

НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ЧЕТЫРЕХНУКЛОННЫХ СИСТЕМ

В. Ф. Харченко

Институт теоретической физики АН УССР, Киев

Дан обзор современного состояния теоретических исследований свойств четырехнуклонных систем. Обсуждается связь между различными формулировками уравнений движения для четырех частиц. Изложена схема получения интегральных уравнений для четырех нуклонов типа Фаддеева — Якубовского. Основное внимание уделено новым результатам, полученным с применением методов прямого решения уравнений движения. Дано обсуждение результатов расчетов энергий основного и возбужденного 0^+ -состояний ядра ${}^4\text{He}$, длин рассеяния нуклона на трехнуклонных ядрах, дифференциальных сечений $n - {}^3\text{H}$ - и $n - {}^3\text{He}$ -рассеяния при конечных энергиях и др., проведено их сравнение с экспериментом.

A review is given of the recent theoretical studies of four-nucleon system properties. Connections between various formulations of integral equations of motion for four particles are discussed. A scheme for deriving integral equations of the Faddeev — Yakubovsky type for four nucleons is considered. The main attention is paid to new results which were obtained using methods of the direct solution of the equations of motion. The results of calculations of the binding energies of the ${}^4\text{He}$ ground and excited 0^+ -states, the nucleon-trinucleon scattering lengths, the differential cross-sections of $n - {}^3\text{H}$ and $n - {}^3\text{He}$ elastic scattering at finite energies and other quantities are discussed, the comparison of them to experimental data is given.

ВВЕДЕНИЕ

Разработка теории малонуклонных систем, основывающейся на нуклон-нуклонных (NN) взаимодействиях, вызывает значительный интерес, обеспечивая возможность проверки согласованности наших представлений о ядерных силах между нуклонами с имеющимися экспериментальными данными о таких системах. Можно ожидать, что данные о простейших ядерных системах, состоящих из нескольких нуклонов, окажутся существенным источником получения добавочной информации о NN -взаимодействии.

В настоящее время достигнуты большие успехи в теоретическом исследовании свойств трехнуклонных систем. Достижения в этой области обязаны применению эффективных вариационных методов [1], и в особенности методов прямого решения интегральных уравнений Фаддеева для трех частиц [2,3]. Становится реальным расчет характеристик трехнуклонных систем со сложными взаимодействиями с высокой степенью точности. Результаты исследова-

дования свойств системы трех нуклонов в связанном состоянии и в состояниях непрерывного спектра обсуждаются в многочисленных обзорных работах [4—19] (обширный список литературы на эту тему содержится также в компилятивной статье [20]).

Современные теоретические исследования трехнуклонных систем, с одной стороны, сильно стимулируют повышение точности существующих экспериментальных данных об этих системах с другой стороны, способствуют постановке новых опытов. Отметим, например, важность исследования поляризационных эффектов при рассеянии и реакциях в системе трех нуклонов, содержащих информацию о NN -взаимодействии в состояниях с высшими парциальными волнами. В последнее время теоретические методы решения проблемы трех тел стали широко применяться в различных задачах ядерной физики и физики частиц.

Большой интерес вызывает исследование возможности извлечения дополнительных сведений о ядерном взаимодействии между нуклонами из обширных экспериментальных данных о более сложных ядерных системах. При переходе к системам с большим числом частиц, однако, резко усложняется теоретический аппарат и, следовательно, уменьшаются возможности проведения строгого количественного расчета таких систем. Тем не менее четырехнуклонные системы, как следующие по сложности после трехнуклонных, еще сравнительно просты, чтобы можно было надеяться получить решение соответствующих уравнений движения с хорошей точностью.

Экспериментальная информация о системе четырех нуклонов весьма богата [21]. Более ранние обзоры экспериментальных данных о четырехнуклонных ядрах с обсуждением возникающих проблем содержатся в [22—24].

Четырехнуклонные системы обладают рядом свойств, отличных от свойств трехнуклонных систем и характерных для более сложных ядер. Для четырехнуклонных систем значительно возрастает роль принципа Паули. В ядре ${}^4\text{He}$, представляющем собой единственное связанное состояние четырех нуклонов, нуклоны связаны между собой сильнее и находятся на более близких расстояниях, чем в дейтоне или тритоне. Энергия связи на нуклон и плотность ядра ${}^4\text{He}$ близки к насыщению. Зарядовый форм-фактор ядра ${}^4\text{He}$ измерен в широкой области переданного импульса [25—29], среднеквадратичный радиус известен с хорошей точностью [27, 28].

В настоящее время накоплен также обширный экспериментальный материал о состояниях непрерывного спектра четырехнуклонных систем [21, 24] *. Четырехнуклонные ядра могут находиться

* Фазовые анализы экспериментальных данных по рассеянию нуклонов трехнуклонными ядрами проводились многими авторами [24, 21]. Зарядоинвариантный фазовый анализ процессов $n^3\text{He}$ - и $p^3\text{H}$ -рассеяния выполнен в [30, 31].

в возбужденных квазидискретных состояниях с различными значениями ширины уровня, момента количества движения, четности и изотопического спина (рис. 1). Известно около десяти возбужденных уровней ядра ${}^4\text{He}$ с энергиями возбуждения от 20 до 35 $M\text{эв}$ (положительной и отрицательной четности, со значениями полного момента количества движения 0, 1 и 2 и полным изоспина 0 и 1). Стабильных связанных состояний ядер тетранейтрона,

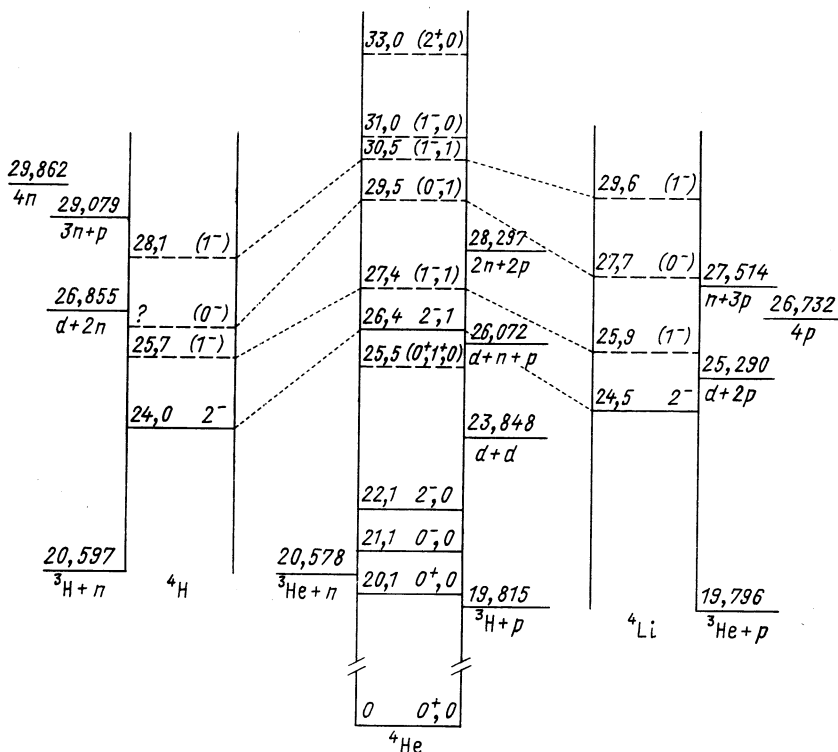


Рис. 1. Схема уровней энергии системы четырех нуклонов [21]

${}^4\text{H}$, ${}^4\text{Li}$ и ${}^4\text{Be}$ не обнаружено, однако известно по четыре возбужденных уровня зеркальных ядер ${}^4\text{H}$ и ${}^4\text{Li}$. Данные о возбужденных состояниях четырехнуклонных ядер безусловно содержат интересную информацию о NN -взаимодействиях в нечетных состояниях [32].

Получено много других данных о процессах рассеяния и реакциях при столкновении нуклона с трехнуклонными ядрами ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$, дейтона с дейтоном (в том числе о реакциях развала с образованием в конечном состоянии трех и четырех ядерных частиц), а также о различных процессах в четырехнуклонных системах с участием γ -квантов, электронов и пионов. В последнее время зна-

чительное внимание уделяется изучению поляризационных эффектов в реакциях, вызванных столкновением нуклона с трехнуклонным ядром и дейтона с дейтоном [33].

Значительный интерес представляет выяснение вопроса о степени новизны информации о NN -взаимодействии, содержащейся в данных о четырехнуклонных системах по сравнению со сведениями, получаемыми из данных о более простых трехнуклонных системах.

В последнее десятилетие теоретическому исследованию четырехнуклонных систем уделялось заметное внимание. Очень мало расчетов, однако, выполнено с реалистическими NN -потенциалами. Свойства ядра ${}^4\text{He}$ в основном состоянии рассчитывались, главным образом, с применением методов вариационного типа. Метод, использующий разложение волновой функции по гиперсферическим функциям, применялся в работах [34—37]. Метод матрицы реакций для трех- и четырехнуклонных систем был успешно применен в работе Акаиси и Нагата [38]. Было показано, что для легчайших ядер парные корреляции являются доминирующими. На основе метода матрицы реакций в последующих работах [39—40] был развит новый вариационный подход. Он применялся для расчета свойств ядра ${}^4\text{He}$ как в основном [39—41], так и в возбужденных [41] состояниях. Ряд расчетов ядра ${}^4\text{He}$ выполнен с помощью обобщенного метода Бракнера — Хартри — Фока, основывающегося на решении уравнений Бете — Голдстоуна и Бете — Фаддеева [42—45]. Расчеты возбужденных состояний ядра ${}^4\text{He}$ производились также с помощью модели, основывающейся на R -матричном методе [46], и частично-дырочной модели связанных каналов [47]. Различные, но близкие по сути методы вариационного типа применялись для расчетов процессов рассеяния и реакций в системе четырех нуклонов [48—51]. Описание этих методов и анализ полученных результатов содержатся в обзоре База и др. [46].

В последнее время в теории четырехнуклонных систем намечилось новое направление, основывающееся на интегральной формулировке уравнений движения.

Уже вскоре после того, как Фаддеев сформулировал интегральные уравнения для трех частиц, появился целый ряд предложений об обобщении схемы получения подобных уравнений для большего числа частиц [52—67]. Первоначально интегральные уравнения для четырех частиц выводились путем преобразования уравнения Липмана — Швингера к уравнениям со связными или почти связными ядрами [52, 54—58]. В действительности существует бесконечно много способов преобразования уравнения Шредингера для N частиц с соответствующим граничным условием в интегральные уравнения с несингулярными ядрами [68].

Наиболее последовательное обобщение уравнений Фаддеева на случай N частиц принадлежит О. А. Якубовскому [61]. Схема

вывода уравнений для четырех частиц дана Фаддеевым в работах [69, 70].

Вывод уравнений Фаддеева — Якубовского (ФЯ) существенно использует парный вид взаимодействия в системе, обуславливающий все многообразие граничных условий, и осуществляется прямым алгебраическим путем. Уравнения ФЯ для четырех частиц представляет собой систему связанных интегральных уравнений

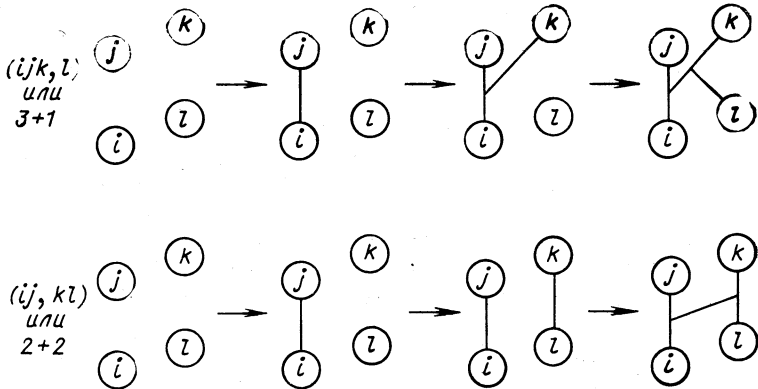


Рис. 2. Два типа схем Якоби связывания частиц в систему

для компонент волновой функции [71]. Каждая из компонент ФЯ отвечает одной из возможных схем Якоби последовательного объединения частиц в систему (рис. 2). Ядра уравнений ФЯ выражаются через компоненты операторов перехода для подсистем $3 + 1$ и $2 + 2$, удовлетворяющие, в свою очередь, интегральным уравнениям типа Фаддеева.

Как сами уравнения ФЯ, так и уравнения, определяющие их ядра, приводимы к фредгольмову виду. Ядра уравнений ФЯ, менее связанные, чем ядра уравнений в [52, 54—59, 63], становятся полностью связными после двух итераций. Основное преимущество уравнений ФЯ перед другими уравнениями состоит в том, что они так же, как и уравнения Фаддеева для трех частиц, строго эквивалентны исходному уравнению Шредингера с граничным условием *. Для уравнений типа ФЯ характерны *наиболее детальные* разбиения на компоненты соответственно парному виду взаимодействия между частицами как волновой функции системы че-

* Для других уравнений такая эквивалентность не всегда исследовалась и может даже нарушиться. Уравнение Вайнберга [52], например, содержит связанное ядро, однако допускает лишние решения при отрицательных энергиях, которые не соответствуют действительным связанным состояниям системы [72—75].

четырех частиц, так и операторов перехода для подсистем. В случае четырех различных частиц система уравнений ФЯ состоит из 18 уравнений.

Другие интегральные уравнения, ядра которых содержат менее детальные разбиения операторов перехода для подсистем, могут быть получены частичным суммированием соответствующих уравнений ФЯ.

Складывая, например, уравнения для компонент ФЯ, отвечающих всевозможным схемам Якоби объединения частиц в систему при фиксированной паре частиц, объединенных на первом этапе, получим систему уравнений [54—59], состоящую из шести связанных уравнений (число уравнений равно числу возможных пар взаимодействующих частиц в системе четырех частиц). Складывая уравнения для компонент ФЯ, отвечающих всевозможным парам частиц, объединяющихся на первом этапе, но при фиксированных двухфрагментных подсистемах на втором этапе объединения, получим систему уравнений [66, 67], состоящую из семи уравнений (число уравнений равно числу возможных двухфрагментных подсистем в системе). При попарном сложении уравнений для компонент ФЯ, отвечающих двум возможным схемам Якоби типа (ijk, l) при фиксированной паре частиц ij , объединяющихся на первом этапе, получим один из вариантов уравнений, предложенных в [57] [уравнения (26), (27)], — систему из 12 связанных уравнений. Суммирование всех уравнений системы ФЯ (с соответствующим введением парных потенциалов) приводит [69] к уравнению Вайнберга [52]. При суммировании интегральных уравнений, однако, не обязательно сохраняется свойство эквивалентности их уравнению Шредингера с граничным условием [69, 76].

Уравнения Омнеса [63], близкие к уравнениям ФЯ, нетрудно получить, отделяя в ядрах ФЯ дважды несвязные члены [76, 77]. Уравнения Грассбергера — Сандхаса [62], имеющие вид многоканальных уравнений типа Липмана — Швингера, сформулированы путем последовательного выделения квазичастиц в амплитудах перехода для подсистем. Отметим, что метод ФЯ представляет собой общий способ регуляризации уравнений движения для N частиц с парными взаимодействиями, не связанный обязательно с применением какого-либо конкретного способа представления амплитуд для подсистем. В другой форме, с введением компонент операторов перехода для четырех частиц, уравнения ФЯ записаны в [78].

Из всех интегральных уравнений движения для четырех частиц наиболее широкое практическое применение получили уравнения ФЯ.

В рамках формализма ФЯ очень просто и естественно осуществляется учет тождественности частиц. В простейшем случае для системы четырех тождественных бесспиновых частиц интегральные уравнения типа ФЯ впервые были сформулированы в ра-

боте [71]. Соответствующая система интегральных уравнений состоит всего из двух уравнений, ядра которых содержат компоненты амплитуд рассеяния в подсистемах $3 + 1$ и $2 + 2$. Анализ по угловым моментам в интегральных уравнениях для четырех частиц выполнен в работе [79]. В представлении угловых моментов уравнения движения для четырех частиц принимают вид бесконечной системы трехмерных интегральных уравнений. Обобщение интегральных уравнений типа ФЯ на случай нуклонов дано в [80, 81]. Интегральные уравнения для четырех частиц при наличии кулоновского взаимодействия сформулированы в [82] (система из двух нейтральных и двух заряженных частиц).

В случае сепарабельных двухчастичных взаимодействий интегральные уравнения для четырех частиц становятся двумерными [71, 83—85].

Последовательное применение сепарабельных аппроксимаций для амплитуд рассеяния в подсистемах $2 + 1 + 1$, $3 + 1$ и $2 + 2$ позволяет свести задачу четырех частиц к решению системы одномерных интегральных уравнений. Первые численные решения таких уравнений были реализованы в работах [85—87]*. Указанный метод применялся при решении задачи о связанном состоянии четырех нуклонов [85—87, 89—92] и задачи о рассеянии нуклона на трехнуклонных ядрах [90, 91, 93—95] с простейшими S -волновыми (сепарабельными и локальными) потенциалами**. С помощью последовательной сепарабельной аппроксимации недавно был выполнен расчет основного состояния ядра ${}^4\text{He}$ с реалистическим NN -взаимодействием (потенциалом Риды RSC) [97]. Вершинные константы виртуального распада ядра ${}^4\text{He}$ на трехнуклонное ядро и нуклон и на два дейтона рассчитывались в [98]. В последнее время реализовано прямое численное решение двумерных интегральных уравнений типа ФЯ задачи четырех нуклонов с сепарабельным NN -взаимодействием [99, 100].

Ниже дан краткий обзор теории четырехнуклонных систем при нерелятивистских энергиях, основанной на NN -взаимодействии, и результатов для конкретных систем, полученных к настоящему времени. Вид интегральных уравнений движения для четырех нуклонов типа ФЯ рассмотрен в разд. 1. Результаты решения уравнений движения обсуждаются в разд. 2 (связанные состояния четырехнуклонной системы) и в разд. 3 (рассеяние нуклона на

* Попытки решения интегральных уравнений типа ФЯ с применением вариационного и K -матричного борновского приближений предпринимались ранее в [88].

** В рамках нерелятивистского квантово-полевого формализма в работе [96] развита модель процессов рассеяния в системе четырех частиц, сводящаяся к одномерным интегральным уравнениям. Решение соответствующих уравнений проводилось в простейшем случае четырех тождественных бесспиновых частиц [96].

трехнуклонных ядрах). Здесь же исследованы корреляции между низкоэнергетическими характеристиками трех- и четырехнуклонных систем.

1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХ НУКЛОНОВ

Уравнения Фаддеева—Якубовского. Рассмотрим квантовомеханическую систему, состоящую из четырех различных частиц, попарно взаимодействующих между собой. Гамильтониан системы имеет вид

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{V}, \tag{1}$$

где \mathcal{H}_0 — оператор кинетической энергии системы; \mathcal{V} — оператор потенциального взаимодействия;

$$\mathcal{V} = V_{12} + V_{23} + V_{31} + V_{14} + V_{24} + V_{34}. \tag{2}$$

Будем предполагать, что каждый из парных потенциалов V_{ij} , действующий между частицами i и j , исчезает при их достаточном взаимном удалении.

Оператор перехода в системе четырех частиц $\mathcal{T}(\mathcal{Z}) = \mathcal{V} + \mathcal{V}\mathcal{G}(\mathcal{Z})\mathcal{V}$, $\mathcal{G}(\mathcal{Z}) \equiv (\mathcal{Z} - \mathcal{H})^{-1}$ удовлетворяет уравнению Липмана — Швингера

$$\mathcal{T}(\mathcal{Z}) = \mathcal{V} + \mathcal{V}\mathcal{G}_0(\mathcal{Z})\mathcal{T}(\mathcal{Z}), \tag{3}$$

где $\mathcal{G}_0(\mathcal{Z}) = (\mathcal{Z} - \mathcal{H}_0)^{-1}$ — свободная функция Грина четырех частиц; \mathcal{Z} — энергия системы с бесконечно малой положительной мнимой добавкой.

Уравнение (3) существенно сингулярно. Действительно, итерированное произвольное число раз ядро уравнения (3) содержит

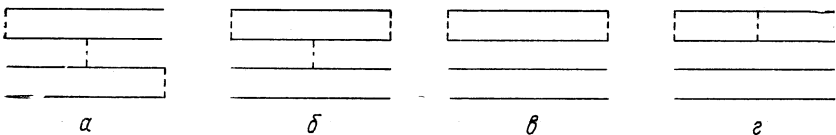


Рис. 3. Связная (а) и несвязные (б, в, г) диаграммы дважды итерированного ядра уравнения Липмана — Швингера для четырех частиц

наряду со слагаемыми, изображаемыми полностью связными диаграммами (диаграммы типа а на рис. 3), слагаемые в виде частично связанных диаграмм, состоящих в двух (диаграммы типа б и в) и трех (диаграммы типа г) связных частей. Полностью связные диаграммы отвечают фредгольмовым ядрам. Ядра несвязных диаграмм содержат δ -функции, обеспечивающие сохранение суммарных импульсов для каждой из невзаимодействующих подсистем, и являются существенно сингулярными. Наиболее сингулярные

члены итерированного ядра уравнения (3) содержат две δ -функции, им отвечают диаграммы типа z на рис. 3.

Переформулируем уравнение (3) с целью получить интегральные уравнения, ядра которых свободны от указанных сингулярностей.

Перестройку уравнения (3) проведем в два этапа. Прежде всего представим оператор $\mathcal{T}(\mathcal{Z})$ в виде суммы шести слагаемых, соответствующих отдельным слагаемым оператора взаимодействия системы \mathcal{V} в (2):

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{T}(z) &= \sum_{ij} \mathcal{T}^{(ij)}(\mathcal{Z}); \\ \mathcal{T}^{(ij)}(\mathcal{Z}) &= V_{ij} + V_{ij} \mathcal{G}_0(\mathcal{Z}) \mathcal{T}(\mathcal{Z}); \\ ij &= 12, 23, 31, 14, 24, 34. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В уравнениях для $\mathcal{T}^{(ij)}$ выделим и обратим диагональные части. Полученные в результате уравнения

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{T}^{(ij)}(\mathcal{Z}) &= \mathcal{T}_{ij}(\mathcal{Z}) + \mathcal{T}_{ij}(\mathcal{Z}) \mathcal{G}_0(\mathcal{Z}) \sum_{i'j' \neq (ij)} \mathcal{T}^{(i'j')}(\mathcal{Z}); \\ ij, i'j' &= 12, 23, 31, 14, 24, 34 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

содержат в свободных членах и ядрах вместо двухчастичных потенциалов V_{ij} операторы перехода \mathcal{T}_{ij} , которые определяются уравнением

$$\mathcal{T}_{ij}(\mathcal{Z}) = V_{ij} + V_{ij} \mathcal{G}_0(\mathcal{Z}) \mathcal{T}_{ij}(\mathcal{Z}). \quad (6)$$

Согласно (6) нахождение операторов \mathcal{T}_{ij} сводится к решению уравнения Липмана — Швингера с двухчастичным взаимодействием, но с ядром, содержащим оператор кинетической энергии всех четырех частиц. Выделение операторов \mathcal{T}_{ij} обеспечивает отсутствие в итерированных ядрах системы (5) членов, соответствующих дважды несвязным диаграммам (типа диаграммы z на рис. 3). Однако члены, отвечающие несвязным диаграммам типа b и c , по-прежнему содержатся в итерированном ядре системы (5) любого порядка. В результате ядро системы (5) остается существенно сингулярным, хотя и в меньшей степени, по сравнению с ядром (4).

Для получения системы уравнений с несингулярным ядром необходимо выполнить еще одну перестройку, связанную с выделением в (5) вклада от всех оставшихся несвязных диаграмм в явном виде. Суммирование и выделение таких диаграмм может быть осуществлено путем введения соответствующих операторов перехода для подсистем.

Представим операторы $\mathcal{T}^{(ij)}$ в (5) в виде суммы операторов:

$$\mathcal{T}^{(ij)}(\mathcal{Z}) = \mathcal{T}_{ij}(\mathcal{Z}) + \mathcal{T}^{(ijh, l)}(\mathcal{Z}) + \mathcal{T}^{(ijl, h)}(\mathcal{Z}) + \mathcal{T}^{(ij, hl)}(\mathcal{Z}), \quad (7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}^{(ijk, l)}(\mathcal{Z}) &= \mathcal{F}_{ij}(\mathcal{Z}) \mathcal{G}_0(\mathcal{Z}) [\mathcal{F}^{(ki)}(\mathcal{Z}) + \mathcal{F}^{(jk)}(\mathcal{Z})]; \\ \mathcal{F}^{(ij, kl)}(\mathcal{Z}) &= \mathcal{F}_{ij}(\mathcal{Z}) \mathcal{G}_0(\mathcal{Z}) \mathcal{F}^{(kl)}(\mathcal{Z}). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Оператор $\mathcal{F}^{(ij)}$ разделен на сумму операторов (7) по виду несвязных диаграмм, содержащихся, наряду со связными диаграммами, во введенных слагаемых. Вид несвязных диаграмм определяется верхним индексом, в котором номера частиц из различных связанных частей несвязной диаграммы разделены запятой.

Подставляя в правые части (8) операторы $\mathcal{F}^{(ij)}$ в виде (7), соотношения (8) можно рассматривать как систему зацепляющихся уравнений для введенных в (7) слагаемых. Поскольку парные взаимодействия симметричны относительно перестановки частиц, ($V_{ij} = V_{ji}$), операторы $\mathcal{F}^{(ijk, l)}$ и $\mathcal{F}^{(jik, l)}$ являются одинаковыми. По этой причине одинаковы также операторы $\mathcal{F}^{(ij, kl)}$, $\mathcal{F}^{(ji, kl)}$, $\mathcal{F}^{(ij, lk)}$ и $\mathcal{F}^{(ji, lk)}$. Таким образом, из $4! = 24$ операторов $\mathcal{F}^{(ijk, l)}$ и $4! = 24$ операторов $\mathcal{F}^{(ij, kl)}$ (со всеми возможными перестановками частиц в индексах) различными являются только 12 операторов типа $\mathcal{F}^{(ijk, l)}$ и 6 операторов типа $\mathcal{F}^{(ij, kl)}$. Используя только четные перестановки номеров частиц 1234, выберем верхние индексы указанных операторов равными:

$$\left. \begin{aligned} (ijk, l): & (123, 4), (231, 4), (312, 4), (142, 3), (421, 3), (214, 3); \\ & (341, 2), (413, 2), (134, 2), (243, 1), (432, 1), (324, 1); \\ (ij, kl): & (12, 34), (34, 12), (23, 14), (14, 23), (31, 24), (24, 31). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Система 8 состоит из 18 уравнений.

Разобьем уравнения системы (8) на группы уравнений таким образом, чтобы в каждой из них операторы, стоящие слева, содержали сингулярные части, соответствующие одному и тому же разделению системы четырех частиц на две не взаимодействующие между собой подсистемы. В этом случае в операторах каждой группы уравнений, стоящих слева, запятой разделены одни и те же номера частиц независимо от их порядка. Для операторов типа $\mathcal{F}^{(ijk, l)}$ таких групп четыре, каждая из них содержит по три уравнения:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathcal{F}^{(ijk, l)} \\ \mathcal{F}^{(jki, l)} \\ \mathcal{F}^{(kij, l)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{F}_{ij} & \mathcal{F}_{ij} \\ \mathcal{F}_{jk} & 0 & \mathcal{F}_{jk} \\ \mathcal{F}_{ki} & \mathcal{F}_{ki} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{G}_0 \left\{ \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{ij} \\ \mathcal{F}_{jk} \\ \mathcal{F}_{ki} \end{pmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{pmatrix} \mathcal{F}^{(ijk, l)} + \mathcal{F}^{(jil, k)} + \mathcal{F}^{(ij, kl)} \\ \mathcal{F}^{(jki, l)} + \mathcal{F}^{(kjl, i)} + \mathcal{F}^{(jk, il)} \\ \mathcal{F}^{(kij, l)} + \mathcal{F}^{(ikl, j)} + \mathcal{F}^{(ki, jl)} \end{pmatrix} \right\}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$ijkl = 1234, 1423, 3412, 2431.$$

В случае операторов типа $\mathcal{T}^{(ij, kl)}$ имеются три группы по два уравнения в каждой:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathcal{T}^{(ij, kl)} \\ \mathcal{T}^{(kl, ij)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{T}_{ij} \\ \mathcal{T}_{kl} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{G}_0 \left\{ \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{ij} \\ \mathcal{T}_{kl} \end{pmatrix} + \right. \\ &+ \left. \begin{pmatrix} \mathcal{T}^{(ij, kl)} + \mathcal{T}^{(ijk, l)} + \mathcal{T}^{(jil, k)} \\ \mathcal{T}^{(kl, ij)} + \mathcal{T}^{(kli, j)} + \mathcal{T}^{(lkj, i)} \end{pmatrix} \right\}, \\ ijkl &= 1234, 2314, 3124. \end{aligned} \tag{11}$$

Ядро системы операторных уравнений (10) — (11) существенно сингулярно за счет клеточно-диагональной части, клетки из которой соответствуют группам уравнений. Подобно диагональной части матрицы системы (4) до первой перестройки, эта клеточно-диагональная часть приводит к появлению при итерациях бесконечного числа несвязных диаграмм типа (ijk, l) и (ij, kl) . Перенесем в каждой группе уравнений (10) — (11) диагональную клетку на левую сторону и обратим матрицу перед искомыми операторами. В результате, выписывая по одному уравнению из (10) и (11), после обращения представим конечную систему уравнений в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{T}^{(ijk, l)}(\mathbb{Z}) &= \mathcal{M}_{ij, ij}(\mathbb{Z}) + \mathcal{M}_{ij, jk}(\mathbb{Z}) + \mathcal{M}_{ij, ki}(\mathbb{Z}) - \mathcal{T}_{ij}(\mathbb{Z}) + \\ &+ \mathcal{M}_{ij, ij}(\mathbb{Z}) \mathcal{G}_0(\mathbb{Z}) [\mathcal{T}^{(kjl, i)}(\mathbb{Z}) + \mathcal{T}^{(ihl, j)}(\mathbb{Z}) + \mathcal{T}^{(jk, il)}(\mathbb{Z}) + \\ &+ \mathcal{T}^{(ki, jl)}(\mathbb{Z})] + \mathcal{M}_{ij, jk}(\mathbb{Z}) \mathcal{G}_0(\mathbb{Z}) [\mathcal{T}^{(jil, k)}(\mathbb{Z}) + \mathcal{T}^{(ihl, j)}(\mathbb{Z}) + \\ &+ \mathcal{T}^{(ij, kl)}(\mathbb{Z}) + \mathcal{T}^{(ki, jl)}(\mathbb{Z})] + \mathcal{M}_{ij, ki}(\mathbb{Z}) \mathcal{G}_0(\mathbb{Z}) [\mathcal{T}^{(jil, k)}(\mathbb{Z}) + \\ &+ \mathcal{T}^{(kjl, i)}(\mathbb{Z}) + \mathcal{T}^{(ij, kl)}(\mathbb{Z}) + \mathcal{T}^{(jk, il)}(\mathbb{Z})]; \\ \mathcal{T}^{(ij, kl)}(\mathbb{Z}) &= \mathcal{N}^{ij, ij}(\mathbb{Z}) + \mathcal{N}^{ij, kl}(\mathbb{Z}) - \mathcal{T}_{ij}(\mathbb{Z}) + \\ &+ \mathcal{N}^{ij, ij}(\mathbb{Z}) \mathcal{G}_0(\mathbb{Z}) [\mathcal{T}^{(hli, j)}(\mathbb{Z}) + \mathcal{T}^{(lhj, i)}(\mathbb{Z})] + \\ &+ \mathcal{N}^{ij, kl}(\mathbb{Z}) \mathcal{G}_0(\mathbb{Z}) [\mathcal{T}^{(ijk, l)}(\mathbb{Z}) + \mathcal{T}^{(jil, k)}(\mathbb{Z})]. \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

Индексы (ijk, l) и (ij, kl) в (12) принимают все значения (9), а операторы $\mathcal{M}_{\alpha, \beta}$ и $\mathcal{N}^{\alpha, \beta}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha, \beta}(\mathbb{Z}) &= \mathcal{T}_{\alpha}(\mathbb{Z}) \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{T}_{\alpha}(\mathbb{Z}) \mathcal{G}_0(\mathbb{Z}) \sum_{\gamma \neq \alpha} \mathcal{M}_{\gamma, \beta}(\mathbb{Z}), \\ \alpha, \beta, \gamma &= ij, jk, ki; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{\alpha, \beta}(\mathbb{Z}) &= \mathcal{T}_{\alpha}(\mathbb{Z}) \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{T}_{\alpha}(\mathbb{Z}) \mathcal{G}_0(\mathbb{Z}) \sum_{\gamma \neq \alpha} \mathcal{N}^{\gamma, \beta}(\mathbb{Z}), \\ \alpha, \beta, \gamma &= ij, kl. \end{aligned} \tag{14}$$

Введенные операторы $\mathcal{M}_{\alpha, \beta}$ и $\mathcal{N}_{\alpha, \beta}$ представляют собой фаддеевские компоненты двух операторов перехода

$$\mathcal{T}_{ijk, l}(\mathbb{Z}) = \sum_{\alpha, \beta = ij, jk, ki} \mathcal{M}_{\alpha, \beta}(\mathbb{Z})$$

и

$$\mathcal{T}_{ij, kl}(\mathbb{Z}) = \sum_{\alpha, \beta = ij, kl} \mathcal{N}_{\alpha, \beta}(\mathbb{Z}).$$

Оператор $\mathcal{T}_{ijk, l}$ определяется уравнением (3), но в качестве оператора взаимодействия содержит только сумму парных взаимодействий между тремя частицами $i, j, k : V_{ij} + V_{jk} + V_{ki}$. Подобным образом оператор $\mathcal{T}_{ij, kl}$ содержит сумму взаимодействий $V_{ij} + V_{kl}$. Эти операторы соответствуют двум возможным способам разделения системы четырех частиц на две не взаимодействующие между собой подсистемы: ijk, l и ij, kl . При фиксированных значениях $ijkl$ уравнения для операторов $\mathcal{M}_{\alpha, \beta}$ (13) представляют собой три независимые системы по три уравнения в каждой, а уравнения для $\mathcal{N}_{\alpha, \beta}$ (14) образуют две системы по два уравнения. Система из трех уравнений (13) описывает движение подсистемы трех взаимодействующих между собой частиц i, j, k при отсутствии взаимодействия с четвертой частицей l , при этом свободная функция Грина и оператор \mathcal{T}_{α} в (13) содержат сумму операторов кинетической энергии всех четырех частиц. Система из двух уравнений (14) описывает движение двух не взаимодействующих пар частиц, при этом, как и в (13), операторы \mathcal{G}_0 и \mathcal{T}_{α} включают в себя полную кинетическую энергию четырех частиц.

Система (12) состоит из 18 уравнений, из них 12 уравнений первого типа и 6 уравнений второго.

Уравнения (12) получены О. А. Якубовским [61] и Л. Д. Фаддеевым [69]. Интегральные ядра системы уравнений ФЯ содержат сингулярные члены, отвечающие несвязным диаграммам с отсутствующими одной и двумя связями. Однако структура ядра системы (12) обеспечивает исчезновение этих сингулярностей уже после второй итерации. Система уравнений (12) является фредгольмовской и допускает однозначное решение [61, 76].

От уравнений для оператора перехода (12) нетрудно перейти к уравнениям для волновой функции четырех частиц [71]. Ограничимся наиболее интересным случаем, когда в начальном асимптотическом состоянии система состоит из двух не взаимодействующих между собой подсистем (12,3,4) или (12,34).

Полная волновая функция четырех частиц с взаимодействием (1) может быть представлена в виде суммы компонент [71]:

$$\Psi = \sum_{(ijk, l)} \Psi^{(ijk, l)} + \sum_{(ij, kl)} \Psi^{(ij, kl)}, \tag{15}$$

определяемых выражениями

$$\left. \begin{aligned} \Psi^{(ijk, l)} &\equiv \mathcal{G}_0(\mathcal{Z}) \mathcal{T}_{ij}(\mathcal{Z}) \mathcal{G}_0(\mathcal{Z}) (V_{jk} + V_{ki}) \Psi; \\ \Psi^{(ij, kl)} &\equiv \mathcal{G}_0(\mathcal{Z}) \mathcal{T}_{ij}(\mathcal{Z}) \mathcal{G}_0(\mathcal{Z}) V_{kl} \Psi \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

и удовлетворяющих следующей системе интегральных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Psi^{(ijk, l)} &= \Psi_0^{(ijk, l)} + \mathcal{G}_0(\mathcal{Z}) \mathcal{M}_{ij, ij}(\mathcal{Z}) [\Psi^{(kjl, i)} + \Psi^{(ihl, j)} + \\ &+ \Psi^{(jk, il)} + \Psi^{(ki, jl)}] + \mathcal{G}_0(\mathcal{Z}) \mathcal{M}_{ij, jk}(\mathcal{Z}) [\Psi^{(ihl, j)} + \\ &+ \Psi^{(jil, k)} + \Psi^{(ij, kl)} + \Psi^{(ki, jl)}] + \mathcal{G}_0(\mathcal{Z}) \mathcal{M}_{ij, ki}(\mathcal{Z}) [\Psi^{(jil, k)} + \\ &+ \Psi^{(kjl, i)} + \Psi^{(ij, kl)} + \Psi^{(jk, il)}]; \\ \Psi^{(ij, kl)} &= \Psi_0^{(ij, kl)} + \mathcal{G}_0(\mathcal{Z}) \mathcal{N}_{ij, ij}(\mathcal{Z}) [\Psi^{(lkj, i)} + \Psi^{(hli, j)}] + \\ &+ \mathcal{G}_0(\mathcal{Z}) \mathcal{N}_{ij, kl}(\mathcal{Z}) [\Psi^{(jil, k)} + \Psi^{(ijk, l)}]. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Свободные члены в уравнениях (17) определяются начальными асимптотическими условиями. При рассеянии частицы 4 на системе трех частиц 1,2,3 в связанном состоянии

$$\Psi_0^{(ijk, l)} = \Psi_{123}^{(ij)} \Phi_{123, 4} [\delta_{ijk, 123} + \delta_{ijk, 231} + \delta_{ijk, 312}]; \quad \Psi_0^{(ij, kl)} = 0,$$

где $\Psi_{123}^{(ij)}$ — фаддеевская компонента волновой функции трех частиц (1, 2, 3) в связанном состоянии; $\Phi_{123, 4}$ — волновая функция свободного движения частицы 4 относительно центра масс связанной системы из трех частиц. При рассеянии одной пары связанных частиц (1,2) на другой (3,4)

$$\begin{aligned} \Psi_0^{(ijk, l)} &= 0; \quad \Psi_0^{(ij, kl)} = \\ &= \mathcal{G}_0(\mathcal{Z}) V_{ij} \Psi_{12} \Psi_{34} \Phi_{12, 34} (\delta_{ijkl, 1234} + \delta_{ijkl, 3412}), \end{aligned}$$

где Ψ_{12} и Ψ_{34} — волновые функции пар связанных частиц; $\Phi_{12, 34}$ — волновая функция свободного движения центра масс одной пары частиц (1, 2) относительно центра масс другой пары (3, 4). Связанные состояния всех четырех частиц описываются однородной системой уравнений, соответствующей (17).

Число уравнений системы (17) определяется числом различных компонент волновой функции. Последнее совпадает с числом различных схем Якоби связывания частиц в систему (см. рис. 2). Как уже отмечалось, в случае различных бесспиновых частиц таких схем 18.

Число компонент и, следовательно, число уравнений уменьшается при наличии тождественных частиц. Это число равно: *семи*, если система состоит из двух частиц одного вида и двух частиц другого (рис. 4, а); *пяти*, если одинаковы три частицы из четырех (рис. 4, б); *двум*, если одинаковы все четыре частицы (рис. 4, в). Число компонент, однако, увеличивается, если частицы обладают спином.

В явном виде интегральные уравнения типа ФЯ для системы четырех частиц двух видов сформулированы в [101] (три частицы из четырех одинаковы) и в [102] (две частицы одного вида и две другого). Система из четырех частиц, три из которых тождественны, может быть рассмотрена в качестве модели при изуче-

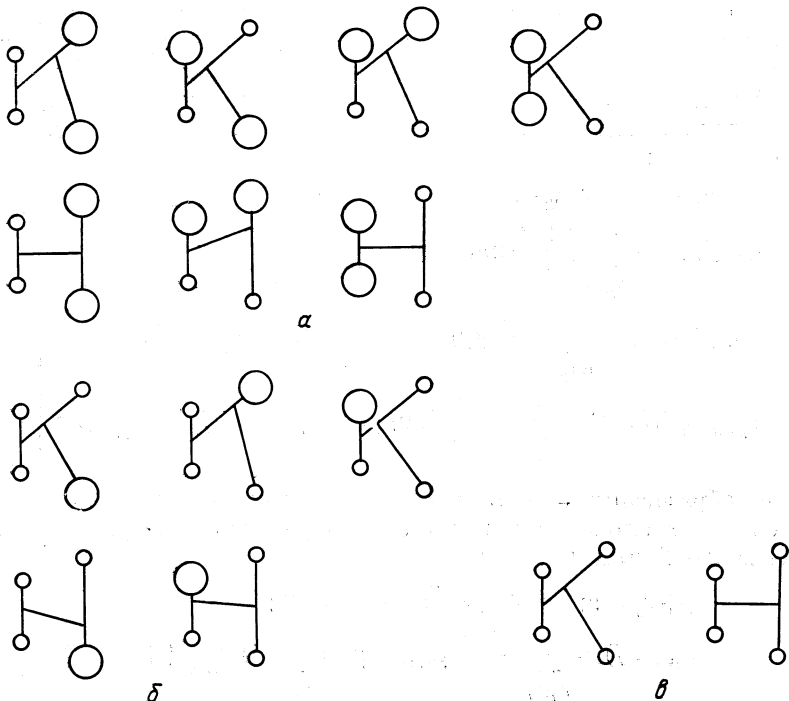


Рис. 4. Возможные схемы Якоби связывания частиц в систему при наличии тождественных частиц (частицы бесспиновые):

a — две частицы одного вида и две другого; *б* — три частицы из четырех одинаковы; *в* — все четыре частицы одинаковы

нии прямых ядерных реакций с перераспределением частиц: срыва A (${}^3\text{H}$, d) B , двойного срыва A (${}^3\text{H}$, p) C , захвата A (${}^2\text{H}$, ${}^3\text{H}$) F и т. п.

Альтернативные наборы спин-изоспиновых волновых функций четырех нуклонов. Рассмотрим систему четырех нуклонов. Предположим, что NN -взаимодействие является зарядово-независимым и характеризуется потенциалом обменного типа

$$V_{ij} = \sum_{\nu} V^{\nu}(ij) P^{\nu}(ij), \tag{18}$$

где P^{ν} — оператор проектирования в ν -спин-изоспиновое состояние ($\nu \equiv \{s, t\}$; s и t — значения суммарных спина и изоспина

пары нуклонов). Компоненты взаимодействия $V^\nu (ij)$ действуют только на пространственные части волновой функции Ψ и являются центральными.

Спиновые волновые функции четырех нуклонов построим путем обычного векторного сложения спиновых функций отдельных нуклонов. При этом возможны две альтернативные схемы сложения спиновых состояний частиц, отвечающие двум возможным схемам Якоби связывания частиц в систему (см. рис. 2):

а) последовательное образование спиновых волновых функций двух, трех и, наконец, четырех нуклонов [схема сложения $3 + 1$ или (ijk, l)]:

$$\left. \begin{aligned} s_i + s_j = s; \quad s + s_k = S; \quad S + s_l = \mathcal{S}; \\ x_{s\mu}(i, j) = \sum_{\mu_i \mu_j} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \mu_i \mu_j \mid s\mu \right) x_{\frac{1}{2}\mu_i}(i) x_{\frac{1}{2}\mu_j}(j); \\ x_{sSM}(ij, k) = \sum_{\mu\mu_k} \left(s \frac{1}{2} \mu\mu_k \mid SM \right) x_{s\mu}(i, j) x_{\frac{1}{2}\mu_k}(k); \\ x_{sS\mathcal{M}}(ijk, l) = \sum_{M\mu_l} \left(S \frac{1}{2} M\mu_l \mid \mathcal{S}\mathcal{M} \right) x_{sSM}(ij, k) x_{\frac{1}{2}\mu_l}(l); \end{aligned} \right\} (19)$$

б) образование спиновых функций двух пар частиц с последующим их сложением в спиновую функцию четырех нуклонов [схема $2 + 2$ или (ij, kl)]:

$$\left. \begin{aligned} s_i + s_j = s; \quad s_k + s_l = \bar{s}; \quad s + \bar{s} = \mathcal{S}; \\ x_{s\mu}(i, j) = \sum_{\mu_i \mu_j} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \mu_i \mu_j \mid s\mu \right) x_{\frac{1}{2}\mu_i}(i) x_{\frac{1}{2}\mu_j}(j); \\ x_{\bar{s}\bar{\mu}}(k, l) = \sum_{\mu_k \mu_l} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \mu_k \mu_l \mid \bar{s}\bar{\mu} \right) x_{\frac{1}{2}\mu_k}(k) x_{\frac{1}{2}\mu_l}(l); \\ x_{s\bar{s}\mathcal{M}}(ij, kl) = \sum_{\mu\bar{\mu}} \left(s\bar{s}\mu\bar{\mu} \mid \mathcal{S}\mathcal{M} \right) x_{s\mu}(i, j) x_{\bar{s}\bar{\mu}}(k, l). \end{aligned} \right\} (20)$$

Здесь s_i и μ_i — спин и проекция спина i -го нуклона; s и μ (\bar{s} и $\bar{\mu}$) — суммарный спин и проекция пары нуклонов i и j (k и l); S и M — суммарный спин и проекция трех нуклонов i, j, k ; \mathcal{S} и \mathcal{M} — суммарный спин и проекция четырех нуклонов. Коэффициенты векторного сложения определены так же, как и в [103]. Явный вид спиновых функций четырех нуклонов, отвечающий указанным схемам сложения, приведен, например, в препринте [81].

Спиновые функции четырех нуклонов, построенные по схеме сложения $3 + 1$, при перестановках частиц преобразуются по неприводимым представлениям Юнга — Яманучи группы пере-

становок S_4 [104] — одномерному $D^{[4]}$ ($\mathcal{S} = 2$), трехмерному $D^{[3, 1]}$ ($\mathcal{S} = 1$) и двумерному $D^{[2, 2]}$ ($\mathcal{S} = 0$). Из спиновых функций четырех нуклонов, построенных по другой схеме сложения $2 + 2$, функции, отвечающие значениям суммарного спина $\mathcal{S} = 2$ и $\mathcal{S} = 0$, совпадают с соответствующими функциями схемы $3 + 1$, а функции с суммарным спином $\mathcal{S} = 1$ выражаются в виде линейных комбинаций функций с $\mathcal{S} = 1$ схемы $3 + 1$ и при перестановках частиц преобразуются по некоторому неприводимому представлению D^H , эквивалентному представлению Юнга — Ямачуи $D^{[3, 1]}$. Матрицы взаимно эквивалентных неприводимых представлений $D^{[3, 1]}$ и D^H связаны между собой подобным преобразованием (см., например, препринт [81]).

Аналогичным образом построим изоспиновые волновые функции четырех нуклонов $\zeta_{iT\mathcal{T}M\mathcal{J}}(ijk, l)$ и $\zeta_{i\bar{i}\mathcal{T}M\mathcal{J}}(ij, kl)$, соответствующие альтернативным схемам сложения $3 + 1$ и $2 + 2$.

Спин-изоспиновые волновые функции четырех нуклонов получим перемножением спиновых и изоспиновых функций. Соответственно двум схемам сложения, применяемым при построении спиновых и изоспиновых функций (19) и (20), спин-изоспиновые функции имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \xi_{stST\mathcal{J}\mathcal{T}M\mathcal{J}M\mathcal{J}}(ijk, l) &= x_{sS\mathcal{J}M\mathcal{J}}(ijk, l) \zeta_{iT\mathcal{T}M\mathcal{J}}(ijk, l); \\ \xi_{st\bar{s}\bar{i}\mathcal{J}\mathcal{T}M\mathcal{J}M\mathcal{J}}(ij, kl) &= x_{s\bar{s}\mathcal{J}M\mathcal{J}}(ij, kl) \zeta_{i\bar{i}\mathcal{T}M\mathcal{J}}(ij, kl); \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где t и T — значения суммарных изоспинов двух и трех нуклонов; \mathcal{T} , $M\mathcal{J}$ — суммарные изоспин и его проекция системы четырех нуклонов.

Спин-изоспиновые функции (21) обладают определенной четностью по отношению к перестановке частиц пары с фиксированными значениями спина и изоспина:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{stST\mathcal{J}\mathcal{T}M\mathcal{J}M\mathcal{J}}(jik, l) &= (-1)^{s+t} \xi_{stST\mathcal{J}\mathcal{T}M\mathcal{J}M\mathcal{J}}(ijk, l); \\ \xi_{st\bar{s}\bar{i}\mathcal{J}\mathcal{T}M\mathcal{J}M\mathcal{J}}(ji, kl) &= (-1)^{s+t} \xi_{st\bar{s}\bar{i}\mathcal{J}\mathcal{T}M\mathcal{J}M\mathcal{J}}(ij, kl); \\ \xi_{st\bar{s}\bar{i}\mathcal{J}\mathcal{T}M\mathcal{J}M\mathcal{J}}(ij, lk) &= (-1)^{\bar{s}+\bar{i}} \xi_{st\bar{s}\bar{i}\mathcal{J}\mathcal{T}M\mathcal{J}M\mathcal{J}}(ij, kl). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Несмотря на то что спин-изоспиновые волновые функции (21) в объединенном пространстве обычного и изотопического спинов не являются базисными функциями неприводимых представлений группы перестановок S_4 , их применение позволяет сформулировать интегральные уравнения для четырех нуклонов в наиболее простом виде.

Ниже будем применять сокращенное обозначение спин-изоспиновых состояний подсистем из трех нуклонов и двух незави-

симых пар нуклонов, указывая соответственно $\nu \equiv \{s, t\}$, $\mu \equiv \{S, T\}$ и $\bar{\nu} \equiv \{\bar{s}, \bar{t}\}$. Заметим, что при заданном значении μ допустимыми значениями ν являются:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \mu = \{1/2, 1/2\} \quad \nu &= (0, 0); (0, 1); (1, 0); (1, 1); \\ \text{при } \mu = \{1/2, 3/2\} \quad \nu &= (0, 1); (1, 1); \\ \text{при } \mu = \{3/2, 1/2\} \quad \nu &= (1, 0); (1, 1); \\ \text{при } \mu = \{3/2, 3/2\} \quad \nu &= (1, 1). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Интегральные уравнения для четырех нуклонов. Для нуклонов компоненты волновой функции в (15) $\Psi^{(ijk, l)}$ и $\Psi^{(ij, kl)}$ являются функциями пространственных, спиновых и изоспиновых переменных частиц. Из определений (16) нетрудно видеть, что наиболее простой вид компоненты $\Psi^{(ijk, l)}$ и $\Psi^{(ij, kl)}$ принимают в том случае, если представить каждую из них в виде разложения по спин-изоспиновым функциям (21), отвечающим собственной схеме сложения, $\xi_{\nu\mu} \mathcal{P} \mathcal{T} \mathcal{M} \mathcal{S} \mathcal{M} \mathcal{T} (ijk, l)$ и $\xi_{\nu\bar{\nu}} \mathcal{P} \mathcal{T} \mathcal{M} \mathcal{S} \mathcal{M} \mathcal{T} (ij, kl)$, а в качестве пространственных переменных выбрать собственный набор импульсов Якоби:

$$\left. \begin{aligned} (ijk, l): \quad \mathbf{k}_{ij} &= \frac{1}{2} (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j); \quad \mathbf{p}_{ij, k} = \frac{1}{3} (\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j) - \frac{2}{3} \mathbf{k}_k; \\ \mathbf{q}_{ijk, l} &= \frac{1}{4} (\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_k) - \frac{3}{4} \mathbf{k}_l; \\ (ij, kl): \quad \mathbf{k}_{ij} &= \frac{1}{2} (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j), \quad \mathbf{k}_{kl} = \frac{1}{2} (\mathbf{k}_k - \mathbf{k}_l); \\ \mathbf{u}_{ij, kl} &= \frac{1}{2} (\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j - \mathbf{k}_k - \mathbf{k}_l). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Соответствующие разложения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{\mathcal{P} \mathcal{T} \mathcal{M} \mathcal{S} \mathcal{M} \mathcal{T}}^{(ijk, l)} (ijk, l) &= \\ &= \sum_{\nu\mu} \psi_{\nu\mu} (\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{p}_{ij, k}, \mathbf{q}_{ijk, l}) \xi_{\nu\mu} \mathcal{P} \mathcal{T} \mathcal{M} \mathcal{S} \mathcal{M} \mathcal{T} (ijk, l); \\ \Psi_{\mathcal{P} \mathcal{T} \mathcal{M} \mathcal{S} \mathcal{M} \mathcal{T}}^{(ij, kl)} (ij, kl) &= \\ &= \sum_{\nu\bar{\nu}} \chi_{\nu\bar{\nu}} (\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}_{kl}, \mathbf{u}_{ij, kl}) \xi_{\nu\bar{\nu}} \mathcal{P} \mathcal{T} \mathcal{M} \mathcal{S} \mathcal{M} \mathcal{T} (ij, kl). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Коэффициенты разложения (25) $\psi_{\nu\mu}$ и $\chi_{\nu\bar{\nu}}$ являются функциями только пространственных переменных. Вследствие тождественности всех частиц системы (нуклонов) эти функции одинаковы для всех компонент полной волновой функции $\Psi_{\mathcal{P} \mathcal{T} \mathcal{M} \mathcal{S} \mathcal{M} \mathcal{T}}^{(ijk, l)} (ijk, l)$ и $\Psi_{\mathcal{P} \mathcal{T} \mathcal{M} \mathcal{S} \mathcal{M} \mathcal{T}}^{(ij, kl)} (ij, kl)$ в собственных системах переменных.

Из антисимметричности полной волновой функции системы и свойств спин-изоспиновых функций по отношению к перестановке частиц (22) следуют простые свойства четности для пространственных компонент *:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{\nu\mu}(-\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) &= (-1)^{\nu+1} \Psi_{\nu\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}); \\ \chi_{\nu\bar{\nu}}(-\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{u}) &= (-1)^{\nu+1} \chi_{\nu\bar{\nu}}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{u}); \\ \chi_{\nu\bar{\nu}}(\mathbf{k}, -\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{u}) &= (-1)^{\nu+1} \chi_{\nu\bar{\nu}}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{u}). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Для NN -потенциалов обменного типа (18) операторы $\mathcal{M}_{\alpha, \beta}$ и $\mathcal{N}_{\alpha, \beta}$ в (17) имеют простую спин-изоспиновую структуру:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha, \beta} &= \sum_{\nu\nu'\mu} \mathcal{M}_{\alpha, \beta}^{\nu\mu\nu'} P_{\alpha, \beta}^{\nu\mu\nu'}(ijk), \quad \alpha, \beta = ij, jk, ki; \\ \mathcal{N}_{\alpha, \beta} &= \sum_{\nu\bar{\nu}} \mathcal{N}_{\alpha, \beta}^{\nu\bar{\nu}} P^{\nu}(\alpha) P^{\bar{\nu}}(\bar{\alpha}), \quad \alpha, \beta = ij, kl, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где спин-изоспиновые операторы проектирования $P^{\nu\mu\nu'}$ (ijk) определены следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{\alpha, \beta}^{\nu\mu\nu'}(ijk) &\equiv P_{\alpha, \beta}^{s_s s_s'}(ijk) P_{\alpha, \beta}^{t t'}(ijk); \\ P_{ij, ij}^{s_s s_s'}(ijk) &= \sum_M |(s_i s_j) s s_R S M\rangle \langle (s_i s_j) s' s_R S M |; \\ P_{ij, jk}^{s_s s_s'}(ijk) &= \sum_M |(s_i s_j) s s_R S M\rangle \langle (s_j s_R) s' s_i S M |. \end{aligned}$$

Индекс $\bar{\alpha}$ в (27) означает номера частиц, не включенных в пару α (если $\alpha = ij$, то $\bar{\alpha} = kl$), $\langle ij k | (s_i s_j) s s_R S M\rangle \equiv x_{s S M}(ij, k)$. Коэффициенты разложений $\mathcal{M}_{\alpha, \beta}^{\nu\mu\nu'}$ и $\mathcal{N}_{\alpha, \beta}^{\nu\bar{\nu}}$ представляют собой операторы, действующие на пространственные функции. Они определяются уравнениями, следующими после проектирования (13), (14) с учетом (27) на спин-изоспиновые состояния (21).

Применяя разложения компонент полной волновой функции (25) и используя выражения для компонент операторов перехода для подсистем (27), спроектируем уравнения (17) на спин-изоспиновые состояния $\xi_{\nu\mu} \mathcal{J} \mathcal{M} \mathcal{J} (ijk, l)$ и $\xi_{\nu\bar{\nu}} \mathcal{J} \mathcal{M} \mathcal{J} (ij, kl)$. Для коэффициентов разложений (25) — чисто пространственных функций $\Psi_{\nu\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ и $\chi_{\nu\bar{\nu}}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{u})$ получим следующую систему

* Здесь и ниже применяется сокращенное обозначение

$$(-1)^{\nu} \equiv (-1)^{s+t}, \quad (-1)^{\mu} \equiv (-1)^{S+T}.$$

интегральных уравнений [81]:

$$\begin{aligned}
 \psi_{\nu\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = & \psi_{\nu\mu}^0(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) + \left(\mathfrak{Z} - \frac{k^2}{m} - \frac{3}{4} \frac{p^2}{m} - \frac{2}{3} \frac{q^2}{m} \right)^{-1} \times \\
 & \times \left\{ \sum_{\nu'\nu''\mu'} G^{\mathcal{S}\mathcal{T}}(\nu''\mu, \nu'\mu') \int \frac{d\mathbf{k}' d\mathbf{q}'}{(2\pi)^6} M^{\nu\mu\nu''}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \frac{1}{2}\mathbf{k}' + \frac{3}{4}\mathbf{q}'_1; \right. \\
 & \left. \mathbf{k}' - \frac{1}{2}\mathbf{q}'_1; \mathfrak{Z} - \frac{2}{3} \frac{q^2}{m}) \psi_{\nu'\mu'}(\mathbf{k}', \mathbf{q} + \frac{1}{3}\mathbf{q}', \mathbf{q}') + \right. \\
 & \left. + \sum_{\nu'\nu''\bar{\nu}'} H^{\mathcal{S}\mathcal{T}}(\nu''\mu, \nu'\bar{\nu}') \int \frac{d\mathbf{k}' d\mathbf{u}'}{(2\pi)^6} M^{\nu\mu\nu''}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \frac{1}{2}\mathbf{k}' + \frac{3}{4}\mathbf{u}'_1; \right. \\
 & \left. \mathbf{k}' - \frac{1}{2}\mathbf{u}'_1; \mathfrak{Z} - \frac{2}{3} \frac{q^2}{m}) \chi_{\nu'\bar{\nu}'}(\mathbf{k}', \mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{u}', \mathbf{u}') \right\}; \\
 \chi_{\nu\bar{\nu}}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{u}) = & \chi_{\nu\bar{\nu}}^0(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{u}) + \\
 & + (-1)^{\mathcal{S}+\mathcal{T}+\nu+\bar{\nu}} \frac{1}{2} \left(\mathfrak{Z} - \frac{k^2}{m} - \frac{\boldsymbol{\kappa}^2}{m} - \frac{u^2}{2m} \right)^{-1} \times \\
 & \times \sum_{\mu'} \int \frac{d\mathbf{k}' d\mathbf{q}'}{(2\pi)^6} \left[\Omega^{\mathcal{S}\mathcal{T}}(\bar{\nu}\nu, \bar{\nu}\mu') N^{(1)\nu\bar{\nu}} \times \right. \\
 & \times (\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}; \frac{1}{2}\mathbf{u} + \mathbf{q}', \mathbf{k}'; \mathfrak{Z} - \frac{u^2}{2m}) \psi_{\bar{\nu}\mu'}(\mathbf{k}', -\mathbf{u} - \frac{2}{3}\mathbf{q}', \mathbf{q}') + \\
 & \left. + (-1)^{\mathcal{S}+\mathcal{T}+\nu+1} \Omega^{\mathcal{S}\mathcal{T}}(\nu\bar{\nu}, \nu\mu') N^{(2)\nu\bar{\nu}}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}; \frac{1}{2}\mathbf{u} - \mathbf{q}', \mathbf{k}'; \right. \\
 & \left. \mathfrak{Z} - \frac{u^2}{2m}) \psi_{\nu\mu'}(\mathbf{k}', \mathbf{u} - \frac{2}{3}\mathbf{q}', \mathbf{q}') \right],
 \end{aligned} \tag{28}$$

где $\mathbf{q}'_1 \equiv \mathbf{q}' + \mathbf{q}/3$; $\mathbf{u}'_1 \equiv \mathbf{u}' - 2\mathbf{q}/3$; m — масса нуклона; G , H и Ω — коэффициенты пересвязывания спин-изоспиновых функций четырех нуклонов:

$$\begin{aligned}
 G^{\mathcal{S}\mathcal{T}}(\nu\mu, \nu'\mu') &= c^\mu(\nu, \nu') \Lambda^{\mathcal{S}\mathcal{T}}(\nu'\mu, \nu'\mu'); \\
 H^{\mathcal{S}\mathcal{T}}(\nu\mu, \nu'\bar{\nu}') &= c^\mu(\nu, \nu') \Omega^{\mathcal{S}\mathcal{T}}(\nu'\mu, \nu'\bar{\nu}'); \\
 c^\mu(\nu, \nu') &= -\hat{s}\hat{t}\hat{s}'\hat{t}' W\left(\frac{1}{2}ss', \frac{1}{2}; \frac{1}{2}S\right) W\left(\frac{1}{2}tt', \frac{1}{2}; \frac{1}{2}T\right); \\
 \Lambda^{\mathcal{S}\mathcal{T}}(\nu\mu, \nu\mu') &= \\
 &= -\hat{S}\hat{T}\hat{S}'\hat{T}' W\left(\frac{1}{2}SS', \frac{1}{2}; s\mathcal{S}\right) W\left(\frac{1}{2}TT', \frac{1}{2}; t\mathcal{T}\right); \\
 \Omega^{\mathcal{S}\mathcal{T}}(\nu\bar{\nu}, \nu\mu) &= \Omega^{\mathcal{S}\mathcal{T}}(\nu\mu, \nu\bar{\nu}) = (-1)^{\bar{\nu}+\mu+\mathcal{S}+\mathcal{T}+1} \hat{s}\hat{t}\hat{S}\hat{T} \times \\
 &\times W\left(sS\bar{s}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\mathcal{S}\right) W\left(tT\bar{t}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\mathcal{T}\right), \quad \hat{s} \equiv (2s+1)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Коэффициенты Рака W в (29) определены в соответствии с [103]. Содержащиеся в ядрах уравнений (28) компоненты $M^{\nu\mu\nu'}$ и $N^{(i)\nu\bar{\nu}}$ описывают рассеяние в подсистемах $3 + 1$ и $2 + 2$. Они выражаются через матричные элементы пространственных операторов $\mathcal{M}_{\alpha, \beta}^{\nu\mu\nu'}$ и $\mathcal{N}_{\alpha, \beta}^{\nu\bar{\nu}}$ в (27) и, в свою очередь, определяются интегральными уравнениями типа Фаддеева:

$$\left. \begin{aligned}
 & M^{\nu\mu\nu'}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathbf{k}', \mathbf{p}'; Z) = \\
 & = (2\pi)^3 t^\nu(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; Z - \frac{3}{4} \frac{p^2}{m}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\nu\nu'} + \\
 & + \sum_{\nu''} c^\mu(\nu, \nu'') \int \frac{d\mathbf{p}''}{(2\pi)^3} t^\nu(\mathbf{k}, \frac{1}{2} \mathbf{p} + \mathbf{p}''; Z - \frac{3}{4} \frac{p^2}{m}) \times \\
 & \times [Z - (p^2 + \mathbf{p}\mathbf{p}'' + p''^2)/m]^{-1} M^{\nu''\mu\nu'}(\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{p}'', \mathbf{p}''; \mathbf{k}', \mathbf{p}'; Z);
 \end{aligned} \right\} (30)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & N^{(1)\nu\bar{\nu}}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}; \mathbf{k}', \boldsymbol{\kappa}'; Z) = (2\pi)^3 t^\nu(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; Z - \frac{\boldsymbol{\kappa}^2}{m}) \times \\
 & \times [\delta(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}') + (-1)^{\nu+1} \delta(\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\kappa}')] + \\
 & + \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k}''}{(2\pi)^3} t^\nu(\mathbf{k}, \mathbf{k}''; Z - \frac{\boldsymbol{\kappa}^2}{m}) \times \\
 & \times (Z - \frac{\boldsymbol{\kappa}^2}{m} - \frac{k''^2}{m})^{-1} N^{(2)\bar{\nu}\nu}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{k}''; \mathbf{k}', \boldsymbol{\kappa}'; Z); \\
 & N^{(2)\bar{\nu}\nu}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}; \mathbf{k}', \boldsymbol{\kappa}'; Z) = \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k}''}{(2\pi)^3} t^{\bar{\nu}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}''; Z - \frac{\boldsymbol{\kappa}^2}{m}) \times \\
 & \times (Z - \frac{\boldsymbol{\kappa}^2}{m} - \frac{k''^2}{m})^{-1} N^{(1)\nu\bar{\nu}}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{k}''; \mathbf{k}', \boldsymbol{\kappa}'; Z),
 \end{aligned} \right\} (31)$$

где $t^\nu(\mathbf{k}, \mathbf{k}', z)$ — симметризованная или антисимметризованная (в зависимости от ν) двухнуклонная t -матрица

$$t^\nu(z) = V^\nu + V^\nu g_0(z) t^\nu(z);$$

$$t^\nu(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; z) \equiv \langle \mathbf{k} | t^\nu(z) | \mathbf{k}' \rangle + (-1)^{\nu+1} \langle \mathbf{k} | t^\nu(z) | -\mathbf{k}' \rangle;$$

$g_0(z)$ — двухчастичная свободная функция Грина.

Система уравнений (28) описывает всевозможные процессы в системе четырех нуклонов, обусловленные столкновением двух ядерных частиц ($N + {}^3\text{H}$, $N + {}^3\text{He}$ или $d + d$) с образованием в конечном состоянии двух, трех или четырех частиц. При этом свободные члены в уравнениях системы (28) принимают различный вид в зависимости от начального асимптотического условия задачи.

В задаче о рассеянии нуклона на трехнуклонной связанной системе—тритоне с относительным импульсом q_0

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{\nu\mu}^0(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}^0) \psi_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \delta_{\mu, \{1/2 \ 1/2\}}; \\ \chi_{\nu\bar{\nu}}^0(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{u}) &= 0; \quad \mathcal{Z} = \frac{2}{3} \frac{q^{0^2}}{m} - B + i0, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

где ψ_ν —пространственные фаддеевские компоненты волновой функции тритона ($\mu = 1/2, 1/2$; B —энергия связи тритона), удовлетворяющие однородной системе интегральных уравнений [105]:

$$\begin{aligned} \psi_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{p}) &= - \left(B + \frac{k^2}{m} + \frac{3}{4} \frac{p^2}{m} \right)^{-1} \sum_{\nu'} c^{\{1/2, 1/2\}}(\nu, \nu') \times \\ &\times \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} t^\nu \left(\mathbf{k}, \frac{1}{2} \mathbf{p} + \mathbf{p}'; -B - \frac{3}{4} \frac{p^2}{m} \right) \psi_{\nu'} \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{p}'}{2}, \mathbf{p}' \right). \end{aligned}$$

В задаче о рассеянии дейтона на дейтоне с начальным относительным импульсом u^0 имеем

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{\nu\mu}^0(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) &= 0; \quad \mathcal{Z} = u^{0^2}/2m - 2b + i0; \\ \chi_{\nu\bar{\nu}}^0(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{u}) &= (2\pi)^3 (k^2/m + b) (k^2/m + \boldsymbol{\kappa}^2/m + 2b)^{-1} \times \\ &\times \Psi^{10}(\mathbf{k}) \Psi^{10}(\boldsymbol{\kappa}) [\delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}^0) + (-1)^{\mathcal{G}} \delta(\mathbf{u} + \mathbf{u}^0)] \delta_{\nu, \{10\}} \delta_{\bar{\nu}, \{10\}}, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Число уравнений системы

$\mathcal{F}\mathcal{T}$	00	01	10
Спин-изоспиновые состояния подсистемы из трех нуклонов: ν, μ	00, 1/2 1/2 01, 1/2 1/2 10, 1/2 1/2 11, 1/2 1/2	00, 1/2 1/2 01, 1/2 1/2 10, 1/2 1/2 11, 1/2 1/2 01, 1/2 3/2 11, 1/2 3/2	00, 1/2 1/2 01, 1/2 1/2 10, 1/2 1/2 11, 1/2 1/2 10, 3/2 1/2 11, 3/2 1/2
Спин-изоспиновые состояния подсистемы из двух независимых пар нуклонов: $\nu, \bar{\nu}$	00, 00 01, 01 10, 10 11, 11	00, 01 01, 00 01, 01 10, 11 11, 10 11, 11	00, 10 01, 11 10, 00 10, 10 11, 01 11, 11
Число уравнений системы (28)	8	12	12

где Ψ^{10} и b — волновая функция и энергия связи дейтона.

Однородная система уравнений, соответствующая (28) (с $\psi_{\nu\mu}^0 = = \chi_{\nu\nu}^0 = 0$), описывает связанные состояния четырех нуклонов.

Число уравнений системы (28) различно в зависимости от суммарного спина и суммарного изотопического спина четырех нуклонов \mathcal{S} и \mathcal{T} (табл. 1). Если пренебречь NN -взаимодействием в нечетных орбитальных состояниях число уравнений системы (28) уменьшится до четырех ($\mathcal{S}\mathcal{T} = 00, 01, 10$), шести ($\mathcal{S}\mathcal{T} = 11$), двух ($\mathcal{S}\mathcal{T} = 02, 20$) или одного ($\mathcal{S}\mathcal{T} = 12, 21$).

Методы решения. Вследствие большого числа переменных, характеризующих систему четырех нуклонов, уравнения (28) являются очень сложными — после отделения угловых переменных они представляют собой бесконечную систему связанных *трехмерных* интегральных уравнений [79]. Эту систему, однако, можно обрезать, ограничиваясь учетом парного взаимодействия и взаимодействия частицы с центром масс пары лишь в конечном числе орбитальных состояний.

Решение интегральных уравнений для четырех частиц можно провести, применяя метод последовательной сепарабельной аппроксимации интегральных ядер. Сначала необходимо аппроксимировать сепарабельным выражением двухчастичную амплитуду рассеяния (это не требуется, если парное взаимодействие сепара-

Таблица 1

типа ФЯ для четырех нуклонов

11	02	20	12	21	22
00, 1/2 1/2 01, 1/2 1/2 10, 1/2 1/2 11, 1/2 1/2 01, 1/2 3/2 11, 1/2 3/2 10, 3/2 1/2 11, 3/2 1/2 11, 3/2 3/2	01, 1/2 3/2 11, 1/2 3/2	10, 3/2 1/2 11, 3/2 1/2	01, 1/2 3/2 11, 1/2 3/2 11, 3/2 3/2	10, 3/2 1/2 11, 3/2 1/2 11, 3/2 3/2	11, 3/2 3/2
00, 11 01, 10 01, 11 10, 01 10, 11 11, 00 11, 01 11, 10 11, 11	01, 01 11, 11	10, 10 11, 11	01, 11 11, 01 11, 11	10, 11 11, 10 11, 11	11, 11
18	4	4	6	6	2

бельно). Сепарабельный вид двухчастичной амплитуды позволяет отделить явно зависимость компонент амплитуд рассеяния в подсистемах $3 + 1$ и $2 + 2$ от переменных k и k' . Системы уравнений (30) и (31), определяющие ядра основной системы (28), при этом приводятся к системам одномерных интегральных уравнений, а сами уравнения системы (28) становятся двумерными [71, 83—85].

Дальнейшего упрощения можно достигнуть, применяя последующую сепарабельную аппроксимацию компонент амплитуд подсистем $3 + 1$ и $2 + 2$ по переменным p, p' и x, x' . При этом интегральные уравнения системы (28) приводятся к одномерным. До недавнего времени использовались два способа сепарабельной аппроксимации амплитуд подсистем $3 + 1$ и $2 + 2$: метод Бейтмана [106, 107] и метод Гильберта — Шмидта [108, 109]. Оба способа применялись ранее для сепарабельной аппроксимации двухчастичной амплитуды рассеяния при решении задачи трех тел [110—113, 10, 11]. Факторизация методом Бейтмана двухчастичной амплитуды была предложена Беляевым и др. [11, 113]. Бейтмановская аппроксимация трехчастичного интегрального ядра, предпринятая впервые в [114], позволила получить решение задачи трех частиц в простом алгебраическом виде [114, 115]. При использовании метода Бейтмана существенным является вопрос о способе выбора узловых точек. В [113] узловые точки находились из условия минимальности интеграла от квадрата разности точного и аппроксимируемого потенциалов. В [114] использовалась каноническая форма бейтмановского представления интегрального ядра, а выбор узловых точек проводился таким образом, чтобы каждый член разложения был максимально эффективным, т. е. вносил наибольший вклад в рассчитываемую физическую величину. Собственные функции и собственные значения трехчастичных интегральных ядер рассчитаны в [116]. Решение интегральных уравнений для четырех частиц на основе сепарабельной аппроксимации интегральных ядер для подсистем методом Бейтмана выполнено в [85, 86, 90, 91] и методом Гильберта — Шмидта в [87, 89, 92, 93].

В последнее время реализовано прямое численное решение двумерных интегральных уравнений для четырех частиц (без сепарабельной аппроксимации амплитуд подсистем $3 + 1$ и $2 + 2$) итерационным методом [99] и с помощью метода Паде [100].

■ 2. СИСТЕМА ЧЕТЫРЕХ НУКЛОНОВ В СВЯЗАННОМ СОСТОЯНИИ

Основное и возбужденное 0^+ -состояния четырех нуклонов. В настоящее время имеется сравнительно небольшой опыт решения интегральных уравнений для четырех нуклонов. Выполненные численные решения проведены с упрощенными NN -взаимодейст-

виями, с пренебрежением кулоновским взаимодействием и высшими парциальными компонентами ядерного взаимодействия.

При таком рассмотрении система трех нуклонов образует одно связанное состояние с суммарным орбитальным моментом $L = 0$, спином $S = 1/2$, изотопическим спином $T = 1/2$ и некоторой энергией связи $B(^3\text{H}) = B(^3\text{He})$. Система четырех нуклонов имеет два связанных состояния с суммарными $\mathcal{L} = 0$, $\mathcal{S} = 0$, $\mathcal{T} = 0$ (основное и первое возбужденное 0^+ -состояния ядра ^4He) [86, 85, 87, 90], их энергии находятся ниже пороговой энергии развала системы на нуклон и трехнуклонное ядро*. В случае, например, сепарабельного потенциала

$$\langle \mathbf{k} | V^{\nu} | \mathbf{k}' \rangle = -\lambda_{\nu} g_{\nu}(k) g_{\nu}(k'); \quad g_{\nu}(k) = \frac{1}{(k^2 + \beta^2)^n} \quad (34)$$

рассчитанные значения энергий связи основного и первого возбужденного 0^+ -состояний четырех нуклонов $B(^4\text{He})$ и $B(^4\text{He}^*)$ и энергии связи основного 0^+ -состояния трех нуклонов $B(^3\text{H})$ равны (в мегаэлектронвольтах) [90, 91]:

$$\begin{aligned} B(^4\text{He}) &= 45,18; B(^4\text{He}^*) = 10,88; \\ B(^3\text{H}) &= 10,43 \text{ (юкавский форм-фактор: } n=1); \\ B(^4\text{He}) &= 39,83; B(^4\text{He}^*) = 10,08; \\ B(^3\text{H}) &= 9,82 \text{ (экспоненциальный форм-фактор: } n=2). \end{aligned} \quad (35)$$

Образование двух стабильных связанных 0^+ -состояний ядра ^4He с упрощенными NN -взаимодействиями было обнаружено [86] при решении интегральных уравнений для четырех нуклонов с сепарабельными потенциалами в так называемом бозонном приближении, предполагающем волновую функцию четырех нуклонов полностью симметричной, а форм-факторы триплет-синглетного ($\nu = 10$) и синглет-триплетного ($\nu = 01$) потенциалов одинаковыми: $g_{10}(k) = g_{01}(k)$. Значения энергий связи трех и четырех нуклонов, рассчитанные в таком приближении с сепарабельным потенциалом с юкавским форм-фактором ($n = 1$), например, равны [86]: $B(^4\text{He}) = 52,03 \text{ Мэв}$; $B(^4\text{He}^*) = 12,15 \text{ Мэв}$; $B(^3\text{H}) = 11,70 \text{ Мэв}$. Они хорошо согласуются с результатами решения полной системы уравнений (28). Несмотря на то что основное состояние трехнуклонного ядра ^3H также хорошо описывается в бозонном приближении [105], возбужденное трехчастичное 0^+ -состояние, появляющееся в этом приближении,

* Учет кулоновского взаимодействия между нуклонами приведет к некоторому смещению вверх всех уровней энергии системы и к расщеплению порога $N + 3N$ на два порога $n + ^3\text{He}$ и $n + ^3\text{H}$. Согласно экспериментальным данным, энергетический уровень первого возбужденного 0^+ -состояния находится между энергиями порогов $n + ^3\text{He}$ и $n + ^3\text{H}$ и является квазистационарным.

исчезает при строгом рассмотрении спин-изоспиновой зависимости NN -взаимодействия. Различия в применимости бозонного приближения для возбужденных околопороговых 0^+ -состояний трех- и четырехнуклонных систем, очевидно, можно объяснить, принимая во внимание кластеризованную структуру систем в этих состояниях. Бозонное приближение использует в качестве парного взаимодействия полусумму взаимодействий в триплет-синглетном и синглет-триплетном спин-изоспиновых состояниях. Таким образом, оно неприменимо для описания дейтонного кластера, возникающего в возбужденном 0^+ -состоянии системы трех нуклонов, и в то же время хорошо описывает трехнуклонный кластер ${}^3\text{H}$ или ${}^3\text{He}$ в возбужденном 0^+ -состоянии системы четырех нуклонов.

Значения энергий связи трех- и четырехнуклонных ядер, рассчитанные путем решения интегральных уравнений для трех и четырех нуклонов в бозонном приближении, приведены в табл. 2.

Результаты, полученные при решении строгих систем интегральных уравнений для трех и четырех нуклонов (последовательно учитывающих эффекты спин-изоспиновой зависимости парного взаимодействия), даны в табл. 3. Во все расчетах табл. 3 кулоновское взаимодействие не учитывалось. Данные табл. 3, за исключением результатов последних двух работ, получены с центральными парными потенциалами, параметры которых зафиксированы по данным взаимодействия двух нуклонов в состояниях с $\nu = 10$ и 01 при низких энергиях. Недавно метод интегральных уравнений ФЯ был применен для расчета энергии связи ядра ${}^4\text{He}$ в основном состоянии с более реалистическими NN -взаимодействиями. Гибсон и Леман [117] рассчитали энергию связи ${}^4\text{He}$ в приближении с обрезанием t -матрицы для сепарабельного потенциала, учитывающего тензорное взаимодействие между нуклонами в состоянии с $\nu = 10$. Тйон [97] впервые применил метод интегральных уравнений для расчета энергии связи ${}^4\text{He}$ с реалистическим потенциалом (Рида RSC [118]) с учетом только S -компоненты парного взаимодействия. Соответствующие результаты также приведены в табл. 3.

Отметим, что для образования как основного, так и первого возбужденного 0^+ -состояния существенны оба типа компонент волновой функции, отвечающих схемам Якоби $3 + 1$ и $2 + 2$. При пренебрежении компонентами типа $2 + 2$ рассчитанные значения энергии связи основного состояния ${}^4\text{He}$ уменьшаются более чем на 40%, а возбужденное связанное 0^+ -состояние четырехнуклонной системы не образуется вовсе [83, 87]. Тот факт, что вклады компонент типа $3 + 1$ и типа $2 + 2$ в энергию основного состояния ядра ${}^4\text{He}$ приблизительно одинаковы, хорошо согласуется с приближительным равенством верхних констант виртуальных распадов ядра ${}^4\text{He}$ на нуклон и трехнуклонное ядро и на два дейтона, рассчитанных в [98] путем решения интегральных урав-

Таблица 2

Значения энергий связи основного O^+ -состояния трех нуклонов $B(^3H)$ и основного и возбужденного O^+ -состояний четырех нуклонов $B(^4He)$ и $B(^4He^*)$ (в мегаэлектронвольтах), рассчитанные путем решения интегральных уравнений в бозонном приближении

Авторы	Потенциал, форм-фактор	Метод аппроксимации амплитуд $3+1$ и $2+2$	$B(^4He)$	$B(^4He^*)$	$B(^3H)$
Альт, Грассбергер, Сандхас [88]	Сепарабельный, юкавский	Вариационный,	50	—	10,3
Харченко, Кузьмичев [85, 86]	Сепарабельный, юкавский	Бейтмана	52,03	12,15	11,70
	Локальный в унитарном полюсном приближении, прямоугольная яма	Бейтмана	39,36	—	9,86
Софианос, Фиделдей, Мак-Герк [92]	Сепарабельный, юкавский	Гильберта—Шмидта	41,5	10,3	9,87
	Сепарабельный, суперпозиция юкавских C_1 C_2	Гильберта—Шмидта	38,5 45,0	— —	9,86 10,17
Гибсон, Лёман [99]	Сепарабельный, юкавский	—	54,5	—	12,45

нений типа ФЯ для четырех нуклонов с сепарабельным потенциалом с юкавским форм-фактором: $G_{\alpha TN}^2 = 17,9 \pm 1,7$ ферми и $G_{\alpha dd}^2 = 18,1 \pm 1,3$ ферми. Информация о ядерных вершинных константах для малонуклонных систем обсуждается в обзоре [119] (см. также [120]).

Зависимости энергий связи 3H и 4He от формы и параметров NN -взаимодействия. Полученные результаты для $B(^4He)$, $B(^4He^*)$ и $B(^3H)$ изменяются в широком интервале от значений, превышающих экспериментальные значения для центральных чисто притягивающих потенциалов, до значений, заниженных по сравнению с экспериментальным для потенциалов, учитывающих тензорное взаимодействие, и для реалистического потенциала. Так, например, в случае центрального сепарабельного потенциала

Таблица 3

Значения энергий связи $B(^4\text{He})$, $B(^4\text{He}^*)$ и $B(^3\text{H})$ (в мегаэлектронвольтах), рассчитанные путем решения интегральных уравнений, последовательно учитывающих спин-изоспиновую зависимость NN -взаимодействия (без учета кулоновского взаимодействия)

Авторы	Потенциал, форм-фактор	Метод	$B(^4\text{He})$	$B(^4\text{He}^*)$	$B(^3\text{H})$
Народецкий И. М., Гальперн Е. С., Ляховицкий В. Н. [87]	Сепарабельный, юкавский	Гильберта — Шмидта, од- номерные уравнения	45,73	11,69	11,03
Тйон [89]	Локальный, Малфли—Тйона	То же	29,6	—	8,56
Харченко В. Ф., Левашев В. П. [90, 91]	Сепарабельный, юкавский	Бейтмана, од- номерные уравнения	45,18	10,88	10,43
	Сепарабельный, экспоненциаль- ный	То же	39,83	10,08	9,82
	Сепарабельный ($1 + \beta r$) $\exp(-\beta r)$	То же	38,35	9,86	9,64
Гибсон, Леман [99]	Сепарабельный, юкавский	Итерационный, двумерные уравнения	45,7	—	11,05
Крегер, Сандхас [100]	Сепарабельный, гауссовский	Падé, двумер- ные уравне- ния	33,3	—	8,99
Гибсон, Леман [117]	Сепарабельный тензорный YY [121]	Итерацион- ный, дву- мерные урав- нения			
	V_{10} V_{01}			—	
	GL ($p_D=0$) GL		42,3	—	10,14
	P_4 GL		30,7*	—	8,19*
	P_7 GL		23,8*	—	7,05*
Тйон [97]	RSC [118]	Гильберта — Шмидта, од- номерные уравнения	19,5	—	6,8
Эксперимент	—	—	28,3	8,2	8,48

* Значения, рассчитанные в приближении обрезанной t -матрицы (t_{00} -приближении).

с юкавским форм-фактором рассчитанное значение $B(^4\text{He})$ превышает экспериментальное значение более чем на 15 $Mэв$, а в случае реалистического потенциала с мягкой сердцевинной $B(^4\text{He})$ занижено почти на 10 $Mэв$ *. Наиболее близкими к эксперименталь-

* Поскольку расчеты не учитывают кулоновское взаимодействие между протонами, то результаты необходимо сравнивать с экспериментальными

ным данным оказались значения $B(^4\text{He})$ и $B(^3\text{H})$, рассчитанные для локального потенциала с притяжением и отталкиванием юкавской формы (потенциал Малфли — Тйона) [89].

Существенная зависимость энергий связи основных состояний трех и четырех нуклонов от формы потенциала NN -взаимодействия, очевидно, в первую очередь связана с тем обстоятельством, что применяемые потенциалы приводят к одинаковым фазовым сдвигам NN -рассеяния только в ограниченной области низких энергий (меньше нескольких мегаэлектронвольт) и являются фазово-неэквивалентными при средних и высоких энергиях. Можно ожидать, как это имеет место для трехнуклонной системы, что для более реалистических потенциалов, фазово-эквивалентных в большем интервале энергий, зависимость энергии связи ядра ^4He от формы будет значительно слабее.

Как показано в [92] на примере системы с сепарабельными потенциалами ранга 1 и 2 (в бозонном приближении), энергия связи четырех нуклонов $B(^4\text{He})$ более чувствительна к независимым вариациям волновой функции дейтона на малых расстояниях и сдвигов S -фаз NN -рассеяния при высоких энергиях, чем энергия связи трех нуклонов $B(^3\text{H})$. Так, например, вариация волновой функции дейтона на расстояниях менее 1,3 ферми или вариация сдвигов S -фаз NN -рассеяния при энергиях $E_{\text{лаб}} \gtrsim 50 \text{ Мэв}$ приводят к изменениям энергии связи ядра ^4He на $\Delta B(^4\text{He}) \approx \approx 6,0 \text{ Мэв}$, а энергии связи тритона всего лишь на $\Delta B(^3\text{H}) \approx \approx 0,3 \text{ Мэв}$. В действительности такая оценка может оказаться завышенной ввиду значительного пересвязывания системы в рассматриваемой модели.

Энергии связи основного и возбужденного 0^+ -состояний ^4He (как и энергия связи трехнуклонного ядра [122]) сильно зависят от синглет-триплетного эффективного радиуса r_{01} , уменьшаясь с увеличением r_{01} [91]: при увеличении r_{01} на 0,1 ферми $B(^4\text{He})$ уменьшается на 1,5 Мэв, а $B(^4\text{He}^*)$ и $B(^3\text{H})$ — на 0,3 Мэв.

Пересвязывание ядра ^4He , возникающее в случае центральных чисто притягивающих сил между нуклонами, значительно уменьшается при учете тензорного взаимодействия [117] или короткодействующего отталкивания [89]. Расчеты Гибсона Лемана [117] показали, что увеличение примеси D -волны в волновой функции дейтона p_D на 1% приводит к уменьшению $B(^4\text{He})$ примерно на 2—3 Мэв [$B(^3\text{H})$ уменьшается при этом на 0,3—0,4 Мэв]. Таким

значениями, исправленными на кулоновские энергии [$E_c(^4\text{He}) = 1 \text{ Мэв}$ для ядра ^4He в основном состоянии и $E_c(^4\text{He}^*) \approx E_c(^3\text{He}) = 0,76 \text{ Мэв}$ для ядра ^4He в околороговом возбужденном 0^+ -состоянии]:

$$B'_{\text{экс}}(^4\text{He}) \equiv B_{\text{экс}}(^4\text{He}) + E_c(^4\text{He}) \approx 29,3 \text{ Мэв}$$

$$\text{и } B'_{\text{экс}}(^4\text{He}^*) \equiv B_{\text{экс}}(^4\text{He}^*) + E_c(^4\text{He}^*) = 9 \text{ Мэв.}$$

образом, включение тензорного взаимодействия, описывающего волновую функцию дейтона, приводит к энергии связи ${}^4\text{He}$, близкой к экспериментальной. Приблизительно такой же эффект на энергию связи $B({}^4\text{He})$ имеет учет отталкивания на малых расстояниях [89].

Основные свойства ядра ${}^4\text{He}$ в основном состоянии определяются парными взаимодействиями в состояниях 1S_0 и ${}^3S_1 - {}^3D_1$. Взаимодействия в высших парциальных состояниях вносят относительно малый вклад. Оценки [97] показывают, что эффект высших парциальных волн состоит в добавочной связи в ${}^4\text{He}$, не превышаю-

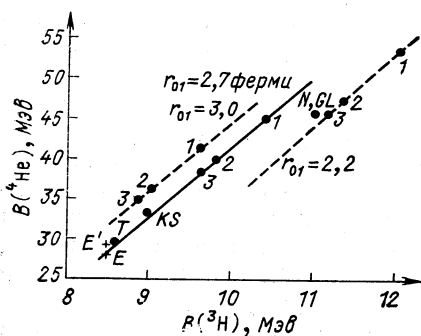


Рис. 5. Взаимосвязь между энергиями связи основных состояний ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^4\text{He}$, рассчитанными при фиксированных значениях низкоэнергетических эффективных NN -параметров:

точки 1, 2 и 3 рассчитаны в [90, 91] с использованием сепарабельных потенциалов с различными форм-факторами: 1 — юкавским (форм-фактором (34) с $n = 1$), 2 — экспоненциальным ($n = 2$), 3 — форм-фактором с $n = 3$. Другие точки — результаты работ N — [87] и GL — [99, 117] (сепарабельный потенциал с юкавским форм-фактором), T — [89] (локальный потенциал Малфли — Тйона), KS — [100] (сепарабель-

ный потенциал с гауссовым форм-фактором). Точка E — экспериментальные данные $B_{\text{эксп}}({}^3\text{H})$ и $B_{\text{эксп}}({}^4\text{He})$ [точка E' отвечает $B_{\text{эксп}}({}^3\text{H})$ и экспериментальной энергии связи ядра ${}^4\text{He}$ в основном состоянии, увеличенной на кулоновскую энергию, $B'_{\text{эксп}}({}^4\text{He}) = B_{\text{эксп}}({}^4\text{He}) + 1 \text{ МэВ}$]

щей 1 МэВ [учет парных взаимодействий в состояниях с высшими орбитальными моментами приводил в случае реалистического потенциала Рида к увеличению $B({}^3\text{H})$ примерно на $0,3 \text{ МэВ}$].

Как уже отмечалось, в расчетах, основанных на решении интегральных уравнений, обычно также пренебрегают высшими парциальными компонентами эффективного взаимодействия частицы и центра масс пары других частиц. Согласно [100] учет P - и D -волн в эффективном взаимодействии частицы и центра масс пары дает незначительный вклад в энергию связи ${}^4\text{He}$ (не превышающий $0,1 \text{ МэВ}$).

Корреляции между энергиями связи трех и четырех нуклонов. Если результаты для энергий связи основных состояний ${}^3\text{H}$ и ${}^4\text{He}$ показать в одной плоскости, отложив вдоль одной оси энергию связи ${}^3\text{H}$, а вдоль другой — энергию ${}^4\text{He}$, то обнаруживается, что с изменением формы потенциала (при фиксированных значениях низкоэнергетичных эффективных NN -параметров) между рассчитанными энергиями связи существует *линейная зависимость* [91] (рис. 5). При увеличении синглет-триплетного эффективного радиуса r_{01} прямая зависимость

$B(^4\text{He})$ от $B(^3\text{H})$ смещается вверх. Точка T , полученная в работе [89] (локальный потенциал с притяжением и отталкиванием юкавской формы), расположена вблизи прямой с $r_{01} = 2,7$ ферми. Заметим, однако, что сплошная прямая на рис. 5 не совпадает с прямой Тйона [89]. В отличие от точек на нашей прямой различные точки вдоль прямой Тйона в [89] не отвечают фиксированным низкоэнергетическим эффективным параметрам (различные точки в [89] получены с учетом различного числа членов в разложении Гильберта — Шмидта двухчастичной амплитуды рассеяния для одного и того же потенциала). Как видно из рисунка, точке

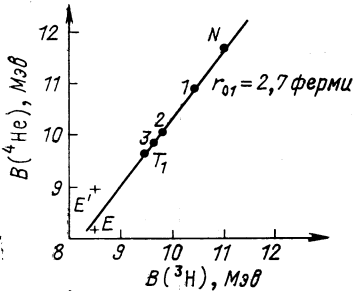


Рис. 6

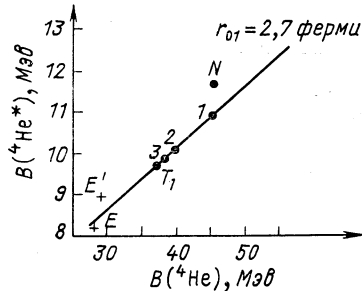


Рис. 7

Рис. 6. Взаимосвязь между энергией связи трех нуклонов в основном состоянии $B(^3\text{H})$ и энергией связи четырех нуклонов в первом возбужденном 0^+ -состоянии $B(^4\text{He}^*)$, рассчитанными с сепарабельными потенциалами различной формы при фиксированных значениях низкоэнергетических эффективных NN -параметров [90, 91]:

точка T_1 [89] получена с учетом одного члена в разложении Гильберта — Шмидта для двухнуклонной i -матрицы (локальный потенциал Малфли — Тйона), точка E' соответствует $B_{\text{эксп}}(^3\text{H})$ и энергии связи ядра ^4He в возбужденном 0^+ -состоянии, увеличенной на кулоновскую энергию ядра ^3He , $B'_{\text{эксп}}(^4\text{He}^*) = B_{\text{эксп}}(^4\text{He}^*) + 0,76$ Мэв. Точки 1, 2, 3 описаны на рис. 5

Рис. 7. Взаимосвязь между энергиями связи ядра ^4He в основном и первом возбужденном 0^+ -состояниях $B(^4\text{He})$ и $B(^4\text{He}^*)$, рассчитанных с сепарабельным потенциалом различной формы при фиксированных низкоэнергетических параметрах [90, 91]:

точка E' отвечает экспериментальным энергиям связи, увеличенным на кулоновские энергии, $B_{\text{эксп}}(^3\text{H})$ и $B'_{\text{эксп}}(^4\text{He}^*)$. Остальные точки те же, что и на рис. 5, 6

с экспериментальной энергией связи тритона на прямой с $r_{01} = 2,7$ ферми соответствует значение энергии связи ^4He , близкое к экспериментальному.

Расчеты в [91] обнаруживают также линейную зависимость между значениями энергии связи четырех нуклонов в возбужденном 0^+ -состоянии $B(^4\text{He}^*)$ и энергией связи трех нуклонов в основном состоянии $B(^3\text{H})$ (рис. 6). Таким образом, энергии связи основного и первого возбужденного 0^+ -состояний четырех нуклонов $B(^4\text{He})$ и $B(^4\text{He}^*)$ также оказываются линейно взаимосвязанными (рис. 7).

Энергия связи ядра ${}^4\text{He}$ с реалистическими NN -потенциалами. В последнее время с помощью различных методов выполнен ряд расчетов энергии связи ядра ${}^4\text{He}$ с реалистическими NN -потенциалами, воспроизводящими двухнуклонные данные в большой области энергий. Результаты сведены в табл. 4.

Таблица 4

Рассчитанные значения энергий связи ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^4\text{He}$
(в мегаэлектронвольтах) с реалистическими NN -потенциалами

Авторы	NN -потенциал	Метод	$B({}^3\text{H})$	$B({}^4\text{He})$
Демин В. Ф., Покровский Ю. Е. Эфрос В. Д. [37] Бурсак А. В. и др. [125]	EH [123]	Разложение по ги- персферическим функциям	7,45	23,03
	GPT [124]		8,61	26,76
	GPT [124]	То же	—	$28,4 \pm 0,3$
Акаиши и др. [126, 41]	HJ [127]	Вариационный метод с учетом корреля- ций	6,0	20,6*
	$OPEH$ [128]		6,59	23,3*
	PEG [128]		6,64	22,5*
Заболотский [42, 43]	HJ [127]	Обобщенный метод Бракнера—Харт- ри—Фока	—	21,7
	RSC [118]		—	24,0
	$SSCB$ [129]		—	26,4
	GPT [124]		—	26,6
Халдерсон, Голдхаммер [45] Тйон [97]	RSC [118]	То же	—	$19,5 \pm 2,0$
	RSC [118]	Решение интеграль- ных уравнений ФЯ	6,75	19,5*
Эксперимент			8,48	28,3

* Кулоновское взаимодействие не учитывалось.

Несмотря на то что погрешность рассчитанных значений $B({}^4\text{He})$ на порядок превосходит погрешность $B({}^3\text{H})$ [погрешность при расчете $B({}^3\text{H})$ составляет примерно несколько десятых мегаэлектронвольт, а при расчете $B({}^4\text{He})$ — несколько мегаэлектронвольт], полученные результаты позволяют сделать некоторые выводы.

Согласно данным табл. 4 энергия связи $B({}^4\text{He})$ [как и энергия связи $B({}^3\text{H})$] коррелирует с весом D -состояния волновой функции дейтона $p_D({}^2\text{H})$, при этом наибольшее (почти экспериментальное) значение $B({}^4\text{He})$ достигается для потенциала GPT с малым весом $p_D({}^2\text{H}) = 3,8\%$, а наименьшие значения получены для потенциала HJ с большим весом $p_D({}^2\text{H}) = 6,9\%$.

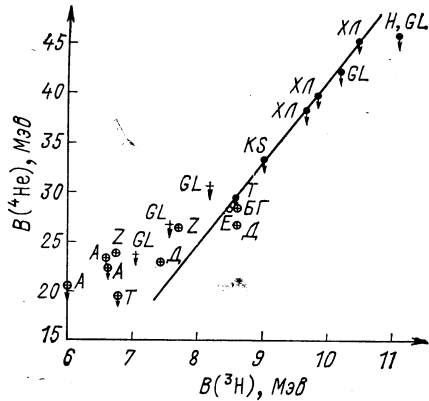
Известно, что применяемые в настоящее время реалистические потенциалы не объясняют экспериментальное значение энергии

связи тритона [рассчитанные значения $B(^3\text{H})$, как правило, занижены на 1—1,5 Мэв]. Полученные результаты для $B(^4\text{He})$ также существенно занижены (на 5—10 Мэв) по сравнению с экспериментальным значением.

Исключение составляют близкие к экспериментальным результаты для $B(^3\text{H})$ и $B(^4\text{He})$, рассчитанные с потенциалами GPT и $SSCB$ и характеризующиеся малым весом $p_D(^2\text{H})$ (3,8% и 4,25% соответственно). Заметим, что потенциалы GPT и EH не удовлетворяют асимптотическому условию одномезонного обмена и хуже других описывают двухнуклонные данные (потенциал GPT ,

Рис. 8. Энергии связи ядер ^3H и ^4He , рассчитанные с различными NN -потенциалами:

● — центральные чисто притягивающие сепарабельные потенциалы (H [87], XJ [90, 91], GL [99] KS [100]) и локальный потенциал Малфли — Тйона (T [89]); + — тензорные сепарабельные потенциалы (GL [117]); ⊕ — реалистические потенциалы: HJ (A [126, 41]), RSC (T [97]), Z [43], $SSCB$ (Z [43], [130]), GPT (D [37]), BG [125]), EH (D [37]), $OPEH$ и $OPEG$ (A [41, 126]); E — эксперимент. Стрелки возле точек — изменение энергии связи ^4He при учете кулоновской энергии ядра (примерно в 1 Мэв)



например, приводит к завышенному значению энергии связи дейтона.)

Результаты расчетов энергий связи ядер ^3H и ^4He с различными NN -потенциалами (от простейших до реалистических) показаны на рис. 8. Все точки, отвечающие рассчитанным $B(^3\text{H})$ и $B(^4\text{He})$, расположены в некоторой полосе. Прямая зависимости $B(^4\text{He})$ от $B(^3\text{H})$, обнаруженная в расчетах с чисто притягивающими сепарабельными потенциалами, проходит ниже точек, рассчитанных с потенциалами, учитывающими тензорное взаимодействие и с реалистическими потенциалами (за исключением точки для потенциала GPT). Возможно, что на участке, отвечающем реалистическим потенциалам, корреляционная связь $B(^4\text{He})$ и $B(^3\text{H})$ представляет собой прямую с другим наклоном.

Зарядовый форм-фактор ядра ^4He . Зарядовый форм-фактор ядра ^4He $F_{ch}(Q^2)$, извлекаемый из экспериментальных данных по упругому $e^4\text{He}$ -рассеянию, содержит ценную информацию о размере и плотности зарядового распределения ядра.

В качественном отношении теоретические результаты для зарядового форм-фактора четырехнуклонного ядра ^4He близки к результатам, полученным ранее для трехнуклонного ядра ^3He .

В рамках метода интегральных уравнений зарядовый форм-фактор ядра ${}^4\text{He}$ впервые был рассчитан в работе Тйона [97] для реалистического потенциала RSC . Результаты расчетов вместе с экспериментальными данными показаны на рис. 9.

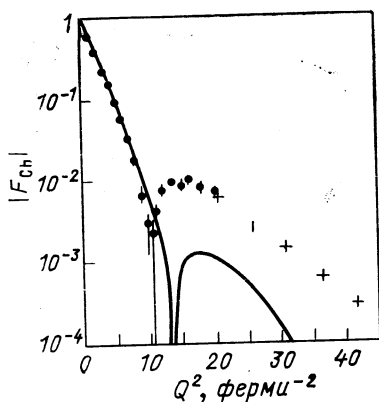


Рис. 9. Упругий зарядовый форм-фактор ядра ${}^4\text{He}$:

— расчет Тйона [97] с потенциалом RSC ($B({}^4\text{He}) = 19,5 \text{ Мэв}$). Экспериментальные данные взяты из [26] (●) и [29] (+)

радиус ядра ${}^4\text{He}$ оказывается зависящим от вида NN -потенциала [43]: $r_c = 1,82$ (HJ), $1,72$ (RSC) и $1,67$ ферми ($SSCB$); $r_c = 1,672 \pm 0,025$ ферми (экспериментальное значение) [28].

Как показано в [131, 132], в области первого минимума и вторичного максимума $F_{ch}(Q^2)$ существенны эффекты обменных токов. Учет обменных токов приводит к сдвигу минимума в сторону меньших Q^2 и к увеличению высоты вторичного максимума, позволяя получить хорошее согласие с экспериментом.

3. РАССЕЯНИЕ НУКЛОНА НА ТРЕХНУКЛОННЫХ ЯДРАХ

В рамках метода интегральных уравнений типа [ФЯ] задача о рассеянии частицы на трехчастичной связанной системе впервые рассматривалась в работах [85, 133] (случай тождественных бесспиновых частиц). Интегральные уравнения, описывающие рассеяние и всевозможные процессы в системе четырех нуклонов, обусловленные столкновением нуклона с трехнуклонным ядром или дейтоном с дейтоном, сформулированы в [81], расчет длин рассеяния нуклона с трехнуклонным ядром выполнен в работах [90, 91] (сепарабельные потенциалы) и [93] (локальный потенциал). Фазы

При малых переданных импульсах достигается хорошее согласие рассчитанного форм-фактора с экспериментальным. Однако рассчитанный первый минимум сдвинут по сравнению с экспериментальным в сторону больших значений Q^2 , а в области вторичного максимума рассчитанный форм-фактор занижен почти на порядок. Теоретические расчеты указывают также на наличие второго минимума при Q^2 вблизи 35 ферми^{-2} , который, однако, экспериментально не наблюдался [29].

Подобные результаты были получены ранее в расчетах с применением обобщенного метода Бракнера — Хартри — Фока [43, 131]. Среднеквадратический заря-

и дифференциальные сечения процессов упругого $n^3\text{H}$ - и $n^3\text{He}$ -рассеяния при конечных энергиях (ниже пороговой энергии образования двух дейтронов) рассчитаны в [93, 100].

Длины рассеяния нейтрона на тритоне. Система из нейтрона и тритона представляет собой чистое изоспиновое состояние четырех нуклонов с $\mathcal{I} = 1$ может находиться в двух спиновых состояниях — синглетном ($\mathcal{S} = 0$) и триплетном ($\mathcal{S} = 1$).

Длина рассеяния нейтрона на тритоне в состоянии с суммарным спином \mathcal{S}

$$A_{\mathcal{S}}(n^3\text{H}) = A_{\mathcal{S}1}, \quad (36)$$

где $A_{\mathcal{S}\mathcal{I}}$ — длина рассеяния нуклона на трехнуклонной системе в состоянии с суммарным спином \mathcal{S} и изоспином \mathcal{I} .

Значения длины рассеяния нейтрона на тритоне и отвечающие им сечения (когерентной и некогерентной длины рассеяния), рассчитанные в [90, 91, 93] решением интегральных уравнений для четырех нуклонов, приведены в табл. 5. Например, для сепарабельного потенциала (34) синглетная и триплетная длины $n^3\text{H}$ -рассеяния равны (в ферми)

$$\left. \begin{aligned} A_0(n^3\text{H}) = 3,77; A_1(n^3\text{H}) = 3,13, \quad n = 1; \\ A_0(n^3\text{H}) = 3,89; A_1(n^3\text{H}) = 3,22, \quad n = 2. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Таблица 5

Длины рассеяния нейтрона на тритоне (в ферми) и полное сечение упругого рассеяния нейтрона нулевой энергии на тритоне (в барнах), рассчитанные в [90, 91, 93] путем решения интегральных уравнений для четырех нуклонов

Физические величины	Рассчитанные значения			Экспериментальные данные
	Сепарабельный потенциал		Потенциал Малфли-Тьюна [93]	
	с юкавским Форм-фактором [90, 91]	с экспоненциальным Форм-фактором [91]		
$A_0(n^3\text{H}) = A_{01}$	3,77	3,89	4,09	—
$A_1(n^3\text{H}) = A_{11}$	3,13	3,22	3,61	—
$A_c(n^3\text{H}) = \frac{1}{4} A_{01} + \frac{3}{4} A_{11}$	3,29	3,39	3,73	$3,72 \pm 0,20$ [134]
$A_1(n^3\text{H}) = \frac{\sqrt{3}}{4} (A_{11} - A_{01})$	-0,28	-0,29	-0,21	—
$\sigma(n^3\text{H}) = \pi (A_{01}^2 + 3A_{11}^2)$	1,37	1,45	1,75	$1,32 \pm 0,07$ [135] $1,30 \pm 0,03$ [136] $1,27 \pm 0,10$ [137]

Качественно знак и числовые значения длин $n^3\text{H}$ -рассеяния можно объяснить, принимая во внимание, что медленный нейтрон вследствие принципа Паули не может с заметной вероятностью проникнуть внутрь тритона, поскольку в тритоне оба спиновых состояния нейтрона уже заняты. Взаимодействие медленного нейтрона с тритоном в основном сводится к эффективному отталкиванию на расстояниях порядка размеров тритона. Подобная ситуация осуществляется в хорошо известном случае рассеяния медленного нейтрона на дейтоне в четвертом спиновом состоянии ($S = 3/2$; $T = 1/2$). При рассеянии нейтрона на тритоне, однако, отталкивание имеет место в обоих спиновых состояниях системы с $\mathcal{S} = 0$ и $\mathcal{S} = 1$ ($\mathcal{T} = 1$). В действительности рассчитанные значения длин A_{01} и A_{11} положительны и близки по величине к радиусу отталкивающей области (радиусу тритона).

Эффективное отталкивание нейтрона тритоном является причиной незначительной роли компонент волновой функции типа $2+2$ в этих состояниях (согласно [90, 91] вклад компонент типа $2+2$ составляет менее 2% в случае A_{01} и менее 5% в случае A_{11}).

Отталкивающий характер взаимодействия нейтрона с тритоном, приводящий к незначительной вероятности проникновения нейтрона внутрь тритона, обуславливает также весьма слабую зависимость длин рассеяния A_{01} и A_{11} от формы потенциала. Различие между значениями длин $n^3\text{H}$ -рассеяния, рассчитанных с юкавскими и экспоненциальными форм-факторами, по абсолютной величине равно 0,13 ферми для A_{01} и 0,09 ферми для A_{11} (что составляет меньше 3,5% величины).

Полученные результаты для длин A_{01} и A_{11} существенно не изменятся при рассмотрении с лучшей аппроксимацией амплитуд рассеяния для подсистем.

Согласно результатам расчетов (см. табл. 5)

$$A_0(n^3\text{H}) > A_1(n^3\text{H}). \quad (38)$$

Неравенство (38) допускает простое качественное объяснение. Падающий нейтрон взаимодействует с тремя отдельными нуклонами тритона. В первом приближении волновая функция тритона может рассматриваться симметричной относительно перестановки пространственных координат любых двух нуклонов. Из трех указанных парных S -взаимодействий одно (взаимодействие между двумя нейтронами с одинаковым направлением спинов) является сильно отталкивающим вследствие принципа Паули, а два остальных — притягивающие. Отталкивание падающего нейтрона одним из нейтронов тритона частично компенсируется притяжением двух других пар нуклонов. Из двух притягивающих пар в состоянии с $\mathcal{S} = 0$, $\mathcal{T} = 1$ имеется $3/2$ синглетных ($\nu = 01$) и $1/2$ триплетных ($\nu = 10$) по спине пар (одна пара синглетная, а вторая наполовину синглетная, наполовину триплетная), а в

состоянии с $\mathcal{S} = 1$, $\mathcal{T} = 1$ — одна синглетная и одна триплетная пары. В результате вследствие более сильного притяжения в триплетном спиновом состоянии отталкивание медленного нейтрона тритоном в состоянии с $\mathcal{S} = 0$, $\mathcal{T} = 1$ немного сильнее, чем в состоянии с $\mathcal{S} = 1$, $\mathcal{T} = 1$, что и приводит к неравенству между длинами рассеяния (38).

Благодаря отталкивающему характеру взаимодействия нейтрона с тритоном при малых энергиях структура тритона оказывается несущественной и система четырех нуклонов в этих состояниях приближенно может рассматриваться как двухчастичная. Этим объясняется успех некоторых приближений, использовавшихся ранее для расчета $n^3\text{H}$ -рассеяния, которые не основываются на строгом учете четырехчастичной динамики [48—51, 138]. Приведенные в табл. 5 значения длин $n^3\text{H}$ -рассеяния близки, например, к значениям, полученным в приближении резонирующих групп с потенциалом гауссовой формы в [48]: $A_0(n^3\text{H}) = 3,38$ ферми и $A_1(n^3\text{H}) = 3,25$ ферми, а соответствующие значения сечения упругого рассеяния нейтрона нулевой энергии на тритоне хорошо согласуются с результатами расчетов работы [50], основанной на применении разложения волновой функции в области взаимодействия всех нуклонов по многомерным угловым гармоникам (потенциал прямоугольной формы).

Экспериментально длины $n^3\text{H}$ -рассеяния можно определить по двум из величин — полному сечению $\sigma(n^3\text{H})$, когерентной длине рассеяния $A_c(n^3\text{H})$ и некогерентной длине $A_1(n^3\text{H})$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma(n^3\text{H}) &= \pi ([A_0(n^3\text{H})]^2 + 3 [A_1(n^3\text{H})]^2); \\ A_c(n^3\text{H}) &= (1/4) A_0(n^3\text{H}) + 3/4 A_1(n^3\text{H}); \\ A_1(n^3\text{H}) &= \sqrt{3}/4 [A_1(n^3\text{H}) - A_0(n^3\text{H})]. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Экспериментальные значения полного сечения $\sigma(n^3\text{H})$ равны:

$$\sigma_{\text{эксп}}(n^3\text{H}) = \left\{ \begin{array}{l} 1,32 \pm 0,07 \text{ барн [135]; } E_{n \text{ лаб}} = 29 \text{ Мэв;} \\ 1,30 \pm 0,03 \text{ барн [136]} \\ 1,27 \pm 0,10 \text{ барн [137]} \end{array} \right\} \text{ тепловые нейтроны. (40)}$$

Выполненное в [134] измерение когерентной длины $A_c(n^3\text{H})$ методом многократного преломления (основанное на значении когерентной длины $n^2\text{H}$ -рассеяния, измеренном Костером и Унгером [139]) приводит к

$$A_{c, \text{эксп}}(n^3\text{H}) = 3,72 \pm 0,20 \text{ ферми.} \quad (41)$$

Согласно данным табл. 5 значение сечения $n^3\text{H}$ -рассеяния, рассчитанное с сепарабельными потенциалами, близко к экспериментальному значению. Сечение, полученное для потенциала Малфли — Тйона, однако, несколько завышено. В противополож-

ность сечению для когерентной длины A_c (n ^3H) хорошее согласие с экспериментом достигается в случае потенциала Малфли — Тйона. Рассчитанное значение некогерентной длины мало и отрицательно по знаку для всех потенциалов [A_1 (n ^3H) = -0,28 ферми для сепарабельного потенциала с юкавским форм-фактором и A_1 (n ^3H) = -0,21 ферми для потенциала Малфли — Тйона]. Измерение некогерентной длины n ^3H -рассеяния не проводилось. Кривые зависимостей A_1 (n ^3H) от A_0 (n ^3H), соответствующие упомянутым выше экспериментальным значениям сечения (40) и когерентной длины (41), однако, не пересекаются (рис. 10).

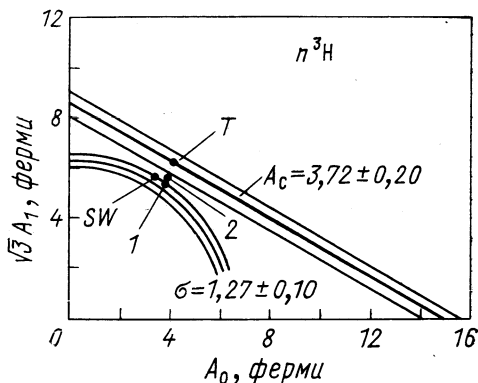


Рис. 10. Определение синглетной и триплетной длин $n^3\text{H}$ -рассеяния по экспериментальным данным для сечения [137] и когерентной длины [134]: точки 1 и 2 [90, 91] (см. табл. 6) получены при решении интегральных уравнений типа ФЯ [сепарабельные потенциалы (34) с юкавским, $n = 1$ (точка 1), и экспоненциальным, $n = 2$ (точка 2), форм-факторами]; T — из [93] (метод интегральных уравнений ФЯ, локальный потенциал Малфли — Тйона); SW — из [48] (метод резонирующих групп, локальный потенциал гауссовой формы)

Это указывает на взаимную несогласованность имеющихся экспериментальных данных для σ (n ^3H) и A_c (n ^3H).

Для экспериментального определения длин A_0 (n ^3H) и A_1 (n ^3H), следовательно, требуются новые измерения полного сечения и длины когерентного (или некогерентного) рассеяния нейтрона на тритоне.

Длины рассеяния нейтрона на ядре ^3He . При рассмотрении, не учитывая кулоновского взаимодействия между протонами (и разности масс нейтрона и протона), ядра ^3H и ^3He в основном состоянии ($S = 1/2$) имеют одинаковую энергию связи B (^3H) = B (^3He) и составляют изоспиновый дублет ($T = 1/2$), отличаясь лишь проекциями изотопического спина ($M_T = 1/2$ и $-1/2$ соответственно). Система из нейтрона и ядра ^3He представляет собой смесь с одинаковыми весами изотопических состояний четырех нуклонов с $\mathcal{S} = 0$ и $\mathcal{S} = 1$ и может находиться в синглетном ($\mathcal{S} = 0$) и триплетном ($\mathcal{S} = 1$) спиновых состояниях. Таким образом, при столкновении нейтрона с ядром ^3He рассеяние имеет место в четырех спин-изоспиновых состояниях: $\mathcal{S}\mathcal{T} = 00, 10, 01, 11$.

Длина рассеяния нейтрона на ядре ${}^3\text{He}$ в состоянии с суммарным спином \mathcal{S} равна

$$A_{\mathcal{S}}(n^3\text{He}) = (A_{\mathcal{S}0} + A_{\mathcal{S}1})/2. \quad (42)$$

Рассчитанные в [90, 91] значения длин рассеяния $A_{\mathcal{S}\mathcal{S}}$, $A_{\mathcal{S}}(n^3\text{He})$, $A_c(n^3\text{He})$, $A_1(n^3\text{He})$ и полного сечения $\sigma(n^3\text{He})$ упругого рассеяния нейтрона нулевой энергии ядром ${}^3\text{He}$ представлены в табл. 6.

Таблица 6

Длины рассеяния нейтрона на ядре ${}^3\text{He}$ (в ферми) и полное сечение упругого рассеяния нейтрона нулевой энергии (в барнах) на ${}^3\text{He}$, рассчитанные в [90, 91] решением интегральных уравнений для четырех нуклонов

Физические величины	Рассчитанные значения [сепарабельный потенциал (34)]			Экспериментальные данные ($A \equiv A' - iA''$)
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	
A_{00}	12,34	14,95	16,09	—
A_{01}	3,77	3,89	—	—
A_{10}	3,03	3,09	—	—
A_{11}	3,13	3,22	—	—
$A_0(n^3\text{He}) = (A_{00} + A_{01})/2$	8,05	9,42	—	$A_0''(n^3\text{He}) = 4,4448 \pm 0,0009$ [140, 141]
$A_1(n^3\text{He}) = (A_{10} - A_{11})/2$	3,08	3,15	—	—
$A_c(n^3\text{He}) = A_0(n^3\text{He})/4 + 3A_1(n^3\text{He})/4$	4,32	4,72	—	$A_c'(n^3\text{He}) = 4,29 \pm 0,04$ [142]
				$A_c''(n^3\text{He}) = 1,1112 \pm 0,0003$ [140, 141]
$A_1(n^3\text{He}) = (\sqrt{3}/4)[A_1(n^3\text{He}) - A_0(n^3\text{He})]$	-2,16	-2,71	—	$A_1''(n^3\text{He}) = -1,9247 \pm 0,0004$ [140, 141]
$\sigma(n^3\text{He}) = \pi([A_0'(n^3\text{He})]^2 + [A_0''(n^3\text{He})]^2) + 3[A_1(n^3\text{He})]^2$	2,93	3,73	—	$3,16 \pm 0,20$ [143]

В случае, например, сепарабельного потенциала (34) длины $A_{\mathcal{S}\mathcal{S}}$ равны (в ферми) [90, 91]:

$$\left. \begin{aligned} A_{10} &= 3,03; & A_{00} &= 12,34, & n &= 1; \\ A_{10} &= 3,09; & A_{00} &= 14,95, & n &= 2 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

[значения длин $A_{01} = A_0(n^3\text{He})$ и $A_{11} = A_1(n^3\text{He})$ приведены в (37)], им отвечают следующие значения синглетной и триплетной длин $n^3\text{He}$ -рассеяния:

$$\left. \begin{aligned} A_0(n^3\text{He}) &= 8,05; & A_1(n^3\text{He}) &= 3,08, & n &= 1, \\ A_0(n^3\text{He}) &= 9,42; & A_1(n^3\text{He}) &= 3,15, & n &= 2. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Благодаря действию принципа Паули при взаимодействии медленного нуклона с трехнуклонным ядром в состоянии с

$\mathcal{S} = 1, \mathcal{T} = 0$, как и в рассмотренных выше состояниях с $\mathcal{S} = 0, \mathcal{T} = 1$ и $\mathcal{S} = 1, \mathcal{T} = 1$, происходит эффективное отталкивание на расстояниях порядка размеров трехнуклонного ядра (падающий нейтрон и один из нейтронов ядра имеют одинаково направленные спины). В соответствии с этим рассчитанное значение длины A_{10} оказывается близким к значениям длин $n^3\text{H}$ -рассеяния A_{01} и A_{11} . Роль компонент волновой функции типа $2 + 2$ в состоянии с $\mathcal{S} = 1, \mathcal{T} = 0$, однако, несколько больше, чем в состояниях с $\mathcal{S} = 0, \mathcal{T} = 1$ и $\mathcal{S} = 1, \mathcal{T} = 1$ (вклад канала $2 + 2$ в A_{10} достигает 14%). Отталкивающий характер эффективного взаимодействия нуклона с трехнуклонным ядром в состоянии с $\mathcal{S} = 1, \mathcal{T} = 0$ является причиной слабой зависимости A_{10} (как и A_{01}, A_{11}) от формы потенциала (различие между значениями A_{10} , рассчитанными с юкавским и экспоненциальным форм-факторами, составляет 0,06 ферми или меньше 2%).

Рассчитанное значение длины A_{10} меньше соответствующих значений длин A_{01} и A_{11} :

$$A_{10} < A_{01}, A_{11} \quad (45)$$

или с учетом (38)

$$A_{10} < A_{11} < A_{01}. \quad (46)$$

Неравенство (45), как и (38), допускает простое качественное объяснение, связанное с различной для этих состояний частичной компенсацией отталкивания притяжением (в состоянии с $\mathcal{S} = 1, \mathcal{T} = 0$ между падающим нуклоном и нуклонами ядра ${}^3\text{He}$ имеется $1/2$ синглетных ($\nu = 01$) и $3/2$ триплетных ($\nu = 10$) притягивающих пар нуклонов). Благодаря компенсации из всех состояний, в которых имеет место отталкивание медленного нуклона трехнуклонным ядром ($\mathcal{S}\mathcal{T} = 01, 11, 10$), в состоянии с $\mathcal{S} = 1, \mathcal{T} = 0$ отталкивание является наиболее слабым, а соответствующая длина A_{10} наименьшей.

В состоянии с $\mathcal{S} = 0, \mathcal{T} = 0$ между нуклоном и трехнуклонным ядром действует эффективное притяжение [в модели парного взаимодействия (34) это притяжение обеспечивает существование двух связанных состояний четырех нуклонов с суммарным орбитальным моментом, равным нулю]. Энергия возбужденного 0^+ -состояния четырех нуклонов чуть меньше пороговой энергии развала системы на нуклон и трехнуклонное ядро. При этом длина рассеяния A_{00} оказывается положительной и большой по значению (см. табл. 6). Компоненты волновой функции типа $2 + 2$ играют в этом случае исключительно важную роль, поскольку при их пренебрежении возбужденное состояние четырехнуклонной системы отсутствует вовсе, а длина A_{00} становится отрицательной [90, 91] (равной $-3,21$ или $-2,04$ ферми для сепарабельных потенциалов с юкавским или экспоненциальным форм-факторами).

Полученные в [91] результаты для A_{00} чувствительны к форме двухнуклонного потенциала и зависят от величины синглет-триплетного эффективного радиуса r_{01} , увеличиваясь с увеличением r_{01} (при увеличении r_{01} на 0,1 ферми A_{00} увеличивается примерно на 0,15—0,20 ферми).

Более слабая зависимость A_{00} от r_{01} по сравнению с зависимостью $B(^4\text{He})$ от r_{01} связана с тем обстоятельством, что значение длины A_{00} определяется в основном околороговым возбужденным 0^+ -состоянием четырехнуклонной системы с энергией связи $B(^4\text{He}^*)$ и существенно зависит от разности $B(^4\text{He}^*) - B(^3\text{H})$. Вследствие кластеризованного характера системы в этом возбужденном состоянии (трехнуклонное ядро + нуклон) энергии связи $B(^4\text{He}^*)$ и $B(^3\text{H})$ изменяются при изменении r_{01} почти на одинаковое значение. В результате разность $B(^4\text{He}^*) - B(^3\text{H})$, а следовательно, и длина A_{00} относительно слабо зависят от r_{01} .

Корреляция между длиной A_{00} и энергиями связи

четырех нуклонов. Хорошо известно, что для трех нуклонов при изменении формы парного потенциала имеет место линейная корреляция между значениями дублетной длины nd -рассеяния $A_{1\frac{1}{2}}(nd)$

и энергией связи тритона $B(^3\text{H})$. Для четырех нуклонов аналогичная зависимость длины рассеяния A_{00} от энергии связи ядра ^4He в основном состоянии $B(^4\text{He})$ отлична от линейной (рис. 11).

Существует, однако, простая корреляция между рассчитанными в [91] значениями длины A_{00} и энергией связи возбужденного состояния четырех нуклонов, отсчитываемой от пороговой энергии развала системы на нуклон и трехнуклонное ядро $B(^4\text{He}^*) - B(^3\text{H})$. Величины $1/A_{00}$ и $\alpha \equiv (3m [B(^4\text{He}^*) - B(^3\text{H})]/2\hbar^2)^{1/2}$, отвечающие двухнуклонным сепарабельным потенциалам с различными форм-факторами (при фиксированных низкоэнергетических эффективных параметрах NN -взаимодействия), оказываются приближенно связанными между собой (рис. 12) обычным

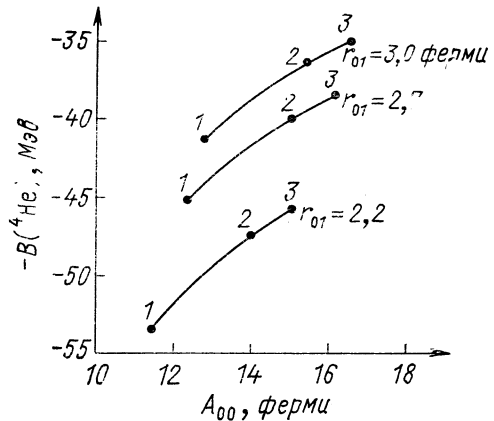


Рис. 11. Зависимость энергии ядра ^4He в основном состоянии от синглет-синглетной длины рассеяния нуклона на трехнуклонном ядре A_{00} , рассчитанная для различных сепарабельных потенциалов (34) ($n = 1, 2$ и 3 — точки 1, 2, 3) и различных значений NN эффективного радиуса r_{01}

соотношением теории эффективного радиуса для двух частиц — нуклона и трехнуклонного ядра:

$$1/A_{00} = \alpha - \alpha^2 R/2 - P\alpha^4 R^3. \quad (47)$$

Отметим, что на участке с точками, отвечающими рассчитанным значениям A_{00} и $B(^4\text{He}^*) - B(^3\text{H})$, кривая зависимости $1/A_{00}$ от α переходит практически в прямую линию.

Применимость соотношения (47), очевидно, связана с близостью энергии возбужденного состояния четырех нуклонов к энергии порога $3 + 1$, что обуславливает кластерный характер системы в возбужденном состоянии*.

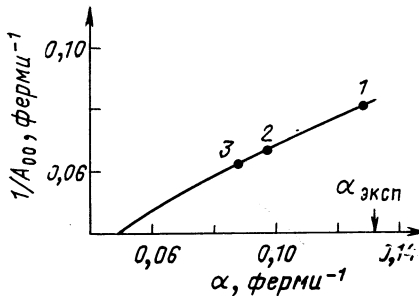


Рис. 12. Зависимость $1/A_{00}$ от $\alpha \equiv 3(m [B(^4\text{He}^*) - B(^3\text{H})]/2\hbar^2)^{1/2}$, описываемая соотношением (47) с эффективными параметрами $N3N$ -взаимодействия:

$R = 7,65$ ферми; $P = -0,129$; 1, 2 и 3 — расчеты с сепарабельными потенциалами (34) с $n = 1, 2$ и 3 [90, 91]

При рассеянии низкоэнергетичного нуклона трехнуклонным ядром в состоянии с $S = 0, T = 0$ уровень основного состояния четырехнуклонной системы оказывается как бы «экранированным» более близким возбужденным уровнем, который и определяет эффекты рассеяния*. При этом падающий нуклон с малой вероятностью проникает внутрь трехнуклонного ядра, взаимодействуя с ним в основном на расстояниях порядка размеров четырехнуклонного ядра в возбужденном состоянии.

Таким образом, длина рассеяния A_{00} не содержит информации о состоянии, когда все четыре нуклона взаимодействуют на близких расстояниях.

Экспериментальное определение длин $n^3\text{He}$ -рассеяния. При рассмотрении, основанном на предположении зарядовой независимости и не учитывающем кулоновского взаимодействия, нейтронный и протонный пороги четырехнуклонной системы совпадают. В модели с сепарабельным NN -взаимодействием первый возбужденный 0^+ -уровень энергии системы расположен ниже этого порога и является стабильным относительно распада на нуклон и трехнуклонное ядро [90, 91]. Вследствие этого все рассчитанные длины $n^3\text{He}$ -рассеяния являются вещественными. В действительности, однако, кулоновское взаимодействие между протонами приводит к расщеплению порога $N + 3N$ на два порога:

* В реальном случае во возбужденный 0^+ -уровень четырех нуклонов лежит между порогами $p + ^3\text{H}$ и $n + ^3\text{He}$, являясь квазистационарным. Связь между характеристиками околорогового 0^+ -уровня и комплексной длиной $N3N$ -рассеяния A_{00} исследовалась в работах [144—146].

$n + {}^3\text{He}$ и $p + {}^3\text{H}$. Экспериментальный возбужденный 0^+ -уровень энергии системы четырех нуклонов расположен между порогами (на $0,5 \text{ Мэв}$ ниже порога $n {}^3\text{He}$ и на $0,3 \text{ Мэв}$ выше порога $p {}^3\text{H}$) и является квазистационарным [21]. При этом экспериментальные длины $n^3\text{He}$ -рассеяния (осуществляющегося с участием состояния с $S = 0$) являются комплексными величинами *:

$$A(n^3\text{He}) = A'(n^3\text{He}) - iA''(n^3\text{He}).$$

Комплексная синглетная и вещественная триплетная длины $n^3\text{He}$ -рассеяния $A_0(n^3\text{He}) \equiv A'_0(n^3\text{He}) - i A''_0(n^3\text{He})$ и $A_1(n^3\text{He})$ могут быть определены по трем независимым величинам из данных для полного сечения упругого рассеяния $\sigma(n^3\text{He})$, вещественной и мнимой частей когерентной длины $A'_c(n^3\text{He})$ и $A''_c(n^3\text{He})$ и вещественной и мнимой частей некогерентной длины $A'_i(n^3\text{He})$ и $A''_i(n^3\text{He})$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma(n^3\text{He}) &= \pi ([A'_0(n^3\text{He})]^2 + [A''_0(n^3\text{He})]^2 + 3[A_1(n^3\text{He})]^2); \\ A'_c(n^3\text{He}) &= A'_0(n^3\text{He})/4 + 3A_1(n^3\text{He})/4; \\ A''_c(n^3\text{He}) &= A''_0(n^3\text{He})/4; \\ A'_i(n^3\text{He}) &= (\sqrt{3}/4)[A_1(n^3\text{He}) - A'_0(n^3\text{He})]; \\ A''_i(n^3\text{He}) &= -(\sqrt{3}/4)A''_0(n^3\text{He}). \end{aligned} \right\} (48)$$

Мнимая часть синглетной длины $n^3\text{He}$ -рассеяния, однако, была определена с хорошей точностью независимо в [141] по значению сечения захвата теплового нейтрона в реакции ${}^3\text{He}(n, p){}^3\text{H}$ [140]:

$$A''_{0, \text{эксп}}(n^3\text{He}) = 4,4448 \pm 0,0009 \text{ ферми}. \quad (49)$$

Согласно (48) этому значению отвечают

$$\left. \begin{aligned} A''_{0, \text{эксп}}(n^3\text{He}) &= 1,1112 \pm 0,0003 \text{ ферми}; \\ A''_{1, \text{эксп}}(n^3\text{He}) &= -1,9247 \pm 0,0004 \text{ ферми}. \end{aligned} \right\} (50)$$

* Экспериментальные значения сечений захвата тепловых нейтронов ядрами ${}^3\text{He}$ позволяют с большой точностью определить мнимые части синглетной и триплетной длин $n^3\text{He}$ -рассеяния. Сечение захвата теплового нейтрона в реакции ${}^3\text{He}(n, p){}^3\text{H}$ равно $\sigma_p = 5327 \pm 10 \text{ барн}$ [140] ($E_{\text{лаб}} = 0,0253 \text{ эв}$), а в реакции ${}^3\text{He}(n, \gamma){}^4\text{He} = 60 \pm 30 \text{ мкбарн}$ [147]. Благодаря измерениям с поляризованными нейтронами и поляризованными ядрами ${}^3\text{He}$ [148, 149], установлено, что сечение σ_p практически определяется поглощением нейтрона в синглетном спиновом состоянии ($\mathcal{S} = 0$) (вклад триплетного канала ($\mathcal{S} = 1$) мал и составляет $6 \pm 6\%$ согласно [148] и менее 3% по данным [149]). Большое значение σ_p приводит к значительной мнимой части синглетной длины $n^3\text{He}$ -рассеяния (49). Сечение радиационного захвата σ_γ определяется М1-переходом в триплетном спиновом состоянии (вклад синглетного спинового канала в σ_γ незначителен). Вследствие малого значения σ_γ мнимая часть триплетной длины $n^3\text{He}$ -рассеяния пренебрежимо мала: $A''_1(n^3\text{He}) = (1,7 \pm 0,8) \cdot 10^{-8} \text{ ферми}$ [141].

Расчеты длин $n^3\text{He}$ -рассеяния, выполненные на основе интегральных уравнений движения для четырех нуклонов, стимулировали постановку новых измерений, необходимых для определения экспериментальных значений длин.

Измерение полного сечения рассеяния тепловых нейтронов на ядрах ^3He , выполненное В. П. Алфименковым и др. [143], привело к значению

$$\sigma_{\text{экс}}(n^3\text{He}) = 3,16 \pm 0,20 \text{ барн}. \quad (51)$$

Экспериментальное значение вещественной части когерентной длины $n^3\text{He}$ -рассеяния (на свободном ядре), полученное Китченсом и др. [150]

$$A'_{\text{с,экс}}(n^3\text{He}) = 4,58 \pm 0,45 \text{ ферми}, \quad (52)$$

недавно было существенно уточнено, благодаря измерениям Рауха и др., выполненным на нейтронном интерферометре [142]:

$$A'_{\text{с,экс}}(n^3\text{He}) = 4,29 \pm 0,04 \text{ ферми}. \quad (53)$$

Отношение некогерентного сечения $\sigma_i(n^3\text{He}) = 4\pi(A_i'^2 + A_i''^2)$ к когерентному $\sigma_c(n^3\text{He}) = 4\pi(A_c'^2 + A_c''^2)$ измерено в [151]:

$$\sigma_i/\sigma_c = 0,250 \pm 0,056. \quad (54)$$

При известном значении мнимой части синглетной длины (49), экспериментальные значения длин $A'_{0,\text{экс}}(n^3\text{He})$ и $A_{1,\text{экс}}(n^3\text{He})$ могут быть определены по двум независимым величинам из имеющихся данных для $\sigma_{\text{экс}}(n^3\text{He})$, $A'_{\text{с,экс}}(n^3\text{He})$ и $\sigma_{i,\text{экс}}(n^3\text{He})/\sigma_{\text{с,экс}}(n^3\text{He})$ [152] (рис. 13).

Основываясь, например, на значениях сечения $\sigma_{\text{экс}}(n^3\text{He})$ и вещественной части когерентной длины $A'_{\text{с,экс}}(n^3\text{He})$, экспериментальные длины $A'_{0,\text{экс}}$ и $A_{1,\text{экс}}$ находим как точки пересечения в плоскости A'_0, A_1 окружности и прямой, отвечающих двум первым соотношениям из (48):

$$\left. \begin{aligned} A'_0 &= A'_c \pm \sqrt{3}(\sigma/4\pi - A_0''^2/4 - A_c'^2)^{1/2}; \\ A_1 &= A'_c \mp (1/\sqrt{3})(\sigma/4\pi - A_0''^2/4 - A_c'^2)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Подставляя в (55) значения (49), (51) и (53) для A'_0 , σ и A'_c , находим два набора возможных значений экспериментальных длин $A'_{0,\text{экс}}$ и $A_{1,\text{экс}}$ (в ферми):

$$\begin{aligned} \text{набор } A: \quad A'_{0,\text{экс}}(n^3\text{He}) &= 6,6_{-2,3}^{+1,0}; \\ A_{1,\text{экс}}(n^3\text{He}) &= 3,5_{-0,4}^{+0,8}; \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \text{набор } B: \quad A'_{0,\text{экс}}(n^3\text{He}) &= 2,0_{-1,1}^{+2,4}; \\ A_{1,\text{экс}}(n^3\text{He}) &= 5,1_{-0,7}^{+0,3}. \end{aligned} \quad (57)$$

Большая неточность полученных значений в основном связана с экспериментальной ошибкой для полного сечения (51).

Экспериментальные значения длин $A'_{0, \text{ЭКСП}} (n^3\text{He})$ и $A_{1, \text{ЭКСП}} (n^3\text{He})$ могут быть также определены по данным для σ_i/σ_c и A'_c [с учетом известного значения длины $A''_{0, \text{ЭКСП}} (n^3\text{He})$]

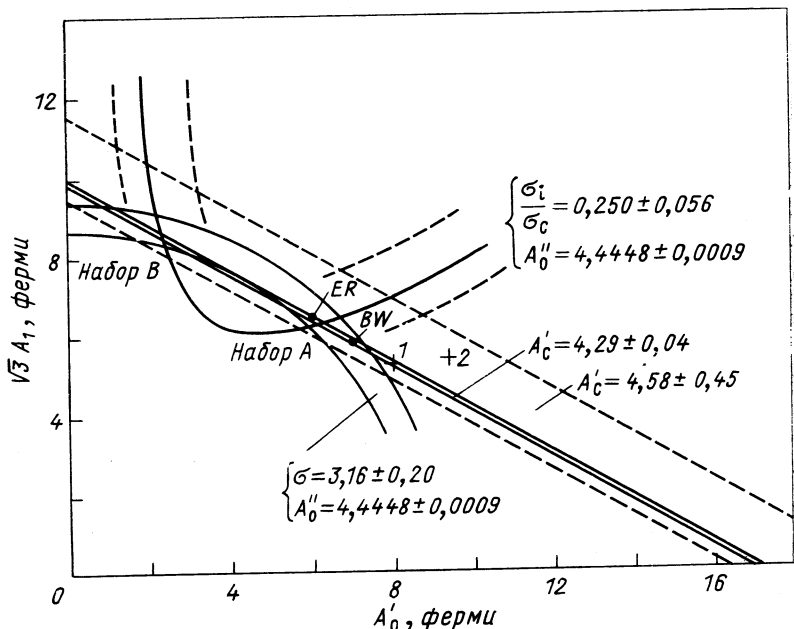


Рис. 13. Восстановление триплетной и вещественной части синглетной длины $n^3\text{He}$ -рассеяния по экспериментальным данным для сечения (в барнах) [143], вещественной части когерентной длины [150, 142] (в ферми) и отношения сечений σ_i/σ_c [151] [при известном экспериментальном значении мнимой части синглетной длины A''_0 (49)]:

1 и 2 — расчеты с сепарабельным потенциалом (34) с $n = 1$ и 2 [90, 91]; ER и BW — оценки длин $n^3\text{He}$ -рассеяния в приближении эффективного радиуса и в результате анализа по формуле Брейта — Вигнера [141, 152]

(49)]. В плоскости A'_0, A_1 зависимость A_1 от A'_0 , отвечающая экспериментальному значению σ_i/σ_c , представляет собой параболу

$$\left. \begin{aligned} A_2^2 - bA'_0A_1 + cA_1^2 &= A_0''^2; \\ b &= \frac{6(1+\gamma)}{3-\gamma}; \quad c = \frac{3(1-3\gamma)}{3-\gamma}; \quad \gamma = \frac{\sigma_i}{\sigma_c}. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Пересечение этой параболы с прямой, определяемой вторым из соотношений (48) при заданном значении $A'_{c, \text{ЭКСП}}$, приводит к двум возможным наборам экспериментальных длин $A'_{0, \text{ЭКСП}} (n^3\text{He})$ и $A_{1, \text{ЭКСП}} (n^3\text{He})$, очень близким к соответствующим

щим наборам (56) и (57):

$$\begin{aligned} \text{набор } A: \quad A'_{0, \text{эксп}}(n^3\text{He}) &= 6,2^{+0,8}_{-1,6}, \\ A_{1, \text{эксп}}(n^3\text{He}) &= 3,7^{+0,6}_{-0,3}; \end{aligned} \quad (56')$$

$$\begin{aligned} \text{набор } B: \quad A'_{0, \text{эксп}}(n^3\text{He}) &= 2,4^{+1,6}_{-0,8}; \\ A_{1, \text{эксп}}(n^3\text{He}) &= 4,9^{+0,3}_{-0,6}. \end{aligned} \quad (57')$$

Заметим, что измерение с хорошей точностью сечения (длины) некогерентного рассеяния представляет значительный интерес, поскольку восстановление экспериментальных длин $n^3\text{He}$ -рассеяния $A'_{0, \text{эксп}}$ и $A_{1, \text{эксп}}$ по данным для A'_s , σ_i или A'_s , A'_i при известном A'_i позволило бы существенно улучшить точность определения длин по сравнению с (56), (57) или (56'), (57').

Существующие экспериментальные данные не позволяют сделать выбор между полученными наборами A и B . Результаты расчетов с сепарабельными потенциалами (44) [90, 91] указывают на правильность набора A (см. рис. 13). Этот вывод согласуется с оценками длин $n^3\text{He}$ -рассеяния в рамках приближения эффективного радиуса и анализа по формуле Брейта—Вигнера, проведенными в [141, 152].

Экспериментальное доказательство правильности набора A длин $n^3\text{He}$ -рассеяния станет возможным в результате измерений с использованием поляризованных нейтронов и поляризованных ядер ^3He .

Упругое рассеяние нейтрона на трехнуклонных ядрах при конечных энергиях. Метод решения интегральных уравнений для четырех частиц был недавно применен Тйоном [93] и Крегером и Сандхасом [100] к исследованию упругого рассеяния нейтрона на трехнуклонных ядрах ^3H и ^3He при конечных энергиях нейтрона (ниже пороговой энергии образования двух дейтонов). Из всех фаз N^3N -рассеяния $\delta^{\mathcal{L}}_{\mathcal{S}\mathcal{T}}$ при энергиях ниже порога $d + d$ существенными являются только S - и P -фазы $\delta^0_{\mathcal{S}\mathcal{T}}$ и $\delta^1_{\mathcal{S}\mathcal{T}}$ [93].

Результаты [93, 100] (как и результаты предыдущих расчетов методами вариационного типа [48, 50, 51]) указывают, что S -фазы N^3N -рассеяния в каналах с $\mathcal{S}\mathcal{T} = 01, 11, 10_1$ подобны фазам рассеяния частицы на твердой сердцевине. Как уже отмечалось, эффект отталкивания медленного нуклона трехнуклонной системой, действующий в этих состояниях, обусловлен принципом Паули.

Относительная величина рассчитанных в [93] S -фаз δ^0_{01} , δ^0_{11} и δ^0_{10} при низких энергиях согласуется с неравенством (46) для длин рассеяния $A_{\mathcal{S}\mathcal{T}}$, обнаруженным в [90]. При небольших энергиях эти фазы можно оценить, аппроксимируя эффективное отталкивание твердой сердцевиной с радиусом, равным соответ-

твующей длине рассеяния $A_{\mathcal{S}\mathcal{T}}$. В связи с этим заметим, что результаты фазового анализа Томбрелло [153] (как для $n^3\text{H}$ -, так и для $p^3\text{He}$ -рассеяния) не удовлетворяют неравенству (46). На более сильное, чем в триплетном, отталкивание в синглетном спиновом состоянии системы $p^3\text{He}$ в соответствии с (46), однако, указывают результаты уточненного (использующего поляризационные данные) фазового анализа [154].

Несмотря на то что в состоянии с $\mathcal{L} = 0$, $\mathcal{S} = 0$, $\mathcal{T} = 0$ действует эффективное притяжение, при $N3N$ -рассеянии в этом состоянии медленный нуклон также не проникает в трехнуклонное ядро вследствие наличия сильно кластеризованного околопорогового возбужденного состояния ядра ^4He , «экранирующего» основное состояние и определяющего эффекты рассеяния. Таким образом, при низких энергиях все четыре нуклона могут сблизиться вместе лишь в основном связанном состоянии ядра ^4He . (В противоположность сказанному в системе трех нуклонов сближение всех нуклонов имеет место как в связанном состоянии (тритон), так и при S -волновом n d -рассеянии в дублетном спиновом состоянии.) Благодаря кластеризации в системе четырех нуклонов вблизи порога упругого рассеяния $N3N$, возможно объяснение поведения соответствующей S -фазы $N3N$ -рассеяния при низких энергиях в рамках обычной модели потенциального взаимодействия между нуклоном и трехнуклонным ядром [155].

Вклад P -волновых компонент амплитуд рассеяния для подсистем $3 + 1$ в S -фазы $N3N$ -рассеяния мал (согласно [100] учет P -волновых $(3 + 1)$ -амплитуд изменяет фазу δ_{01}^0 не более чем на 1°). Результаты [93], однако, указывают на существенный вклад P -волновых $(3 + 1)$ -амплитуд рассеяния в P -фазы рассеяния нуклона на трехнуклонном ядре $\delta_{\mathcal{S}\mathcal{T}}^1$. При этом согласие рассчитанных дифференциальных сечений с экспериментальными улучшается, если увеличить вклад P -компонент $(3 + 1)$ -амплитуд. Важная роль P -волновых компонент амплитуд рассеяния в подсистемах $3 + 1$ при описании рассеяния нуклона на трехнуклонных ядрах, обнаруженная Тйеном, подтверждена результатами решения двумерных интегральных уравнений в работе [100].

При рассматриваемых энергиях (ниже порога развала на два дейтона) D -волновые сдвиги фаз $N3N$ -рассеяния относительно невелики [93], наибольший из них в канале с $\mathcal{S} = 0$, $\mathcal{T} = 0$ при $E_{\text{лаб}} = 3,5 \text{ Мэв}$ (например, в случае локального потенциала Малфли — Тйона $\delta_{00}^2 = 3,72^\circ$, $\delta_{01}^2 = -1,44^\circ$, $\delta_{11}^2 = -0,91^\circ$ и $\delta_{10}^2 = -0,33^\circ$).

Результаты расчетов дифференциальных сечений $n^3\text{H}$ - и $p^3\text{He}$ -рассеяния, а также реакции $^3\text{H}(p, n)^3\text{He}$, выполненные Тйеном [93] с потенциалом Малфли — Тйона, показаны на рис. 14.

Процессы неупругого рассеяния нуклона на трехнуклонных ядрах и дейтона на дейтоне. В настоящее время решения ин-

тегральных уравнений движения для четырех нуклонов при энергиях выше порога $d + d$ еще не проводились. В первом и втором борновских приближениях для К-матрицы дифференциальные сечения процессов упругого и неупругого рассеяния нуклона на трех нуклонных ядрах и дейтона на дейтоне рассчитывались

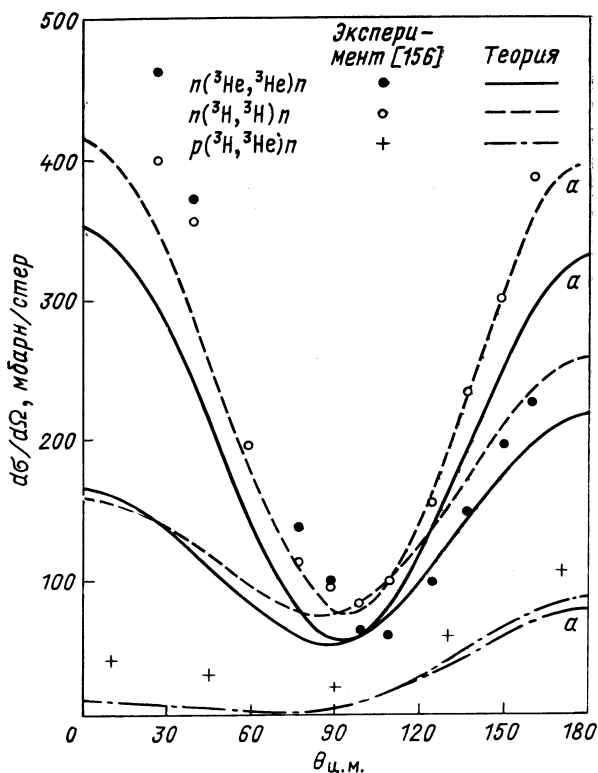


Рис. 14. Дифференциальные сечения упругого $n^3\text{H}$ - и $n^3\text{He}$ -рассеяний ($E_{\text{лаб}} = 3,5 \text{ Мэв}$), рассчитанные в [93] для потенциала Малфли — Тйона с учетом одного притягивающего и одного отталкивающего членов в разложении Гильберта — Шмидта для двухчастичной S -волновой амплитуды и по три члена в каждом из разложений Гильберта — Шмидта для S - и P -волновых $(3 + 1)$ -амплитуд и S -волновой $(2 + 2)$ -амплитуды:

α — расчеты с P -волновыми $(3 + 1)$ -потенциалами, увеличенными в два раза

в работах [88, 94, 95, 157]. Хотя унитаризация матрицы перехода, обеспечиваемая К-матричным формализмом, существенно ограничивает отклонение рассчитанного результата от точного и улучшает согласие с экспериментом, сходимость при таком подходе совсем не исследовалась. Оценка энергии, при которой абсолютная

величина максимального собственного значения интегрального ядра уравнений для четырех нуклонов становится меньше единицы, в настоящее время еще не произведена. Удовлетворительное согласие результатов, полученных в борновском К-матричном приближении, с экспериментальными данными требует объяснения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время направление в исследовании свойств четырехнуклонных систем, основанное на интегральной формулировке уравнений движения, интенсивно развивается. Становится практически возможным последовательный учет четырехчастичной динамики. Это позволяет прямым образом исследовать связь между различными характеристиками NN -взаимодействия и свойствами четырехнуклонных систем.

Первые расчеты связанных состояний ядра ${}^4\text{He}$ и рассеяния нуклонов низких энергий на трехнуклонных ядрах выполнены с простейшими NN -потенциалами в пренебрежении высшими парциальными компонентами как парного взаимодействия, так и эффективных взаимодействий в подсистемах $3 + 1$ и $2 + 2$ и с применением сепарабельных аппроксимаций амплитуд рассеяния для подсистем. Применение динамического описания четырехнуклонной системы, основанного на парном NN -взаимодействии, позволило существенно объяснить ряд низкоэнергетических свойств системы. В настоящее время уровень, достигнутый в исследовании системы четырех нуклонов, примерно такой, какой он был лет десять назад в исследовании системы трех нуклонов. Для получения ответа на вопрос о характере новизны сведений о NN -взаимодействии, содержащихся в данных о системе четырех нуклонов, предстоит еще выполнить расчеты с более реальными NN -силами, учитывающими тензорное взаимодействие, короткодействующее отталкивание, кулоновские силы и т. д. и при более высоких энергиях.

В последние годы достигнуты определенные успехи в развитии методики решения интегральных уравнений для четырех частиц (стало возможным прямое решение двумерных интегральных уравнений). Полученные результаты и быстрый прогресс вычислительного искусства свидетельствуют о перспективности нового направления.

Будущие теоретические исследования должны быть направлены на получение надежных результатов о ядре ${}^4\text{He}$ в основном состоянии с реалистическими силами (прежние вариационные методы при этом могут оказаться столь же эффективными, как и новые методы прямого решения уравнений движения), а также на изучение непрерывного спектра четырехнуклонных систем. Особенно

важным представляется выяснение роли различных компонент NN -взаимодействия в образовании возбужденных квазистационарных состояний четырехнуклонных систем. Данные о возбужденных состояниях, процессах рассеяния и реакциях в системе четырех нуклонов, по-видимому, содержат ценную информацию о NN -взаимодействии в высших орбитальных состояниях.

Успехи в теоретическом изучении четырехнуклонных систем, безусловно, стимулируют постановку новых, более прецизионных экспериментов, в особенности экспериментов с участием поляризованных частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Delves L. M.—«*Adv. Nucl. Phys.*», 1972, v. 5, p. 1.
2. Фаддеев Л. Д.—«ЖЭТФ», 1960, т. 39, с. 1459; «Тр. МИ АН СССР», 1963, т. 69.
3. Фаддеев Л. Д. В кн.: Проблемы современной ядерной физики. Сборник докладов на Втором проблемном симпозиуме по физике ядра, Новосибирск, 1970. М., «Наука», 1971, с. 5.
4. Ситенко А. Г., Харченко В. Ф. Модель нелокального ядерного взаимодействия и задача трех тел. Киев, ИТФ-68-11, 1968.
5. Noyes H. P.—«*Progr. Nucl. Phys.*», 1969, v. 10, p. 355.
6. Amado R. D.—«*Ann. Rev. Nucl. Sci.*», 1969, v. 19, p. 61.
7. Delves L. M., Phillips A. C.—«*Rev. Mod. Phys.*», 1969, v. 41, p. 497.
8. Mitra A. N.—«*Adv. Nucl. Phys.*», 1969, v. 3, p. 1.
9. McKee J. S.—«*Rep. Progr. Phys.*», 1970, v. 33, p. 691.
10. Ситенко А. Г., Харченко В. Ф.—«УФН», 1971, т. 103, с. 469.
11. Беляев В. Б., Вжеционко Е.—«ЭЧАЯ», 1971, т. 2, вып. 2, с. 415.
12. Sandhas W.—«*Acta Phys. Hungarica*», 1973, v. 33, p. 109; «*Acta phys. austriaca Suppl.*», 1972, v. IX, p. 57.
13. Vanzani V. In: *Heavy-Ion, High-Spin States and Nuclear Structure. Lectures presented at the Internat. Extended Seminar. Trieste, 1973. Vienna, 1975, v. 2, p. 287.*
14. Levinger J. S. In: *Springer Tracts in Modern Physics. Berlin, Springer Verlag, 1974, v. 71, p. 88.*
15. Kim Y. E., Tubis A.—«*Ann. Rev. Nucl. Sci.*», 1974, v. 24, p. 69.
16. Базь А. И., Демин В. Ф., Жуков М. В.—«ЭЧАЯ», 1975, т. 6, вып. 3, с. 515.
17. Sasakawa T., Sawada T.—«*Suppl. Progr. Theoret. Phys.*», 1977, v. 61, p. 61.
18. Phillips A. C.—«*Rep. Progr. Phys.*», 1977, v. 40, p. 905.
19. Kim Y. E. In: *Few-Body Nuclear Physics, IAEA, Vienna, 1978, p. 231.*
20. Fiarman S., Hanna S. S.—«*Nucl. Phys. A*», 1975, v. 251, p. 1.
21. Fiarman S., Meyerhof W. E.—«*Nucl. Phys. A*», 1973, v. 206, p. 1; Meyerhof W. E., Tombrello T. A. *Ibid.*, 1968, v. 109, p. 1.
22. Argan P. E. e.a.—«*Suppl. Nuovo cimento*», 1965, v. 3, p. 245.
23. Базь А. И., Гольданский В. И., Зельдович Я. Б.—«УФН», 1965, т. 85, с. 445.
24. Барит И. Я. В кн.: Труды проблемного симпозиума по физике ядра. Тбилиси, 1967. Т. 1. М., ИТЭФ, 1967, с. 97.
25. Erich U. e.a.—«*Z. Phys.*», 1968, Bd 208, S. 209.
26. Frosch R. F. e.a.—«*Phys. Rev.*», 1967, v. 160, p. 874.

27. Sick I., McCarthy J. S., Whitney R. R.—«Phys. Lett. B», 1976, v. 64, p. 33.
28. McCarthy J. S., Sick I., Whitney R. R.—“Phys. Rev. C”, 1977, v. 15, p. 1396.
29. Arnold R. G. e.a.—“Phys. Rev. Lett.”, 1978, v. 40, p. 1429.
30. Wernitz C., Meyerhof W. E.—“Nucl. Phys. A”, 1968, v. 121, p. 38.
31. Барит И. Я., Сергеев В. А.—“Ядерная физика”, 1971, т. 13, с. 1230; 1966, т. 4, с. 712.
32. Fick D. In: Proc. of the 1977 European Symp. on Few-Particle Problems in Nucl. Phys., Potsdam. Rossendorf, Report ZfK-347, 1977, p. 138.
33. Барит И. Я. и др.—“ЭЧАЯ”, 1977, т. 8, вып. 6, с. 1290.
34. Бадалян А. М. и др.—“Ядерная физика”, 1967, т. 6, с. 473.
35. Fabre de la Ripelle M. Report IPNO/TH 157, Institut de Physique Nucléaire, Orsay, 1969; “Ядерная физика”, 1971, т. 13, с. 495.
36. Galbraith H. W.—“Phys. Lett. B”, 1971, v. 37, p. 1.
37. Demin V. F., Pokrovsky Yu. E., Efros V. D.—“Phys. Lett. B”, 1973, v. 44, p. 227.
38. Akaishi Y., Nagata S.—“Progr. Theoret. Phys.”, 1972, v. 48, p. 133.
39. Akaishi Y. e.a. In: Few Particle Problems in the Nuclear Interaction. Amsterdam, North-Holland, 1972, p. 353.
40. Sakai M. e.a.—“Progr. Theoret. Phys.”, 1974, v. 51, p. 155; “Progr. Theoret. Phys. Suppl.”, 1974, N. 56, p. 32.
41. Akaishi Y. In: Few Body Dynamics. Amsterdam, North-Holland, 1976, p. 160; Sakai M. e.a. In: Proc. Internat. Conf. on Nuclear Structure — Contributed Papers. Tokyo, 1977. Int. Academic Printing Co., Japan, 1977, p. 36.
42. Zabolitzky J. G.—“Nucl. Phys. A”, 1974, v. 228, p. 285; Czechoslovak J. “Phys. B”, 1975, v. 25, p. 264.
43. Kümmel H., Lüthmann K. H., Zabolitzky J. G., “Phys. Repts C”, 1978, v. 36, p. 1.
44. Woodring J. W. e.a.—“Nucl. Phys. A”, 1974, v. 228, p. 345.
45. Halderson D. W., Goldhammer P.—“Phys. Rev. C”, 1977, v. 15, p. 394.
46. Bevelacqua J. J., Philpot R. J.—“Nucl. Phys. A”, 1977, v. 275, p. 301; Bevelacqua J. J. “Phys. Rev. C”, 1977, v. 16, p. 1782; 1978, v. 18, p. 591.
47. Ramavataram S., Rao C. L., Ramavataram K.—“Nucl. Phys. A”, 1974, v. 226, p. 173; 1975, v. 255, p. 109; 1976, v. 263, p. 131.
48. Szydlik P., Wernitz C.—“Phys. Rev. B”, 1965, v. 138, p. 866.
49. Reichstein I., Thompson D. R., Tang Y. C.—“Phys. Rev. C”, 1971, v. 3, p. 2139; Le Mare M., Brown R. E., Thompson D. R. Ibid., 1975, v. 12, p. 1140.
50. Пермяков В. П. и др.—“Ядерная физика”, 1971, т. 14, с. 576.
51. Hackenbroich H. H., Heiss P.—“Z. Phys.”, 1971, Bd 242, S. 352; Heiss P., Hackenbroich H. H.—“Nucl. Phys. A”, 1972, v. 182, p. 522; 1973, v. 202, p. 353.
52. Weinberg S.—“Phys. Rev. B”, 1964, v. 133, p. 232.
53. Van Winter C.—“Kgl. danske vid. selskab. Mat.-fys. medd.”, 1964—1965, v. 2, N 8, 10.
54. Rosenberg L.—“Phys. Rev. B”, 1965, v. 140, p. 217.
55. Alessandrini V. A.—“J. Math. Phys.”, 1966, v. 7, p. 215.
56. Mitra A. N. e.a.—“Phys. Rev. B”, 1965, v. 140, p. 1336.
57. Takahashi Y., Mishima N.—“Progr. Theoret. Phys.”, 1965, v. 34, p. 498; Mishima N., Takahashi Y. Ibid., 1966, v. 35, p. 440.
58. Weyers J.—“Ann. Soc. Sci. Bruxelles”, Ser. 1, 1965, v. 79, p. 76; “Phys. Rev.”, 1966, v. 145, p. 1236; v. 151, p. 1159.
59. Sasaki T.—“Phys. Rev.”, 1967, v. 158, p. 1249.
60. Комаров В. В., Попова А. М.—“ЖЭТФ”, 1964, т. 46, с. 2112; “Nucl. Phys. A”, 1967, v. 90, p. 635; “ЭЧАЯ”, 1974, т. 5, с. 1075.
61. Якубовский О. А.—“Ядерная физика”, 1967, т. 5, с. 1342.
62. Grassberger P., Sandhas W.—“Nucl. Phys. B”, 1967, v. 2, p. 481.

63. Omnes R.—“Phys. Rev.”, 1968, v. 165, p. 1265.
64. Newton R. G.—“J. Math. Phys.”, 1967, v. 8, p. 851.
65. Avishai Y.—“Nucl. Phys. A”, 1970, v. 150, p. 379; 1971, v. 161, p. 621.
66. Sloan I. H.—“Phys. Rev. C”, 1972, v. 6, p. 1945.
67. Sasaki T.—“Phys. Rev. C”, 1976, v. 13, p. 1801.
68. Sugar R., Blankenbecler R.—“Phys. Rev. B”, 1964, v. 136, p. 472.
69. Фаддеев Л. Д. В кн.: Труды проблемного симпозиума по физике ядра. Тбилиси, 1967. М., ИТЭФ, 1967, т. 1, с. 43; In: Three Body Problem in Nuclear and Particle Physics. Amsterdam, North-Holland, 1970, p. 154.
70. Фаддеев Л. Д. Метод интегральных уравнений в теории рассеяния для трех и более частиц. Лекции. М., МИФИ, 1971.
71. Kharchenko V. F., Kuzmichev V. E.—“Nucl. Phys. A”, 1972, v. 183, p. 606; v. 196, p. 636.
72. Federbush P.—“Phys. Rev.”, 1966, v. 148, p. 1551.
73. Noble J. V.—Ibid., 1966, v. 148, p. 1553.
74. Newton R. G.—Ibid., 1967, v. 153, p. 1502.
75. Kazaks P. A.—“Nucl. Phys. A”, 1969, v. 138, p. 347.
76. Якубовский О. А. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-матем. наук. 1969.
77. Народецкий И. М., Якубовский О. А.—“Ядерная физика”, 1971, т. 14, с. 315.
78. Alt E. O., Grassberger P., Sandhas W. In: Few Particle Problems in the Nuclear Interaction. Amsterdam, North-Holland, 1972, p. 299; JINR, E4-6688, Dubna, 1972.
79. Харченко В. Ф., Шадчин С. А.—“Ядерная физика”, 1975, т. 22, с. 632; “Czechoslovak J. Phys. B”, 1977, v. 27, p. 255; Preprint ITP-74-107E. Kiev, 1974.
80. Народецкий И. М., Грач Е. Л.—“Ядерная физика”, 1973, т. 18, с. 667.
81. Kharchenko V. F., Levashev V. P. Preprint ITP-75-137E. Kiev, 1975; “Ядерная физика”, 1977, т. 26, с. 704.
82. Харченко В. Ф., Зепалова М. Л. Препринт ИТФ-79-19Р, Киев, 1979.
83. Харченко В. Ф., Кузьмичев В. Е.—“Ядерная физика”, 1973, т. 17, с. 975; Preprint ITP-72-162E. Kiev, 1972.
84. Kharchenko V. F., Kuzmichev V. E.—“Czechoslovak J. Phys. B”, 1974, v. 24, p. 1071.
85. Kharchenko V. F., Kuzmichev V. E., Shadchin S. A.—“Nucl. Phys. A”, 1974, v. 226, p. 71; Препринт ИТФ-73-96Р. Киев, 1973.
86. Kharchenko V. F., Kuzmichev V. E.—“Phys. Lett. B”, 1972, v. 42, p. 328; Kharchenko V. F. In: Few Particle Problems in the Nuclear Interaction. Amsterdam, North-Holland, 1972, p. 663.
87. Narodetskii I. M., Galpern E. S., Lyakhovitskii V. N.—“Phys. Lett. B”, 1973, v. 46, p. 51; Narodetskii I. M. “Nucl. Phys. A”, 1974, v. 221, p. 191.
88. Alt E. O., Grassberger P., Sandhas W.—“Phys. Rev. C”, 1970, v. 1, p. 85.
89. Tjon J. A.—“Phys. Lett. B”, 1975, v. 56, p. 217.
90. Kharchenko V. F., Levashev V. P.—Ibid., 1976, v. 60, p. 317; “Докл. АН УССР”, 1976, № 11, с. 1025; Preprint ITP-75-107E. Kiev, 1975.
91. Харченко В. Ф., Левашев В. П. Препринт ИТФ-77-85Р. Киев, 1977; Kharchenko V. F. In: Proc. of the 1977 European Symp. on Few-Particle Problems in Nucl. Phys., Potsdam, 1977. Rossendorf, Report ZfK-347, 1977, p. 105.
92. Sofianos S., Fiedeldey H., McGurk N. J.—“Phys. Lett. B”, 1977, v. 68, p. 117; “Nucl. Phys. A”, 1978, v. 294, p. 49.
93. Tjon J. A. “Phys. Lett. B”, 1976, v. 63, p. 391.
94. Sawicki M., Namyslowski J. M.—“Phys. Lett. B”, 1976, v. 60, p. 331; Sawicki M. Ibid., 1977, v. 68, p. 43; Preprint, Universität Bonn, Institut für Theoretische Kernphysik, 1977; In: Proc. of the 1977 European Symp. on Few-Particle Problems in Nucl. Phys., Potsdam, 1977; Report ZfK-347, Rossendorf, 1977, p. 136.

95. Барышников А. Г., Блохинцев Л. Д., Народецкий И. М.—“Ядерная физика”, 1977, т. 25, с. 1167.
96. Fonseca A. C., Shanley P. E.—“Phys. Rev. D”, 1976, v. 13, p. 2255; “Phys. Rev. C”, 1976, v. 14, p. 1343.
97. Tjon J. A. “Phys. Rev. Lett.”, 1978, v. 40, p. 1239.
98. Baryshnikov A. G., Blokhintsev L. D., Narodetsky I. M.—“Nucl. Phys. A”, 1976, v. 272, p. 327.
99. Gibson V. F., Lehman D. R.—“Phys. Rev. C”, 1976, v. 14, p. 685; 1977, v. 15, p. 2257.
100. Kröger H., Sandhas W.—“Phys. Rev. Lett.”, 1978, v. 40, p. 834.
101. Kuzmichev V. E. Preprint ITP-74-30E. Kiev, 1974.
102. Roy — Choudhury H., Cautam V. P., Sural D. R.—“Phys. Rev. C”, 1977, v. 16, p. 465.
103. Балдин А. М. и др. Кинематика ядерных реакций. М., Атомиздат, 1968.
104. Хамермеш М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. Пер. с англ. М., “Мир”, 1966.
105. Харченко В. Ф.—“УФЖ”, 1962, т. 7, с. 573, 582; Sitenko A. G., Kharchenko V. F.—“Nucl. Phys.”, 1963, v. 49, p. 15.
106. Bateman H.—“Proc. Roy. Soc. A”, 1922, v. 100, p. 441.
107. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М., Физматгиз, 1962, с. 170.
108. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. Пер. с нем. М., Гостехтеориздат, 1933.
109. Weinberg S.—“Phys. Rev.”, 1963, v. 131, p. 440.
110. Faddeev L. D. In: Proc. Fifth Internat. Conf. on The Physics of Electronic and Atomic Collisions. Leningrad, 1967. Colorado, University of Colorado, 1968, p. 145.
111. Ball J. S., Wong D. Y.—“Phys. Rev.”, 1968, v. 169, p. 1362.
112. Sitenko A. G., Kharchenko V. F., Petrov N. M.—“Phys. Lett. B”, 1968, v. 28, p. 308.
113. Беляев В. Б., Вжеционко Е. Препринт ОИЯИ Р4-4144. Дубна, 1968; Ахмадходжаев Б., Беляев В. Б., Вжеционко Е. “Письма в ЖЭТФ”, 1969, т. 9, с. 692; “Ядерная физика”, 1970, т. 11, с. 1016; Препринт ОИЯИ Р4-4986. Дубна, 1970; Беляев В. Б., Вжеционко Е., Зубарев А. Л.—“Ядерная физика”, 1970, т. 12, с. 923; Ахмадходжаев Б., Беляев В. Б., Зубарев А. Л. Препринт ОИЯИ Р4-5318. Дубна, 1970.
114. Kharchenko V. F., Petrov N. M., Kuzmichev V. E.—“Phys. Lett. B”, 1970, v. 32, p. 19; Kharchenko V. F., Storozhenko S. A., Kuzmichev V. E. “Nucl. Phys. A”, 1972, v. 188, p. 609.
115. Oryu S.—“Progr. Theoret. Phys.”, 1974, v. 52, p. 550.
116. Гальперн Е. С., Ляховицкий В. Н., Народецкий И. М.—“Ядерная физика”, 1972, т. 16, с. 707.
117. Gibson V. F., Lehman D. R.—“Phys. Rev. C”, 1978, v. 18, p. 1042.
118. Reid R. V.—“Ann. Phys.” 1968, v. 50, p. 411.
119. Блохинцев Л. Д., Борбей И., Долинский Э. И.—“ЭЧАЯ”, 1977, т. 8, вып. 6, с. 1189.
120. Mitra A. N. Report FUPH-R-87. The Flinders University of South Australia, 1973.
121. Yamaguchi Y., Yamaguchi Y.—“Phys. Rev.”, 1954, v. 95, p. 1635.
122. Kharchenko V. F., Petrov N. M., Storozhenko S. A.—“Nucl. Phys. A”, 1968, v. 106, p. 464.
123. Eikemeier H., Hackenbroich H. H.—“Nucl. Phys. A”, 1971, v. 169, p. 407.
124. Gogny D., Pires P., De Tourreil R.—“Phys. Lett. B”, 1970, v. 32, p. 591.
125. Бурсак А. В. и др.—“Ядерная физика”, 1978, т. 28, с. 891.
126. Akaishi Y. e.a.—“Progr. Theoret. Phys.”, 1974, v. 51, p. 134; “Progr. Theoret. Phys. Suppl.”, 1974, N. 56, p. 6.
127. Hamada T., Johnston I. D.—“Nucl. Phys.”, 1962, v. 34, p. 382.
128. Tamagaki R.—“Progr. Theoret. Phys.”, 1968, v. 39, p. 91.

129. De Tourreil R., Sprung D.W.L. — "Nucl. Phys. A", 1973, v. 201, p. 193.
130. Laverne A., Gignoux C. — "Nucl. Phys. A", 1973, v. 203, p. 597.
131. Gari M., Nyuga H., Zabolitzky J. G. — "Nucl. Phys. A", 1976, v. 271, p. 365.
132. Borysowicz J., Riska D. O. — "Nucl. Phys. A", 1975, v. 254, p. 301; Riska D. O., Radomski M. Ibid., 1976, v. 274, p. 428; "Phys. Rev. C", 1977, v. 16, p. 2105.
133. Харченко В. Ф., Кузьмичев В. Е. — "Ядерная физика", 1974, т. 20, с. 334.
134. Donaldson R. E., Bartolini W., Otsuki H. — "Phys. Rev. C", 1972, v. 5, p. 1952.
135. Los Alamos Physics and Cryogenics Groups. — "Nucl. Phys.", 1959, v. 12, p. 291.
136. Вертебный В. П. и др. — "Изв. АН СССР. Сер. физ.", 1967, т. 31, с. 349.
137. Кирилюк А. Л. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-матем. наук. Киев, Институт ядерных исследований АН УССР, 1972.
138. Shirato S., Suda Y., Tsuruta S. — "Nucl. Phys. A", 1976, v. 267, p. 157.
139. Koester L., Ungerer H. — "Z. Phys. B", 1968, Bd 219, S. 300; Dilg W., Koester L., Nistler W. — "Phys. Lett. B", 1971, v. 36, p. 208.
140. Als-Nielsen J., Dietrich O. — "Phys. Rev. B", 1964, v. 133, p. 925.
141. Sears V. F., Khanna F. C. — "Phys. Lett. B", 1975, v. 56, p. 1.
142. Kaiser H. e.a. — Ibid., 1977, v. 71, p. 321.
143. Алфименков В. П. и др. — "Ядерная физика", 1977, т. 25, с. 1145.
144. Балдин А. М. — Там же, 1965, т. 2, с. 211.
145. Сергеев В. А. — "Изв. АН СССР. Сер. физ.", 1968, т. 32, с. 312; Барит И. Я., Сергеев В. А. "Тр. ФИАН", 1969, т. 44, с. 3.
146. Дубовой Э. И. — "Ядерная физика", 1974, т. 20, с. 900.
147. Bollinger L. M., Specht J. R., Thomas G. E. — "Bull. Amer. Phys. Soc.", 1973, v. 18, p. 591.
148. Бергман А. А., Шапиро Ф. Л. — "ЖЭТФ", 1961, т. 40, с. 1270.
149. Passell L., Shermer R. I. — "Phys. Rev.", 1966, v. 150, p. 146.
150. Kitchens T. A. e.a. — "Phys. Rev. Lett.", 1974, v. 32, p. 791.
151. Sköld K. e.a. — Ibid., 1976, v. 37, p. 842.
152. Kharchenko V. F., Levashev V. P. Preprint ITP-78-142E. Kiev, 1978.
153. Tombrello T. A. — "Phys. Rev. B", 1965, v. 138, p. 40; 1966, v. 143, p. 772.
154. Morgow L. W., Haerberli W. — "Nucl. Phys. A", 1969, v. 126, p. 225.
155. Заикин Д. А., Сергеев В. А. — "Изв. АН СССР. Сер. физ.", 1966, т. 30, с. 148.
156. Seagrave J. D., Cranberg L., Simmons J. E. — "Phys. Rev.", 1960, v. 119, p. 1981; Seagrave J. D. In: Nuclear Forces and the Few-Nucleon Problem. London, Pergamon Press, 1959.
157. Perne R., Sandhas W. — "Phys. Rev. Lett.", 1977, v. 39, p. 788.