{-1} a\xi; & (23)\\ ga\dfrac{\operatorname{cn}(a\xi)}{\operatorname{sn}(a\xi)}, \quad ga\dfrac{\operatorname{dn}(a\xi)}{\operatorname{sn}(a\xi)}. & (24)\end{cases}$$

Из (21) — (24) и (19) следует, что при этом получаем системы с потенциальной энергией (I) — (IV).

Знание функций $x(\xi)$, $y(\xi)$ и $z(\xi)$ позволяет построить $L - M$-пару для рассматриваемой многочастичной системы и, тем самым, по (13) найти интегралы движения. Небольшая модификация метода [25] позволяет включить в рассмотрение и потенциал вида (V). Для этого вместо уравнения Лакса (11) рассмотрим уравнения

$$i\dot{L}^{\pm}=[M,\ L^{\pm}]\pm\omega L^{\pm}, \tag{25}$$

Из этих уравнений следует, что

$$B_k^{\pm}=\operatorname{Sp}(L^{\pm})^k/k \tag{26}$$

хотя и не являются интегралами движения, однако очень просто зависят от времени. Именно

$$B_k^{\pm}(t)=B_k^{\pm}(0)\exp(\mp ik\omega t). \tag{27}$$

Из (25) нетрудно получить также и интегралы движения. Так, матрицы

$$N_1=L^+L^-;\quad N_2=L^-L^+, \tag{28}$$

как нетрудно видеть, удовлетворяют обычному уравнению Лакса

$$i\dot{N}_j=[M,\ N_j],\quad j=1,\ 2. \tag{29}$$

Собственные значения любой из этих матриц или же следы их степеней являются интегралами движения.

Как показано в [25] матрицы $L^{\pm}$ в (25) имеют вид

$$L^{\pm}=L\pm i\omega Q, \tag{30}$$

где

$$Q=\operatorname{diag}(q_1,\ \ldots,\ q_n), \tag{31}$$

а матрица $L$ определена (15), здесь $x(q)=gq^{-1}$. Это следует из простого тождества:

$$[Q,\ M]=X;\quad X_{jk}=g(1-\delta_{jk})(q_j-q_k)^{-1}. \tag{32}$$

Таким образом для систем всех пяти типов найдена серия интегралов движения.

**Доказательство полной интегрируемости многочастичных систем, обладающих дополнительными интегралами движения.** Покажем, что рассмотренные системы являются вполне интегрируемыми. Для этого достаточно показать, что интегралы движения $I_k$ (13) ($k = 2, \ldots, n$) являются функционально независимыми и находятся в инволюции: $\{I_k, I_l\} = 0$.

Для доказательства функциональной независимости заметим, что интегралы $I_k$ имеют вид

$$I_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{n} p_j^k + \text{слагаемые} \tag{33}$$

более низкой степени по импульсам. Поэтому функциональная независимость величин $I_k$ следует из функциональной независимости $S_k = \sum_{i=1}^{n} p_i^k$, что нетрудно доказать. Доказательство инволютивности интегралов $I_k$ — задача более сложная.

Как было показано Мозером [21], для систем (I) это сразу же следует из того обстоятельства, что при $t \to \pm\infty$ расстояние между любыми двумя частицами $|q_j(t) - q_k(t)| \to \infty$. Действительно, при этом $I_k(t) \to k^{-1} \sum_{j=1}^{n} p_j^k(t)$ и, с учетом того, что величины $\{I_k, I_l\}$ являются интегралами движения, они от времени не зависят. Для систем (II) это доказательство остается справедливым [22].

Для систем (V) отсюда сразу же следует, что $B_k(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ (26) находятся в инволюции, а этого достаточно для полной интегрируемости рассматриваемых систем.

Что касается систем (III), то, как отмечено в работе [22], они получаются из систем (II) заменой $a \to \mathrm{i}\, a$ и поэтому также вполне интегрируемы.

Однако доказательство инволютивности интегралов движения для систем (IV) является значительно более сложной задачей. Два разных доказательства инволютивности были даны в [26, 27]. Приведем здесь доказательство из [26]. Заметим, что оно справедливо для потенциалов (I) — (IV), а также для некоторых систем с непарным взаимодействием, рассмотренных в [24].

Рассмотрим системы, приведенные выше, с функцией $V(q)$ вида (I) — (IV). Пусть $n \times n$ эрмитова матрица $L = P + \mathrm{i}\, X$ построена по (15), где функция $x(\xi)$ удовлетворяет функциональному уравнению (18). Пусть $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ и $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ собственные векторы матрицы $L$, соответствующие собственным значениям $\lambda$ и $\mu$ ($\lambda \neq \mu$):

$$L\varphi = (P + \mathrm{i}X)\varphi = \lambda\varphi; \qquad L\psi = (P + \mathrm{i}X)\psi = \mu\psi. \tag{34}$$

Покажем, что если функция $x(\xi)$ удовлетворяет функциональному уравнению (18), то $\lambda$ и $\mu$ находятся в инволюции, т. е.

$$\{\lambda, \mu\} = \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial p_j} \frac{\partial \mu}{\partial q_j} - \frac{\partial \lambda}{\partial q_j} \frac{\partial \mu}{\partial p_j} \right) = 0. \tag{35}$$

Метод доказательства соотношения (35) в идейном отношении близок к методу работ [44, 10], где была доказана инволютивность интервалов движения для нелинейного уравнения Шредингера и цепочки Тода. Заметим прежде всего, что

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_k} = \left( \varphi, \frac{\partial L}{\partial p_k} \varphi \right) = \bar{\varphi}_k \varphi_k; \tag{36}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q_k} = \left( \varphi, \frac{\partial L}{\partial q_k} \varphi \right) = \mathrm{i} \sum_{l} x'(q_k - q_l)(\bar{\varphi}_k \varphi_l - \bar{\varphi}_l \varphi_k). \tag{37}$$

С учетом этих соотношений выражение для скобки Пуассона принимает вид

$$\{\lambda, \mu\} = \mathrm{i} \sum_{k,l} (\bar{\varphi}_k \bar{\psi}_k R_{kl} - \varphi_k \psi_k \bar{R}_{kl}) x'(q_k - q_l), \tag{38}$$

где

$$R_{kl} = \varphi_k \psi_l - \varphi_l \psi_k; \quad R_{lk} = -R_{kl}. \tag{39}$$

С другой стороны из уравнений (34) находим

$$\varphi_k \psi_k = \mathrm{i} (\lambda - \mu)^{-1} \sum_{l} x(q_k - q_l) R_{lk}. \tag{40}$$

Подставляя выражения для $\varphi_k \psi_k$ и $\bar{\varphi}_k \bar{\psi}_k$ в равенство (38), получаем

$$\{\lambda, \mu\} = (\lambda - \mu)^{-1} \sum_{k,\, l \neq j} \bar{R}_{lk} R_{kj} [x'(q_j - q_k) x(q_k - q_l) - \\ - x(q_j - q_k) x'(q_k - q_l)]. \tag{41}$$

Используя функциональное уравнение (18), преобразуем это соотношение к виду

$$\{\lambda, \mu\} = (\mu - \lambda)^{-1} \sum_{k,\, l \neq j} \bar{R}_{lk} R_{kj} [z(q_j - q_k) - \\ - z(q_k - q_l)] x(q_j - q_l). \tag{42}$$

Равенство (42) содержит две суммы. В первой из них выполним суммирование по $l$, а во второй по $j$. Воспользуемся теперь соотношением

$$\sum_{l} x(q_j - q_l) R_{lk} = -\mathrm{i} \lambda \psi_k \varphi_j + \mathrm{i} \mu \varphi_k \psi_j + \mathrm{i} p_j R_{jk} \tag{43}$$

и соотношением комплексно сопряженным к нему. Принимая во внимание четность функции $z(q)$, получим

$$\{\lambda, \mu\} = \mathrm{i}(\mu-\lambda)^{-1}\lambda \sum_{j\neq k} (\bar\psi_k\bar\varphi_j R_{kj} + \psi_k\varphi_j \bar R_{jk})\, z(q_j-q_k) -$$
$$-\mathrm{i}(\mu-\lambda)^{-1}\mu \sum_{j\neq k} (\bar\varphi_k\bar\psi_j R_{kj} + \varphi_k\psi_j \bar R_{jk})\, z(q_j-q_k). \tag{44}$$

Нетрудно видеть, что выражения для первой и второй суммы антисимметричны. Следовательно, $\{\lambda, \mu\} = 0$ и рассматриваемые системы вполне интегрируемы.

**Явное интегрирование уравнений движения для потенциалов $V(q)$ вида ($I$) и ($V$).** Выше было показано, что рассматриваемые системы для потенциалов всех пяти типов вполне интегрируемы. Однако теорема Лиувилля, из которой следует это утверждение, не дает конструктивного метода интегрирования уравнений движения, которое является сложной задачей.

Следуя работе [28], покажем здесь, как с помощью нового метода, так называемого *метода проектирования*, можно проинтегрировать уравнения движения для систем с потенциалами (I) и (V).

Идея заключается в переходе от $n$-мерного пространству к пространству бо́льшего числа измерений $N = (n^2 - 1)$-мернома пространству, в котором уравнения движения принимают более простой вид и легко интегрируются. Проектируя полученное решение на интересующее нас подпространство так, чтобы получить нужную систему, получаем явное решение уравнений движения:

$$\dot q_j = p_j; \qquad \dot p_j = -\partial U/\partial q_j. \tag{45}$$

1. Рассмотрим сначала потенциал (I) ($V(q) = g^2 q^{-2}$). В качестве расширенного пространства возьмем пространство $X^0 = \{x\}$ эрмитовых $n \times n$-матриц с нулевым следом и рассмотрим в этом пространстве свободное движение. Уравнения движения при этом имеют вид

$$\ddot x = 0, \tag{46}$$

а общее решение

$$x(t) = at + b, \tag{47}$$

где $a$, $b \in X^0$.

С помощью унитарного преобразования $U$ приведем эрмитову матрицу $x$ к диагональному виду

$$x(t) = U(t)\,Q(t)\,U^{-1}(t). \tag{48}$$

Здесь

$$Q(t) = \mathrm{diag}\,(q_1(t), \ldots, q_n(t)) \tag{49}$$

и без ограничения общности можно считать, что величины $q_j$ упорядочены: $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_n$. Отметим, что в простейшем случае $n = 2$, $x = \sum_{j=1}^{3} x_j\sigma_j$ ($\sigma_j$ — матрицы Паули), $Q = \mathrm{diag}\,(-q, q)$ и $q = |\mathbf{x}|$, т. е. переход от $x$ к $Q$ можно назвать *сферической проекцией*.

Попробуем теперь вывести уравнения для $q_j(t)$ и $p_j(t) = \dot{q}_j(t)$. Дифференцируя уравнение (48) по времени, получаем

$$U(t)\,L(t)\,U^{-1}(t) = a, \tag{50}$$

где

$$L = P + \mathrm{i}\,[M, Q], \quad P = \dot{Q}; \tag{51}$$

$$M = -\mathrm{i}U^{-1}\dot{U}; \tag{52}$$

$L$ и $M$ — эрмитовы $n \times n$-матрицы.

Дифференцируя по $t$ уравнение (50), получаем

$$\dot{L} + \mathrm{i}\,[M, L] = 0, \tag{53}$$

т. е. уравнение Лакса (11).

Таким образом, пара матриц $L$ и $M$ должна удовлетворять уравнениям (51) и (53). Для матриц $L$ и $M$, имеющих вид (15) и (16), уравнение (53) выполняется. Нетрудно убедиться, прямой подстановкой (15) и (16) в (51), для систем (I), т. е. для $V(q) = q^{-2}$, уравнение (51) также выполняется.

Следует однако иметь в виду, что матрицы $a$ и $b$ в (47) не могут быть произвольными. Действительно, матрица момента количества движения

$$N = \mathrm{i}\,[x, \dot{x}] = \mathrm{i}\,[b, a] = U\,[Q, L]\,U^{-1} \tag{54}$$

не может быть произвольной, поскольку $(n-1)$ собственное значение этой матрицы совпадает. Без ограничения общности можно считать, что $U(0) = 1$; при этом матрицы $a$ и $b$ в (47) выражаются через начальные условия по формулам

$$a = L(0); \qquad b = Q(0), \tag{55}$$

где матрица $L$ дается формулой (15).

Итак, мы получили окончательный результат: *координаты* $q_j(t)$ *— решения уравнений движения для системы* (I) *— являются собственными значениями матрицы*

$$Q(0) + L(0)\,t. \tag{56}$$

Обсудим теперь процесс рассеяния. Потенциал $U(\mathbf{q})$ в (14) исчезает при $q_j - q_k \to \infty$, так что

$$q_j(t) \sim p_j^{\pm} t + q_j^{\pm}, \quad \text{при } t \to \pm\infty. \tag{57}$$

Таким образом процесс рассеяния определяется каноническим преобразованием от переменных $(p_i^-, q_k^-)$ к переменным $(p_i^+, q_k^+)$.

Далее нетрудно видеть, что

$$I_k = \frac{1}{k}\operatorname{Sp}(L^k) = \frac{1}{k}\sum_j (p_j^-)^k = \frac{1}{k}\sum_j (p_j^+)^k. \tag{58}$$

Отсюда следует, что $p_j^+$ отличаются от $p_k^-$ — лишь перестановкой

$$\mathbf{p}^+ = S\mathbf{p}^-. \tag{59}$$

Учитывая условие $q_1 < q_2 < \ldots < q_n$, получаем

$$p_1^+ < p_2^+ < \ldots < p_n^+; \quad p_1^- > p_2^- > \ldots > p_n^-$$

и, следовательно,

$$p_1^- = p_n^+; \quad p_2^- = p_{n-1}^+, \ldots, p_n^- = p_1^+. \tag{60}$$

Докажем, что $q_j^+$ и $q_k^-$ также удовлетворяют аналогичному условию

$$q_1^- = q_n^+; \quad q_2^- = q_{n-1}^+, \ldots; \quad q_n^- = q_1^+. \tag{61}$$

Действительно, из (50) следует, что

$$a = U(\infty)L(\infty)U^{-1}(\infty) = U(-\infty)L(-\infty)U^{-1}(-\infty). \tag{62}$$

Кроме того,

$$L(\infty) = P^+ = \operatorname{diag}(p_1^+, \ldots, p_n^+);$$
$$L(-\infty) = P^- = \operatorname{diag}(p_1^-, \ldots, p_n^-) \tag{63}$$

Отсюда получаем

$$P^+ = SP^-S^{-1},$$

где

$$S = U^{-1}(\infty)U(-\infty). \tag{64}$$

Теперь воспользуемся равенством

$$Q(t) = U^{-1}(t)\,x(t)\,U(t) = Pt + \mathrm{i}\,[M, Q]\,t + U^{-1}(t)\,bU(t). \tag{65}$$

Отсюда следует, что

$$Q^{\pm} = U^{-1}(\pm\infty)\,bU(\pm\infty), \quad Q^+ = SQ^-S^{-1},$$

таким образом, соотношение (61) доказано.

Другое доказательство формулы (61) дано в работе [38]. Соотношения (60) и (61) означают, что рассеяние в рассматриваемой задаче сводится к следующим друг за другом рассеяниям отдельных пар частиц. Как будет показано ниже аналогично обстоит дело и в квантовом случае.

2. Перейдем теперь к рассмотрению потенциала (V):

$$V(q) = g^2q^{-2} + \omega^2q^2.$$

В этом случае вместо свободного рассмотрим гармоническое движение в пространстве $X^0$:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x \in X^0. \tag{66}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = \frac{a}{\omega}\sin\omega t + b\cos\omega t, \quad a, b \in X^0. \tag{67}$$

Представляя это выражение в виде

$$x(t) = U(t)\,Q(t)\,U^{-1}(t), \tag{68}$$

где $Q(t) = \operatorname{diag}(q_1(t), \ldots, q_n(t))$; $U$ — унитарная матрица, и дифференцируя (68) дважды по времени, аналогично предыдущему приходим к утверждению:

*координаты $q_j(t)$ рассматриваемой системы являются собственными значениями матрицы*

$$Q(0)\cos\omega t + \omega^{-1}L(0)\sin\omega t. \tag{69}$$

Далее, из (48) и (68) следует, что

$$\mathrm{Sp}\,[Q(t)]^k = \mathrm{Sp}\,[x(t)]^k, \tag{70}$$

но $\mathrm{Sp}\,[Q(t)]$ — это полином по $q_j$ степени $k$, инвариантный относительно перестановок. Отсюда получаем.

**Следствие 1.** Полином степени $k$ по $q$, инвариантный относительно перестановок, является полиномом степени $k$ по $t$ ($\omega = 0$) или $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$ ($\omega \neq 0$).

Заметим, что явное решение уравнений движения для систем (I) и (V) [см. (56) и (69)), позволяет установить простое соотношение между этими решениями.

Пусть $q_j(t)$ — решение уравнений движения для системы (I) ($\omega = 0$). Тогда из формул (56) и (69) следует, что

$$\tilde{q}_j(t) = q_j\left(\frac{1}{\omega}\operatorname{tg}\omega t\right)\cos\omega t \tag{71}$$

являются решением соответствующей системы типа $V$ ($\omega \neq 0$). Справедливо, разумеется, и обратное утверждение. Аналогичная связь для систем более общего вида дана в работе [39].

Отметим, еще, что $\mathrm{Sp}\,(Q^{k_1}L^{l_1}Q^{k_2}L^{l_2}\ldots)$ имеют простую зависимость от времени. Именно такая величина является полиномом степени $k = \Sigma k_j$ по $t$ при $\omega = 0$ или по $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ при $\omega \neq 0$. Алгебра скобок Пуассона для таких величин изучена в работе [40].

**Явное интегрирование уравнений движения для потенциалов (*II*) и (*III*).** Для того чтобы проинтегрировать аналогичным способом уравнения движения для систем (II) ($V(q) = a^2\,\mathrm{sh}^{-2}\,aq$) и (III) ($V(q) = a^2\sin^{-2}aq$), заметим прежде всего, что рассмотренное множество $X^0$ — множество эрмитовых $n \times n$ матриц со следом нуль является римановым симметрическим пространством нулевой кривизны (см. [41]) при выборе естественной метрики $ds^2 = \mathrm{Sp}\,(dx\,dx)$. Рассмотрим теперь, связанные с ним по Картану, пространства отрицательной кривизны $X^-$ и положительной кривизны $X^+$ и движение по геодезическим на этих пространствах. При этом, аналогично изложенному выше, получим решение уравнений движения для систем (II) и (III) соответственно.

Рассмотрим сначала систему (II). Пусть $X^-$ — пространство отрицательной кривизны, соответствующее пространству $X^0$ — пространство эрмитовых положительно определенных $n \times n$ матриц, с определителем равным единице.

Пусть $x(t)$ — кривая в $X^-$. Тогда матрицы $x^{-1}(t)\,\dot{x}(t)$ и $\dot{x}(t)\,x^{-1}(t)$ можно рассматривать как два векторных поля на группе $G = SL(n, C)$ — группе комплексных матриц с определителем, равным единице. Эти поля не являются векторными полями на пространстве $X^-$; их полусумма, как нетрудно видеть, будет уже векторным полем на пространстве $X^-$. Если теперь $x(t)$ — геодезическая на пространстве $X^-$, то уравнение для нее имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x^{-1}\dot{x}+\dot{x}x^{-1}}{2}\right)=0. \tag{72}$$

Заметим, что это уравнение можно получить из уравнения для геодезических для двусторонне инвариантной [относительно действия группы $G = SL(n, C)$] метрики: $ds^2 = \mathrm{Sp}\,(x^{-1}dx\,x^{-1}dx)$. Действительно, из условия $\delta\,ds = 0$ получаем

$$\ddot{x} - \dot{x}x^{-1}\dot{x} = 0, \tag{73}$$

откуда сразу же следует (72).

Очевидно, что следующая кривая является геодезической на $X^-$:

$$x(t) = b\exp(2\hat{a}t)\,b^+;$$
$$b \in SL(n, C), \quad \hat{a}^+ = \hat{a}, \quad \mathrm{Sp}\,\hat{a} = 0. \tag{74}$$

Представим теперь эрмитову положительно-определенную матрицу $x(t)$ в виде

$$x(t) = U(t)\exp\{2aQ(t)\}\,U^{-1}(t), \tag{75}$$

где $U(t)$ — унитарная матрица; $Q(t) = \mathrm{diag}\,(q_1(t), \ldots, q_n(t))$ — диагональная матрица со следом нуль.

Вычисляя с помощью (75) величины $\dot{x}x^{-1}$ и $x^{-1}\dot{x}$, получаем:

$$1)\quad (\dot{x}x^{-1} + x^{-1}\dot{x})/2 = 2aU(t)\,L(t)\,U^{-1}(t), \tag{76}$$

где

$$L(t) = P + \frac{\mathrm{i}}{4a}[\exp(-2aQ) M \exp(2aQ) - \\ - \exp(2aQ) M \exp(-2aQ)]; \qquad (77)$$

$$M = -\mathrm{i}U^{-1}(t)\dot{U}(t) \qquad (78)$$

— «угловая скорость вращения», $P = \dot{Q}$;

$$2) \quad (\dot{x}x^{-1} - x^{-1}\dot{x})/2\mathrm{i} = U\widetilde{M}U^{-1}, \qquad (79)$$

где

$$\widetilde{M} = M - [\exp(2aQ) M \exp(-2aQ) + \\ + \exp(-2aQ) M \exp(2aQ)]/2. \qquad (80)$$

С другой стороны, из (74) следует, что матрицы

$$(\dot{x}x^{-1} + x^{-1}\dot{x})/2 = b\hat{a}b^{-1} + (b^{+})^{-1}\hat{a}b^{+}; \qquad (81)$$

$$(\dot{x}x^{-1} - x^{-1}\dot{x})/2\mathrm{i} = [b\hat{a}b^{-1} - (b^{+})^{-1}\hat{a}b^{+}]/\mathrm{i} \qquad (82)$$

от времени не зависят.

Дифференцируя равенства (76), (79), (81) и (82) по времени, получаем уравнения типа Лакса:

$$i\dot{L} = [M, L]; \qquad (83)$$

$$i\dot{\widetilde{M}} = [M, \widetilde{M}], \qquad (84)$$

где матрицы $L$, $\widetilde{M}$ и $M$ даются формулами (77), (80) и (78). Отметим, что помимо матрицы $L$ получена еще матрица $\widetilde{M}$, также подвергающаяся изоспектральной деформации с течением времени.

Возьмем теперь матрицы $L$ и $M$ в виде (15) и (16), где $x(q) = a \operatorname{cth} aq$ $(q = 1)$. Тогда, как известно, уравнение (83) выполняется. Подставляя $L$ и $M$ в уравнение (77), убеждаемся в том, что и это уравнение для $L$ и $M$ также выполняется. Можно также проверить, что и уравнение (84) при этом также удовлетворяется.

Таким образом, при выборе матриц $L$ и $M$ в виде (15) и (16) и $x(q) = a \operatorname{cth} aq$ все условия самосогласования выполнены и приходим к окончательному результату:

*Величины* $\exp(2aq_j(t))$, *где* $q_j(t)$ — *решения уравнений движения для системы* (II) *являются собственными значениями матрицы*

$$x(t) = b \exp(2\hat{a}t)\, b, \qquad (85)$$

где

$$b = \exp[aQ(0)]; \quad Q = \operatorname{diag}(q_1, \ldots, q_n), \qquad (86)$$

матрица $\hat{a}$ находится из условия

$$2aL(0) = b\hat{a}b^{-1} + b^{-1}\hat{a}b; \tag{87}$$

$$\hat{a}_{jk} = ap_j\delta_{jk} + \mathrm{i}a^2(1-\delta_{jk})\,\mathrm{sh}^{-1}a(q_j - q_k). \tag{88}$$

В заключение заметим, что все результаты для системы (III) получаются из соответствующих результатов для системы (II) заменой $a \to \mathrm{i}\,a$. При $a \to 0$ находим результаты для системы (I) $[V(q) = q^{-2}]$.

## 2. КВАНТОВЫЙ СЛУЧАЙ

**Полная интегрируемость рассматриваемых систем.** Перейдем к обобщению результатов, полученных для рассмотренных многочастичных систем, на квантовый случай. Напомним, что изучаются системы, описываемые гамильтонианом:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\hat{p}_j^2 + U(q_1, \ldots, q_n); \quad \hat{p}_j = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial q_j}\,(\hbar = 1); \tag{89}$$

$$U(q_1, \ldots, q_n) = \sum_{j<k} V(q_j - q_k), \tag{90}$$

где двухчастичный потенциал $V(q)$ — функция одного из пяти видов (I) — (V).

Квантовую систему (89) назовем вполне интегрируемой, если существует $n$ независимых дифференциальных операторов, коммутирующих с гамильтонианом $\hat{H}$ и друг с другом — полный набор интегралов движения. В классическом пределе ($h \to 0$) коммутаторы переходят в скобки Пуассона и это определение совпадает с определением полной интегрируемости классической механики (теорема Лиувилля [34]).

Покажем, что системы, изученные для классического случая, остаются вполне интегрируемыми и для квантового *. Рассмотрим сначала системы с потенциалами $V(q)$ вида (I) — (IV). Для того чтобы построить интегралы движения для произвольного $n$, используем результаты работ [22, 27]. (Для систем (I) можно взять также результаты [45].)

Удобно, следуя [22], рассмотреть набор классических интегралов движения $J_k$ ($k = 2, \ldots, n$) являющихся коэффициентами характеристического многочлена $\det(L - \lambda I)$, где матрица $L$ определяется формулой (15); $I$ — единичная матрица. Заметим

* В некоторых специальных случаях полный набор интегралов движения был построен ранее: для систем трех и четырех частиц — в работе [14], а системы пяти частиц — в [15].

прежде всего, что в квантовом случае здесь не возникает проблемы определения соответствующих операторов $\hat{J}_k$ — проблемы правильной расстановки операторов импульса $\hat{p}_j$ в классических выражениях, поскольку $\hat{J}_k$ имеет вид суммы слагаемых, каждое из которых содержит лишь коммутирующие операторы. Таким образом, имеем набор хорошо определяемых операторов $\hat{J}_2, \ldots$ $\ldots, \hat{J}_n = \det \hat{L}$.

Однако коммутатор двух операторов $[\hat{J}_k, \hat{J}_l]$ уже не является хорошо определяемым оператором и, следовательно, факт оаращения в нуль оператора $[\hat{J}_k, \hat{J}_l]$ не следует из обращения в нуль скобки Пуассона $\{\hat{J}_k, \hat{J}_l\}$, а требует дополнительного исследования. В частности требует доказательства тот факт, что коммутатор $[\hat{J}_2, \hat{J}_k] = [\hat{H}, \hat{J}_k] = 0$, т. е. что операторы $\hat{J}_k$ — интегралы движения.

Заметим прежде всего, что достаточно доказать, что самый старший оператор $\hat{J}_W$ — интеграл движения, т. е. что $[\hat{H}, \hat{J}_n] = 0$. Действительно, как нетрудно видеть, справедливо соотношение

$$\left[\sum_{l=1}^{n} q_l, \hat{J}_k\right] = \mathrm{i}\left(\sum_l \frac{\partial}{\partial p_l}\right)\hat{J}_k = \mathrm{i}\,(n-k+1)\,\hat{J}_{k-1}. \tag{91}$$

Из него с учетом тождества Якоби для операторов $\sum_{l=1}^{n} q_l$, $\hat{H}$ и $\hat{J}_k$ следует, что, если $\hat{J}_k$ — интеграл движения, то и оператор $\hat{J}_{k-1}$ также есть интеграл движения.

Докажем, что оператор $\hat{J}_n = \det(\hat{L})$ является интегралом движения. Следуя [22], сосредоточим наше внимание на зависимости $\hat{J}_n = \det(\hat{L})$ от $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ и $x_{12} = x\,(q_1 - q_2)$:

$$\hat{J}_n = \hat{A}_{12}\,(\hat{p}_1\hat{p}_2 - x_{12}^2) + \hat{B}_1\hat{p}_1 + \hat{B}_2\hat{p}_2 + \hat{B}_{12}x_{12} + \hat{C}_{12}. \tag{92}$$

Здесь коэффициенты $\hat{A}_{12}$, $\hat{B}_1$, $\hat{B}_2$, $\hat{B}_{12}$ и $\hat{C}_{12}$ не зависят от $x_{12}$, $p_1$ и $p_2$.

Нетрудно доказать, что коммутатор $[\hat{H}, \hat{J}_n]$ зависит линейно от $x'_{kl}$, и, следовательно, вклад величины $x'_{12}$ дается выражением

$$\dot{\hat{J}}_n = \mathrm{i}\,[\hat{H}, \hat{J}_n] = 2\,(\hat{B}_2 - \hat{B}_1)\,x_{12}x'_{12} +$$
$$+ \hat{B}_{12}\,[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)\,x'_{12} + x'_{12}\,(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)]/2 + \ldots \tag{93}$$

Из (93) видно, что первый член в сумме — хорошо определенный оператор, тогда как второй не таков. Следовательно, после приведения слагаемых этого типа к нормальному виду возникают дополнительные слагаемые, и из равенства нулю скобки Пуассона $\{H, J_n\}$ следует обращение в нуль коммутатора лишь при условии, что дополнительные члены обращаются в нуль. Покажем, что это действительно происходит.

Для удобства используем другое выражение для оператора $\hat{J}_n$, которое получено в работе [27]. Именно

$$\hat{J}_n = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k,l} x^2(q_k - q_l)\frac{\partial}{\partial\hat{p}_k}\frac{\partial}{\partial\hat{p}_l}\right\}(\hat{p}_1 \ldots \hat{p}_n). \tag{94}$$

Из этого выражения следует, что оператор $\hat{J}_n$ содержит лишь квадратичные члены по $x_{kl} = x(q_k - q_l)$ и, в частности, квадратичные по $x_{12}$. Следовательно, выражение (92) для $\hat{J}_n$ можно переписать в следующем виде

$$\hat{J}_n = \hat{A}_{12}(\hat{p}_1\hat{p}_2 - x_{12}^2) + \hat{B}_1\hat{p}_1 + \hat{B}_2\hat{p}_2 + \hat{C}'_{12}, \tag{95}$$

где $\hat{A}_{12}$, $\hat{B}_1$, $\hat{B}_2$ и $\hat{C}_{12}$ по-прежнему не зависят от $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ и $x_{12}$. Теперь после коммутирования оператора $\hat{J}_n$, записанного в виде (95), с $H$ возникают лишь хорошо определенные операторы и сокращение их следует из обращения в нуль скобки Пуассона $\{H, J_n\}$. Таким образом, мы доказали, что операторы $\hat{J}_k$ являются интегралами движения.

В классическом случае — интегралы движения $J_k$ — функции собственных значений матрицы $L$. Они являются однородными полиномами степени $k$ по переменным $p_1, \ldots, p_n$, $x(q_k - q_l)$, а из (94) следует, что они зависят лишь от $x^2(q_k - q_l)$. Кроме того, они инвариантны относительно перестановок

$$J_k(s\mathbf{p}, s\mathbf{q}) = J_k(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \tag{96}$$

и член старшей степени по импульсам в $J_k$ не зависит от координат.

Рассмотрим теперь оператор $[\hat{J}_k, \hat{J}_l]$. Из тождества Якоби следует, что этот оператор — интеграл движения, степени однородности $(k + l)$ по переменным $p_j$ и $x(q_k - q_l)$ и инвариантен относительно перестановок. Однако коэффициенты при старших по импульсам членах здесь уже не постоянны. При выполнении этих условий можно доказать [32], что такой интеграл движения тождественно равен нулю. Это завершает доказательство полной интегрируемости систем I—IV.

Помимо интегралов $\hat{J}_k$, являющихся коэффициентами характеристического многочлена матрицы $\hat{L}$ представляют интерес и интегралы $\hat{I}_k$, соответствующие классическим выражениям $I_k = k^{-1}\mathrm{Sp}\,(L^k)$. Для получения этих интегралов, удобно выразить $I_k$ через $J_l$ с помощью известных формул для симметрических функций, а затем уже привести выражение для $I_k$ к нормальному виду.

Приведем явные выражения для $\hat{I}_3$, $\hat{I}_4$ и $\hat{I}_5$:

$$3\hat{I}_3 = \sum_k \hat{p}_k^3 + 3\sum_{k\neq l} V(q_k - q_l)\,\hat{p}_l; \tag{97}$$

$$\begin{gathered}
4\hat{I}_4 = \sum_k \hat{p}_k^4 + 2\sum_{k\neq l} V(q_k - q_l)(2\hat{p}_l^2 + \hat{p}_k\hat{q}_l) + \\
+ \sum_{j\neq k} V^2(q_j - q_k) + 2\sum_{j,k,l} V(q_j - q_k)\,V(q_j - q_l) + \\
+ \sum_{k\neq l} \{2iV'(q_k - q_l)\,p_l - V''(q_k - q_l)\};
\end{gathered} \tag{98}$$

$$\begin{gathered}
5\hat{I}_5 = \sum_k \hat{p}_k^5 + 5\sum_{k\neq l} V(q_k - q_l)(p_l^3 + p_k^2 p_l) + \\
+ 5\sum V^2(q_j - q_k)\,p_k + 5\sum V(q_j - q_k)\,V(q_k - q_l)\,p_l + \\
+ 5\sum V(q_j - q_k)\,V(q_l - q_k)\,p_k + \\
+ 5\sum \{V'(q_k - q_l)\,ip_l^2 - V''(q_k - q_l)\,p_l\}
\end{gathered} \tag{99}$$

Как уже отмечалось, с помощью полного набора коммутирующих операторов $\hat{I}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \ldots, I_n(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ для системы I можно построить полный набор повышающих и понижающих операторов для системы V. Это операторы, удовлетворяющие соотношениям

$$[H, B_m^{\pm}] = \pm m\omega B_m^{\pm}. \tag{100}$$

Действительно, из (100) следует, что оператор $B_m^{+}$ $(B_m^{-})$ повышает (соответственно понижает) энергию состояния на $m\omega$.

Можно показать, что такими операторами являются

$$\left.\begin{aligned}
B_k^{+} &= \hat{I}_k(\hat{p} + i\omega q, q) \ \text{или}\ D_k^{+} = \hat{J}_k(\hat{p} + i\omega q, q); \\
B_k &= \hat{I}_k(\hat{p} - i\omega q, q) \ \text{или}\ D_k = J_k(\hat{p} - i\omega q, q).
\end{aligned}\right\} \tag{101}$$

С помощью этих операторов нетрудно построить интегралы движения, получить спектр энергий и соответствующие волновые функции для системы V.

Заметим, что волновая функция основного состояния аннулируется всеми операторами $B_k$ (или $D_k$)

$$B_k\Psi_0 = 0 \ \text{или}\ D_k\Psi_0 = 0. \tag{102}$$

Заметим также, что операторы $B_3$, $B_4$ и $B_3^{+}$, $B_4^{+}$ были построены в [14], а операторы $B_5$ и $B_5^{+}$ в [15].

**Системы I.** Такие системы характеризуются гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + g^2 \sum_{j<k} (q_j - q_k)^{-2}; \quad p_j = -\mathrm{i}\partial/\partial q_j. \tag{103}$$

Нас интересуют свойства решений уравнения Шредингера

$$H\Psi_k = E_k \Psi_k; \tag{104}$$

$$\Psi_k(\mathbf{q}) = 0 \quad \text{при} \quad q_j = q_{j+1}, \; \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$$

Перечислим эти свойства (некоторые из них очевидны).

1. При $g^2 > -1/4$ оператор $H$ самосопряжен (иными словами отсутствует падение на центр) и потому его собственные значения $E_k$ вещественны.

2. Спектр энергий непрерывен и заполняет полуось $0 \leqslant E_k < \infty$.

3. Волновая функция состояния с нулевой энергией имеет вид

$$\Psi_0(\mathbf{q}) = \prod_{j<k} (q_j - q_k)^{\mu}, \quad \mu(\mu - 1) = g^2. \tag{105}$$

Указание. Подставить $\Psi_0(\mathbf{q})$ в уравнение Шредингера (104) при $E_k = 0$ и использовать тождество

$$\sum_{k,\, l;\, k \neq l} (q_j - q_k)^{-1} (q_j - q_l)^{-1} \equiv 0. \tag{106}$$

4. При $E_k > 0$ решение уравнения Шредингера (104) удобно искать в виде

$$\Psi_k = \Phi_k \Psi_0. \tag{107}$$

Для функции $\Phi_k(\mathbf{q})$ при этом получаем уравнение

$$-\Big(\Delta + 2\mu \sum_{j<k} (q_j - q_k)^{-1} (\partial_j - \partial_k)\Big) \Phi_k(\mathbf{q}) = k^2 \Phi_k(\mathbf{q}), \tag{108}$$

где

$$\Delta = \sum_j \partial_j^2; \quad \partial_j = \partial/\partial q_j; \quad k^2 = 2E_k. \tag{109}$$

Функцию $\Phi_k(\mathbf{q})$ при этом нормируем условием $\Phi_k(0) = 1$.

5. В случаях $\mu = 0$ и $\mu = 1$ $(g = 0)$ можно привести явные выражения для $\Phi_k(\mathbf{q})$:

$$\Phi_k^{(0)}(\mathbf{q}) = \frac{1}{n!} \sum_s \exp[\mathrm{i}(s\mathbf{k}\mathbf{q})], \tag{110}$$

где суммирование производится по всем перестановкам;

$$\Phi_k^{(1)}(\mathbf{q}) = C \sum_s \{\varepsilon(s) \exp[\mathrm{i}(s\mathbf{k}\mathbf{q})]\} \Big/ \prod_{j<l} (q_j - q_l), \tag{111}$$

здесь $\varepsilon(s) = +1$ для четной перестановки и $\varepsilon(s) = -1$ для нечетной перестановки.

Приведем еще одно выражение для $\Phi_k^1(\mathbf{q})$:

$$\Phi_k^{(1)}(\mathbf{q}) = \prod_{j<l} \frac{\sin(k_j-k_l)(q_j-q_l)}{(k_j-k_l)(q_j-q_l)}. \tag{112}$$

6. Для трех значений $g^2$ : $g^2 = -1/4$, $g^2 = 2$ и $g^2 = 12$ при $n = 3$ для функции $\Phi_k(\mathbf{q})$ известно интегральное представление [33]. С его помощью можно вычислить $S$-матрицу.

7. Функции $\Phi_k(\mathbf{q})$ аналитичны по $q_j$ и инвариантны относительно перестановок. Поэтому они разлагаются в ряд по инвариантам

$$S_l = \sum_{j=1}^{n} q_j^l, \quad l = 2, 3, \ldots, n; \tag{113}$$

$$\Phi_k(\mathbf{q}) = \sum C_{m_2, \ldots, m_n} S_2^{m_2} \ldots S_n^{m_n}. \tag{114}$$

Уравнение (108), переписанное для этого случая в переменных $S_2, \ldots, S_n$, имеет вид [14]:

$$\sum_{l, m=2}^{n} lm \left(S_{m+l-2} - \frac{1}{n} S_{l-1} S_{m-1}\right) \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial S_l \, \partial S_m} +$$
$$+ \sum_{l=2}^{n} l(l-1)\left(1 - \frac{1}{n}\right) S_{l-2} \frac{\partial \Phi_k}{\partial S_l} + \mu \sum_{l=2}^{n} [S_0 S_{l-2} + S_2 S_{l-4} + \ldots$$
$$\ldots + S_{l-2} S_0 - (l-1) S_{l-2}]\, l \frac{\partial \Phi_k}{\partial S_l} = -k^2 \Phi_k(\mathbf{q}). \tag{115}$$

Из уравнения (115) нетрудно получить несколько первых членов разложения $\Phi_k(\mathbf{q})$ при $q \to 0$.

8. Как известно, рассматриваемые системы вполне интегрируемы. Полный набор интегралов движения $\hat{J}_k$ (или $\hat{I}_l$) дается формулами (94).

9. Из явной формы интегралов движения (постоянства коэффициентов при старших степенях импульсов) следует, что асимптотика функции $\Psi_k(\mathbf{q})$ при $|\mathbf{q}| \to \infty$ имеет вид

$$\Psi_k(\mathbf{q}) \sim \sum_s c(s\mathbf{k}) \exp[\mathrm{i}(s\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})], \tag{116}$$

где суммирование проводится по всем перестановкам $s$. Для значений констант связи $g$, указанных в п. 6 имеет место факторизация

$$c(\mathbf{k}) = \prod_{j<l} c(k_j - k_l) = c \prod_{j<l} (k_j - k_l)^{-\mu}, \tag{117}$$

полученная в работах [46, 47]. Проблема факторизации рассматривалась также в [38]. Нет никаких сомнений в том, что факторизация $c(\mathbf{k})$ имеет место и для произвольного значения $g$, однако доказательство этого факта автору неизвестно.

10. Рассмотрим теперь иной класс решений уравнения Шредингера (104), именно, следуя работам [12, 13], будем искать решение вида

$$\tilde{\Phi}_{kl}(\mathbf{q}) = R_{kl}(r)\, P_l(\mathbf{q}), \quad r = |\mathbf{q}|, \tag{118}$$

где $P_l(\mathbf{q})$ — однородная функция степени $l$, удовлетворяющая уравнению

$$\Big(\Delta + 2\mu \sum_{j<k} (q_j - q_k)^{-1} (\partial_j - \partial_k)\Big) P_l = 0. \tag{119}$$

Для функции $R_{kl}(r)$ при этом получается уравнение

$$-\left(\frac{d}{dr^2} + \frac{2}{r}\left(\frac{n-1}{2} + l + \mu\,\frac{n(n-1)}{2}\right)\frac{d}{dr}\right) R_{kl} = k^2 R_{kl}. \tag{120}$$

Решение этого уравнения, нормированное условием $R_{kl}(0) = 1$, имеет вид

$$R_{kl}(r) = 2^{\tilde{\mu}-1/2}\, \Gamma(\tilde{\mu} + 1/2)\, (kr)^{-(\tilde{\mu}-1/2)} J_{\tilde{\mu}-1/2}(kr); \tag{121}$$

$$\tilde{\mu} = (n-1)/2 + l + \mu n (n-1)/2,$$

где $J_\mu(x)$ — функция Бесселя порядка $\mu$.

11. Уравнение (119) имеет полиномиальные решения, которые естественно назвать *обобщенными гармоническими полиномами*. При этом в отличие от обычного оператора Лапласа ($\mu = 0$) все полиномиальные решения этого уравнения инвариантны относительно перестановок [13].

12. Обозначим $g_n(l)$ число решений степени $l$ уравнения (119), т. е. размерность пространства обобщенных гармонических полиномов степени $l$. Оператор в левой части уравнения (119) отображает пространство полиномов степени $l$, инвариантных относительно перестановок, имеющее размерность $f_n(l)$ на пространство степени $(l-2)$ размерности $f_n(l-2)$. Ядром этого отображения являются обобщенные гармонические полиномы, следовательно

$$g_n(l) = f_n(l) - f_n(l-2). \tag{122}$$

Размерность $g_n(l)$ равна числу решений уравнения

$$l = 3l_3 + \ldots + nl_n \tag{123}$$

в неотрицательных целых числах. Отсюда получаем выражение для производящей функции

$$G_n(z)=\sum_{l=0}^{\infty} g_n(l)\,z^l; \tag{124}$$

$$G_n(z)=[(1-z^3)(1-z^4)\dots(1-z^n)]^{-1}. \tag{125}$$

Для нахождения $g_n(l)$ для небольших значений $n$ рассмотрим уравнение

$$l=l_1+2l_2+\dots+nl_n \tag{126}$$

и производящую функцию

$$H(z)=[(1-z)(1-z^2)\dots(1-z^n)]^{-1} \tag{127}$$

для числа решений $h_n(l)$ этого уравнения. Приведем величины $h_n(l)$, вычисленные в работе [48]:

$$h_2(l)=[l/2]+1; \tag{128}$$

$$h_3(l)=(l+2)(l+4)/12-1/72+(-1)^l/8+(2/9)\cos(2\pi l/3); \tag{129}$$

или

$$h_3(l)=\left\{\frac{(l+2)(l+4)}{12}\right\}; \tag{130}$$

$$h_4(l)=\left\{\frac{(l+2)}{144}\left(l^2+13l+37+9\,\frac{1+(-1)^l}{2}\right)\right\}; \tag{131}$$

$$h_5(l)=\left[\frac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+24)+155l^2+15l\,(67+3\,(-1)^l)}{2880}\right]. \tag{132}$$

В этих формулах $[x]$ и $\{x\}$ означает целую часть $x$ и ближайшее число к $x$. Асимптотическое поведение $h_n(l)$ при $l\gg n$ определяется наиболее сингулярной особенностью функции $H_n(z)$, расположенной в точке $z=1$. Отсюда нетрудно получить

$$h_n(l)\sim l^{n-1}/[(n-1)!\,n!] \tag{133}$$

13. Сравнивая (125) и (127), находим

$$g_n(l)=h_n(l)-h_n(l-1)-h_n(l-2)+h_n(l-3). \tag{134}$$

14. Приведем явные выражения для простейших обобщенных гармонических многочленов [14]:

$$P_3=S_3;$$

$$P_4=(n+1+n(n-1)\mu)S_4-(3(1-1/n)+(2n-3)\mu)S_2^2;$$

$$P_5=(n+5+n(n-1)\mu)S_5-5(2(1-1/n)+(n-2)\mu)S_3S_2. \tag{135}$$

Явное выражение $P_l$ для произвольного $l$ неизвестно.

**Системы V.** Эти системы описываются гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2}\sum_j p_j^2+g^2\sum_{j<k}(q_j-q_k)^{-2}+\frac{\omega^2}{2}\sum_j q_j^2;\quad p_j=-i\partial/\partial q_j. \tag{136}$$

Нас интересуют спектр и собственные функции уравнения Шредингера

$$\left.\begin{array}{l} H\Psi_l=E_l\Psi_l \text{ при } q_1\leqslant q_2\leqslant\ldots\leqslant q_n; \\ \Psi_l(\mathbf{q})=0 \quad \text{при } q_j=q_{j+1};\ \int|\Psi_l(\mathbf{q})|^2 d^nq<\infty. \end{array}\right\} \tag{137}$$

Перечислим некоторые из их свойств.

1. Оператор $H$ по-прежнему при $g^2>-1/4$ самосопряжен и его собственные значения $E_l$ вещественны.

2. Спектр энергий дискретен и $E_l>0$. Энергия $E_l$ характеризуется $n$ квантовыми числами $l=(l_1,\ldots,l_n)$.

3. Волновая функция основного состояния факторизуется:

$$\Psi_0(\mathbf{q})=N_0(\mu)\prod_{j<k}(q_j-q_k)^{\mu}\exp(-\omega\mathbf{q}^2/2). \tag{138}$$

Здесь $g^2=\mu(\mu-1)$; $\mathbf{q}^2=\sum_j q_j^2$.

Энергия основного состояния

$$E_0=\omega(n/2+\mu n(n-1)/2). \tag{139}$$

Формулы (138) и (139) легко получаются при учете тождества (106).

3. Так же, как и выше, удобно искать решение в виде

$$\Psi_l=\Phi_l\Psi_0. \tag{140}$$

Для функции $\Phi_l$ при этом получаем уравнение

$$\left[-\frac{1}{2}\left(\Delta+2\mu\sum_{j<k}(q_j-q_k)^{-1}(\partial_j-\partial_k)\right)+\omega\sum_j q_j\partial_j\right]\Phi_l= =(E_l-E_0)\Phi_l. \tag{141}$$

5. Операторы

$$\hat{B}_m^{\pm}(\mathbf{p},\mathbf{q})=\hat{I}_m(\mathbf{p}\pm i\omega\mathbf{q},\mathbf{q}),\quad m=1,2,\ldots,n \tag{142}$$

или

$$\hat{D}_m^{\pm}(\mathbf{p},\mathbf{q})=\hat{J}_m(\mathbf{p}\pm i\omega\mathbf{q},\mathbf{q}) \tag{143}$$

удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[H,B_m^{\pm}]=\pm m\omega B_m^{\pm} \tag{144}$$

и, следовательно, повышают (понижают) энергию состояния на $m\omega$.

Здесь операторы $\hat{I}_m(\mathbf{p},\mathbf{q})$ и $\hat{J}_m(\mathbf{p},\mathbf{q})$ — интегралы движения для системы I, определенные выше. С их помощью нетрудно построить интегралы движения.

6. Волновая функция основного состояния аннулируется всеми понижающими операторами:

$$B_m\Psi_0=0; \quad D_m\Psi_0=0. \tag{145}$$

7. С помощью повышающих операторов $B_1^+, B_2^+, \ldots, B_n^+$ (или $D_1^+, D_2^+, \ldots, D_n^+$) нетрудно построить собственные функции $\hat{H}$. А именно

$$\Psi_{l_1l_2,\ldots,l_n}=N_l(B_1^+)^{l_1}(B_2^+)^{l_2}\ldots(B_n^+)^{l_n}\Psi_0. \tag{146}$$

Заметим, что эти функции образуют неортогональный базис, поскольку операторы $B_j^+$ и $B_m$ не коммутируют друг с другом.

8. Отсюда находим спектр энергий

$$E_{l_1l_2,\ldots,l_n}=E_0+\omega(l_1+2l_2+\ldots+nl_n). \tag{147}$$

9. Кратность вырождения $h_n(l)$ определяется числом решений в неотрицательных числах уравнения (126). Производящая функция для $h_n(l)$ имеет вид (127).

10. При $\mu=1$, $g^2=0$ и рассматриваемая система (136) есть осциллятор в многогранном угле

$$\Lambda=\{\mathbf{q}\mid q_1\leqslant q_2\leqslant\ldots\leqslant q_n\}.$$

11. Зная спектр энергий и кратности вырождения, нетрудно вычислить квантовую статистическую сумму оператора $\hat{H}$ при $\hbar\neq 0$, $p_j=-i\hbar\partial/\partial q_j$)

$$Z(\beta)=\operatorname{Sp}\exp(-\beta\hat{H})=\sum h_n(l)\exp(-\beta E_l). \tag{148}$$

Из (147) получаем

$$Z(\beta)=\exp(-\beta E_0)\,[(1-\exp(-\beta\hbar\omega)][1-\exp(-2\beta\hbar\omega)]\ldots$$
$$\ldots[1-\exp(-n\beta\hbar\omega)]\}^{-1}. \tag{149}$$

12. Устремляя в этом выражении $\hbar$ к нулю, а $\mu$ к бесконечности так, что $\hbar\mu=\mathrm{const}$, получаем классический предел статистической суммы [49]:

$$Z_{\text{кл}}(\beta)=\frac{1}{n!\,(\hbar\omega\beta)^n}\exp(-\beta E^0_{\text{кл}}). \tag{150}$$

13. С другой стороны

$$Z_{\text{кл}}(\beta)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\exp(-\beta H(\mathbf{p},\mathbf{q}))\,d^np\,d^nq. \tag{151}$$

Интегрируя по импульсам, воспользовавшись явным видом $H=p^2/2+U(\mathbf{q})$, получаем

$$Z_{\text{кл}}(\beta)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{n/2}\int\limits_{q_1\leqslant q_2\leqslant\ldots\leqslant q_n}\exp[-\beta U(\mathbf{q})]\,d^n\mathbf{q}. \tag{152}$$

Сравнивая (150) и (152), получаем выражение для многократного интеграла [49]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int \exp\left(-\left[\frac{\omega^2}{2}\sum_{j=1}^{n} q_j^2 + g^2 \sum_{j<k} (q_j - q_k)^{-2}\right]\right) d^n q =$$

$$= \left(\frac{2\pi}{\omega^2}\right)^{n/2} \exp\left\{-\omega g \frac{n(n-1)}{2}\right\}. \qquad (153)$$

14. Перейдем к вычислению нормировочного множителя для волновой функции основного состояния. Для этого вычислим интеграл

$$I(\mu, \omega) = \int \left\{\prod_{j<k} (q_j - q_k)\right\}^{2\mu} \exp(-\omega \Sigma q_j^2)\, d^n q. \qquad (154)$$

Заметим прежде всего, что функция

$$\prod_{j<k} (q_j - q_k)^{2\mu} \exp\left(-\omega \sum_j q_j^2\right). \qquad (155)$$

Определяет вероятностное распределение в $n$-мерном пространстве $\mathbf{q}$. Для $\mu = 1/2$ это распределение рассматривалось Вигнером [50], а для $\mu = 1$ и $2$ — в известных работах Дайсона [51, 52] по статистической теории уровней сложных ядер. Это распределение называется гауссовым ансамблем ($E_1$, $E_2$ и $E_4$ соответственно). Заметим, что

$$I(\mu, \omega) = I(\mu, 1)\, \omega^{-[n/2 + \mu n(n-1)/2]} \qquad (156)$$

и поэтому достаточно рассмотреть интеграл (154) лишь при $\omega = 1$ (далее $I(\mu, 1)$ будет обозначаться просто $I(\mu)$).

Для $\mu = 1/2$, $1$ и $2$ этот интеграл был вычислен (см. [52] и ссылки в ней). В работе [52] была высказана гипотеза, что для произвольного $\mu$ ответ имеет вид

$$I(\mu) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{n!} \frac{\prod_{k=1}^{n} \Gamma(1 + \mu k)}{[\Gamma(1+\mu)]^n}. \qquad (157)$$

Автору настоящей статьи неизвестно, доказана ли в настоящее время эта гипотеза.

15. Здесь также можно рассмотреть иной класс решений уравнения Шредингера (141), а именно решения вида

$$\tilde{\Phi}_{lm}(\mathbf{q}) = R_{lm}(r)\, P_m(\mathbf{q}); \quad r = |\mathbf{q}|, \qquad (158)$$

где $P_m(\mathbf{q})$ — однородный полином степени $m$, удовлетворяющий уравнению (119).

Для функции $R_{lm}(r)$ при этом получаем уравнение

$$-\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\left(\frac{n-1}{2}+m+\mu\frac{n(n-1)}{2}\right)\frac{d}{dr}\right)R_{lm}+2\omega r\frac{d}{dr}R_{lm}=$$
$$=2(E_l-E_0-m\omega)R_{lm}, \tag{159}$$

решение которого имеет вид

$$R_{lm}(r)=C_{lm}L_l^{\widetilde{\mu}}(\omega r^2); \tag{160}$$

$$\widetilde{\mu}=m+(n-3)/2+n(n-1)\mu/2, \ L_l^{\widetilde{\mu}}(x)$$

—полином Лагерра степени $l$.

**Системы II.** Такие системы характеризуются гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}p_j^2+g^2a^2\sum_{i<k}\operatorname{sh}^{-2}a(q_j-q_k),\quad p_j=-i\partial/\partial q_j. \tag{161}$$

Нас интересуют свойства решений уравнения Шредингера

$$H\Psi_k=E_k\Psi_k,\quad q_1\leqslant q_2\leqslant\ldots\leqslant q_n; \tag{162}$$
$$\Psi_k(\mathbf{q})=0 \quad \text{при} \quad q_j=q_{j+1}.$$

Перечислим некоторые из этих свойств.

Отметим, что рассматриваемая система обладает свойствами 1 и 2, рассмотренными на с. 869.

3. Волновая функция вида

$$\Psi^-=\left\{\prod_{j>k}\operatorname{sh}(q_j-q_k)\right\}^{\mu}\ (a=1) \tag{163}$$

является собственной функцией оператора $H$, отвечающей собственному значению

$$E^-=-2\rho^2\mu^2=-\frac{\mu^2}{6}n(n^2-1);\quad \rho=\left(\frac{n-1}{2},\ \frac{n-3}{2},\ \ldots,\ -\frac{n-1}{2}\right). \tag{164}$$

Для доказательства этого утверждения следует использовать тождество

$$\sum_{k\neq l}\operatorname{cth}(q_j-q_k)\operatorname{cth}(q_j-q_l)=0. \tag{165}$$

Заметим, однако, что функция $\Psi^-(q)$ экспоненциально растет при $|\mathbf{q}|\to\infty$ и поэтому значение $E^-$ не принадлежит спектру оператора $H$.

4. Будем искать собственные функции уравнения Шредингера в виде

$$\Psi_{\mathbf{k}}=\Phi_{\mathbf{k}}\Psi^- \tag{166}$$

Для функции $\Phi_k^{\mu}(\mathbf{q})$ при этом получаем уравнение

$$\{\Delta + 2\mu \sum_{j<k} \operatorname{cth}(q_j - q_k)(\partial_j - \partial_k)\}\, \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = -(\mathbf{k}^2 + 4\rho^2\mu^2)\, \Phi_k(\mathbf{q}). \quad (167)$$

5. Для частных значений констант $\mu = 0$ и $\mu = 1$, отвечающих $g^2 = 0$, можно написать явные формулы для $\Phi_k(\mathbf{q})$:

$$\Phi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{q}) = \frac{1}{n!} \sum_s \exp\{\mathrm{i}(s\mathbf{k}, \mathbf{q})\}; \quad (168)$$

$$\Phi_k^{(1)}(\mathbf{q}) = c \frac{\sum_s \varepsilon(s) \exp\{\mathrm{i}(s\mathbf{k}, \mathbf{q})\}}{\prod_{j<l} \operatorname{sh}(q_j - q_l)}, \quad (169)$$

где суммирование производится по всем перестановкам $s$, $\varepsilon(s) = \pm 1$ для четной (соответственно нечетной перестановки).

6. Асимптотическое поведение волновых функций $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})$ при $|\mathbf{q}| \to \infty$ имеет вид

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) \sim \sum_s c(s\mathbf{k}) \exp\{\mathrm{i}(s\mathbf{k}, \mathbf{q})\}. \quad (170)$$

Для частных случаев $\mu = 1/2$, 2 и 4 (при $n = 3$) имеет место факторизация функции $c(\mathrm{k})$ [46, 47] и, следовательно, $S$-матрицы. Эта факторизация, по-видимому, имеет место и для всех значений $\mu$ (соответственно $g^2$).

7. В этих выделенных случаях [$\mu = 1/2$, 2 и $\mu = 4$ (при $n = 3$], известно интегральное представление для функции $\Phi_k(\mathbf{q})$ [46, 47], откуда и можно получить утверждение о факторизации. Так для $\mu = 1/2$ имеем [46]

$$\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = c_0 \exp\{(\mathrm{i}\mathbf{k} - \boldsymbol{\rho}, \mathbf{q})\} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int \frac{\Delta_1^{\mathrm{i}(k_1-k_2)/2-1/2} \Delta_2^{\mathrm{i}(k_2-k_3)/2-1/2} \ldots \Delta_{n-1}^{\mathrm{i}(k_{n-1}-k_n)/2-1/2}}{D_1^{\mathrm{i}(k_1-k_2)/2+1/2} D_2^{\mathrm{i}(k_2-k_3)/2+1/2} \ldots D_{n-1}^{\mathrm{i}(k_{n-1}-k_n)/2+1/2}} \prod_{j>k} dx_{jk}. \quad (171)$$

Здесь интегрирование проводится по подгруппе вещественных нижних треугольных матриц $X_-$ с единицами на диагонали. В числителе стоят верхние угловые миноры $\Delta_j$ матрицы $(\exp(Q) X \times \exp(-Q))'(\exp(Q) X \exp(-Q))$, где $Q = \operatorname{diag}(q_1, \ldots, q_n)$, а в знаменателе — верхние угловые миноры матрицы $(X'X)$, знак штрих означает транспонирование. Компоненты вектора $\boldsymbol{\rho}$ равны $\rho_j = (n+1)/2 - j$.

8. Переходя в (171) к пределу $q_j \to \infty$ так, что $q_1 - q_2 \to \infty, \ldots, q_{n-1} - q_n \to \infty$ получаем выражение для $c(\mathrm{k})$ в (170), определяющей асимптотику функции $\Phi_k(\mathbf{q})$ при $|\mathbf{q}| \to \infty$:

$$c(\mathbf{k}) = c_0 \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int D_1^{-\mathrm{i}(k_1-k_2)/2-1/2} \ldots D_{n-1}^{-\mathrm{i}(k_{n-1}-k_n)/2-1/2} \prod_{j>k} dx_{jk}. \quad (172)$$

Этот интеграл был вычислен в [46], и, как оказалось, $c$ ($\mathbf{k}$) факторизуется:

$$\left.\begin{aligned} c(\mathbf{k}) &= c_0 \prod_{j<l} c(k_j - k_l); \\ c(k_j) &= \frac{\Gamma(\mu+1/2)}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\mathrm{i}k_j)}{\Gamma(\mathrm{i}k_j+\mu)}. \end{aligned}\right\} \tag{173}$$

**Системы III.** Такие системы характеризуются гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_j p_j^2 + g^2 a^2 \sum_{j<k} \sin^{-2} a (q_j - q_k). \tag{174}$$

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$H\Psi_l(\mathbf{q}) = E_l \Psi_l(\mathbf{q}); \tag{175}$$

$$\Psi_l(\mathbf{q}) = 0 \quad \text{при } q_j = q_{j+1}; \tag{176}$$

$$\int |\Psi_l(\mathbf{q})|^2 d^n q < \infty;$$

$$0 \leqslant q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_n \ldots \leqslant a^{-1}\pi. \tag{177}$$

Такие системы были впервые рассмотрены в работе [18] и описывают систему $n$ частиц на окружности, отталкивающихся друг от друга.

Перечислим свойства таких систем.

1. Оператор $H$, по-прежнему, самосопряжен при $g^2 > -1/4$.

2. Спектр энергий дискретен $E_l > 0$. Энергия характеризуется $n$ квантовыми числами $l = (l_1, \ldots, l_n)$ и

$$E_l = (l + 2\mu\rho)^2/2. \tag{178}$$

3. В соответствии с (105) и (163) существует решение:

$$\Psi^+(\mathbf{q}) = N(\mu) \prod_{j<k} (\sin(q_j - q_k))^{\mu}; \quad \mu(\mu-1) = g^2, \tag{179}$$

отвечающее энергии

$$E^+ = 2\mu^2\rho^2 = \mu^2 n (n^2-1)/6. \tag{180}$$

4. Решение уравнения (175) ищем в следующем виде:

$$\Psi_l(\mathbf{q}) = \Phi_l(\mathbf{q}) \Psi^+(\mathbf{q}). \tag{181}$$

Для функции $\Phi_l$ ($\mathbf{q}$) получаем уравнение

$$B\Phi_l = [\Delta + 2\mu \sum_{j<k} \operatorname{ctg}(q_j - q_k)(\partial_j - \partial_k)] \Phi_l = -2(E_l - E^+)\Phi_l. \tag{182}$$

5. Все формулы для $\Phi_l$ ($\mathbf{q}$) можно получить из формул для систем II включением в них параметра $a$ и замены его на $\mathrm{i}a$. При-

ведем формулы для $\Phi_l(\mathbf{q})$ при $\mu = 1$ [ср. с (169)]:

$$\Phi_l(\mathbf{q}) = \prod_{j<k} \left(\frac{\rho_j - \rho_k}{l_j - l_k}\right) \frac{\sum_s \varepsilon(s) \exp[i(s\mathbf{kq})]}{\prod_{j \leqslant k} \sin(q_j - q_k)}. \tag{183}$$

Эта функция пропорциональна характеру неприводимого $SU(n)$-представления со старшим весом $l$. Аналогично заменой $a$ на $ia$ в (171) получается интегральное представление для $\Phi_l(\mathbf{q})$.

6. Можно показать [18], что оператор $B$ в (182) в базисе из экспонент $\exp[i(\mathbf{l}, \mathbf{q})]$ имеет треугольный вид. Откуда получаем выражение для спектра энергий:

$$(E_l - E_0) = [(\mathbf{l} + 2\mu\boldsymbol{\rho})^2 - 4\mu^2\boldsymbol{\rho}^2]/2, \tag{184}$$

где

$$\boldsymbol{\rho} = \left(\frac{\rho-1}{2}, \frac{\rho-3}{2}, \ldots, -\frac{\rho-1}{2}\right).$$

7. Перейдем к вычислению нормировочного множителя $N(\mu)$ решения $\Psi^+(\mathbf{q}) : N(\mu) = I^{-1}(\mu)$, здесь

$$I(\mu) = \int \left\{\prod_{j<k} \sin(q_k - q_j)\right\}^{2\mu} d^n q,$$

$$0 \leqslant q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_n \leqslant \pi. \tag{185}$$

Этот интеграл с точностью до множителя совпадает со статистическим интегралом, который определяет функцию распределения собственных значений гамильтониана, описывающего $n$ последовательных уровней тяжелых ядер [51]. Его значение было предсказано для всех значений $\mu$ в [51] *.

$$I(\mu) = C \frac{\Gamma(1+n\mu)}{[\Gamma(1+\mu)]^n}; \qquad C = \frac{\pi^n 2^{-\mu n(n-1)}}{n!}. \tag{186}$$

Доказательство этой формулы было дано в [53, 54].

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (18)

Пусть нечетная функция $x(\xi)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$x(\xi)\, x'(\eta) - x(\eta)\, x'(\xi) = x(\xi + \eta)\, [z(\xi) - z(\eta)]. \tag{П.1}$$

Нетрудно видеть, что если $x(\xi)$ регулярна при $\xi = 0$, то $x(\xi) \equiv 0$, и что она должна иметь следующую асимптотику при $\xi \to 0$

$$x(\xi) \sim g(\xi^{-1} + \gamma\xi) \quad (g \neq 0). \tag{П.2}$$

---

* Для частных значений $\mu = 1/2$, 1 и 2 оно было там вычислено

Чтобы найти общее решение (П.1), необходимо, следуя [24], устремить $\eta$ к нулю. Приравнивая коэффициенты при разных степенях $\eta$, получаем

$$\left.\begin{aligned} &z(\xi)\sim g(\xi^{-2}-\delta);\\ &z(\xi)=g\left(\frac{1}{2}\frac{x''(\xi)}{x(\xi)}+\gamma-\delta\right).\end{aligned}\right\} \tag{П.3}$$

Однако, поскольку функция $z(\xi)$ определена с точностью до константы, полагая $\delta=\gamma$, можно считать, что

$$z(\xi)=gx''(\xi)/[2x(\xi)]. \tag{П.4}$$

Таким образом любое решение уравнения (П.1) должно также удовлетворять уравнению

$$x(\xi)\,x'(\eta)-x(\eta)\,x'(\xi)=\frac{g}{2}\left(\frac{x''(\xi)}{x(\xi)}-\frac{x''(\eta)}{x(\eta)}\right)x(\xi+\eta). \tag{П.5}$$

Снова устремим $\eta$ к нулю. Тогда коэффициенты при $\eta^{-2}$, $\eta^{-1}$ и 1 в левой и правой частях уравнения тождественно совпадают. Приравнивая коэффициенты при $\eta$, найдем уравнение

$$x(\xi)\,x'''(\xi)-3x'(\xi)\,x''(\xi)-12\,\gamma x(\xi)\,x'(\xi)=0. \tag{П.6}$$

Умножая его на $x^{-4}$ и интегрируя, получаем

$$x^{-3}x''+6\gamma x^{-2}+c=0. \tag{П.7}$$

Но при $\xi\to 0$, $x(\xi)\sim g\xi^{-1}$. Отсюда следует, что $c=-2g^{-2}$. Умножая (П.7) на $x^3x'$ и интегрируя, находим

$$(x')^2=g^{-2}x^4-2\mu x^2+\lambda\quad(\mu=3\gamma). \tag{П.8}$$

Заметим, что из (П.7) следует:

$$z(\xi)=g\,\frac{x''(\xi)}{2x(\xi)}=g^{-1}x^2(\xi)+\mu g=g^{-1}V(\xi)+\mathrm{const}. \tag{П.9}$$

Интегрируя (П.8) с граничными условиями $x(\xi)\sim g\xi^{-1}$ при $\xi\to 0$, имеем выражение для функции обратной к $x(\xi)$:

$$\xi(x)=\int_x^\infty dx/\sqrt{g^{-2}x^4-2\mu x^2+\lambda}. \tag{П.10}$$

Этот интеграл можно упростить в следующих случаях:

$$\begin{aligned} &1)\quad \mu=0,\quad \lambda=0,\quad x(\xi)=g\xi^{-1};\\ &2)\quad \mu=\pm a^2,\quad \lambda=g^2a^4,\quad x(\xi)=ga\,\mathrm{cth}\,a\xi,\quad ga\,\mathrm{ctg}\,a\xi;\\ &3)\quad \mu=\mp a^2/2,\quad \lambda=0,\quad x(\xi)=ga\,\mathrm{sh}^{-1}\,a\xi,\quad ga\sin^{-1}a\xi.\end{aligned} \tag{П.11}$$

В остальных случаях интеграл можно выразить через эллиптические функции. Явные формулы для $x(\xi)$ зависят от положений корней $z_1$ и $z_2$ квадратного уравнения

$$z^2-2\mu g^2z+\lambda g^2=0. \tag{П.12}$$

1. Пусть $g^2\mu^2-\lambda>0$ и, следовательно, $z_1$ и $z_2$ вещественны. Рассмотрим отдельно три случая:

1) $z_2<z_1<0$. Положим $|z_1|=a^2$, $|z_2|=(1-k^2)\,a^2$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &x(\xi)=\frac{ga\,\mathrm{cn}\,(a\xi,k)}{\mathrm{sn}\,(a\xi,k)};\quad y(\xi)=ga^2\,\mathrm{dn}\,(a\xi,k)/\mathrm{sn}^2\,(a\xi,k);\\ &V(\xi)=g^2\,\mathrm{sn}^{-2}\,(a\xi,k)=g^2\mathscr{P}(a\xi)+\mathrm{const}.\end{aligned}\right\} \tag{П.13}$$

2) $z_1 < 0$, $z_2 > 0$. Положим $|z_1| = k^2a^2$, $z_2 = (1-k^2)a^2$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} x(\xi) &= ga\frac{\mathrm{dn}(a\xi, k)}{\mathrm{sn}(a\xi, k)}; \quad y = g\frac{a^2\mathrm{cn}^2(a\xi, k)}{\mathrm{sn}^2(a\xi, k)}; \\ V(\xi) &= g^2a^2\,\mathrm{sn}^{-2}(a\xi, k) = g^2a^2\mathscr{P}(a\xi) + \mathrm{const}. \end{aligned}\right\} \tag{П.14}$$

3) $z_1 > 0$, $z_2 > 0$.

$$\left.\begin{aligned} x(\xi) &= ga\frac{1}{\mathrm{sn}(a\xi, k)}; \quad y(\xi) = g\frac{a^2\,\mathrm{cn}(a\xi, k)\,\mathrm{dn}(a\xi, k)}{\mathrm{sn}^2(a\xi, k)}; \\ V(\xi) &= g^2a^2\,\mathrm{sn}^{-2}(a\xi, k) = g^2a^2\mathscr{P}(a\xi) + \mathrm{const}. \end{aligned}\right\} \tag{П.15}$$

II. Пусть $g\mu^2 - \lambda < 0$ и, следовательно, $z_1$ и $z_2$ комплексны. Тогда выражение $x^4 - 2\mu g^2x^2 + \lambda g^2$ можно представить в следующем виде:

$$\left(x^2 + 2\nu x + g\sqrt{\lambda}\right)\left(x^2 - 2\nu x + g\sqrt{\lambda}\right), \quad \nu = \sqrt{\left(\mu g^2 + g\sqrt{\lambda}\right)/2}.$$

Сделаем в интеграле (П.10) замену переменных

$$x = (\lambda g^2)^{1/4}\frac{\tilde{x}-1}{\tilde{x}+1}; \quad dx = (\nu g^2)^{1/4}\frac{2\,d\tilde{x}}{(\tilde{x}+1)^2}.$$

После этого интеграл принимает вид

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{g\sqrt{\lambda} - \mu g^2}}\int_{-1}^{\tilde{x}}\frac{dx}{\left[(x^2+\tau^2)(x^2+\sigma^2)\right]^{1/2}}, \tag{П.16}$$

где

$$\tau^2 = [(\lambda g^2)^{1/4} + \nu]/[(\lambda g^2)^{1/4} - \nu]; \quad \sigma^2 = \tau^{-2}. \tag{П.17}$$

Отсюда получаем

$$\tilde{x}(\xi) = a\,\mathrm{sn}^{-1}\left(a\sqrt{2/\left(g\sqrt{\lambda} - \mu g^2\right)}\,(\xi + \xi_0), k\right.$$

или

$$x(\xi) = (\lambda g^2)^{1/4}\frac{1 - a^{-1}\,\mathrm{sn}\left(a\sqrt{2/\left(g\sqrt{\lambda} - \mu g^2\right)}\,(\xi - \xi_0), k\right)}{1 + a^{-1}\,\mathrm{sn}\left(a\sqrt{2/\left(g\sqrt{\lambda} - \mu g^2\right)}\,(\xi - \xi_0), k\right)}. \tag{П.18}$$

Нетрудно показать, что во всех случаях потенциал имеет вид

$$V(\xi) = g^2a^2\mathscr{P}(a\xi) + \mathrm{const}. \tag{П.19}$$

Действительно, из уравнения (П.8) следует

$$((x^2)')^2 = 4g^{-2}x^6 - 8\mu x^4 + 4\lambda x^2$$

или

$$(V')^2 = (4g^{-2}V^2 - 8\mu V + 4\lambda)\,V. \tag{П.20}$$

Остается доказать, что во всех рассмотренных случаях функции $x(\xi)$ и $z(\xi)$ удовлетворяют функциональному уравнению (П. 1). В этом можно убедиться прямой проверкой (П. 1), используя формулы сложения для эллиптических функций (см. [23]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Nussenzweig H. M.**— "Proc. Roy. Soc. A", 1961, v. 264, p. 408.
2. **Березин Ф. А., Похил Г. П., Финкельберг В. М.**— "Вестн. МГУ", 1964, т. 1, с. 21.
3. **McGuire J. B.**— "J. Math. Phys.", 1964, v. 5, p. 622.
4. **Brezin E., Zinn-Justine J.**— "Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. B", 1966, v. 263, p. 670.
5. **Yang C. N.**,— "Phys. Rev. Lett.", 1967, v. 19, p. 1312; "Phys. Rev.", 1968, v. 168, p. 1920.
6. **Muriel A.**— "Phys. Rev. A", 1977, v. 15, p. 341.
7. **Toda M.**— "Prog. Theor. Phys. Suppl.", 1970, v. 45, p. 1974.
8. **Henon M.**— "Phys. Rev. B", 1974, v. 9, p. 1921.
9. **Flashka H.**— "Phys. Rev. B", 1974, v. 9, p. 1924; "Progr. Theor. Phys.", 1974, v. 51, p. 703.
10. **Манаков С. В.**— "ЖЭТФ", 1974, т. 67, с. 543.
11. **Bogoyavlensky O.**— "Commun. Math. Phys.", 1976. v. 51, p. 201.
12. **Calogero F.**— "J. Math. Phys.", 1969, v. 10, p. 2191, 2197.
13. **Calogero F.**— "J. Math. Phys.", 1971, v. 12, p. 419.
14. **Переломов А. М.**— "ТМФ", 1971, т. 6, с. 364.
15. **Gambardella P. J.**— "J. Math. Phys.", 1975, v. 16, p. 1172.
16. **Moshinsky M., Patera J., Winternitz P.**— "J. Math. Phys." 1975, v. 16, p. 82.
17. **Moshinsky M., Patera J.**— "J. Math. Phys.", 1975, v. 16, p. 1866.
18. **Sutherland B.**— "Phys. Rev. A", 1971, v. 4, p. 2019; 1972, v. 5, p. 1372.
19. **Wolfes J.**— "J. Math. Phys.", 1974, v. 15, p. 1420.
20. **Calogero F., Marchioro C.** "J. Math. Phys.", 1975, v. 15, p. 1425.
21. **Moser J.**— "Adv. Math.", 1975, v. 16, p. 197.
22. **Calogero F., Marchioro C., Ragnisco O.**— "Lett. Nuovo cimento", 1975, v. 13, p. 383.
23. **Calogero F.** "Lett. Nuovo cimento", 1975, v. 13, p. 411.
24. **Olshanetsky M. A., Perelomov A. M.**— "Invent. Math." 1976, v. 37, p. 93.
25. **Perelomov A. M.**— Preprint ITEP. No 27, 1976.
26. **Perelomov A. M.**— "Lett. Math. Phys.", 1977, v. 1, p. 531.
27. **Wojciechowski S.**— "Lett. Nuovo cimento", 1977, v. 18, p. 103.
28. **Ольшанецкий М. А., Переломов А. М.**— "Функциональный анализ и его приложения", 1976, т. 10, № 3, с. 86; "Lett. Nuovo cimento", 1976, v. 16, p. 333.
29. **Ольшанецкий М. А., Переломов А. М.** "Функциональный анализ и его приложения", 1977, т. 11, № 1, с. 75. "Lett. Nuovo cimento", 1976, v. 17, p. 97.
30. **Adler M.**— "Comm. Math. Phys.", 1977, v. 55, p. 196.
31. **Olshanetsky M. A., Perelomov A. M.**— "Lett. Math. Phys.", 1977, v. 2, p. 7.
32. **Ольшанецкий М. А., Переломов А. М.**— "Функциональный анализ и его приложения", 1978, т. 12, № 2, с. 60.
33. **Ольшанецкий М. А., Переломов А. М.**— Препринт ИТЭФ, № 150, 1977.
34. **Арнольд В. И.**, Математические методы классической механики, М., 1974.
35. **Jacobi C.** Problema trium corporum mutis attractionibus cubus distantiarum inverse proportionalibus recta linea se moventium, Gesammelte Werke, Bd. IV, Berlin, 1866; **Marchioro C.** "J. Math. Phys.", 1970, v. 11, p. 2193.
36. **Gardner C. S. e.a.**— "Phys. Rev. Lett.", 1967, v. 19, p. 1095.
37. **Lax P.**— "Comm. Pure Appl. Math.", 1968, v. 21, p. 467.
38. **Кулиш П.**— "ТМФ", 1976, т. 26, с. 198.
39. **Perelomov A. M.**— "Comm. Math. Phys.", 1978, v. 63, p. 9.
40. **Barucchi G., Regge T.**— "J. Math. Phys.", 1977, v. 18, p. 1149.
41. **Хелгасон С.** Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, М., "Мир", 1964.

42. **Calogero F.**, Lett. N. C., 16, 77 (1976).
43. **Пидкуйко С. И., Стёпин А. М.** «Функциональный анализ и его приложения», 10, № 2, 84 (1976).
44. **Захаров В. Е., Манаков С. В.** «ТМФ», 1974, т. 19, с. 332.
45. **Kotera T., Sawada K.**—«J. Phys. Soc. Japan», 1975, v. 39, p. 1614.
46. **Бхану — Мурти Т. С.**—«Докл. АН СССР», 1960, т. 133, с. 503.
47. **Гиндикин С. Г., Карпелевич Ф. И.**—«Докл. АН СССР», 1962, т. 145, с. 252.
48. **Переломов А. М., Попов В. С., Малкин И. А.**— Препринт ИТЭФ № 337, 1965.
49. **Gallavotti G., Marchioro C.**—«J. Math. Anal Appl.», 1975, v. 44, p. 661.
50. **Wigner E. P.**—«Ann. Math.», 1951, v. 53, p. 36; 1955, v. 62, p. 548.
51. **Dyson F.**—«J. Math. Phys.», 1962, v. 3, p. 140, 157, 166.
**Дайсон Ф.** Статистическая теория энергетических уровней сложных систем. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. литературы, 1963.
52. **Mehta M. L., Dyson F. J.**—«J. Math. Phys.», 1963, v. 4, p. 713.
53. **Gunson J.**—«J. Math. Phys.», 1962, v. 3, p. 752.
54. **Wilson K. G.**—«J. Math. Phys.», 1962, v. 3, p. 1040.